

Anhang zur Vorlesung „Laserkühlung“

Maxwells Gleichungen

E = elektrische Feldstärke

H = magnetische Feldstärke

D = dielektrische Verschiebung

B = magnetische Induktion

P = Polarisation

M = Magnetisierung

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$B = \mu_0 H + M$$

$S = E \times H$ Poynting-Vektor

$u = \frac{1}{2} (DE + BH)$ elektromagnetische Energiedichte

$\rho = \rho_w + \rho_p$ elektrische Ladungsdichte $\rho_p = -\nabla P$

$\eta = \eta_w + \eta_M$ magnetische Ladungsdichte $\eta_M = -\nabla M$

$j = j_w + j_p + j_M$ elektrische Stromdichte $j_p = \dot{P}$, $j_M = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times M$

$l = l_w + l_p + l_M$ magnetische Stromdichte $l_M = \dot{M}$, $l_p = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times P$

$$\nabla D = \rho_w$$

$$\nabla B = \eta_w$$

$$\nabla \times E = -\dot{B} - \ell_w$$

$$\nabla \times H = \dot{D} + j_w$$

$$\nabla E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla H = \frac{1}{\mu_0} \eta$$

$$\nabla \times D = -\frac{1}{c^2} \dot{H} - \epsilon_0 \ell$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2} \dot{E} + \mu_0 j$$

$$\nabla S + H\dot{B} + E\dot{D} + E j_w + H \ell_w = 0$$

Experiment: keine wahren magnetischen Ladungen oder Ströme

$$\eta_w = 0, \ell_w = 0$$

Strahlungsfelder in Nicht-Leitern $\rho_w = 0$, $j_w = 0$

$$E(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E(r) e^{-i\omega t} + E(r)^* e^{i\omega t} \right)$$

$$B(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(B(r) e^{-i\omega t} + B(r)^* e^{i\omega t} \right)$$

analog für D, H

Maxwell

$$\nabla \times E = i\omega B$$

$$\nabla \times H = -i\omega D$$

$$\nabla D = \nabla B = 0$$

Materie

$$P = \varepsilon_0 \chi E$$

\Rightarrow

$$D = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

$$M = \mu_0 \xi H$$

$$B = \mu H, \quad \mu = \mu_0 (1 + \xi)$$

P, M induziert
durch E, H

$\chi = \chi(E, \omega)$, $\xi = \xi(H, \omega)$ einheitenlose komplexe Tensoren

(elektrische und magnetische Suszeptibilität)

Klassische Optik

$$\xi(\mathbf{H}, \omega) = \xi^{(1)}(\omega)$$

$$\chi(\mathbf{E}, \omega) = \chi^{(1)}(\omega) + \sum_{v_1 \in \{1,2,3\}} \chi_{v_1}^{(2)}(\omega) \mathbf{E}_{v_1} + \sum_{v_1, v_2 \in \{1,2,3\}} \chi_{v_1, v_2}^{(3)}(\omega) \mathbf{E}_{v_1} \mathbf{E}_{v_2} + \dots$$

Lineare Optik

Nichtlineare Optik

Nichtlineare Optik

Kerr-Effekt

Vierwellenmischung

$\xi^{(1)}(\omega)$, $\chi^{(1)}(\omega)$, $\chi_{v_1}^{(2)}(\omega)$, $\chi_{v_1, v_2}^{(3)}(\omega)$, ... komplexe Matrizen

Lineare isotrope Dielektrika

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu_0$ komplexe Skalare

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} & \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{E} + \mathbf{k}^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= -i\omega \mu \varepsilon \mathbf{D} & \mathbf{k}^2 &\equiv \mu \varepsilon \omega^2 \end{aligned}$$

Brechungsindex: $n \equiv c \sqrt{\mu \varepsilon} = n_{\text{Re}} + i n_{\text{Im}} = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + \frac{1}{2} \chi$

Phasengeschwindigkeit: $\tilde{c} \equiv \frac{c}{n_{\text{Re}}}$

Absorptionskoeffizient: $\kappa \equiv 2 \frac{\omega}{c} n_{\text{Im}}$

Beispiel:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}}$$

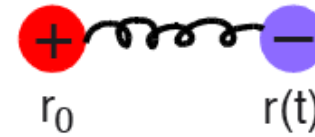
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{\omega} \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{k}} \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{k}} \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad \vec{\mathbf{k}}^2 = \mu \varepsilon \omega^2$$

$$\vec{\mathbf{k}} = k \hat{\mathbf{u}}, \quad r = \hat{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{u}} \equiv \text{reeller Einheitsvektor} \Rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\left(i \frac{\omega}{c} n_{\text{Re}} \hat{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{r}}\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c} n_{\text{Im}} \hat{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{r}}\right) = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\left(i \frac{\omega}{\tilde{c}} r\right) \exp\left(-\frac{\kappa}{2} r\right)$$

Lorentz-Modell



$$m (\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q) = e E(t)$$

$$q(t) = r(t) - r_0$$

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t}), \quad q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 e^{-i\omega t} + q_0^* e^{i\omega t})$$

$$\Rightarrow \text{induziertes Dipolmoment: } eq_0 = \frac{e^2}{\sqrt{2} m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} E_0 = \alpha E_0$$

Atomare Polarisierbarkeit

Mehrere Resonanzen:

$$\alpha = \frac{e^2}{\sqrt{2} m} \sum_n \frac{f_n}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}, \quad Z = \sum_n f_n \text{ Ordnungszahl}$$

Oszillatorstärken f_n gewinnt man aus quantenmechanischer Behandlung

Makroskopische Suszeptibilität: $\chi = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{n} \alpha$, \bar{n} = Teilchendichte

Makroskopische Polarisation: $\vec{P}(r) = \bar{n}(r) e \vec{q}_0 = \epsilon_0 \chi \vec{E}(r)$

Teilchendichte

Dipolmoment pro Teilchen