Mathematisches Pendel und Federpendel

1 Ziel

In zwei Versuchsteilen sollen die physikalischen Eigenschaften eines Pendels untersucht werden. Dazu soll zunächst durch Messung der Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels die Gravitationskonstante g bestimmt werden. Im zweiten Versuchsteil wird die Federkonstante D sowie die Masse m_F einer Feder bestimmt. Anschließend wird unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses die Erdbeschleunigung ermittelt und mit dem Wert aus dem ersten Teil des Versuchs sowie dem Literaturwert verglichen.

2 Theorie

2.1 Mathematisches Pendel

Eine Masse m hängt an einem Faden der Länge l und schwingt unter dem Einfluss der Schwerkraft mit der Schwingungsdauer T. Für die theoretische Beschreibung wird ein so genanntes *mathematisches Pendel* zugrunde gelegt, das gegenüber dem realen Pendel einige einschränkende Eigenschaften besitzt:

- masseloser Faden
- reibungslose Aufhängung des Fadens
- punktförmige Masse des Pendelkörpers (keine Luftreibung)

Um die Schwingung des Pendels zu untersuchen, stellen wir die Bewegungsgleichung der Masse m auf. Diese bewegt sich auf einem Kreisbogen vom Radius l. Die auf das Massestück wirkenden Kräfte sind die Gewichtskraft $G = mg$ und die Fadenspannung. Aus Abb. 1 entnehmen wir, dass die Tangentialkomponente der resultierenden Kraft

$$\left|\vec{F}_T\right| = -G \cdot \sin\phi = -m \cdot g \cdot \sin\phi \qquad (1)$$

ist. Sie ist die rücktreibende Kraft, die der Auslenkung der Masse entgegenwirkt. Die Gleichung für die Tangentialbewegung lautet

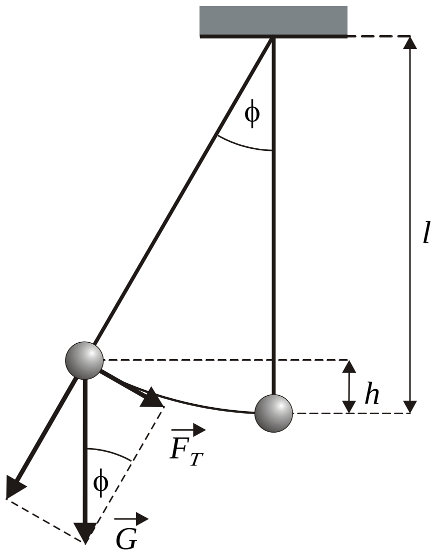

Abb. 1: Aufbau eines Fadenpendels.

$$\vec{F}_T = m \cdot \vec{a}_T\,. \qquad (2)$$

Die Tangentialbeschleunigung a_T hängt von der Winkelbeschleunigung α sowie vom Radius l ab und lässt sich schreiben als

$$a_T = l\alpha = l\frac{d^2\phi}{dt^2}\,. \tag{3}$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (2) und (3) erhält man die Gleichung für die Tangentialbewegung

$$ml\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\sin\phi$$

oder

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\,. \tag{4}$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist die Funktion $\phi(t)$, welche die Bewegung der Masse m beschreibt. Wenn der Winkel ϕ jedoch klein ist, was für kleine Schwingungsamplituden zutrifft, können wir für die Pendelbewegung $\sin\phi \approx \phi$ schreiben, wodurch sich Gleichung (4) vereinfacht:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\phi = 0\,. \tag{5}$$

Durch Einsetzen lässt sich zeigen, dass der harmonische Ansatz

$$\phi(t) = \phi_0 \sin\omega t \tag{6}$$

diese Differentialgleichung löst, wenn für das Quadrat der Kreisfrequenz $\omega^2 = g/l$ gilt. Für die Schwingungsdauer ergibt sich in 1. Näherung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{7}$$

Die Schwingungsdauer ist somit für kleine Auslenkungen unabhängig vom Auslenkwinkel. Berechnet man die Schwingungsdauer auch für größere Winkel, so erhält man in 2. Näherung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right). \tag{8}$$

In dieser 2. Näherung ist die Schwingungsdauer also eine Funktion des maximalen Auslenkwinkels ϕ_0 im Umkehrpunkt.

2.2 Vertikales Federpendel

Die Differentialgleichung für ein Federpendel, wie in Abb. 2 dargestellt, lässt sich analog zu (1)-(4) aus der Rückstellkraft

$$\vec{F}_R = -D\vec{x} \tag{9}$$

zu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx \tag{10}$$

herleiten.

Wenn man das Federpendel zur Zeit $t = 0$ um x_0 auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)\,, \tag{11}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\,. \tag{12}$$

Analog zu (7) ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\,. \tag{13}$$

Misst man die Periodendauer T als Funktion der Masse m so kann man hieraus die Federkonstante D bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse m belastet, so gilt:

$$mg = Dx \tag{14}$$

Da der Wert der Federkonstante D aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

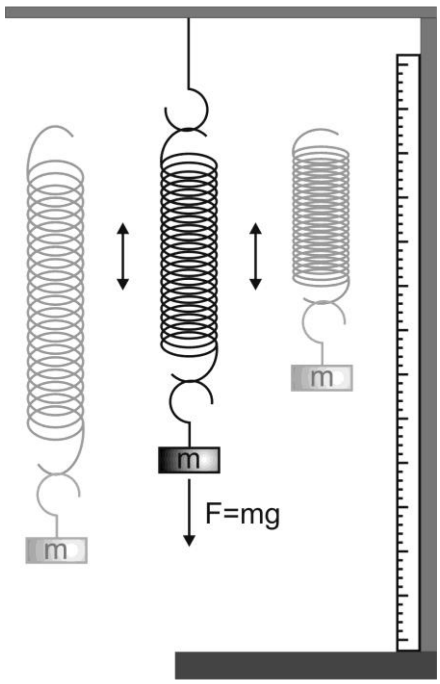

Abb. 2: Aufbau eines Federpendels.

3 Messung und Auswertung

3.1 Mathematisches Pendel

In nachfolgenden Versuchen soll die Schwingungsdauer T als Funktion des Auslenkwinkels ϕ_0 und der Fadenlänge l bestimmt werden.

3.1.1 Überprüfung des Aufbaus

Die elektronische Uhr mit Lichtschranke ist so einzustellen, dass sie die **volle** Schwingungsdauer T misst. Überprüfen Sie den Strahlengang der Fotodiode in Bezug auf die Ruhelage der Kugel. Der Faden des Pendels soll die Lichtschranke beim Durchgang unterbrechen (nicht die Kugel oder der Haltering). Bestimmen Sie die Fadenlänge und den Maximalfehler Δl unter Berücksichtigung des Kugelradius (R = 16 mm).

3.1.2 Messung der Schwingungsdauer als Funktion des Auslenkwinkels

Messen Sie die Schwingungsdauer T bei konstanter Fadenlänge als Funktion des Auslenkwinkels ϕ_0 über einen möglichst großen Winkelbereich. Mitteln Sie jeweils mehrmals über einige Schwingungen. Tragen Sie die Schwingungsdauer gegen den Auslenkwinkel und gegen den Ausdruck $\sin^2(\phi_0/2)$ auf. Bestimmen Sie die Regressionsgerade und bestätigen Sie durch Koeffizientenvergleich die 2. Näherung für die Schwingungsdauer. Hierzu darf der Literaturwert von g = 9,81m/s² benutzt werden.

3.1.3 Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Fadenlänge

Messen Sie die Schwingungsdauer T als Funktion der Fadenlänge l für einen kleineren Auslenkwinkel. Tragen Sie die Messergebnisse so auf, dass sich eine Gerade ergibt. Bestimmen Sie den Wert der Erdbeschleunigung g mit Abweichung σ_g aus der Steigung der Regressionsgerade und vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert g = 9,81 m/s^2.

3.2 Vertikales Federpendel

3.2.1 Bestimmung der Messmethode

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse, welche die ausgewählte Feder nicht überdehnt. Messen Sie dann je 3 mal 10 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen (Stoppuhr). Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalausschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 3 mal 10 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden Methoden.

3.2.2 Messung der Federkonstanten

Messen Sie nun die Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit unterschiedlichen Massen in mindestens fünf sinnvollen Schritten. Achten Sie darauf, die Feder nicht zu überdehnen! Für jede Masse werden 3 mal 10 Pendelschwingungen ausgemessen. Tragen Sie T^2 gegen die Masse auf und bestimmen Sie die Federkonstante D aus der Regressionsgeraden (mit Offset) und Gleichung (13).

3.2.3 Bestimmung der Federmasse

Die in 3.2.1 gemessene Gerade ist keine Ursprungsgerade. Dies liegt an der, bisher vernachlässigten Masse der Feder m_F, welche den Abszissenschnittpunkt um $-m_F/3$ verschiebt. Benutzen Sie nun die Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3} m_F}{D}} \tag{15}$$

anstelle von (12), um aus der Nullstelle der ermittelten Regressionsgeraden die Federmasse zu bestimmen. Wiegen Sie die verwendete Feder und notieren Sie den Maximalfehler, um die berechnete Masse vergleichen zu können.

3.2.4 Bestimmung der Erdbeschleunigung

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit unterschiedlichen Massen in mindestens fünf sinnvollen Schritten beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem Diagramm die Auslenkung des Federpendels x gegen die Masse aufgetragen. Die Gleichung (14), nach x umgestellt, ergibt eine Geradengleichung. Aus der Steigung der Regressionsgeraden und dem Ergebnis aus Versuchsteil 3.2.2 die Erdbeschleunigung bestimmt werden. Der ermittelte Wert ist mit dem Literaturwert sowie dem Wert aus Versuchsteil 3.1.3 zu vergleichen.