Magnetisches Moment im Magnetfeld

1 Ziel und Prinzip des Versuchs

Bei diesem Versuch wird das *Drehmoment* auf eine stromdurchflossene Leiterschleife, das durch die *Lorentzkraft* auf die bewegten Ladungen in einem näherungsweise homogenen Magnetfeld zustande kommt, untersucht. Dabei werden die Abhängigkeit des Drehmoments von der Größe der Leiterschleife, der Zahl der Windungen, der Stromstärke des die Leiterschleife durchfließenden Stromes, der Ausrichtung der Leiterschleife relativ zum Magnetfeld sowie der Stärke des Magnetfeldes untersucht. Der Begriff des *magnetischen Moments* wird eingeführt.

In der Auswertung wird eine elementare Fehlerrechnung durchgeführt, da Standardabweichungen der Messgrößen angegeben werden sollen. Außerdem wird gezeigt, wie man unter der Annahme einer Potenzgesetz-Abhängigkeit einer Größe von einer anderen den Exponenten durch eine doppelt-logarithmische Auftragung ermittelt.

Als Anwendung wird ein Modell-Elektromotor untersucht. Dabei wird ohne quantitative Messungen das physikalische Prinzip hinter dem Elektromotor veranschaulicht.

2 Theorie

2.1 Lorentzkraft

Die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ auf eine elektrische Ladung q bzw. der Elektronenladung $q = -e$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem magnetischen Feld $\vec{B}$ ist gegeben durch

$$\vec{F_L} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad (1)$$

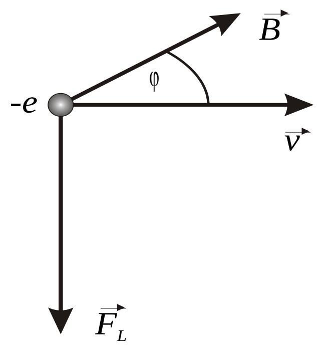


Abb. 1: Lorentzkraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld (Linke-Hand-Regel).

Die Kraft ist also proportional zur Ladung, zur Geschwindigkeit und zum Magnetfeld. Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{B}$ ergibt einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{B}$ steht (siehe Abbildung 1). Daher erfahren die Ladungen eine Kraft senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung. Freie Elektronen in einem homogenen Magnetfeld etwa bewegen sich unter dem Einfluss der Lorentzkraft auf Kreisbahnen. Der Betrag der Lorentzkraft ist gegeben durch

$$F_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\varphi \; = q \cdot v \cdot B \text{ falls } \varphi = 90° \qquad (2)$$

wobei der Winkel φ von $\vec{v}$ und $\vec{B}$ eingeschlossene Winkel ist.

2.2 Kraft auf einen geraden Leiter

Ein elektrischer Strom in einem Leiter lässt sich mikroskopisch so verstehen, dass elektrische Ladungen (Elektronen, Ladung $q = -e$) den Leiter mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ entlang fließen. Dabei ist der Zusammenhang von Stromstärke I und Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Draht mit Querschnitt A und Ladungsträgerdichte n gegeben durch

$$I = -n \cdot e \cdot \mathrm{v} \cdot A \qquad (3)$$

Hier ist nur wichtig, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Stromstärke und Geschwindigkeit der Ladungsträger besteht. Bringt man einen stromdurchflossenen Leiter in ein Magnetfeld, so wirkt die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ auf die bewegten Ladungen im Innern des Leiters (siehe Abbildung 2). Dies führt dazu, dass auf den gesamten Leiter eine Kraft

$$\vec{F} = I \cdot \vec{s} \times \vec{B} \qquad (4)$$

wirkt. Hier ist $\vec{s}$ die gerichtete Länge des Leiters. Die Kraft $\vec{F}$ steht also senkrecht auf Leiter und Magnetfeld $\vec{B}$ und verschwindet, falls der Strom parallel zum Magnetfeld fließt.

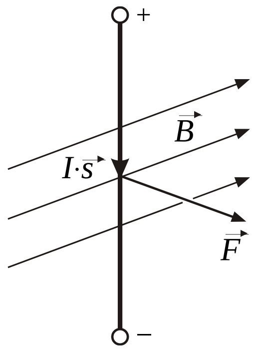


Abb. 2: Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

2.3 Drehmoment auf eine Leiterschleife

Bevor wir zu einer allgemeinen Leiterschleife übergehen betrachten wir den einfacheren Fall einer rechteckigen Leiterschleife, die drehbar so gelagert ist, dass ihre Achse senkrecht zum Magnetfeld verläuft (siehe Abbildung 3).

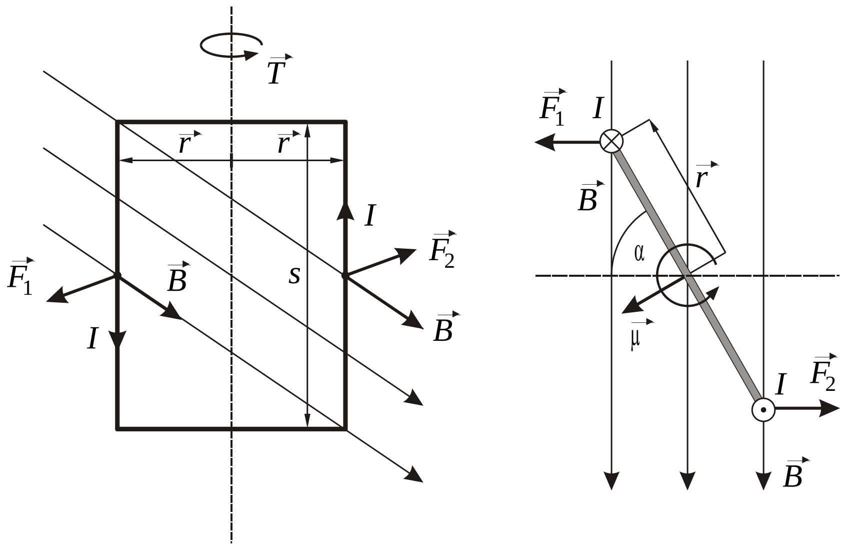


Abb. 3: Stromdurchflossene Leiterschleife im Magnetfeld. Das Kräftepaar $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ verursacht das Drehmoment $\vec{T}$.

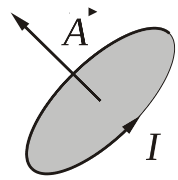
Gedanklich lässt sich die Leiterschleife in vier Teile unterteilen, auf die gemäß Gleichung (4) jeweils eine Kraft wirkt. Die Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ stehen senkrecht auf der Drehachse und bilden ein Kräftepaar, das über den Hebelarm $\vec{r}$ ein Drehmoment ausübt, für das gilt

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{5}$$

Gleichung (5) beschreibt den rein mechanischen Vorgang einer Rotation. Für die antreibende Kraft setzen wir nun die Lorentzkraft ein, dies ist in unserer Beschreibung die Schnittstelle für die Umsetzung von elektromagnetischer Energie in mechanische. Für den Betrag des Drehmoment gilt

$$\begin{aligned} T &= r \cdot F \cdot \sin\alpha \quad \text{mit} \quad F = 2 \cdot s \cdot \mathrm{I} \cdot B \qquad \text{(Gleichung (2))} \\ &= 2 \cdot r \cdot \mathrm{s} \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha \\ &= A \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha \qquad (6) \end{aligned}$$

$A = 2 \cdot r \cdot \mathrm{s}$ ist die Fläche der Leiterschleife und α der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{r}$ ist. Gleichung (6) besagt, dass bei gegebenem Magnetfeld B das Drehmoment auf nur von der Fläche A und vom Strom I abhängt. Dieses Ergebnis kann – wie im Anhang erläutert - auf Leiterschleifen beliebiger Form übertragen werden. Das Produkt aus A und I heißt das *magnetische Moment*



$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \tag{6}$$

Hier ist $\vec{A}$ ein Vektor, der den Betrag A des gewöhnlichen Flächeninhalts und die Richtung der Flächennormalen hat. Damit ist das Drehmoment eines magnetischen Moments in einem Magnetfeld allgemein gegeben durch

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{7}$$

Diese Gleichung beschreibt ganz allgemein die mechanische Kraftwirkung auf eine beliebige, stromdurchflossene Leiterschleife in einem Magnetfeld. Das magnetische Moment einer kreisförmigen Leiterschleife mit N Windungen und Radius r, die von einem Strom I_{LS} durchflossen wird, ist gegeben durch

$$\mu = N \cdot \pi \cdot r^2 \cdot I_{LS} \tag{8}$$

Für das Drehmoment auf eine kreisförmige Leiterschleife folgt

$$T = N \cdot \pi \cdot r^2 \cdot I_{LS} \cdot \sin\alpha \tag{9}$$

Das Magnetfeld B wird durch zwei stromdurchflossene Helmholtzspulen erzeugt, und es gilt $B = c \cdot I_{\mathrm{HH}}$, wobei I_{HH} der Strom im Helmholtz-Spulenpaar und c ein Proportionalitätsfaktor ist. Damit lautet die im Versuch zu untersuchende Gleichung

$$T = c \cdot I_{HH} \cdot N \cdot \pi \cdot r^2 \cdot I_{LS} \cdot \sin\alpha \tag{10}$$

Den Proportionalitätsfaktor müssen wir nicht genauer kennen, da wir keine quantitative Bestimmung des Drehmoments durchführen werden. Stattdessen sind wir an den Potenzen der einzelnen Variablen interessiert.

3 Aufbau und Versuchsdurchführung

Im Aufbau befinden sich zwei Stromkreise, einer für die Helmholtzspule und einer für die Leiterschleife. In beiden wir ein Strommessgerät in Reihe geschaltet um die Stromstärken messen zu können. Das Magnetfeld wird durch ein Helmholtz-Spulenpaar erzeugt. Das Magnetfeld ist in der Mitte zwischen den einzelnen Spulen weitgehend homogen. Die Windungsrichtung der Spulen ist nicht zu erkennen, sodass es dazu kommen kann, dass sie entgegengesetzt gepolt angeschlossen werden. Sollte im Versuch jeglicher Effekt ausbleiben ist dies passiert und es müssen die Stromanschlüsse an den Spulen vertauscht werden. Beide Helmholtzspulen sind in Reihe im selben Stromkreis. Zwischen den Spulen wird die drehbare Leiterschleife eingebracht die mit einem Drehkraftmesser verbunden ist. Die auf die Leiterschleife ausgeübte Kraft wird wie folgt ermittelt:

- Ausschalten des Helmholtzspulenstroms/Leiterschleifenstroms, sodass die Leiterschleife keinem Drehmoment ausgesetzt ist
- Kalibrierung: Leiterschleife an der Grobeinstellung in die Null-Stellung bringen
- Drehkraftmesser so einstellen, dass der obere Leiterschleifenbügel mit den darunter angebrachten Markierungen deckungsgleich ist. Das Überprüfen der Deckungsgleichheit sollte während einer Messreihe immer von derselben Person übernommen werden, um Ablesefehler (Parallaxe) konstant zu halten. Der Wert am Drehkraftmesser wird notiert.
- Einschalten des Helmholtzspulenstroms/Leiterschleifenstroms. Danach lenkt sich die Leiterschleife entsprechend der wirkenden Kraft aus.
- Der Drehkraftmesser muss nun für eine korrekte Messung wieder so zurückgestellt werden, dass der obere Leiterschleifenbügel mit den darunter angebrachten Markierungen deckungsgleich ist.

Es sollen die Abhängigkeiten von den folgenden Größen ermittelt werden (5 Messreihen):

- Stärke des Magnetfeldes (bzw. Strom I_{HH} durch die Helmholtzspulen 0 – 4A, I_{HH} > 3A nur kurzfristig anlegen))
- Strom I_{LS} durch die Leiterschleife (0-3 A, I_{LS} > 3A nur für wenige Sekunden. nach ablesen des Kraftwertes den Strom sofort wieder ausschalten)

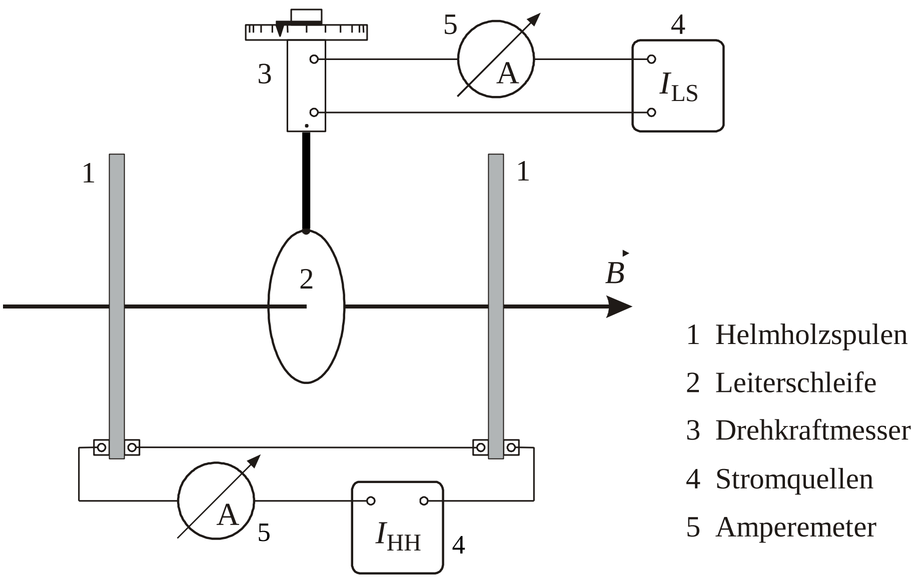


Abb. 4: Aufbau des Versuchs

- Radius r der Leiterschleife (klein, mittel, groß)
- Anzahl N der Windungen der Leiterschleife (N = 1,2,3)
- Winkel α zwischen Flächennormale der Leiterschleife und Magnetfeld(0 bis 90°).

Welche Abhängigkeiten sind nach der der vorgestellten Theorie zu erwarten? Zur Überprüfung der Beziehung (11) wird jeweils einer dieser Parameter verändert, während die anderen konstant gehalten werden.

Für eine Messreihe wird jeweils eine Größe variiert und alle anderen konstant gehalten. Für die konstanten Parameter gilt Folgendes zu beachten:

- Bei Dauerbetrieb darf der Helmholtz-Spulenstrom nicht über 3 A liegen
- Die Stromzuführungsdrähte am Spulenträger hängen (mechanisch) spannungsfrei
- Am Torsionskraftmesser ist der Nullpunkt vor der Messung zu kontrollieren und gegebenenfalls zu justieren
- Bei der Drehmomentmessung in Abhängigkeit vom Helmholtz-Spulenstrom treten sehr kleine Drehmomente auf. Es wird daher empfohlen, die Leiterschleife mit drei Windungen zu benutzen. Mit den Einkerbungen im Spulenträger ist der Winkel in Schritten von 15° zu verstellen.
- Wenn der Winkel nicht variiert wird, sollte α = 90° sein.

Pro Versuchsreihe soll das Drehmoment für ca. 6 verschiedene Einstellungen des entsprechenden Parameters gemessen werden.

4 Auswertung des Versuchs

Bestimmt werden sollen die Beziehungen zwischen Drehmoment T und den verschiedenen Messgrößen $x, x \in \{I_{HH}, I_{LS}, r, N, \sin\alpha\}$.

Man nehme eine Potenzgesetz-Abhängigkeit

$$T = a \cdot x^n \qquad (\rightarrow \log T = n \cdot \log x + \log a) \tag{11}$$

an und bestimme die entsprechenden Exponenten n. Eine lineare Abhängigkeit entspricht $n = 1$. Hierzu werden die Daten doppelt-logarithmisch aufgetragen. Dann entspricht eine Gerade durch die Messpunkte einem Potenzgesetz und der Exponent n ist durch die Steigung der Gerade gegeben. Vergleiche die experimentell gefundenen Exponenten mit den aus der Theorie erwarteten.

Die Fehler für die ermittelten Exponenten werden aus einer linearen Regression bestimmt. Das Verfahren der linearen Regression beruht darauf, dass man durch einen Satz von Messwerten (x_i,y_i) eine Gerade

$$y = a \cdot x + b \tag{12}$$

so legt, dass die Summe der Abstandsquadrate der Messpunktete von der zu bestimmenden Geraden minimal wird. Ein Maß für die Güte der linearen Regression ist der Korrelationskoeffzient r mit $|r| \leq 1$. Ein Korrelationskoeffzient $r = 1$ bedeutet, dass die Daten genau auf einer Geraden liegen, während für $r = 0$ die Daten nicht durch eine Gerade beschrieben werden können. Im vorliegenden Fall sind die Variablen (x_i,y_i) die Logarithmen der Messwerte, und es werden Geraden in der doppelt-logarithmischen Darstellung mit dem Exponenten als Steigungsfaktor erwartet.

Aus der Bedingung, dass die Summe der Abstandsquadrate minimiert werden soll, lassen sich durch einige Rechnungen die Parameter der Geraden sowie der Korrelationskoeffizient bestimmen. Wir geben hier nur das Ergebnis der Rechnung an und definieren dazu zunächst einige Hilfsgrößen:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^2, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^2, \quad \bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\, y_i \qquad (14)$$

wobei m jeweils die Zahl der Messwerte ist. Damit ergibt sich für den Ordinatenabschnitt *b* und Steigung *a*

$$a = \frac{\bar{u} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{X} - \bar{x}^2} \qquad \text{und} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad (13)$$

Der Korrelationskoeffizient ist definiert durch

$$r^2 = \frac{(\bar{u} - \bar{x}\cdot\bar{y})^2}{(\bar{X} - \bar{x}^2)\cdot(\bar{Y} - \bar{y}^2)} \qquad (14)$$

Diskutieren Sie bitte die gefundenen Ergebnisse in Verbindung mit der Theorie unter Berücksichtigung der auftretenden statistischen und systematischen Fehler. Wo treten die größten Fehler auf und wie ließe sich das Experiment verbessern?

5 Zum Elektromotor

In diesem letzten Versuchsteil sollen keine quantitativen Messungen durchgeführt werden. Stattdessen wird eine Anwendung der untersuchten Physik erkundet (der Elektromotor).

Stellt man sich im vorliegenden Versuch die am Torsionskraftmesser befestigte Leiterschleife durch eine frei um ihre Achse drehbare Leiterschleife ersetzt vor, so wird diese versuchen, in ihre Nullstellung zu schwingen. Dabei kommt es zu einem Überschwingen. Polt man an diesem Punkt den Strom durch die Leiterschleife (oder das äußere Magnetfeld) um, so ändert sich die Richtung des Drehmoments und die Leiterschleife wird in die neue, um 180° versetzte Null-Lage gedreht. Damit hat man einen rudimentären Elektromotor.

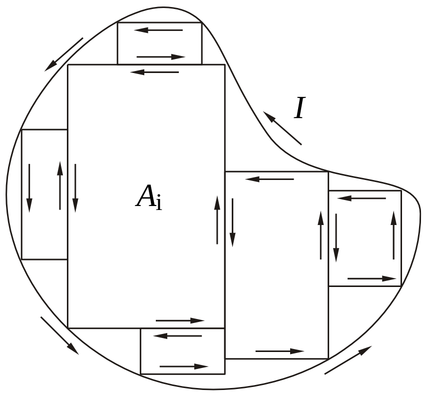


Abb. 5: Magnetisches Moment einer beliebigen Leiterschleife

Untersuchen und erklären Sie das vorliegende Modell eines Elektromotors. Hier wird das Umpolen nicht von Hand, sondern durch einen so genannten Kommutator übernommen, der dafür sorgt, dass an den richtigen Stellen die Stromrichtung des die Spule durchfließenden Stromes geändert wird.

6 Anhang: Magnetisches Moment einer allgemeinen Leiterschleife

In Abschnitt 2.3 ist das magnetische Moment einer rechteckigen Leiterschleife der Fläche A diskutiert worden. Dieses ist gegeben durch

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \tag{15}$$

wenn die Leiterschleife von einem Strom der Stärke I durchflossen wird. Das magnetische Moment einer beliebigen Leiterschleife lässt sich aus den magnetischen Momenten von rechteckigen Leiterschleifen zusammensetzen (siehe Abbildung 5). Jede ebene Leiterschleife lässt sich in der dargestellten Weise durch rechteckige Leiterschleifen ausfüllen. Die jeweils antiparallel verlaufenden inneren Ströme heben sich gerade auf, so dass dies wirklich ein der ursprünglichen Leiterschleife äquivalentes Bild ist. Nach dem Superpositionsprinzip kann man nun die Drehmomente auf die Teil-Leiterschleifen addieren und damit ergibt sich das magnetische Moment der großen Leiterschleife zu

$$\vec{\mu} = \sum_i \mu_i = I \cdot \sum_i \overrightarrow{A_i} = I \cdot \vec{A} \tag{16}$$

Diese Herleitung ist eher qualitativ gehalten. Man kann aber auch etwa über eine formale Integration das magnetische Moment einer allgemeinen Leiterschleife aus den Kräften auf infinitesimale Leiterstücke herleiten. Hierzu sei auf die einschlägigen elementaren Lehrbücher verwiesen.

7 Vorbereitung zur Versuchsdurchführung

Vor der Versuchsdurchführung erfolgt eine Befragung durch den Versuchsbetreuer. Um sicherzustellen, dass Ihr wisst was Ihr tut und dieses auch versteht, werden euch Verständnisfragen gestellt. Diese können alle durch aufmerksames Studieren dieser Versuchsanleitung beantwortet werden. Außerdem solltet Ihr auswendig wissen, wie die Versuchsdurchführung erfolgt, d.h.

Ihr solltet bei der Vorbereitung den Versuch im Geiste durchspielen. Falls Ihr diese Fragen nicht beantworten könnt, wird Euch ein *N.V.* (nicht vorbereitet) erteilt. Hier exemplarisch einige (aber nicht alle) mögliche Fragen:

- Was ist die zu messende Größe?
- Wovon hängt diese ab?
- Wie ermittelt Ihr diese Abhängigkeiten?
- Wie ist der Versuchsaufbau?
- Wie kommt der Effekt zustande?
- Bei welcher Anwendung wird dieser Effekt genutzt?
- Erkläre die Wirkungsweise der Anwendung!
- Wozu ist die Auswertung in der doppellogarithmischen Darstellung gut?
- Macht es bei dieser Darstellung einen Unterschied, ob man gegen die gemessene Kraft oder das Drehmoment aufträgt?
- Was ist bei welchem Parameter zu erwarten?
- Welchen Sachverhalt geben r und n wieder?