Kritisches und ergänzendes zur Synchrotronstrahlung

Die Berechnung des Spektrums der Synchrotronstrahlung aus dem retardierten Feld der Ladung ist vollkommen korrekt, allerdings lohnen sich ein paar zusätzliche Überlegungen. Wir haben gesehen, dass der "Feldpuls" den eine Elektron erzeugt typischerweise nur 10^{-20} Sekunden lang ist. Das elektrisiert natürlich alle "Attosekunden Forscher". Allerdings braucht man dazu nicht nur kurze Dauer sondern auch viele Photonen und hier scheitert die Sache erstmal.

In unserem Beispiel haben wir gesehen dass nur etwa 1 mm der Bahnlänge im Dipolmagneten zum Feldpuls beiträgt. Die abgestrahlte Energie pro Meter war ca. 100 keV, d.h. auf diesem Bahnstück verliert das Elektron 100 eV. Das steht im krassen Widerspruch zum erwarteten Frequenzspektrum mit einer charakteristischen Energie im Bereich 100 keV. Die Abstrahlung erfolgt ja quantisiert. Wir haben hier also einen Fall von "Welle - Teilchen - Problematik". Das "Feld am Ort des Beobachters", wie wir es berechnet haben, kann also so gar nicht existieren, zumindest kann man es nicht als E(t) messen. Würde man nur jeweils ein Elektron durch den Dipolmagneten laufen lassen braucht man im Mittel (!) 1000 Durchläufe um einmal ein Photon von 100 keV zu erzeugen. Das ist also ein statistischer Prozess.

Wie sieht es nun aus wenn man viele Elektronen, d.h. einen ganzen bunch durch den Dipol schickt ? Bunche in einem Elektronenspeicherring sind typischerweise einige Dezimeter lang, in Zeiten ausgedrückt Nanosekunden. Die Elekronen passieren die gleiche Stelle der Bahn zu unterschiedlichen Zeiten t_i die man z.B. bezüglich eines Referenzteilchens messen kann. Das Feld am Ort des Beobachters ergibt sich also als Faltung des Felds eines Elektrons mit der Zeitverteilung der Elektronen, einer statistischen Abfolge von δ-Funktionen. Bei der Transformation in den Frequenzraum wird aus der Faltung ein Produkt, die Fouriertransformierte von $\delta(t-t_i)$ ist ein Phasenfaktor $e^{i\,\omega\,t_i}$.

Da die Energiestromdichte $(\sim|E|)^2$ ist, ergibt sich für N Elektronen

$$P_N(\omega) = P_1(\omega)\left|\sum_{i=1}^{N} e^{i\,\omega\,t_i}\right|^2 = P_1 * C(\omega) \tag{0.1}$$

Bei 10^{10} Elektronen werden das ziemlich viele Terme. Der Mathematiker sieht es sofort, der weniger begabte schreibt es sich mal für N = 3 hin und sieht :

```
s3 = Sum[Exp[I ω tᵢ], {i, 1, 3}] * Sum[Exp[-I ω tᵢ], {i, 1, 3}] // Expand
```

$$3 + e^{i\,\omega\,t_1 - i\,\omega\,t_2} + e^{-i\,\omega\,t_1 + i\,\omega\,t_2} + e^{i\,\omega\,t_1 - i\,\omega\,t_3} + e^{i\,\omega\,t_2 - i\,\omega\,t_3} + e^{-i\,\omega\,t_1 + i\,\omega\,t_3} + e^{-i\,\omega\,t_2 + i\,\omega\,t_3}$$

```
FullSimplify[s3]
```

$$3 + 2\,\mathrm{Cos}[\omega\,(t_1 - t_2)] + 2\,\mathrm{Cos}[\omega\,(t_1 - t_3)] + 2\,\mathrm{Cos}[\omega\,(t_2 - t_3)]$$

$$P_N(\omega) = P_1(\omega)\left(N + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\mathrm{Cos}[\omega\,(t_i - t_j)]\right) \tag{0.2}$$

Das N in der Klammer ist die Summe der Terme mit $i = j$, die Doppelsumme enthält alle i ungleich j Beiträge.

Da N typischerweise eine sehr große Zahl ist können wir die Summen durch Integrale über die mittlere Teilchendichte ersetzen. Nehmen wir sehr vereinfacht an, der bunch hat eine Länge (im Zeitbereich) von $\tau_b$und die Elektronendichte ist überall konstant $\rho = N/\tau_b$. Dann ergibt sich durch Integration

$$P_N(\omega) = P_1(\omega)\left(N + N(N-1)\left(\frac{\mathrm{Sin}(\omega\,\tau)}{\omega\,\tau}\right)^2\right) \approx N\,P_1(\omega)\left(1 + N\left(\frac{\mathrm{Sin}(\omega\,\tau)}{\omega\,\tau}\right)^2\right) \tag{0.3}$$

Es kommt also auf das Produkt $(\omega\tau)$ an, ob die Strahlungleistung proportional zu N oder zu $\approx N^2$ skaliert.

Für hinreichend kleine $(\omega\,\tau)$ ist $\mathrm{Sin}(\omega\,\tau)/\omega\,\tau \approx 1$, die Strahlungsleistung ist N^2 die eines einzelnen Elektrons. Dies bezeichnet man als "kohärente Synchrotronstrahlung".

Für große $(\omega\tau)$ fällt die "Sinc^2–Funktion" wie $1\big/(\omega\tau)^2$ab, sobald also

$$1/(\omega\tau) << 1\Big/\sqrt{N} \tag{0.4}$$

oder

$$\omega >> \sqrt{N}\Big/\tau \tag{0.5}$$

wird, ist die Strahlungsleistung nur proportional zu N, der Anzahl der Elektronen. Das bezeichnet man dann als "inkohärente Synchrotronstrahlung".

Betrachten wir ein Zahlenbespiel, wie gehabt in der Vorlesung. In unserem Dipolmagnet war $\omega_c \sim 10^{18}\ \mathrm{sec}^{-1}$. Ein typischer Bunch hat eine Länge von ca. 1 ns und enthält $5*10^9$ Elektronen. Damit ist $\sqrt{N}/\tau \approx 10^{14}$, die Abstrahlung im Bereich der sub-nm Wellenlängen ist vollständig inkohärent.

(Für kleine Frequenzen sieht die Sache anders aus. Im Bereich unterhalb einiger THz ($f \simeq 10^{12}$ Hz, $\omega \simeq 10^{13}\ \mathrm{sec}^{-1}$) wir der zweite Term dominant und die Strahlungsleistung wächst um riesige Faktoren (N) an. Diese Strahlung kann das metallische Strahlrohr nicht verlassen, ausser man baut spezielle Fenster dafür ein. Sie kann aber innerhalb des Strahlrohrs einigen Ärger anrichten indem sie auf den Strahl zurückwirkt).

Was kann der SR Nutzer denn nun tatsächlich messen oder nutzen ? Könnte er die Feldstärke als Funktion der Zeit messen, würde er einen "Puls" messen der die zeitliche Länge des bunches hat und der mit Frequenzkomponenten bis in den Röntgenbereich rauscht. Dieses

"Rauschen" manifestiert sich als Photonen die über die gesamte bunch-Länge statistisch verteilt eintreffen.

Betrachten wir den Faktor $C(\omega)$ aus Gl. (1) noch etwas näher. Da die individuellen t_i für jeden bunch zufällig verteilt sind, ist auch die Strahlungsintensität für jeden bunch eine andere. Wenn man bei hinreichend grossen ω ist, Kriterium siehe Gleichung (5), kann die Phase $(\omega\, t_i)$ statistisch alle Werte im Bereich 0 - 2π annehmen. Der Mittelwert über viele bunche ist dann gerade

$$\langle C(\omega)\rangle = N \tag{0.6}$$

unabhängig von ω.

Was ist die Verteilungsfunktion von $C(\omega)$? Das kann man sich herleiten indem man die einzelnen $e^{i\,\omega\, t_i}$ als Vektoren der Länge 1 in der komplexen Ebene begreift, eine Herleitung findet sich z.B. im FEL-Buch (Schmüser und Co.) in Kapitel 10.5.

Das Ergebnis ist, dass $C(\omega)$ exponential verteilt ist, d.h.

$$\mathrm{w(C)dC} = \frac{1}{N}\, e^{-C/N}\, \mathrm{dC} \tag{0.7}$$

Das ist in zweierlei hinsicht erstaunlich:

a) das wahrscheinlichste C ist Null, d.h. es gibt KEINE Abstrahlung (unabhängig von der Frequenz)

b) die Schwankungsbreite von C, also $\sigma_C = \sqrt{\left\langle (C - \langle C\rangle)^2\right\rangle} = \mathrm{N} = \langle \mathrm{C}\rangle$. Mittelwert und Schwankungsbreite der abgestrahlten Leistung sind gleich.

Diese Schwankungen von bunch zu bunch beziehen sich allerdings auf eine feste (singuläre) Frequenz ω. Sobald man über einen endlichen Frequenzbereich $\Delta\omega$ mittelt reduziert sich σ_C dramatisch. Es kommt darauf an, wieviele "Moden" (spektral unabhängige Bereiche) zu $\Delta\omega$ beitragen. Stellen wir uns das Spektrum zusammengesetzt aus diskreten Spektrallinien vor. Die minimale Breite einer Spektrallinie $\delta\omega$ ist durch die Länge Δt ihres Wellenzuges bestimmt da Δt*$\delta\omega$=1 sein muss, klassische Unschärferelation. Nun kann Δt nicht länger sein als die Länge des bunches τ, d.h. die Modenbreite $\delta\omega$ ist gerade $1/\tau$. Für einen Bunch der Länge τ haben wir also $M = (\Delta\omega\ \tau)$ Moden im Frequnezintervall und σ_C reduziert sich auf $\sigma_C(\mathrm{M}) = N\big/\sqrt{M}$.

Für unser Zahlenbeispiel oben wäre bein 1% Bandbreite der Synchrotronstrahlung $(\Delta\omega\ \tau) \approx 10^7$, d.h. die relative Intensitätsschwankung σ_C/N ist unter 0.1 %.

Eine interessante Anwendung dieser Überlegung besteht übrigens darin dass man aus einer Messung der Intensitätsschwankung bei bekannter spektraler Breite die Bunchlänge abschätzen kann was bei sehr kurzen bunchen (< ps) eine nicht ganz einfache Sache ist.

Vieles von dem was hier für die Synchrotronstrahlung aus dem Dipol angesprochen wurde wird uns beim FEL wieder begegnen und dort eine entscheidende Rolle spielen. Die Phasensumme aus Gl. (1) heisst dann "bunching factor" und der "Trick" beim FEL besteht darin, diesen auch bei Bunchlängen die das Kriterium (5) deutlich verletzen in die Größenordnung eins zu bekommen und so den Faktor N in der Strahlungsleistung zu gewinnen. Das geht dadurch dass man eine "Selbstorganisation" der Verteilung der Elektronen im bunch erreicht, die t_i sind dann also nicht mehr statistisch verteilt.

Die exponentielle Schwankung der Intensität von bunch zu bunch wird uns als "lästige Eigenschaft" eines SASE - FEL dann auch wieder begegnen da hier die Abstrahlung eben nicht statistisch unabhängig sonder aus nur einer "Mode" erfolgt.