

Modellierung des Spektrums des Krebsnebels und Suche nach Oszillationseffekten verborgener Photonen in Röntgendaten

Diplomarbeit

vorgelegt von
Manuel Meyer

Institut für Experimentalphysik,
Universität Hamburg

Hamburg im Mai 2010



Gutachter:

1. Prof. Dr. Dieter Horns
2. Prof. Dr. Günter Sigl

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Abstract	iv
1 Einleitung	1
2 Der Supernovaüberrest SN 1054	5
2.1 Bestandteile des Supernovaüberrestes	6
2.2 Beobachtungen des Krebsnebels von Röntgen- bis Hochenergie-Gammastrahlung	9
2.2.1 Röntgenstrahlung: XMM-Newton	10
2.2.2 Gammastrahlung: die Fermi-Mission	11
2.2.3 VHE-Photonen: abbildende Cherenkov-Teleskope	13
3 Modell der spektralen Energieverteilung des Krebsnebels	17
3.1 Nicht-thermische Strahlungsprozesse	20
3.1.1 Synchrotronstrahlung	20
3.1.2 Inverse Compton-Streuung	26
3.2 Modell der SED	29
3.3 Diskussion der Elektronenspektren	37
3.3.1 Fermi-Beschleunigung an Schockfronten und Kühlprozesse	37
3.3.2 Modellierte Elektronenspektren	44
3.4 Cross-Kalibration der IACTs und dem Fermi/LAT	49
3.5 Anwendung der Cross-Kalibration auf den diffusen Photonenhintergrund	51
4 Theorie verborgener Photonen	55
4.1 Verborgene Photonen	56
4.2 QFT von Photonenoszillationen	61
4.3 Einschränkung des Parameterraums	64
4.4 Kohärenzbedingung für Photonenoszillationen	67
5 Analyse von Röntgendaten des Krebsnebels auf Photonenoszillationen	73
5.1 Datenauswahl und Spektrumserzeugung	73
5.2 Analyse des Röntgenspektrums mit Xspec	77
5.3 Periodizitätsanalyse	90

5.3.1	Frequenztests	90
5.3.2	Überprüfung der Funktionsweise	96
5.3.3	Simulation des Hintergrundes	103
5.3.4	Ergebnisse und Diskussion	104
6	Zusammenfassung und Ausblick	113
A	Programme	117
A.1	C Programme zur Modellierung der spektralen Energiedichte	117
A.2	C Programme für Frequenztests	119
A.3	tcl-Skript zur Anpassung des Krebspektrums an die XMM-Daten . . .	120
B	Verwendete statistische Methoden	123
B.1	Verwendete Größen der Statistik	123
B.2	Methode der größten Wahrscheinlichkeit und der kleinsten Quadrate .	124
C	Rechnungen zu Kapitel 4	129
C.1	Herleitung des kanonisch konjugierten Impuls für $U(1)$ Eichtheorien .	129
C.2	Lösung der Differentialgleichung und Vertauschungsrelation der $SU(2)$	130
	Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	134
	Literaturverzeichnis	137
	Danksagung	147

Kurzfassung

Modellierung des Spektrums des Krebsnebels und Suche nach Oszillationseffekten verborgener Photonen in Röntgendaten

Der Krebsnebel ist eines der prominentesten Objekte der Astrophysik. Er wurde in allen zugänglichen Wellenlängenbereichen vermessen. In dieser Arbeit werden die neuesten Beobachtungen zusammengestellt, um ein Modell der spektralen Energieverteilung an die Daten anzupassen. Das Modell wird im Rahmen von Theorien der Teilchenbeschleunigung und Strahlungserzeugung diskutiert und auf seine Übereinstimmung mit theoretischen Vorhersagen überprüft. Ferner wird der hochenergetische Teil des modellierten Spektrums benutzt, um Energiekalibrierungsfaktoren für abbildende Cherenkov-Teleskope zu bestimmen.

Der Krebsnebel bietet nicht nur die Möglichkeit, Beschleunigungsmechanismen in der Astroteilchenphysik zu studieren, er stellt darüber hinaus eine Quelle dar, mit der physikalische Phänomene untersucht werden können, die von Theorien jenseits des Standardmodells der Materie vorhergesagt werden. In Theorien, die alle Wechselwirkungen der Natur vereinheitlichen, wie z.B. der Stringtheorie, werden häufig weitere Eichsymmetrien vorhergesagt. Im einfachsten Fall ist dies eine neue $U(1)$ Eichgruppe, deren Boson als *verborgenes Photon* bezeichnet wird, falls es nicht mit Materie des Standardmodells wechselwirkt. Es kann allerdings über den Effekt der kinetischen Mischung mit dem Photon wechselwirken und dadurch oszillatorische Effekte im beobachteten Spektrum des Krebsnebels zur Folge haben.

Röntgenbeobachtungen des XMM-Newton-Satelliten werden auf solche Modulationen hin untersucht und es wird gezeigt, dass sich Tests für periodische Signale auf den hier diskutierten Fall anwenden lassen. Die Analyse von Röntgendaten könnte in Zukunft genutzt werden, um die Masse der verborgenen Photonen in einem bis dahin nicht erreichten Bereich einzuschränken.

Abstract

Spectral Modeling of the Crab Nebula and Search for oscillatory features in X-ray data induced by hidden Photons

The Crab Nebula is one of the most prominent objects in astrophysics. It has been observed in every accessible wavelength and in this work the most recent measurements are compiled and used to derive a model that describes the spectral energy distribution of the nebula. The model is discussed using the mechanisms of particle acceleration and radiation and checked for consistency with theory predictions. Furthermore, the very high energy end of the modeled spectrum is used to derive energy calibration factors for imaging air Cherenkov telescopes.

The Crab Nebula not only offers the opportunity to investigate particle acceleration processes in astroparticle physics, it allows for tests of physics beyond the Standard Model of particle physics. Theories that unify all of nature's interactions, e.g. String theory, often predict additional gauge symmetries, in the most simple case an additional $U(1)$ gauge group. If the gauge boson of such a group does not interact with Standard model matter it is called *hidden photon*. Hidden photons can nevertheless interact with ordinary photons via a kinetic mixing mechanism. This mixing leads to oscillatory features in energy that might be observed in data from the Crab Nebula.

Using the X-ray observations from the XMM-Newton satellite the mixing angle and the mass of the hidden photons are constrained. It is shown that tests for periodic signals in data can be applied in this scenario and that X-ray data might be used in the future to constrain the hidden photon mass in a so far unequalled low mass regime.

1 Einleitung

Der Versuch, mittels mathematischer Modelle die Natur zu beschreiben, wurde bereits von den Griechen der Antike unternommen. Sie begründeten beispielsweise die moderne Astronomie ($\alpha\sigma\tau\eta\rho$ = Stern; $\alpha\sigma\tau\rho\nu$ = Sternbild) und befassten sich mit Überlegungen zu den Grundbausteinen unserer Materie (so leitet sich das Wort „Atom“ aus dem griechischen $\alpha\tau\omicron\mu\omicron\varsigma$ ab, was „unteilbar“ bedeutet). Diese beiden Teilgebiete der Physik – die Astro- und Teilchenphysik – der größten und kleinsten Längenskalen in unserem Universum führt die Astroteilchenphysik zusammen, indem sie versucht, astrophysikalische Phänomene im Universum durch die Wechselwirkung von Teilchen untereinander zu erklären.

Immer modernere Teleskope und Satelliten machen es heutzutage möglich, auch entfernte Himmelsobjekte in einem weiten Energiebereich, angefangen bei Radiowellen bis hin zu ultrahochenergetischer Strahlung, präzise zu untersuchen. In den vergangenen Jahrzehnten ist dabei die Erkenntnis gereift, dass im Universum Teilchen auf Energien beschleunigt werden, die selbst mit den neuesten Beschleunigern, wie dem *Large Hadron Collider* (LHC), unerreichbar sind.

Der Krebsnebel und sein zentraler Neutronenstern stellen geradezu ein Laboratorium der Astroteilchenphysik dar. In diesem Überrest einer Explosion eines massereichen Sterns, einer sogenannten Supernova, beheimatet in unserer Galaxie, werden Teilchen bis auf das Tausendfache der Energie beschleunigt, die Teilchen bei Kollisionen am LHC erreichen. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, das beobachtete Spektrum des Nebels mit einem theoretischen Modell der Teilchenbeschleunigung akkurat zu beschreiben. Dazu ist es zum einen notwendig, die Prozesse der Strahlungserzeugung und zum anderen die Mechanismen der Teilchenbeschleunigung selbst, zu studieren. Ein solches Modell muss in der Lage sein, das Spektrum des Nebels über viele Größenordnungen in der Energie zu beschreiben und die Ergebnisse vieler verschiedener Experimente zu reproduzieren.

Das Modell soll des Weiteren genutzt werden, um Teleskope, die die sehr hochenergetische Strahlung von astrophysikalischen Objekten vermessen, untereinander zu kalibrieren und so eine systematische Messunsicherheit zu eliminieren. Dies könnte in Zukunft genutzt werden, um noch genauere Aussagen über physikalische Ergebnisse zu treffen.

Das zweite Ziel dieser Arbeit ist es, die Strahlung des Krebsnebels auf Effekte zu untersuchen, die von bislang nicht experimentell bestätigten Theorien der Teilchenphysik vorhergesagt werden. Verschiedene theoretische Überlegungen und experimentelle Evidenzen der vergangenen Jahrzehnte deuten darauf hin, dass unser bisheriges Verständnis der Teilchenphysik nicht der Weisheit letzter Schluss ist. In dieser Arbeit

sollen die Vorhersagen der Theorie der *verborgenen Photonen* (*hidden Photons*) untersucht werden. Diese bislang nicht nachgewiesenen Teilchen wechselwirken nur mit Photonen jedoch nicht mit anderen Elementarteilchen. Dies gestaltet ihren Nachweis als schwierig, allerdings würden sie zu einer oszillatorischen Modulation von Spektren führen. Röntgenspektren des Krebsnebels sollen auf solche Veränderungen hin untersucht und die Parameter der Theorie der verborgenen Photonen gegebenenfalls eingeschränkt werden.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 wird der Supernovaüberrest SN 1054 vorgestellt und der zentrale Neutronenstern und die Morphologie des umgebenen Krebsnebels beschrieben. Anschließend wird in Kapitel 3 das Modell des Spektrums präsentiert. Dabei werden die wichtigsten Strahlungsprozesse und eine Theorie zur Beschleunigung der Teilchen im Nebel eingeführt. Des Weiteren wird eine Methode der Kalibrierung von Instrumenten am theoretischen Modell beschrieben und auf das Beispiel des diffusen Photonenhintergrundes angewendet. Die Theorie der verborgenen Photonen wird in Kapitel 4 besprochen, zusammen mit existierenden Einschränkungen und den Parametern, die mit Röntgenspektren des Krebsnebels überprüft werden können. Außerdem sollen quantenfeldtheoretische Rechnungen zur Wechselwirkung der verborgenen Photonen mit Photonen vorgestellt werden. Kapitel 5 befasst sich mit der Auswertung der Röntgenspektren und es werden obere Grenzen auf die Parameter der verborgenen Photonen hergeleitet. Abschließend folgt eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf zukünftige Erweiterungen der Arbeit in Kapitel 6.

Als Ergänzungen finden sich in Anhang A die Beschreibung der selbstgeschriebenen Computerprogramme, sowie in Anhang B einige grundlegende Begrifflichkeiten zu statistischen Verfahren, die in dieser Arbeit verwendet werden. Anhang C stellt Rechnungen zur Theorie verborgener Photonen vor, die für Kapitel 4 benötigt werden.

Auszüge der Arbeit wurden unter anderem auf einem Poster beim Fermi Symposium 2009 in Washington, D.C., vorgestellt. Der Beitrag ist online bei www.arXiv.org unter der Nummer 0912.3754 und im Literaturverzeichnis unter Meyer *et al.* (2009) zu finden. Außerdem ist ein wissenschaftliches Papier in Arbeit, das auf Teilen dieser Arbeit aufbaut und im Journal *Astronomy & Astrophysics* erscheinen soll. Es ist im Literaturverzeichnis als Meyer *et al.* (2010) gekennzeichnet.

Abschließend folgt eine Auflistung der verwendeten Naturkonstanten und Einheitensysteme.

Naturkonstanten, verwendete Einheitensysteme und Konventionen

Sofern nicht anders angegeben oder explizit ausgeschrieben, werden in Formeln in dieser Arbeit natürliche Einheiten verwendet, das heißt $c = \hbar = 1$ mit c der Lichtgeschwindigkeit und \hbar der reduzierten Planck-Konstante (siehe Tabelle 1.1). Dies hat zur Folge, dass Energie und Masse die selbe Dimension haben und das außerdem gilt,

$$[\text{Energie}] = [\text{Masse}] = [\text{Länge}]^{-1} = [\text{Zeit}]^{-1}. \quad (1.1)$$

TABELLE 1.1: In dieser Arbeit verwendete Naturkonstanten in SI-Einheiten, siehe zum Beispiel Amsler *et al.* (2008).

Symbol	Name	Wert
c	Lichtgeschwindigkeit	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
h	Planck-Konstante	$6,62606896 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
$\hbar \equiv h/(2\pi)$	reduzierte Planck-Konstante	$1,054571628 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
e	Ladung des Elektrons	$1,602176487 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
m	Masse des Elektrons	$9,10938215 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
σ_T	Thomson-Wirkungsquerschnitt	$0,6652458558 \text{ barn}$ $= 0,6652458558 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$
α	Feinstrukturkonstante	$1/137,035999679$
k_B	Boltzmannkonstante	$1,3806504 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
pc	Parallaxensekunde (Parsec)	$3,0856776 \cdot 10^{16} \text{ m}$

Bei der Angabe von Spektren kommt außerdem häufig das Gaußsche Einheitensystem zum Einsatz. Dabei wird vor allem die Einheit $\text{erg} \equiv 10^{-7} \text{ J}$ für die Energie und $\text{G} = 10^{-4} \text{ T}$ für die Magnetfeldstärke verwendet. Für die Energie wird außerdem die Einheit eV (Elektronenvolt) benutzt, $1 \text{ eV} \equiv 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Häufig verwendete SI*-Präfixe sind in Tabelle 1.2 zusammengestellt.

TABELLE 1.2: In dieser Arbeit verwendete Einheitenpräfixe und deren Wertigkeit.

Präfix	Bezeichnung	Wert
μ	Mikro	10^{-6}
m	Milli	10^{-3}
c	Zenti	10^{-2}
k	kilo	10^3
M	Mega	10^6
G	Giga	10^9
T	Tera	10^{12}
P	Peta	10^{15}

* SI steht für *Système international d'unités* und bezeichnet das internationale Einheitensystem.

Im Allgemeinen kennzeichnen griechische Indizes an vektoriellen Größen Vektoren in der vierdimensionalen Raum-Zeit, dem Minkowski-Raum, wobei der 0. Index für die Zeitkomponente reserviert ist. Ein kontravarianter Ortsvektor im Minkowski-Raum wird geschrieben als

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad (1.2)$$

mit $\mu = 0, 1, 2, 3$. Generell bezeichnen in dieser Arbeit Vektoren der Form \mathbf{x} dreidimensionale Vektoren mit den Komponenten $x_i, i = 1, 2, 3$. Kovariante Vektoren werden geschrieben als

$$x_\mu = (x_0, -\mathbf{x}), \quad (1.3)$$

und sind mit kontravarianten Vektoren verknüpft über die symmetrische Metrik $g^{\mu\nu}$ mit der Signatur $(+, -, -, -)$, $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$, und es gilt die Einsteinsche Summenkonventionen, dass über wiederholte Indizes summiert wird. Die zugehörigen Ableitungen ergeben sich zu

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \quad (1.4)$$

und $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$ (siehe beispielsweise Peskin & Schroeder 1995).

2 Der Supernovaüberrest SN 1054

Eine der prominentesten Quellen der Astrophysik stellt der Krebsnebel und dessen zentraler Neutronenstern im Sternbild des Stieres dar. Duyvendak (1942) und Mayall & Oort (1942) brachten den Krebsnebel zum ersten Mal in Verbindung mit den Beobachtungen einer Supernova, deren Ausbruch auf das Datum des 4. Juli 1054 geschätzt wird. Die Supernova wurde auf der ganzen Welt beobachtet, denn es finden sich viele historische Quellen, die das Ereignis beschreiben. Das Datum des 4. Juli leitet sich aus Quellen von chinesischen und japanischen Astronomen ab (Ho *et al.* 1972). Es wurden auch Felsmalereien der amerikanischen Ureinwohner gefunden, von denen ausgegangen wird, dass sie die Supernova beschreiben. Abbildung 2.1 zeigt so eine Malerei, wie sie im Chaco Canyon in den USA gefunden wurde. Aus der Konstellation der Sonne und des Mondes konnte geschlossen werden (Brandt & Williamson 1979), dass es sich um die Supernovaexplosion handeln könnte. Das genaue Datum ist jedoch umstritten und vor allem das Fehlen europäischer Quellen wird kontrovers diskutiert (siehe zum Beispiel Collins *et al.* 1999). Wiederentdeckt wurde der Nebel durch den englischen Astronomen John Bevis im Jahre 1731 und Charles Messier machte ihn zum ersten Objekt, mit der Bezeichnung M1, seines berühmten Kataloges astronomischer Objekte (Hester 2008). Seine Entfernung wird auf $d \approx 2$ kpc abgeschätzt (Trimble 1968).

Das Kapitel ist folgendermaßen strukturiert: In Abschnitt 2.1 wird kurz auf das Phänomen der Supernova durch einen gravitativen Kollaps eines Sterns eingegangen und anschließend werden die einzelnen Bestandteile des Supernovaüberrestes – der Neutronenstern und der umgebene Nebel – vorgestellt. In Teil 2.2 werden drei Instrumente vorgestellt, die den Krebsnebel beobachten haben und deren Ergebnisse in dieser Arbeit von Wichtigkeit sind. Dabei handelt es sich um (sortiert nach aufsteigendem Energiebereich, der beobachtet werden kann) den europäischen Röntgensatelliten *XMM-*



ABBILDUNG 2.1: Höhlenmalerei amerikanischer Ureinwohner im Chaco Canyon (New Mexico, USA), die als Beobachtung der Supernova 1054 interpretiert wird. Dies lässt sich aus der Position der Sonne, des Mondes und der Hand schließen, wobei die Hand die Supernova repräsentiert. Quelle der Abbildung: Private Fotografie

*Newton**, das *Large Area Telescope* (LAT) an Bord des Fermi-Satelliten und das *High Energy Stereoscopic System* (H.E.S.S.), welches stellvertretend für die abbildenden Cherenkov-Teleskope (*Imaging Air Cherenkov Telescope*, IACT), vorgestellt wird.

2.1 Bestandteile des Supernovaüberrestes (Krebsnebel und Pulsar PSR B0531 + 21)

Sterne mit sehr hohen Massen im Bereich von $8\text{--}10M_{\odot}^{\dagger}$ fusionieren in ihrem Kern Elemente bis hin zu Nickel (^{56}Ni) beziehungsweise Eisen (^{56}Fe) (Unsöld & Baschek 2002). Weitere Energiegewinnung ist durch Kernfusion nicht möglich, da keine Bindungsenergie durch Fusion zu höheren Elementen mehr frei wird (Povh *et al.* 2002). Das Zentrum des Sterns kann somit dem Druck der Gravitation keinen Strahlungsdruck mehr entgegensetzen und es kommt zu einem gravitativen Kollaps. Darauf folgend entsteht eine nach außen propagierende Schockwelle, die die Hülle des Kerns aufheizt und nach außen schleudert. Diese Explosion wird als Supernova bezeichnet und werden Energien von $\approx 10^{53}$ erg freigesetzt. Ungefähr 99% der Energie wird in Form von Neutrinos abgegeben, das restliche Prozent wird in kinetische Energie der Hülle und elektromagnetische Strahlung umgewandelt. Es wird davon ausgegangen, das auch der Krebsnebel durch so eine Explosion entstanden ist.

Je nach Masse des Vorgängersterns kann beim Gravitationskollaps ein Neutronenstern entstehen kann, was bereits von Baade & Zwicky (1934) diskutiert wurde. Der Druck in einem solchen Stern ist so hoch, dass durch den inversen β -Zerfall Neutronen durch den Prozess $e^{-} + p \rightarrow n + \nu_e$ entstehen. Diese sind stabil, da durch die hohe Anzahl an Elektronen im Stern alle Zustände im Phasenraum besetzt sind. Die Besetzung jedes infinitesimalen Volumenelementes $d\Omega = d^3x d^3p$ dieses 6-dimensionalen Raumes ist für Fermionen bestimmt durch das Pauli-Prinzip: jede Einheitszelle von der Größe h^3 kann maximal mit zwei Elektronen (eins für jede Spinausrichtung) besetzt werden. Dies wird durch die Fermi-Dirac-Statistik beschrieben. Im Neutronenstern sind die Dichten so hoch, dass alle Volumenelemente bis zu einer bestimmten Energie gefüllt sind, die größer ist, als die beim β -Zerfall maximal erlaubte Energie der Elektronen. Somit ist der Zerfall unterdrückt. Im inneren des Sterns wird die Dichte der stark inkompressiblen Neutronenflüssigkeit auf $\rho \gtrsim 10^{14}$ g cm $^{-3}$ abgeschätzt (Unsöld & Baschek 2002). Die Radien von Neutronensternen sind typischerweise in der Größenordnung $\mathcal{O}(10)$ km, was unter der Annahme der Erhaltung des Drehimpulses des Vorgängersterns zu sehr schnellen Rotation des Sterns führt. Solche schnell rotierenden Neutronensterne werden Pulsare genannt, da sie Strahlung von Radio- bis Gamma-Energien in einem gebündelten Strahl ähnlich dem eines Leuchtturmes aussenden. Der Stern im Zentrum des Krebsnebels stellt genau so einen Pulsar dar.

Die einzelnen Bestandteile des Supernovaüberrestes sollen im Folgenden vorgestellt

* Die Abkürzung XMM steht für *X-Ray Multi Mirror*.

$\dagger M_{\odot}$ steht für die Sonnenmasse von $1,989 \cdot 10^{33}$ g.

werden. Ins Besondere werden dabei die Strahlungsfelder im Krebsnebel diskutiert, da diese bei der Modellierung des Spektrums in Kapitel 3 von erheblicher Bedeutung sind.

Der Pulsar

Staelin & Reifenstein (1968) und Comella *et al.* (1969) konnten zum ersten Mal den Pulsar (PSR B0531 + 21) im Zentrum des Nebels im Radiobereich nachweisen. Der Pulsar emittiert Strahlung bis hin zu GeV-Energien, oberhalb von 25 GeV bricht der gepulste Fluss jedoch stark ab (Albert *et al.* 2008). Seine Pulsationsperiode von $P = 33$ ms ist nicht konstant, sondern nimmt mit einer Rate von $\dot{P} = 4,21 \cdot 10^{-13}$ ab (alle Zahlenwerte dieses Abschnitts sind entnommen aus Hester 2008). Der Pulsar verliert somit Energie, die als *Spin-down*-Leuchtkraft L_{spin} bezeichnet wird. Unter der Annahme, dass der Pulsar eine Sphäre mit einem Radius von 10 km ist, deren Masse sich auf $1,4M_{\odot}$ beläuft, kann diese berechnet werden zu

$$L_{\text{spin}} = 4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3} \approx 5 \cdot 10^{38} \text{ erg s}^{-1}, \quad (2.1)$$

wobei für das Trägheitsmoment, I , einer homogenen Vollkugel angenommen wurde. Die mittlere Helligkeit über die gesamte Lebensdauer des Nebels kann auf $\approx 1,2 \cdot 10^{39}$ ergs s⁻¹ abgeschätzt werden. Der Pulsar gibt die Energie in Form eines Plasmas aus Elektronen, Positronen und möglicherweise Ionen, sowie magnetischer Feldenergie ab. Die Teilchen werden auf relativistische Geschwindigkeiten beschleunigt und man spricht von einem *relativistischen Wind*, den der Pulsar aussendet. Der Wind selbst ist nicht beobachtbar und trifft auf die durch die Supernova ausgeschleuderte Hülle des Vorgängersterns, wodurch eine Schockfront entsteht. Bei der Überquerung der Schockfront gewinnen die Teilchen Energie. Dieses Phänomen ist bekannt unter der sogenannten Fermi-Beschleunigung, die in Abschnitt 3.3.1 theoretisch diskutiert wird.

Der Synchrotronnebel

An der Schockfront können Teilchen bis zu PeV-Energien beschleunigt werden. Im Plasma stromabwärts von der Schockfront existiert ein magnetisches Feld, das die geladenen Teilchen ablenkt, wobei diese elektromagnetische Strahlung emittieren. Diese wird als Synchrotronstrahlung bezeichnet und wird in Abschnitt 3.1 theoretisch beschrieben. Es kommt zum beobachteten Synchrotronnebel, der den gesamten Supernovaüberrest ausfüllt. Solche Überreste, die mit Radioemission „ausgefüllt“ sind und deren Energiequelle ein Pulsar ist, werden allgemein als Plerione bezeichnet (Weiler & Panagia 1978). Abbildung 2.2(a) zeigt den Nebel bei einer Radiofrequenz von 5 GHz. Die Position der Schockfront wird häufig mit feinen Strukturen, sogenannten *Wisps*[‡] (Scargle 1969), in Verbindung gebracht, die auf Zeitskalen von Tagen variieren kön-

[‡] Wisps ist Englisch und lässt sich mit „Irrlicht“ übersetzen.

nen, siehe auch die zentrale Region in Abbildung 2.2(b). Es handelt sich dabei um lokale Strahlungsintensitätsmaxima, die für optische und Röntgenenergien, aber auch bei Radiofrequenzen beobachtet werden (Hester 2008). Chandrabebachtungen (Weisskopf *et al.* 2000) lassen auf eine Entfernung des Schocks vom Pulsar von $r_s = (0,14 \pm 0,1)$ pc schließen.

Abbildung 2.2(b) zeigt eine Überlagerung von Aufnahmen des Synchrotronnebels bei Radio- (rot), optischen (gelb) und Röntgenenergien (blau). Aus dieser Abbildungen wird deutlich, dass der Synchrotronnebel in seiner Größe mit der Energie variiert. Generell lässt sich der Trend feststellen, dass der Nebel bei um so höheren Energien um so kleiner erscheint. Des Weiteren lässt sich erkennen, dass der Nebel bei Röntgenenergien nicht sphärisch symmetrisch ist, sondern eine Torussymmetrie zusammen mit ausströmenden Jets aufweist. Diese Morphologie lässt sich in Abbildung 2.2(b) gut erkennen.

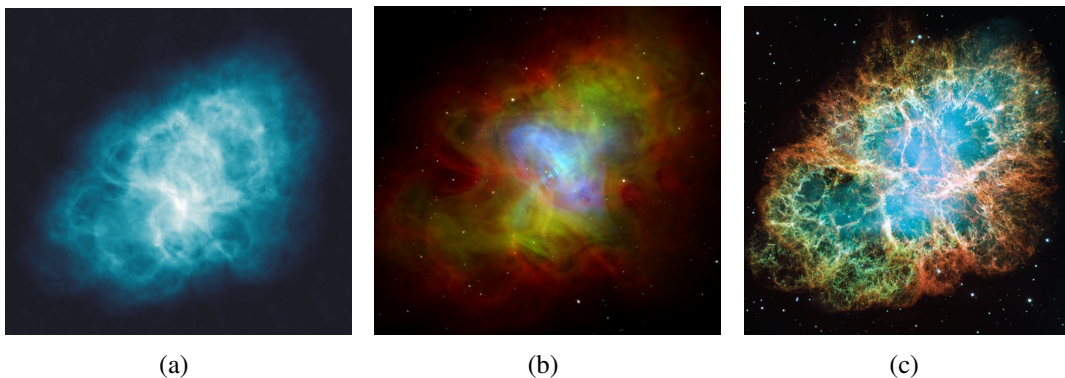


ABBILDUNG 2.2: (a) Der Krebsnebel bei einer Radiofrequenz von 5 GHz, aufgenommen durch das *Very Large Array* (VLA). Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Himmels von $0,1167^\circ \times 0,1167^\circ$. Quelle der Abbildung: VLA-Homepage. (b) Überlagerung von Aufnahmen im Röntgenbereich durch das Chandra-Teleskop, dargestellt in bläulicher Farbe, optischer Wellenlängen, dargestellt in Gelb, durch das Hubble-Weltraum-Teleskop (*Hubble Space Telescope*, HST) und der Abbildung (a) des VLA in Rot. Im $200'' \times 200''$ Zentralbereich ist die Torus-Jet Struktur sowie helle Regionen zu erkennen, die als *Wisps* bezeichnet werden. Quelle der Abbildung: HEASARC-Homepage (HEASARC steht für *High Energy Astrophysics Science Archive Research Center* der NASA). (c) Überlagerung von Aufnahmen verschiedener optischer Wellenlängenbeobachtungen des HSTs. Die Filamente entstehen durch Linienemission von Atomen, die durch die Synchrotronstrahlung ionisiert wurden. Gezeigt sind Linien von Sauerstoff und Silizium. Die Synchrotronstrahlung, die den Nebel ausfüllt, ist in hellblau dargestellt. Der Torus aus Abbildung (b) befindet sich im Zentrum dieser Abbildung. Quelle der Abbildung: Hester (2008).

Filamente und Staub

Der Krebsnebel zeigt neben der Synchrotronemission auch Linienemission im optischen und thermische Strahlung im Submillimeter-Wellenlängenbereich. Die Linien-

2.2 Beobachtungen des Krebsnebels von Röntgen- bis Hochenergie-Gammastrahlung

mission stammt von den sogenannten Filamenten, fingerartigen Strukturen, die sich ausdehnen und den Synchrotronnebel einschließen. Abbildung 2.2(c) zeigt eine Überlagerung mehrerer optischer Wellenlängen und Röntgenemission (letztere ist in blau dargestellt). Die Linienemission hat ihren Ursprung in der Photoionisation: die energiereiche Synchrotronstrahlung ionisiert das ausgeworfene Material der Supernova und durch Rekombination der Ionen wird Licht bei optischen und UV Energien emittiert (Davidson & Fesen 1985).

Des Weiteren lässt sich thermische Emission im Submillimeter-Bereich gegen den Synchrotronhintergrund nachweisen, die aufgeheiztem Staub zugeschrieben wird. Der Staub scheint vor allem in Regionen hoher Gasdichte konzentriert zu sein und Schätzungen des Verhältnisses von Staub zu Gas im Nebel variieren zwischen ca. 1,5% und ca. 0,02%, in den Filamenten gehen Schätzungen dagegen von bis zu 10% aus (Hester 2008 und dortige Quellen).

Schematisch ist der Nebel mit zentralem Pulsar in Abbildung 2.3 dargestellt. Der relativistische Wind wird dort als „ungeschockter“ Wind bezeichnet, da die Teilchen noch nicht durch die Überquerung der Schockfront beschleunigt wurden. Im Synchrotronnebel kommt es zusätzlich zu inelastischen Stößen der Elektronen (und Positronen) mit dem umgebenen Photonengas. Dies kann die Photonen zu sehr hohen Energien beschleunigen. Die Theorie dieses Prozesses der sogenannten inversen Compton-Streuung (IC-Streuung) wird in Abschnitt 3.1 erläutert. Die resultierende sehr hochenergetische Strahlung (*Very High Energy*, VHE) wurde zum ersten Mal von Weekes *et al.* (1989) für den Krebsnebel nachgewiesen.

2.2 Beobachtungen des Krebsnebels von Röntgen- bis Hochenergie-Gammastrahlung

Der Supernovaüberrest SN 1054 wurde über die letzten Jahrhunderte mit einer Vielzahl von Teleskopen beobachtet. Wie sich in Kapitel 3 zeigen wird, umfassen die Beobachtungen nahezu alle mit Experimenten erreichbaren Wellenlängenbereiche. Allein die Vorstellung aller modernen Instrumente, die den Krebsnebel und -pulsar beobachten, wäre eine Arbeit für sich, weswegen sich hier auf drei Instrumente beschränkt wird, die in dieser Arbeit von besonderer Wichtigkeit sind. Diese sind der XMM-Newton-Satellit, der Fermi-Satellit, sowie die H.E.S.S.-Teleskope als Beispiel der abbildenden Cherenkov-Teleskope. Mit XMM-Newton wird in Kapitel 5 Röntgenstrahlung des Krebsnebels auf Effekte verborgener Photonen untersucht, während mit den Messung des Fermi/LATs das räumlich gemittelte Magnetfeld des Nebels bestimmt wird. Das Modell des Krebsnebels, das in Kapitel 3 vorgestellt wird, ermöglicht außerdem eine Energiekalibration der Cherenkov-Teleskope.

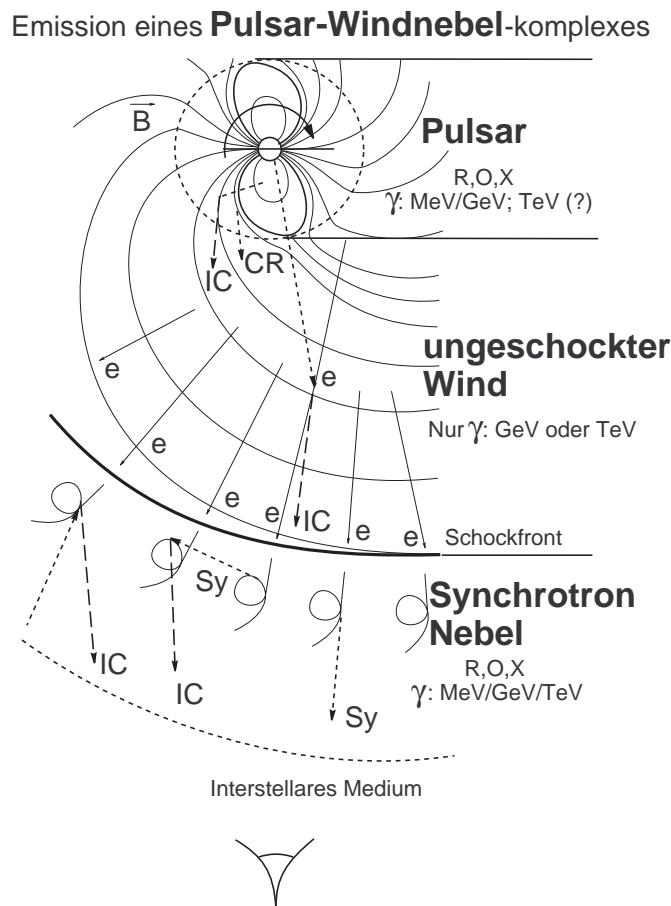


ABBILDUNG 2.3: Schematische Darstellung des inneren des Supernovaüberrestes SN 1054. Der Pulsar treibt die Emission von Strahlung innerhalb des Nebels an. Der relativistische Wind aus Positronen und Elektronen endet an einer Schockfront, an der der Wind auf das umliegende Material des Supernovaüberrestes trifft. Die einzelnen Strahlungsmechanismen sind in Kapitel 3 beschrieben. Quelle der Abbildung: Aharonian & Bogovalov (2003) und Übersetzung aus Zechlin (2009).

2.2.1 Röntgenstrahlung: XMM-Newton

Der XMM-Newton-Satellit der europäischen Weltraumagentur (*European Space Agency*, ESA) befindet sich seit dem 10. Dezember 1999 in einem 48-Stunden-Orbit um die Erde (als Referenzen dienen in diesem Abschnitt die Artikel von Jansen *et al.* 2001; Strüder *et al.* 2001). Der Orbit hat eine hohe Exzentrizität, was eine rein passive Kühlung der Instrumente an Bord ermöglicht. Der 10 m lange und 4 t schwere Röntgensatellit beherbergt eine optische Kamera, zwei Reflektionsgitterkameras, sowie drei weitere CCD-Detektoren*: eine EPIC- (*European Photo Imaging Camera*) pn- und zwei EPIC-MOS- (*Metal Oxide Semiconductor*) Kameras. Um das Röntgenlicht auf die Detektoren zu lenken, verfügen sowohl die EPIC-Kameras als auch die

* CCD steht für *Charged-Coupled Device*.

zwei Reflektionsgitterkameras über jeweils 58 Wolter-I-Spiegel (Wolter 1952). Diese können das Röntgenlicht über streifenden Einfall auf die Bildebene der einzelnen Kameras fokussieren. Eine künstlerische Darstellung des XMM-Newton-Satelliten ist in Abbildung 2.4(a) gezeigt. Des Weiteren ist das Teleskop mit einem Elektronendeflektor ausgestattet, der ein magnetisches Feld erzeugt, das Elektronen daran hindert zu den Kameras zu gelangen.

In dieser Arbeit werden ausschließlich Daten der pn-Kamera verwendet, weswegen deren Prinzip und Leistungsmerkmale kurz besprochen werden sollen. Die pn-Kamera besteht aus einer $6 \times 6 \text{ cm}^2$ CCD-Anordnung mit einer Auflösung von $6,6''$ bei $1,5 \text{ keV}^\dagger$. Der Energiebereich, in dem die pn-Kamera sensitiv ist, erstreckt sich über $0,15 \text{ keV} - 15 \text{ keV}$. Der Detektor selbst besteht aus mit Donatoren und Akzeptoren dotiertem Silizium, entsprechend einer Diode (daher auch die Bezeichnung pn-CCD). Silizium ist ein Halbleiter bei dem Photonen ab einer mittleren Energie von $3,7 \text{ eV}$ Elektron-Loch-Paare erzeugen, die mit Hilfe eines starken elektrischen Feldes separiert werden, bevor sie rekombinieren. Die angesammelten Ladungen werden mittels Transferregister an das Ende der jeweiligen Zeile des Chips transferiert, dort ausgelesen, verstärkt und in ein digitales Signal umgewandelt. Das Chipdesign ist in Abbildung 2.4(b) gezeigt.

Die pn-Kamera kann je nach Beobachtung in verschiedenen Modi verwendet werden. So kann entweder die gesamte Anordnung von 12 CCD-Chips benutzt werden, oder nur ein Chip. Ferner stehen schnelle Auslesemodi (der sogenannte *Timing-* und *Burst-Modus*) zur Verfügung, bei denen einer der 12 CCD-Chips in $30 \mu\text{s}$, beziehungsweise in nur $7 \mu\text{s}$, ausgelesen wird. Der Burst-Modus eignet sich vor allem zur Beobachtung heller Quellen wie dem Krebsnebel, was in Kapitel 5 noch genauer besprochen wird. Je nach Modus in dem die pn-Kamera betrieben wird, ändert sich auch das Gesichtsfeld (*Field of View*, FoV) des Detektors. Wird die gesamte CCD-Anordnung benutzt, so beträgt das FoV $27,2' \times 26,2'$, während es sich im Burst-Modus auf $1,4' \times 4,4'$ reduziert. Die pn-Kamera wurde vor dem Start einem ausgedehnten Kalibrierungsprogramm unterzogen (Gondoin *et al.* 1998a,b) und die Energieauflösung wird während der laufenden Mission durch radioaktive Quellen an Bord ständig überprüft. Im Burst-Modus geben Kirsch *et al.* (2006) die relative Energieauflösung mit $E/\Delta E = 10-50$ im Bereich $(0,2-15) \text{ keV}$ an.

2.2.2 Gammastrahlung: die Fermi-Mission

Das *Fermi Gamma-ray Space Telescope* wurde am 11. Juni 2008 von der NASA ins All gebracht (als Referenz dieses Abschnittes dient Atwood *et al.* 2009). An Bord sind zwei Instrumente: das *Large Area Telescope* (LAT), sowie der *Gamma-ray Burst Monitor* (GRB). Ersteres soll nun vorgestellt werden. Das LAT deckt einen Energiebereich von 20 MeV bis 300 GeV ab und besitzt ein großes Gesichtsfeld von $2,4 \text{ sr}$. Für solch

[†] Die Auflösung wird häufig als FWHM (*Full Width Half Maximum*) der sogenannten *Point Spread Function*, PSF, zu Deutsch Punktspreizfunktion, angegeben. Die PSF beschreibt, wie stark eine Punktquelle durch die verwendete Optik verschmiert wird und ist abhängig von der Energie der einfallenden Strahlung.

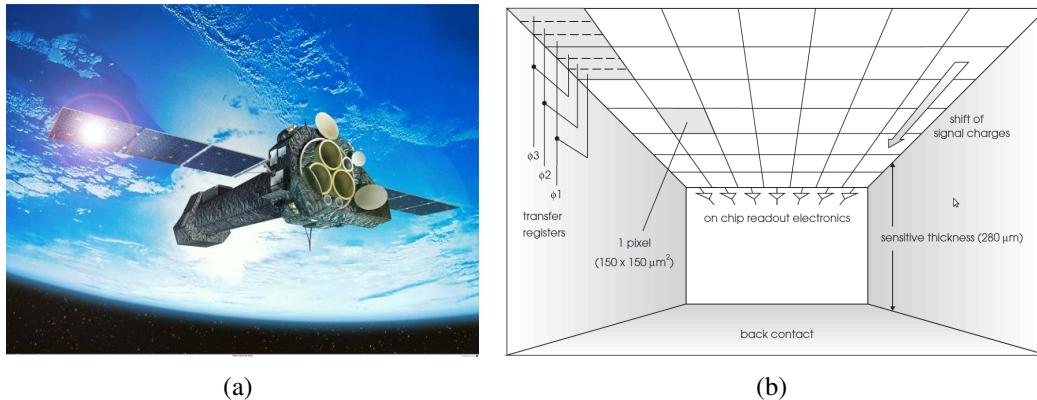


ABBILDUNG 2.4: (a) Eine künstlerische Darstellung des XMM-Newton-Satelliten in der Erdumlaufbahn. Zu sehen sind die drei Teleskope für die zwei Reflektionsgitter- und EPIC-Kameras. Quelle der Abbildung: XMM-Newton-Homepage. (b) Das innere eines pn-Chips. Gezeigt sind die Pixel und Transferregister über die die Ladungen zur Ausleselektronik transferiert werden. Quelle der Abbildung: Strüder *et al.* (2001)

hohe Energien können keine abbildenden Optiken mehr hergestellt werden, weswegen das LAT die Energien der einfallenden Photonen durch Paarerzeugung misst. Die einfallenden Photonen durchlaufen dazu den sogenannten *Tracker*, der aus einem Material mit hoher Kernladungszahl besteht (im Falle des LAT ist es Wolfram), so dass die Photonen mit virtuellen Photonen der Atomkerne wechselwirken können und dadurch in e^\pm -Paare umgewandelt werden. Die Elektronen und Positronen verlieren im Material ihre Energie durch Bremsstrahlung und die so entstandenen Photonen können wiederum umgewandelt werden. Auf diese Weise entwickelt sich ein elektromagnetischer Schauer, dessen Eindringtiefe in das Material mit der Energie des einfallenden Photons verknüpft ist. Im Tracker befinden sich zusätzlich Siliziumschichten, so dass durch eine Ausleselektronik der Weg der Teilchen rekonstruiert werden kann. Der schematische Aufbau und die $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ Konversion ist in Abbildung 2.5 gezeigt.

Die Energie des Schauers wird anschließend im Kalorimeter gemessen. Es besteht aus einer Anordnung von Cäsiumiodidkristallen, die optisch von einander isoliert sind, so dass neben der Energie auch die Schauerentwicklung vermessen werden kann.

Des Weiteren verfügt das LAT über einen Antikoinzidenzdetektor, der Photonen von geladenen Teilchen unterscheidet, die ebenfalls elektromagnetische Schauer induzieren können. Er besteht aus insgesamt 89 Szintillatorplatten (für die Funktionsweise eines Szintillators siehe zum Beispiel Povh *et al.* 2002), die den Tracker von außen umkleiden (siehe Abbildung 2.5). Für die Separation zwischen photonischen und hadronischen Schauern wird zusätzlich die Analyse des Schauers herangezogen.

Das LAT wurde vor dem Start einer intensiven Kalibrierungskampagne unterzogen und die Ergebnisse mit detaillierten Simulationen verglichen. Abhängig von der Energie des einfallenden Photons liegt die relative Energieauflösung $\Delta E/E$ zwischen +5% und -10% (Abdo *et al.* 2009). Die räumliche Auflösung des LATs verbessert sich mit

2.2 Beobachtungen des Krebsnebels von Röntgen- bis Hochenergie-Gammastrahlung

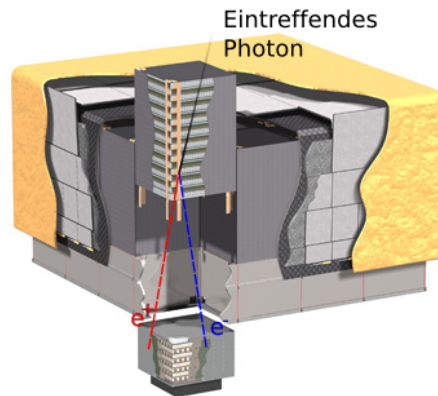


ABBILDUNG 2.5: Schematische Ansicht des LATs. Im oberen Teil ist der Tracker zu sehen, in dem eintreffende Photonen mit Atomkernen des Wolframs wechselwirken und so e^\pm -Paare erzeugt werden. Die Spur der Teilchen kann durch Siliziumschichten nachverfolgt werden. Die Energie der Schauer wird anschließend im Kalorimeter gemessen. Der Tracker ist von Szintillatorplatten abgedeckt, die als Antikoinzidenzdetektor dienen. Quelle der Abbildung: Fermi-Homepage

zunehmender Energie der einfallenden Photonen, für Photonen mit Energien ≥ 10 GeV beträgt sie $\leq 0,15^\circ$, bei 100 MeV jedoch nur noch $3,5^\circ$.

2.2.3 VHE-Photonen: abbildende Cherenkov-Teleskope

Der enorme Vorteil dieser bodengestützten Teleskope besteht darin, dass im Gegensatz zu weltraumgestützten Beobachtungen große Sammelflächen für einfallendes Licht realisiert werden können. Dadurch lassen sich auch geringe Flüsse von sehr hochenergetischen Quellen im TeV-Bereich noch nachweisen. Die Kameras der Teleskope bestehen aus einer Anordnung von Photomultipliern (PMTs), wobei jeder Photomultiplier einen Bildpixel darstellt. Die typische Winkelauflösung von IACTs beträgt $0,1^\circ$. Cherenkov-Teleskope nutzen, wie das Fermi/LAT, das Phänomen der elektromagnetischen Schauerbildung, um hochenergetische Photonen nachzuweisen (als Referenz dient in diesem Abschnitt Hinton 2009, sofern nicht anders angegeben). Die Photonen wechselwirken mit Atomen der Atmosphäre und bilden so elektromagnetische Kaskaden aus. Die Atmosphäre dient somit den Teleskopen als Kalorimeter und ist dadurch Bestandteil des gesamten Detektors. Bewegen sich die so entstandenen Elektronen und Positronen mit einer Geschwindigkeit $v > c/n$, wobei n der Brechungsindex der Atmosphäre ist, so emittieren sie unter dem Winkel θ , der gegeben ist durch die Relation (siehe zum Beispiel Jackson 2006, Kapitel 13)

$$\cos \theta = \frac{c}{vn}, \quad (2.2)$$

das sogenannte Cherenkovlicht. Der gesamte Fluss des Cherenkovlichtes ist propor-

tional zur Spurlänge aller entstandenen Teilchen, deren Anzahl wiederum proportional zur Gesamtenergie des primären Teilchens ist, das den Schauer ausgelöst hat. Der Öffnungswinkel des Cherenkovlichts beträgt typischerweise 1° , was bei einer Beobachtungshöhe von ca. 2000 m über Normalnull (NN) und einem Schauermaximum von 10 km einen belichteten Kreis mit einem Radius von ≈ 120 m ausmacht. Dieses Licht kann mit IACTs beobachtet werden, wie in Abbildung 2.6 schematisch dargestellt ist.

Um Quellen hochenergetischer Gammastrahlung beobachten zu können, ist es außerdem wichtig, die Quellen vom Hintergrund der kosmischen Strahlung zu unterscheiden. Den Hauptanteil der kosmischen Strahlung machen Protonen (zu 87%) und schwerere Atomkerne (zu 11%) aus (Longair 1992, Kapitel 9). Glücklicherweise unterscheiden sich die durch Photonen, beziehungsweise Leptonen, induzierten Schauer von solchen, die durch Hadronen ausgelöst wurden. Die Rekonstruktion des Schauers macht es demnach möglich, hadronische Ereignisse auszuschließen. Es ist bislang jedoch nicht möglich, Schauer zu unterscheiden, die von Photonen oder Elektronen (Positronen) induziert wurden. Eine Verbesserung der Rekonstruktion des Schauers bringen stereoskopische Messungen. Dabei handelt es sich um die Beobachtung einer Quelle mit mehreren Teleskopen. Dadurch lässt sich die Schauergeometrie und somit die Energie des Primärteilchens besser rekonstruieren. Die stereoskopische Beobachtung wurde zum ersten Mal erfolgreich von der HEGRA- (*High Energy Gamma Ray Astronomy*) Kol-
laboration durchgeführt.

Bei dem H.E.S.S.-Experiment handelt es sich um ein stereoskopisches System, das aus vier Teleskopen besteht. Es ist im Khomas-Hochland in Namibia auf einer Höhe von 1800 m stationiert. Die Teleskope bilden die Ecken eines Quadrates mit einer Kantenlänge von 120 m. Es ist in Abbildung 2.7 gezeigt. Das FoV beträgt 5° und die Energieschwelle 0,1 TeV. Die typische relative Energieauflösung beträgt $\Delta E/E = 15\%$ (Horns *et al.* 2007). Als Erweiterung (H.E.S.S. Phase II) ist ein fünftes Teleskop geplant, das in der Mitte der vier ersten Teleskope errichtet werden soll. Mit einer Spiegelfläche von 600 m^2 , verglichen mit einer Fläche von 108 m^2 der ersten Teleskope, soll es die Energieschwelle auf 20 GeV senken (Vincent 2005).

Als weitere IACT-Systeme, die in Betrieb sind, lassen sich noch MAGIC (Major Atmo-

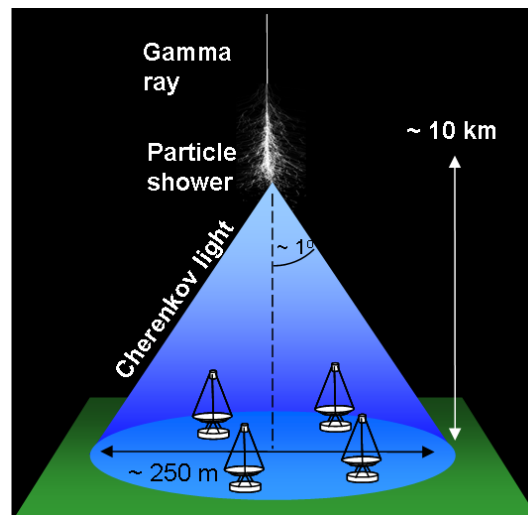


ABBILDUNG 2.6: Schematische Darstellung der Beobachtung von Luftschauern mit IACTs. Gezeigt ist das primäre Photon (*Gamma-ray*), das einen Teilchenschauer (*Particle Shower*) induziert. Die Teilchen wiederum senden Cherenkovlicht (*Cherenkov light*) aus, das von bodengestützten Teleskopen beobachtet werden kann.

2.2 Beobachtungen des Krebsnebels von Röntgen- bis Hochenergie-Gammastrahlung

spheric Gamma-ray Imaging Cherenkov Telescope), VERITAS (Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System) und CANGAROO (Collaboration of Australia and Nippon for a Gamma-Ray Observatory in the Outback) nennen.



ABBILDUNG 2.7: Die H.E.S.S.-Teleskope im Khomas-Hochland in Namibia auf einer Höhe von 1800 m über NN. Quelle der Abbildung: H.E.S.S.-Homepage

3 Modell der spektralen Energieverteilung des Krebsnebels und Anwendung des Modells auf die Kalibration von Cherekov-Teleskopen

Der Krebsnebel ist ein intensiv studiertes Objekt in der Astrophysik, das in allen zugänglichen Wellenlängenbereichen beobachtet wird. Aufgrund der Vielzahl von Messungen über einen Energiebereich, der mehr als 15 Größenordnungen abdeckt, ist es möglich, ein detailliertes Modell der spektralen Energieverteilung (*spectral energy distribution*, SED) des Nebels zu erstellen und somit die zugrunde liegenden physikalischen Prozesse, die im Nebel stattfinden, zu untersuchen.

Die spektrale Energieverteilung kann in verschiedenen Größen dargestellt werden. In dieser Arbeit wird entweder die Strahlungsflussdichte mal der Frequenz, νf_ν , oder die Leuchtkraft (Gesamtenergieabgabe durch Strahlung pro Zeit) pro Frequenzintervall mal der Frequenz, νL_ν , verwendet. Die Strahlungsflussdichte ist diejenige Energie, die pro Energieintervall und Zeit durch eine Einheitsfläche hindurch tritt (Unsöld & Baschek 2002). Sie ist verknüpft mit der differentiellen Anzahl der Photonen, dN/dE , die pro Energieintervall $[E, E + dE]$, Zeit und Einheitsfläche beim Beobachter eintreffen,

$$\nu f_\nu = E^2 \frac{dN}{dE}, \quad (3.1)$$

und wird in den Einheiten $\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ angegeben. Die Leuchtkraft pro Frequenzintervall ist mit der Strahlungsflussdichte über $L_\nu = 4\pi d^2 f_\nu$ verknüpft und trägt die Einheit $\text{ergs s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$, wobei d der Abstand zwischen Quelle und Beobachter ist.

Die in dieser Arbeit verwendeten Beobachtungen sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Die Beobachtungen reichen vom Radiobereich bis hin zur VHE-Gamma-Strahlung. Die Referenzen sind Aharonian *et al.* (2004) entnommen und durch neue Beobachtungen der Instrumente Iso & Scuba, Spitzer, XMM-Newton, IBIS/ISGRI (Imager on Board INTEGRAL* / INTEGRAL Soft Gamma-Ray Imager), SPI (SPectrometer on INTEGRAL), Fermi/LAT, H.E.S.S. und MAGIC ergänzt beziehungsweise ersetzt. Die Strahlungsflussdichte des Nebels nimmt mit der Zeit ab, weswegen der Fluss der

* INTEGRAL ist ein Akronym für *The International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory*.

TABELLE 3.1: Zusammenstellungen von Beobachtungen des Krebsnebels von Radio- bis hin zu sehr hohen Energien.

Frequenzbereich	Instrument	Referenz
Radio	Dvingeloo Radio Telescope	Baars (1972)
Submillimeter bis Ferninfrarot	MPiR Bolometer am IRTF & UH Telescope MPiR Bolometer am IRAM Telescope Iso & Scuba Spitzer	Mezger <i>et al.</i> (1986) Bandiera <i>et al.</i> (2002) Green <i>et al.</i> (2004) Temim <i>et al.</i> (2006)
Optisches Kontinuum und Filamente	Palomar Telescope IDS (Mount Lemmon Observatory) Palomar 5m Hale Telescope RCA CCD am 1,2m Teleskop des Observatoire de Haute Provence <i>Sammlung von Daten</i>	Kirshner (1974) Davidson (1987) Hester <i>et al.</i> (1990) Veron-Cetty & Woltjer (1993) Davidson & Fesen (1985)
nahe UV- und UV Strahlung	UIT, ANS	Hennessy <i>et al.</i> (1992)
Röntgen- bis Gammastrahlung	ROSAT HRI, BeppoSAX LECS, MECS, PDS, COMPTEL, EGRET XMM-Newton SPI an Bord von INTEGRAL IBIS/ISGRI an Bord von INTEGRAL BATSE FERMI (vorläufig)	Kuiper <i>et al.</i> (2001) Kirsch <i>et al.</i> (2005) Jourdain & Roques (2008) Jourdain <i>et al.</i> (2008) Ling & Wheaton (2003) Fermi Collaboration (2009)
VHE	HEGRA H.E.S.S. MAGIC	Horns <i>et al.</i> (2003) Aharonian <i>et al.</i> (2006) Albert <i>et al.</i> (2008)

älteren Radiodaten korrigiert werden muss. Die Radiomessungen wurden nach Francisco Macias-Perez *et al.* (2008) mit einer angenommenen Abnahme von 0,18% pro Jahr auf ein gemeinsames Datum, den 1.1.2000, skaliert.

Abbildung 3.1 zeigt die Datenpunkte der SED zusammen mit dem Modell, welches in diesem Kapitel vorgestellt wird. Die SED ist in doppellogarithmischer Darstellung in Abhängigkeit der Energie in eV und der Frequenz in Hz aufgetragen. Die schwarze durchgezogene Linie zeigt das gesamte Modell als Summe seiner einzelnen Komponenten. Die graue durchgezogene Linie beschreibt den Beitrag der thermischen Strahlung des Staubs im Nebel, während die orangene durchgezogene Linie die optische Emission der Filamente darstellt. Alle Beiträge werden in Abschnitt 3.2 besprochen. In dieser Arbeit wird von der Annahme ausgegangen, dass der Nebel mit relativistischen Elektronen mit einer räumlich gemittelten differentiellen Anzahl, dN_{e1}/dE , gefüllt ist. Die rot und blau gestrichelten Linien zeigen den Beitrag durch Synchrotronstrahlung und inverser Compton-Streuung zwei verschiedener Elektronenspektren. Diese zwei Spektren sind nötig, um die Änderung des Strahlungskontinuums im Radiobereich zu erklären. Die theoretischen Grundlagen dieser Strahlungsprozesse werden im Abschnitt 3.1 erläutert, während die zugrundeliegenden Elektronenspektren in Abschnitt 3.3 diskutiert werden.

Anstelle einzelner Datenpunkte, sind die Beobachtungen im Röntgenbereich von XMM-Newton, IBIS/ISGRI und SPI als Potenzgesetze mit Einhüllenden, entsprechend der statistischen Fehlern, in Abbildung 3.1 angegeben. Wie sich in den Abschnitten 3.1 und 3.3 zeigen wird, kann die SED für Strahlungsprozesse, die für die Röntgenemissi-

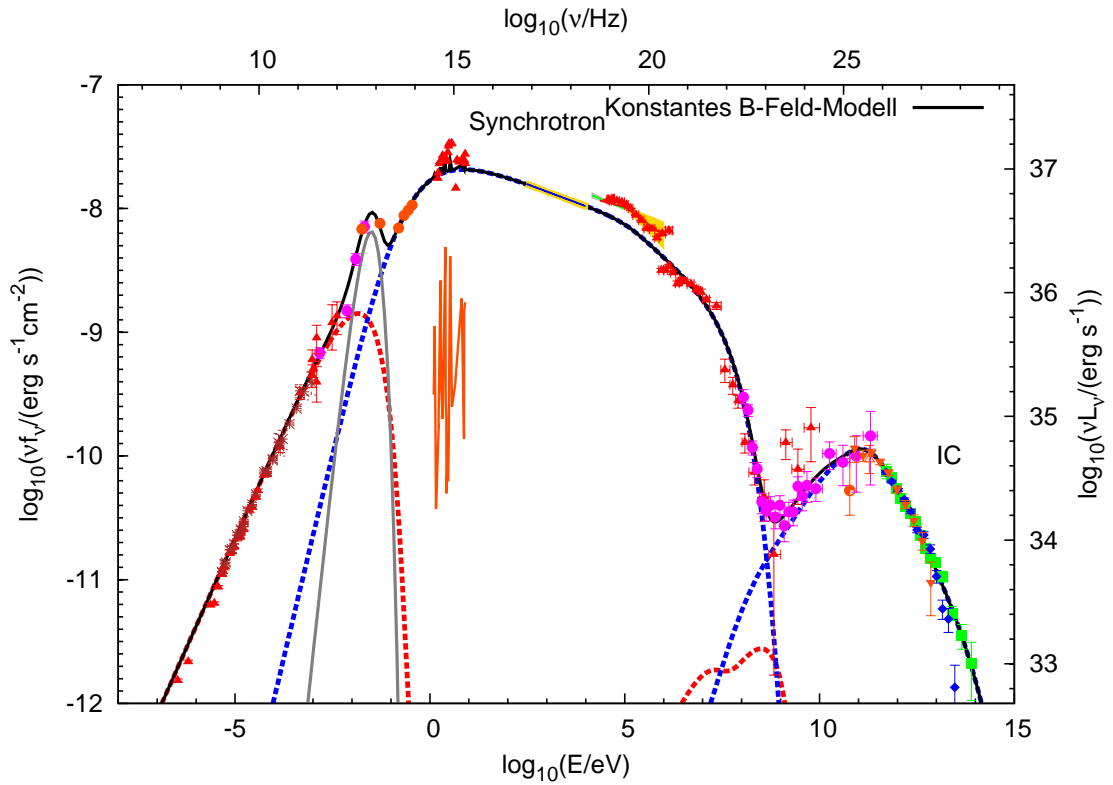


ABBILDUNG 3.1: Spektrale Energiedichte des Krebsnebels in doppellogarithmischer Darstellung. Neben den Datenpunkten aus Tabelle 3.1 sind die einzelnen Beiträge des Modells (thermische Strahlung des Staubs: graue durchgezogene Linie, optische Emission der Filamente: orangene durchgezogene Linie, Synchrotron- und IC-Strahlung der Elektronenspektren: rot beziehungsweise blau gestrichelte Linien) sowie das Gesamtmodell als schwarze durchgezogene Linie gezeigt.

on des Nebels verantwortlich sind, durch Potenzgesetze in der Energie,

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\Gamma}, \quad (3.2)$$

beschrieben werden, wobei Γ als Photonenindex bezeichnet wird. In einer doppellogarithmischen Darstellung entspricht der Photonenindex eines Potenzgesetzes der Steigung der Funktion, während die Normierung den Schnittpunkt mit der Ordinate bestimmt.

Sowohl SPI als auch XMM-Newton wurden in der Datensammlung berücksichtigt, da beide Instrumente durch detaillierte Simulationen und Labormessungen kalibriert wurden (siehe Kapitel 2.2.1 und Attié *et al.* 2003). Frühere Instrumente wurden häufig mit Hilfe von Messungen des Krebsnebels kalibriert und dahingehend korrigiert, dass ein gewisses Spektrum des Krebsnebels reproduziert wurde (siehe zum Beispiel Toor & Seward 1974). Vergleicht man die Messungen von XMM-Newton und IBIS/ISGRI beziehungsweise SPI, so stellt man fest, dass sie von der Steigung her gut überein-

stimmen, allerdings die Normierungen um etwa 20% voneinander abweichen. Diese Diskrepanz ist nicht mehr im Rahmen der statistischen Fehler zu erklären. Ein möglicher Grund dafür ist, dass in die IBIS/ISGRI- und SPI-Messungen Beiträge des Pulsars enthalten, da SPI, im Gegensatz zu XMM-Newton, den Krebsnebel nicht räumlich auflösen kann. Das Modell wird deshalb so gewählt, dass es das Potenzgesetz von XMM-Newton reproduziert und somit einen niedrigeren Fluss vorhersagt, als die Beobachtung von IBIS/ISGRI und SPI nahelegen.

Es wird davon ausgegangen (siehe zum Beispiel Atoyan & Aharonian 1996; Aharonian *et al.* 2004; Volpi *et al.* 2008), dass der Hauptanteil der Strahlung des Krebsnebels durch Synchrotronstrahlung und inverse Compton-Streuung erzeugt wird. Deshalb werden diese sogenannten nicht-thermischen Strahlungsmechanismen im Folgenden erklärt, bevor das eigentliche Modell der SED vorgestellt wird.

3.1 Nicht-thermische Strahlungsprozesse

Im Allgemeinen wird Strahlung als nicht-thermisch bezeichnet, wenn der beobachtete Fluss weder durch das Spektrum eines Schwarzen Körpers (für den Photonfluss eines schwarzen Körpers siehe Gleichung 3.36) noch dem der thermischen Bremsstrahlung* beschrieben werden kann (Longair 1994).

Es wird zunächst die emittierte Synchrotronstrahlung eines geladenen Teilchens und einer Teilchenverteilung besprochen und anschließend auf den Prozess der inversen Compton-Streuung eingegangen. Wie sich bei der Modellierung der SED herausstellen wird, kann das Spektrum alleine durch Emission von Elektronen beschrieben werden, weswegen sich hier auf Elektronen beschränkt wird. Die Darstellung folgt den Referenzen Blumenthal & Gould (1970), Longair (1994) und Jackson (2006). In diesem Abschnitt wird das Gaußsche Einheitensystem verwendet.

3.1.1 Synchrotronstrahlung

Man betrachte ein Elektron der Energie $E = \gamma mc^2$ mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} , das sich in einem Magnetfeld \mathbf{B} spiralförmig entlang der Magnetfeldlinien unter dem Winkel $\theta = \angle(\mathbf{B}, \mathbf{v})$ (dieser wird im Englischen als *pitch angle* und in dieser Arbeit als Pitch-Winkel bezeichnet) mit der Kreisfrequenz

$$\Omega_B = \frac{eB}{\gamma mc} \quad (3.3)$$

bewegt, wobei $B = |\mathbf{B}|$ ist. Als beschleunigte Ladung emittiert das Elektron Strahlung. Bei relativistischen Elektronen spricht man dabei von Synchrotronstrahlung, ansonsten wird sie als Zyklotronstrahlung bezeichnet. Das emittierte Spektrum kann entweder durch die Liénard-Wiechert-Potenziale oder – im Ruhesystem der Elektronen – durch

* Thermische Bremsstrahlung bezeichnet die Strahlung, die entsteht, wenn freie Elektronen in einem Plasma durch Coulombwechselwirkungen mit Ionen abgebremst werden (Longair 1992).

Compton-Streuung an virtuellen Photonen des Magnetfeldes (siehe zum Beispiel Lieu *et al.* 1989) berechnet werden. Ersterer Ansatz soll in diesem Abschnitt kurz skizziert werden.

Die Bewegung des Elektrons ist bestimmt durch die Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Leftrightarrow \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (3.4)$$

mit dem Viererpotenzial $A^\mu(x) = (A^0, \mathbf{A})$, dem elektromagnetischen Feldtensor $F^{\mu\nu}$ und dem Viererstrom $j^\mu(x)$,

$$j^\mu(x) = ec \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - r(\tau)), \quad (3.5)$$

wobei $u^\mu(\tau)$ die Vierergeschwindigkeit und $r(\tau)$ die Trajektorie des Elektrons mit der Eigenzeit τ bezeichnet. Diese Differentialgleichungen können zum Beispiel über den Ansatz der Greenschen Funktionen gelöst werden. Es muss außerdem gelten, dass das Viererpotenzial nur einen Beitrag zur Zeit $\tau = \tau_0$ liefert, da elektromagnetische Strahlung der Lichtkegelbedingung, $(x - r(\tau_0))^2 = 0$, genügen muss. Dies kann zum Beispiel durch die Wahl $(x - r(\tau_0))^\mu = (R, R \mathbf{n})$ erreicht werden, wobei \mathbf{n} der Einheitsvektor entlang der Sichtlinie zwischen Elektron und Beobachter ist, die getrennt sind durch den Abstand R .

Emittierte Leistung eines Elektrons

Die emittierte Leistung eines Elektrons lässt sich am einfachsten in einem Inertialsystem berechnen, in dem sich das Elektron nicht-relativistisch bewegt, $|\mathbf{v}| \ll c$. Das elektrische Feld, das sich aus der Lösung des Viererpotenzials ergibt, vereinfacht sich dann zu

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c} \left(\frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R} \right)_{\text{ret}}. \quad (3.6)$$

Der Index *ret* bezeichnet das retardierte elektrische Feld und $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel, $dP/d\Omega$ ist mit dem Poyntingvektor $\mathbf{S} = c/4\pi (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ verknüpft,

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 = R^2 \cdot |\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |R \mathbf{E}|^2. \quad (3.7)$$

Einsetzen des elektrischen Feldes und Integration über den Raumwinkel Ω liefert die sogenannte Larmor-Formel,

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (3.8)$$

Um eine lorentzinvariante Formulierung der abgestrahlten Leistung zu finden, benutzt man, dass $\dot{\mathbf{v}} = 1/m \cdot d\mathbf{p}/dt$ ist und ersetzt $d\mathbf{p}/dt$ mit $dp_\mu/d\tau$. Dadurch erhält man eine lorentzinvariante Gleichung, die im nicht-relativistischen Limes wieder die Larmor-

Formel ergibt. Nutzt man weiter die relativistische Gleichung zur Impulserhaltung, $dp^\mu/d\tau = K^\mu = q/cF^{\mu\nu}u_\nu$, mit der Ladung q des Teilchens, so erhält man unter Ausnutzung von $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$ einen lorentzinvarianten Ausdruck für die emittierte Leistung eines Elektrons für beliebige Pitch-Winkel θ ,

$$P = -\frac{2}{3c} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \gamma^2 B^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta. \quad (3.9)$$

Der Term in Klammern ist proportional zum Thomson-Wirkungsquerschnitt $\sigma_T = 8\pi/3[e^2/(mc^2)]^2$. Fügt man des Weiteren die magnetische Feldenergie $U_{\text{mag}} = B^2/(8\pi)$ und $\beta = |\mathbf{v}|/c$ ein und mittelt über eine isotrope Verteilung von Pitch-Winkeln mit der Wahrscheinlichkeitsdichte (siehe Anhang B.1) $f(\theta)d\theta = 1/2 \sin \theta d\theta$ im Intervall $[0; \pi]$, so erhält man

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{mag}} \beta^2 \gamma^2. \quad (3.10)$$

Diese Gleichung beschreibt den mittleren Energieverlust eines Elektrons, das während der Zeit, in der es Energie durch Synchrotronstrahlung verliert, zufällig gestreut wird und so viele verschiedene Werte des Pitch-Winkels annimmt. Dies rechtfertigt die Mittelung in obiger Gleichung. In geeigneten Einheiten erhält man

$$-\frac{dE}{dt} \approx 6,0 \cdot 10^{-12} \left(\frac{B}{10^{-4} \text{ G}} \right)^2 \gamma^2 \beta^2 \text{ eV s}^{-1} \quad (3.11)$$

Emittiertes Spektrum eines Elektrons

Das emittierte Spektrum, also die abgestrahlte Energie pro Frequenz und pro Zeit, kann ebenfalls aus Gleichung 3.7 ermittelt werden. Integriert man die Gleichung über die Zeit, so erhält man die abgestrahlte Energie pro Raumwinkelement $dE/d\Omega$. Mittels einer Fouriertransformation des Vektorpotenzials gelangt man zu dem Ausdruck

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\mathbf{A}(\omega)|^2 = \int_0^{+\infty} d\omega \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega}, \quad (3.12)$$

wobei die Integration über die Zeit t und eine Integration über die Kreisfrequenz ω bereits ausgeführt wurde. Die Größe $d^2 I/d\omega d\Omega$ definiert die abgestrahlte Energie pro Frequenz und Raumwinkel und lässt sich für reelle Vektorpotenziale $\mathbf{A}(\omega)$ schreiben als

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2 = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2. \quad (3.13)$$

Diese Größe kann durch die allgemeine Lösung des Viererpotenzials und dessen Fouriertransformation berechnet werden. Dazu muss ein Integral über die Zeit gelöst werden. Für die Details sei auf Jackson (2006, Kapitel 14) verwiesen. Eine wichtige Näherung in der Berechnung besteht darin, dass der Beobachter nur einen kurzen Puls der Strahlung sieht und zwar genau dann, wenn der Geschwindigkeitsvektor entlang der

Richtung der Sichtlinie zeigt. Dies liegt daran, dass die abgestrahlte Energie eines relativistischen Teilchens in einem komprimierten Kegel in Vorwärtsrichtung abgestrahlt wird. Der Ort, die Geschwindigkeit und der augenblickliche Krümmungsradius ρ der Teilchentrajektorie müssen also nur für einen kurzen Augenblick bekannt sein.

Nach Wahl eines Koordinatensystems zerfällt $d^2I/d\omega d\Omega$ in Integrale über modifizierte Besselfunktionen (siehe zum Beispiel Bronstein & Semendjajew 1991). Für eine Kreisbewegung des Elektrons, also $\theta = \pi/2$, führt eine Integration über den Raumwinkel auf

$$\frac{dI}{d\omega} = \sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi. \quad (3.14)$$

Dabei bezeichnet $K_{5/3}(\xi)$ die modifizierte Besselfunktion vom Grad 5/3. Die kritische Kreisfrequenz ω_c ist gegeben durch $\omega_c = (3/2)\gamma^3(c/\rho)$ und kann für eine Kreisbewegung geschrieben werden als $\omega_c = (3/2)\gamma^3\Omega_B$. Gleichung 3.14 gibt die abgestrahlte spektrale Energie pro Zeit pro Umlauf an. Die emittierte Leistung erhält man durch Multiplikation mit $\Omega_B/(2\pi)$. Als Endergebnis, geschrieben in Abhängigkeit von der Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ (man beachte einen zusätzlichen Faktor durch den Variablenwechsel, $d\nu/d\omega = 2\pi$), erhält man schließlich die gesamte momentan abgestrahlte Leistung eines Elektrons, das sich im Magnetfeld auf einer Kreisbahn bewegt,

$$P(\nu) \equiv \frac{d^2E}{dt d\nu} = \frac{\sqrt{3}e^3B}{mc^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right), \quad (3.15a)$$

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) = \frac{\nu}{\nu_c} \int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi, \quad (3.15b)$$

$$\nu_c = \frac{3}{2}\gamma^3 \frac{\Omega_B}{2\pi} = \frac{3eB\gamma^2}{4\pi mc}. \quad (3.15c)$$

Die Funktion $F(\nu/\nu_c)$ wird als Synchrotronfunktion bezeichnet und erreicht ihr Maximum bei für $\nu \approx 0,29 \nu_c$. Sie kann genähert werden durch (Manolakou *et al.* 2007)

$$F(x) \approx 1,85x^{1/3}e^{-x}, \quad (3.16)$$

oder numerisch berechnet werden. Um eine größere Genauigkeit bei der Berechnung des SED-Modells zu erreichen, wurde eine Routine in der Programmiersprache C geschrieben, die $F(x)$ mittels numerischer Integration berechnet. Das Ergebnis ist mit der Näherung in Abbildung 3.2 verglichen.

Für einen beliebigen Pitch-Winkel wird Gleichung 3.15a mit $\sin\theta$ modifiziert. Die emittierte Leistung ist gleich der Leuchtkraft und somit ergibt sich die Einteilchen-Synchrotronleuchtkraft $\mathcal{L}_\nu^{\text{Sy}}$ zu

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{Sy}} = \sin\theta P(\nu). \quad (3.17)$$

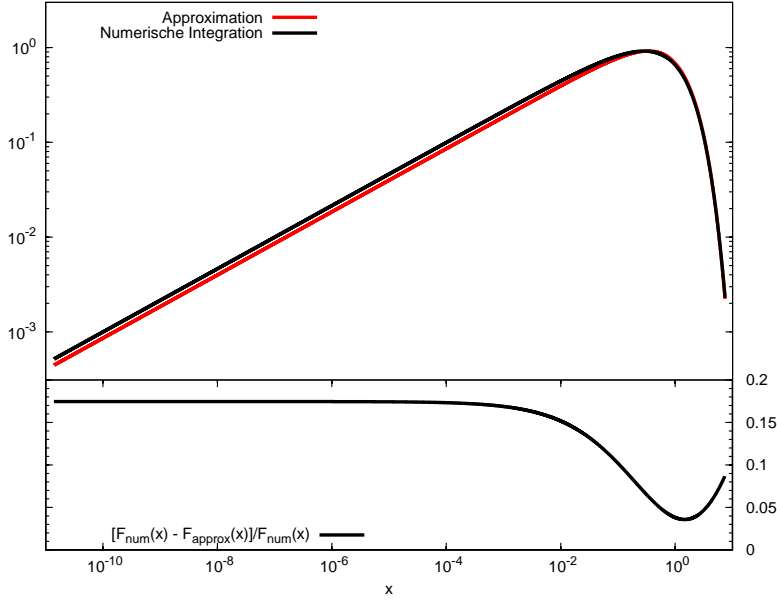


ABBILDUNG 3.2: Vergleich der Näherung der Synchrotronfunktion aus Gleichung 3.16 und der numerischen Berechnung. In der unteren Abbildung ist der relative Fehler aufgetragen. Vor allem für kleine Frequenzen ist eine konstante Abweichung zu erkennen, weswegen für die Berechnung des SED-Modells die numerische Berechnung verwendet wird.

Die kritische Frequenz ändert sich ebenfalls zu

$$\nu_c = \frac{3eB\gamma^2}{4\pi mc} \sin \theta. \quad (3.18)$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die Ergebnisse in passenden Einheiten angegeben,

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{Sy}} = 2,344 \cdot 10^{-39} \sin \theta \left(\frac{B}{10^{-4} \text{ G}} \right) F \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right) \text{ ergs s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}, \quad (3.19a)$$

$$\nu_c = 4,199 \cdot 10^2 \gamma^2 \sin \theta \left(\frac{B}{10^{-4} \text{ G}} \right) \text{ Hz}. \quad (3.19b)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen wird in Abschnitt 3.2 das Modell der SED berechnet.

Emittiertes Spektrum einer Elektronenverteilung

Im Fall des Krebsnebels ergibt sich das beobachtete Spektrum nicht durch ein Elektron, sondern durch eine Elektronenverteilung. Nimmt man eine räumlich gemittelte differentielle Verteilung der Elektronenanzahl, $dN_{\text{el}}/d\gamma$, an, die außerdem isotrop im

Pitch-Winkel ist, so ergibt sich die gesamte Synchrotronleuchtkraft L_ν^{Sy} zu

$$L_\nu^{\text{Sy}} = \int_1^\infty \mathcal{L}_\nu^{\text{Sy}} \frac{dN_{\text{el}}}{d\gamma} d\gamma. \quad (3.20)$$

Die untere Integralgrenze stellt dabei die Ruheenergie der Elektronen dar, für die der Lorentzfaktor $\gamma = 1$ ist. Das Elektronenspektrum im Krebsnebel kann, wie sich herausstellen wird, durch mehrere Potenzgesetze von der Form

$$\frac{dN_{\text{el}}}{d\gamma} = N_0 \gamma^{-S}, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \quad (3.21)$$

beschrieben werden, wobei N_0 eine Normierung ist und S als spektraler Index bezeichnet wird. In der Näherung, dass $\nu_c(\gamma_1) \ll \nu \ll \nu_c(\gamma_2)$ ist, kann das Integral aus Gleichung 3.20 analytisch berechnet werden (Westfold 1959) und man erhält

$$L_\nu^{\text{Sy}} \propto B^{(S+1)/2} \nu^{-(S-1)/2}. \quad (3.22)$$

Dieses ist ein wichtiges Ergebnis: hat man ein Spektrum L_ν mit spektralem Index α gemessen, so kann man eine Aussage über den spektralen Index des zugrunde liegenden Elektronenspektrums machen, da

$$\alpha = (S - 1)/2 \quad \Leftrightarrow \quad S = 2\alpha + 1 \quad (3.23)$$

gilt.

Es sei noch etwas zu den verschiedenen spektralen Indizes angemerkt, da es leicht zu Verwirrungen kommen kann, welcher Index was beschreibt. In dieser Arbeit wird S immer den Spektralindex der Elektronen bezeichnen, während α den Index des gemessenen Spektrums L_ν , aber *nicht* νL_ν oder νf_ν , bezeichnet. Für letztere Darstellungen ist der spektrale Index gegeben durch $\alpha' = \alpha - 1$. Der Photonenindex Γ wiederum ist mit α verknüpft durch Gleichung 3.1 und 3.2 zu $\Gamma = 1 + \alpha$. Diese Beziehungen sind in Tabelle 3.2 noch einmal zusammengefasst und die Relationen, die S beinhalten, beziehen sich auf den Fall der Synchrotronstrahlung.

TABELLE 3.2: Zusammenfassung der Relationen der Spektral- und Photonenindizes. Jede Zeile gibt den jeweiligen Index in Abhängigkeit des Index der jeweiligen Spalte.

Beschriebene Größe	$dN_{\text{el}}/d\gamma$	L_ν	$\nu f_\nu, \nu L_\nu$	dN/dE
Spektral- bzw. Photonindex	S	α	α'	Γ
S		$2\alpha + 1$	$2\alpha' + 3$	$2\Gamma - 1$
α	$(S - 1)/2$		$\alpha' + 1$	$\Gamma - 1$
α'	$(S - 3)/2$	$\alpha - 1$		$\Gamma - 2$
Γ	$(S + 1)/2$	$\alpha + 1$	$\alpha' + 2$	

3.1.2 Inverse Compton-Streuung

Synchrotronstrahlung kann Photonen bis zu einer theoretischen Maximalenergie von $h\nu_{\max} \approx \kappa 68 \text{ MeV}$ mit $\kappa \approx 1 - 3$ erzeugen (Aharonian *et al.* 2004). Somit kann sie nicht den hochenergetischen Teil des Spektrums von Energien $E \gtrsim 100 \text{ MeV}$, die (VHE-) Gammastrahlung, erklären. Ein weiterer nicht-thermischer Mechanismus, der Photonen auf diese hohen Energien beschleunigen kann, ist die inverse Compton-Streuung. Sie beschreibt die inelastische Streuung von Photonen der Energie ϵ an relativistischen Teilchen der Energie E . Die Diskussion beschränkt sich wieder auf den Fall der Elektronen. Die Feynmandiagramme der niedrigsten Ordnung sind in Abbildung 3.3 gezeigt.

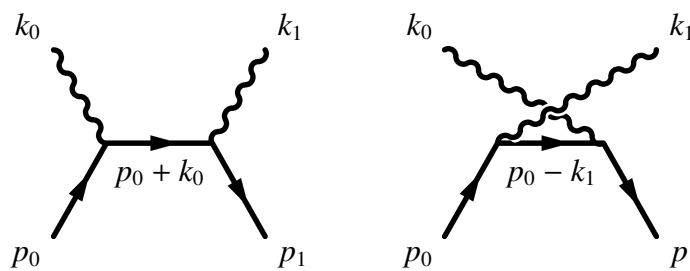


ABBILDUNG 3.3: Feynmandiagramme der niedrigsten Ordnung der inversen Compton-Streuung, hier für den Prozess $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$. Zu sehen sind die Diagramme des t und u Kanals.

Wichtig sind die folgenden Grenzfälle (Limits):

- *Thomson-Limit:* die Photonenergie ϵ' im Ruhesystem des Elektrons ist viel geringer als die Ruheenergie des Elektrons, $\epsilon' \ll mc^2$,
- *Klein-Nishina-Limit:* Die Photonenergie im Ruhesystem des Elektrons ist viel größer als die Ruheenergie des Elektrons, $\epsilon' \gg mc^2$.

Es wird die folgende Notation verwendet: Größen, die mit einem Apostroph versehen sind, beziehen sich auf das Ruhesystem des Elektrons. Die initiale Energie des Photons wird mit ϵ bezeichnet, Größen nach der Wechselwirkung werden mit dem Index „1“ versehen. Wählt man den Elektronenimpuls entlang der x -Achse des Koordinatensystems, $p^\mu = (E, p_x, 0, 0)$, so bezeichnet θ den Winkel zwischen Photonenimpuls $k^\mu = (\epsilon, k \cos \theta, k \sin \theta, 0)$ und der x -Achse (in diesem Zusammenhang ist θ nicht mit dem Pitch-Winkel zu verwechseln).

Energieverlustrate im Thomson-Limit

Angenommen ein hoch-relativistisches Elektron bewegt sich durch ein Photonengas. Durch den inversen Compton-Prozess wird es dabei Energie verlieren. Im Thomson-Limit ist die Energie des gestreuten Photons im Laborsystem K viel größer, als seine

Energie vor dem Stoß, die deshalb vernachlässigt werden kann. Der Energieverlust des Elektrons ist dann

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{dE_1}{dt},$$

wobei E_1 die Energie des Photonengases ist. Die Energieänderung dE_1/dt ist lorentz-invariant, da sie sich unter einer Lorentztransformation verhält wie das Verhältnis k_0/x_0^* . Des Weiteren gilt im Thomson-Limit und im Ruhesystem des Elektrons K' , dass $\epsilon'_1 \approx \epsilon'$. Mit der totalen Energiedichte des Photonengases in K' , $U' = \int \epsilon' dn'$, ergibt sich der Energieverlust zu

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{dE_1}{dt} = \sigma_{\text{T}} c U'. \quad (3.24)$$

Die Energiedichte der Photonverteilung U im Laborsystem erhält man auf folgende Weise: zunächst ist genau wie dE_1/dt auch dn/ϵ lorentzinvariant[†]. Des Weiteren erhält man für die Photonenergie ϵ' in K' durch eine Lorentztransformation in x -Richtung

$$\epsilon' = \gamma\epsilon(1 - \beta \cos \theta). \quad (3.25)$$

Somit kann die Energiedichte der Photonen im Laborsystem berechnet werden, wobei $\beta \rightarrow 1$ genähert werden kann,

$$U' = \int (\epsilon')^2 \frac{dn'}{\epsilon'} = \gamma^2 \int (1 - \cos \theta)^2 \epsilon dn. \quad (3.26)$$

Für eine isotrope Verteilung kann über θ gemittelt werden, so dass $\langle (1 - \cos \theta)^2 \rangle = 4/3$. Im Laborsystem ist somit der Energieverlust des Elektrons gegeben durch

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 U_{\text{iso}}. \quad (3.27)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Energieverlust der Synchrotronstrahlung aus Gleichung 3.10, so stellt man fest, dass die beiden Gleichungen für $\beta = 1$ und $U_{\text{iso}} = B/8\pi$ übereinstimmen. Dies spiegelt die Tatsache wieder, dass Synchrotronstrahlung

* Für ein Photon gilt $ds^2 = dt^2 - (d\mathbf{x})^2 = 0 = k_\mu k^\mu$. Daraus folgt, dass $k_0/x_0 = k_i/x_i$. Mit dieser Beziehung und einer Lorentztransformation ergibt sich dann

$$\frac{k_0}{x_0} = \frac{\Lambda_{0\mu} k'^\mu}{\Lambda_{0\nu} x'^\nu} = \frac{\Lambda_{00} k'^0 + \Lambda_{0i} k'^i}{\Lambda_{00} x'^0 + \Lambda_{0i} x'^i} = \frac{k'_0 \Lambda_{00} + \Lambda_{0i} k'^i/k'_0}{x'_0 \Lambda_{00} + \Lambda_{0i} x'^i/x'_0} = \frac{k'_0}{x'_0},$$

und somit ist k_0/x_0 lorentzinvariant.

† Die differentielle Anzahl der Teilchen dN , zusammen mit dem Volumenelement dV , ergibt die differentielle Anzahl der Teilchen pro Volumen $dn = dN/dV$. Das dreidimensionale Volumenelement kann durch das lorentzinvariante Vierervolumen d^4x ausgedrückt werden, so dass gilt

$$dn = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{d^4x} dx_0.$$

Somit transformiert dn wie x_0 und dn/ϵ ist lorentzinvariant.

auch als Compton-Streuung an virtuellen Photonen des Magnetfelds betrachtet werden kann.

Spektrum der inversen Compton-Streuung

Um das Spektrum zu berechnen, welches entsteht, wenn ein Elektron an der initialen Photonverteilung streut, betrachtet man die Verteilung der gestreuten Photonen pro Zeit in der Energie und im Raumwinkel. Im Energieintervall der einfallenden Photonen $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ ist sie im Ruhesystem der Elektronen, K' , gegeben durch

$$\frac{d^4 N_{\gamma, \epsilon}}{dt' d\epsilon'_1 d\Omega'_1 d\epsilon'} = dn'(\epsilon', \epsilon) c \frac{d^2 \sigma}{d\Omega'_1 d\epsilon'_1}, \quad (3.28)$$

mit $dn(\epsilon; \epsilon')d\epsilon'$ der differentiellen Photonendichte in K' im Intervall $[\epsilon'; \epsilon' + d\epsilon']$, die sich aus den Photonen im Intervall $[\epsilon; \epsilon + d\epsilon]$ ergeben. Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann mit Hilfe der klassischen Elektrodynamik berechnet werden. Die gestreute Photonverteilung im Laborsystem erhält man durch Integration,

$$\frac{d^2 N_{\gamma, \epsilon}}{dt d\epsilon_1} = \iint \frac{d^4 N_{\gamma, \epsilon}}{dt' d\epsilon'_1 d\Omega'_1 d\epsilon'} \frac{dt' d\epsilon'_1}{dt d\epsilon_1} d\epsilon' d\Omega'_1. \quad (3.29)$$

Die Details zur Berechnung dieses Integrales können zum Beispiel Blumenthal & Gould (1970) entnommen werden. Für das Klein-Nishina-Limit gestaltet sich die Berechnung der Photonverteilung ähnlich, jedoch muss der Rückstoß des Elektrons mit in Betracht gezogen werden. Als Ergebnis erhält man

$$\frac{d^2 N_{\gamma, \epsilon}}{dt d\epsilon_1} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_{TC} n(\epsilon) d\epsilon}{\gamma^2 \epsilon} f_{IC}(\epsilon, \epsilon_1, \gamma), \quad (3.30)$$

mit $n(\epsilon)$ der über θ gemittelten Photonendichte und $f_{IC}(\epsilon, \epsilon_1, \gamma)$ der IC-Strahlungsverteilungsfunktion

$$f_{IC}(\epsilon, \epsilon', \gamma) = 2q \ln q + 1 + q - 2q^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{4\epsilon\gamma}{mc^2} q\right)^2}{1 + \frac{4\epsilon\gamma}{mc^2} q} (1 - q) \quad (3.31)$$

mit der kinematischen Variablen q , wobei $h\nu = \epsilon_1$ ist,

$$q = \frac{h\nu}{4\epsilon\gamma^2[1 - h\nu/(\gamma mc^2)]}. \quad (3.32)$$

Die Funktion $f_{IC}(\epsilon, \epsilon_1, \gamma)$ beschreibt eine breite Verteilung und ist maximal für $\nu = 0$. Die Photonverteilung $n(\epsilon)$ an der das Elektron streut, wird häufig als *Saat-Photonenfeld* (*seed photonfield*) n_{Seed} bezeichnet. Schließlich erhält man durch Integration über

alle einfallenden Photonenenergien ϵ die Leuchtkraft eines Elektrons,

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{IC}} = \nu \int_{h\nu/(4\gamma^2)}^{h\nu} \frac{d^2 N_{\gamma,\epsilon}}{dtd\nu} d\epsilon. \quad (3.33)$$

Für die Variable q erhält man aus der Kinematik des Streuprozesses die Beschränkungen $1 \ll (1/4)\gamma^2 \leq q \leq 1$ aus der sich ebenfalls die Integrationsgrenzen der obigen Gleichung ergeben.

3.2 Modell der SED

Mit Hilfe der Gleichungen für nicht-thermische Strahlungsprozesse lässt sich nun ein Modell für die spektrale Energieverteilung des Krebsnebels berechnen. Die folgenden Annahmen werden für das Modell getroffen:

- Der Nebel wird vereinfachend als sphärischsymmetrisch angenommen.
- Der Nebel ist gefüllt mit einer Elektronen- und Positronenverteilung (abkürzend wird im folgenden nur von Elektronen gesprochen), die durch eine volumengemittelte spektrale Verteilung $dN_{\text{el}}/d\gamma$ der Elektronenanzahl beschrieben wird. Der mögliche Beitrag von Ionen wird weiter unten diskutiert.
- Das im Nebel vorherrschende Magnetfeld wird durch ein volumengemitteltes B -Feld beschrieben, daher auch die Bezeichnung *konstantes B-Feld-Modell* in Abbildung 3.1. Es wird außerdem angenommen, dass der Pitch-Winkel der Elektronen durch eine isotrope Verteilung gegeben ist, wodurch sich die Beiträge von der Form $\sin \theta$ zu $\sqrt{2/3}$ mitteln.

Für das Modell wird der Ansatz gewählt, dass der Hauptanteil der Strahlung durch Synchrotronemission und den IC-Prozess erzeugt wird. Die Beobachtungen zeigen, dass die SED durch mehrere Potenzgesetze beschrieben werden kann. In Gleichung 3.22 zeigte sich, dass die Synchrotronstrahlung ebenfalls einem Potenzgesetz folgt, wenn Selbiges auch für die Elektronenspektren gilt. Wie bereits am Anfang dieses Kapitels angemerkt, reicht ein einzelnes Spektrum nicht aus, um den Übergang vom Radio- zum optischen Bereich zu erklären. Aus diesem Grund werden für die Modellierung zwei Spektren angenommen. Des Weiteren kann aus theoretischen Überlegungen gefolgert werden, dass die Elektronen, die für die Radioemission verantwortlich sind, nicht gleichzeitig die Strahlung mit höheren Energien erzeugen können. Diese Betrachtungen werden in Abschnitt 3.3 zusammen mit den genauen Verläufen der Spektren vorgestellt.

Für den hochenergetischen Teil des Spektrums wird der Prozess der IC-Streuung angenommen. Weitere Beiträge zur SED liefern die thermische Emission von Staub und

die optische Emission der Filamente im Nebel. Die gesamte Leuchtkraft ergibt sich durch die Summation der einzelnen Komponenten,

$$L_\nu = L_\nu^{\text{nt}} + L_\nu^{\text{Staub}} + L_\nu^{\text{optisch}} \quad (3.34)$$

und ist in Abbildung 3.1 gezeigt. Die gesamte Leuchtkraft der nicht-thermischen Strahlung, L_ν^{nt} , ergibt sich aus den Gleichungen 3.20 und 3.33 zu

$$L_\nu^{\text{nt}} = \int_1^\infty d\gamma \frac{dN_{\text{el}}}{d\gamma} (\mathcal{L}_\nu^{\text{Sy}} + \mathcal{L}_\nu^{\text{IC}}). \quad (3.35)$$

Die Elektronenverteilung wird so variiert, dass die Daten des Synchrotronkontinuums gut beschrieben werden.

Eine statistische Anpassung zum Beispiel mittels der χ^2 -Methode (siehe Anhang B.2) an die komplette Zusammenstellung der Daten aus Tabelle 3.1 ist in sofern schwierig, als dass die Daten mit verschiedenen Instrumenten gemessen wurden und dementsprechend immer andere systematische Fehler zu erwarten sind. Im Fall der optischen Daten sind noch nicht einmal statistische Fehler angegeben, so dass diese zur Berechnung des χ^2 -Wertes abgeschätzt werden müssten. Ferner involviert die Anpassung des Synchrotronspektrums eine Anzahl von $O(200)$ Datenpunkten, was die Berechnung der besten Parameter kompliziert gestaltet. Außerdem müssen in die Anpassung zusätzlich die Beiträge des Staubs und der optischen Linienemission einbezogen werden. Aufgrund dieser Schwierigkeiten wurde die Anpassung „per Hand“ vorgenommen.

Das Spektrum wurde mit dem selbst geschriebenen Programm *crab* berechnet, dessen Funktionsweise genauer in Anhang A.1 erläutert wird. Das Programm erstellt das komplette Spektrum mit allen Beiträgen, wobei sich die einzelnen Parameter variieren lassen, um so die bestmögliche Anpassung an die Daten zu erreichen.

Bevor die IC-Komponente des Spektrums besprochen wird, soll noch auf die weiteren beobachtbaren Emissionen des Nebels eingegangen werden.

Thermische Emission des Staubs

Beobachtungen bei Wellenlängen im Submillimeter- und fernen Infrarot-Bereich (Marsden *et al.* 1984; Temim *et al.* 2006) zeigen einen Anstieg des Flusses, der nicht allein durch das Synchrotronkontinuum erklärt werden kann. Vielmehr ist hierfür die thermische Emission des Staubes verantwortlich. Dieser Staub wird im Strahlungsfeld des Nebels auf eine Temperatur T_d (der Index d steht für *dust*, zu Deutsch Staub) aufgeheizt, die sich im Gleichgewicht von absorbiertem und emittierter Strahlung einstellt (Unsöld & Baschek 2002). Die Emission kann somit durch ein sogenanntes Graukörperspektrum beschrieben werden. Es folgt im Wesentlichen der Planckverteilung eines Schwarzen Körpers, allerdings lässt es noch einen zusätzlichen freien Normierungsparameter N_d zu, um Faktoren, wie Verteilung des Staubs im Nebel oder Form der Staubkörner, mit einzubeziehen. Der Photonenfluss j_ν der thermischen Photonen

durch eine Einheitsfläche an der Oberfläche der Strahlungsregion ist gegeben durch (Unsöld & Baschek 2002):

$$j_\nu = \frac{8\pi N_d v^2}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T_d)} - 1}. \quad (3.36)$$

Die Ausdehnung der Strahlungsregion des Staubs schätzen Hillas *et al.* (1998) auf $\phi = 1,3'$ ab. Unter Annahme einer sphärischen Symmetrie des Nebels mit einem Radius $r = d \tan \phi$ erhält man die Gesamtleuchtkraft des Staubs,

$$L_\nu^{\text{Staub}} = 4\pi r^2 h\nu j_\nu = 32\pi^2 N_d \tan^2 \phi d^2 \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T_d)} - 1}. \quad (3.37)$$

Eine Anpassung an die Daten, die in Abbildung 3.4 als Vergrößerung der SED gezeigt sind, ergibt eine Temperatur von $T_d = 93$ K und eine Normierung von $N_d = 3,63 \cdot 10^{-5}$. Durch das Maximum der Staubemission, $(\nu f_\nu)_{\text{max}} \approx 6,45 \cdot 10^{-9}$ ergs s⁻¹ cm⁻², ist es außerdem möglich, die gesamte Staubmasse M_d nach Gehrz *et al.* (1998) abzuschätzen,

$$M_d = \frac{1,36(\nu f_\nu)_{\text{max}} a \rho 4\pi d^2}{3\sigma_{\text{SB}} T^4}, \quad (3.38)$$

wobei σ_{SB} die Stefan-Boltzmann-Konstante ist und Graphitstaubkörner der Größe $a = 10$ μm mit einer Dichte von $\rho = 2,25$ g cm⁻³ angenommen werden (Temim *et al.* 2006). Dies führt zu einer Staubmasse, ausgedrückt in Sonnenmassen M_\odot , von $M_d = 4 \cdot 10^{-4} M_\odot$, was ungefähr 40% des Wertes entspricht, der von Temim *et al.* (2006) abgeschätzt wurde.

Optische Emission der Filamente

Neben der thermischen Emission des Staubs lässt sich außerdem optische Linienemission aus den Filamenten des Nebels beobachten. Diese trägt ebenfalls zur SED bei und ist in Abbildung 3.1 als orangene durchgezogene Linie dargestellt. Wie in Kapitel 2 beschrieben, resultiert sie aus der Rekombination in Atomen, die durch die Synchrotronstrahlung ionisiert werden. Die optischen Flüsse sind Davidson & Fesen (1985), Davidson (1987) und Hester *et al.* (1990) entnommen und die Linien werden im Modell durch δ -Distributionen genähert. Aufgrund der starken Abschwächung des Flusses bei optischen Wellenlängen und der Tatsache, dass sich die Messungen zum Teil nur auf einzelne Gebiete von Filamenten und nicht auf den gesamten Nebel beziehen, müssen die Messungen korrigiert (Hester *et al.* 1990), beziehungsweise auf das gesamte Volumen des Nebels skaliert werden, was zusätzliche Unsicherheiten auf die Messungen verursacht (siehe auch die Diskussion in Davidson & Fesen 1985)

Inverse Compton-Komponente des Spektrums

Zur Berechnung der IC-Leuchtkraft werden die differentiellen Verteilungen $n_{\text{Seed}}(\epsilon)$ der Saat-Photonenfelder benötigt. Für das Modell werden die folgenden Photonendichten,

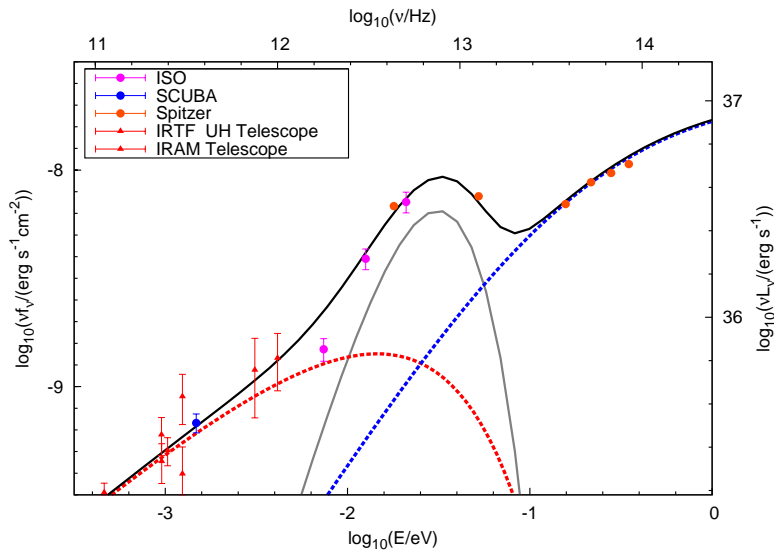


ABBILDUNG 3.4: Vergrößerter Ausschnitt der SED bei Submillimeter- und fernen Infrarotenergien. Neben den Beiträgen des Synchrotronkontinuums der beiden Elektronenspektren (gestrichelte Linien) ist das Graukörperspektrum der thermischen Emission des Staubs gezeigt (graue durchgezogene Linie).

beginnend mit dem stärksten Beitrag zur IC-Leuchtkraft, verwendet:

1. Synchrotronstrahlung,
2. thermische Emission des Staubs
3. Kosmische Hintergrundstrahlung (*Cosmic Microwave Background, CMB**)
4. optische Linienemission der Filamente.

Folgt man dem Ansatz von Hillas *et al.* (1998) zur Berechnung der SED, so können die Photonendichten der Synchrotronstrahlung, des Staubs und der Linienemission durch eine Gaußverteilung $\exp[-r^2/(2\sigma^2)]$ mit r dem Abstand vom Zentrum des Nebels beschrieben werden. Für die Elektronenverteilung wird ebenfalls eine Gaußverteilung $\propto \exp[-r^2/(2\rho^2)]$ angenommen. Es können nur solche Photonen durch den IC-Prozess beschleunigt werden, bei denen die beiden Verteilungen überlappen. Durch eine Faltung erhält man die Gesamtverteilung, die dann die Varianz $\sqrt{\sigma^2 + \rho^2}$ aufweist[†]. Bei

* Die kosmische Hintergrundstrahlung macht den Großteil an Strahlungsenergie jenseits unserer Galaxie im Universum aus und sie folgt mit großer Genauigkeit dem Spektrum eines Schwarzen Körpers mit $T = 2,725$ K (Amsler *et al.* 2008). In der Theorie des Urknalls (*hot Big Bang model*) wird davon ausgegangen, dass ≈ 372.000 Jahren nach dem Urknall Strahlung von Materie entkoppeln und frei propagieren konnte. Das Strahlungsfeld konnte sich adiabatisch mit dem Universum ausdehnen, was wir jetzt als CMB beobachten (Unsöld & Baschek 2002).

† Die Faltung zweier Gaußverteilungen $f(r)$ und $g(r)$ mit Mittelwerten $\bar{r} = 0$, aber unterschiedlichen Varianzen, $(f * g)(r) \propto \int \exp[-\tau^2/(2\sigma^2)] \exp[-(r - \tau)^2/(2\rho^2)] d\tau$, lässt sich berechnen, in dem man

einer gesamten Photonproduktionsrate S_ν bei einer Frequenz ν ergibt sich die Photonendichte zu $S_\nu/[4\pi c(\sigma^2 + \rho^2)]$. Die Photonendichte des CMB wird dagegen als konstant angenommen. Die Varianzen der Photonendichten leiten Hillas *et al.* (1998) aus Beobachtungen des Nebels ab. Im Frequenzbereich zwischen 5 GHz und 250 GHz wird der projizierte Winkelabstand φ gut durch eine Gaußverteilung mit $\exp[-\varphi^2/(2\zeta^2)]$ beschrieben, mit $\zeta = 1,35'$. Für optische Wellenlängen ist $\zeta = 0,88'$ und bei Röntgenenergien ist $\zeta = 0,66'$. Die Varianz der Photonendichte genügt dann der Beziehung $\sigma = d \tan \zeta$. Für die abnehmende Größe des Nebels hin zu höheren Energien treffen Hillas *et al.* (1998) somit folgende Abschätzung:

$$\arctan\left(\frac{\sigma}{d}\right) = \begin{cases} 1,35' & \text{für } \epsilon < 0,02 \text{ eV,} \\ \left(0,16 + 1,19 \left[\frac{\epsilon}{0,02 \text{ eV}}\right]^{-0,09}\right) \text{ arcmin} & \text{für } \epsilon \geq 0,02 \text{ eV,} \end{cases} \quad (3.39)$$

mit der Photonenenergie ϵ . Um die Varianz der Elektronenverteilung zu ermitteln, nehmen Hillas *et al.* (1998) vereinfachend an, dass die Photonen nur durch Synchrotronstrahlung erzeugt werden und somit ρ genau so skaliert wie σ . Mit der Beziehung $\epsilon = h\nu_c \propto \gamma^2$, siehe Gleichung 3.19b, und unter der Annahme eines mittleren magnetischen Feldes von 320 μG für Elektronen, die Radiofrequenzen emittieren, folgt dann

$$\arctan\left(\frac{\rho}{d}\right) = \begin{cases} 1,35' & \text{für } E < 34 \text{ GeV} \\ \left(0,16 + 1,2 \left(\frac{E}{34 \text{ GeV}}\right)^{-0,17}\right) \text{ arcmin} & \text{für } E \geq 34 \text{ GeV.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Als Neuerung wird in dieser Arbeit außerdem das Saat-Photonenfeld der optischen Emission mit in Betracht gezogen. Für diese Emission wird die selbe Größe des Nebels wie für die thermische Emission angenommen, da der Nebel bei Radio- und optischen Wellenlängen ungefähr die selbe Ausdehnung hat (siehe zum Beispiel Abbildung 3 in Temim *et al.* 2006, und Abbildung 2.2(b)). Die optische Emission der Filamente ist allerdings in einem kleineren Volumen als der Staub konzentriert, weswegen ein zusätzlicher freier Parameter η für den Fluss erlaubt wird. Eine gute Anpassung des Synchrotronkontinuums plus Linienemission wird für $\eta = 5$ erreicht.

Aus den modellierten Leuchtkräften lassen sich Produktionsraten S_ν der Photonen bestimmen, aus denen sich die gesamte Photonendichte berechnen lässt,

$$n_{\text{Seed}} = \frac{S_\nu}{4\pi c(\rho^2 + \sigma^2)} + n_{\text{CMB}}. \quad (3.41)$$

die Exponenten zusammenfasst, nach τ quadratisch ergänzt und nach einer Variablensubstitution die Integration über eine Gaußfunktion ausführt. Das Ergebnis lautet dann $(f * g)(r) = 1/\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \rho^2)} \cdot \exp\{-r^2/[2(\sigma^2 + \rho^2)]\}$.

Dabei stellt S_ν eine Summe der verschiedenen Beiträge dar. Sie ist proportional zur modellierten Gesamtleuchtkraft L_ν aus Gleichung 3.34 und trägt die Dimension $[\text{Zeit}]^{-1}$. Die optische Komponente ist dabei gegeben durch

$$L_\nu^{\text{opt}} = \eta \sum_i L_i^{\text{opt}} \delta(\nu - \nu_i), \quad (3.42)$$

mit L_i^{opt} den Leuchtkräften der Referenzen aus Tabelle 3.1. Für den CMB wird ein Schwarzkörperspektrum der Temperatur $T = 2,725$ K angenommen, dessen Photonendichte sich aus Gleichung 3.36, allerdings ohne den Faktor N_d , ergibt. Somit sind alle Saat-Photonenfelder bestimmt und der Fluss der IC-Streuung kann mit Gleichung 3.33 und 3.30 berechnet werden. Die resultierende SED für hohe Energien ist in Abbildung 3.5 mit den Beiträgen der einzelnen Komponenten gezeigt. Die Nummerierung entspricht der vom Anfang dieses Abschnittes. Zusätzlich sind die Datenpunkte des Fermi/LATs und der IACTs HEGRA, H.E.S.S. und MAGIC zu sehen. Als einzigen freien Parameter gilt es nun noch das räumlich gemittelte Magnetfeld zu bestimmen.

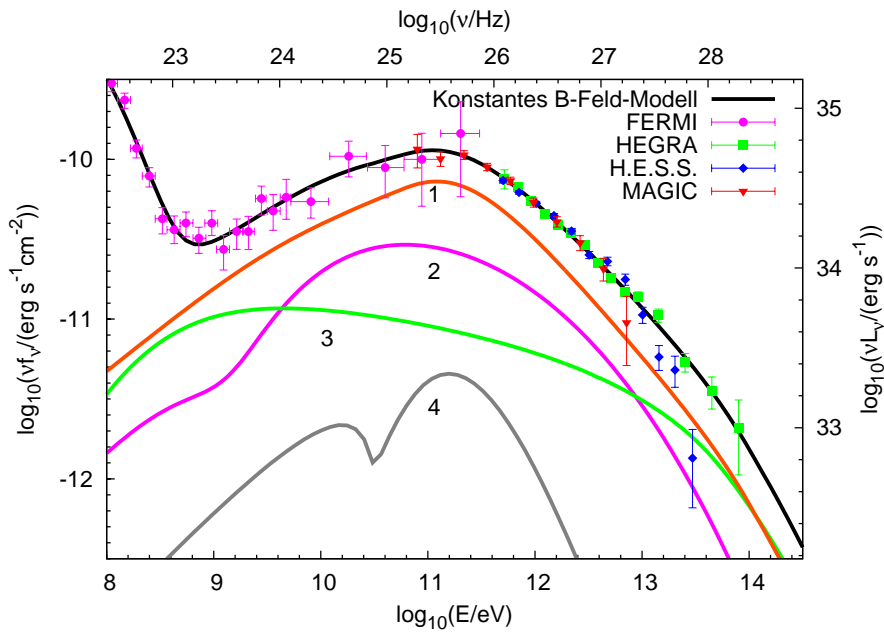


ABBILDUNG 3.5: Beiträge zum Fluss der inversen Compton-Streuung: (1) Synchrotronstrahlung, (2) thermische Emission des Staubs, (3) CMB und (4) optische Emission der Filamente. Die zwei Maxima der optischen Emission sind durch die Beiträge der beiden Elektronenspektren zu erklären.

Anpassung des Magnetfeldes.

Das Magnetfeld wird durch eine χ^2 -Anpassung des IC-Flusses an die Datenpunkte der Fermi/LAT-Messung bestimmt. Durch Variation des magnetischen Feldes ändert sich

auch der Synchrotronfluss. Dies kann durch eine Änderung des Elektronenspektrums ausgeglichen werden. Dies geschieht auf folgende Weise. Angenommen, das Elektronenspektrum ist durch ein Potenzgesetz von der Form

$$\frac{dN_{\text{el}}}{d\gamma} = N_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-s} \quad (3.43)$$

gegeben. Aus Gleichung 3.22 geht hervor, dass näherungsweise $L_\nu \propto B^{(s+1)/2}$ gilt. Wird nun das magnetische Feld geändert zu $B \rightarrow B'$ ist $L'_\nu \propto (B')^{(s+1)/2}$. Ändert man nun die Normierungen des Elektronenspektrums

$$N_0 \longrightarrow N'_0 = N_0 \sqrt{\frac{B}{B'}} \quad \text{und} \quad \gamma_0 \longrightarrow \gamma'_0 = \gamma_0 \sqrt{\frac{B}{B'}}, \quad (3.44)$$

so verschiebt sich das gesamte Elektronenspektrum zu $dN'_{\text{el}}/d\gamma = (B/B')^{(s+1)/2} dN_{\text{el}}/d\gamma$, wodurch die Synchrotronleuchtkraft nahezu konstant bleibt. Dagegen ändert sich der IC-Fluss, da für dessen Berechnung noch ein weiteres Mal über die Elektronenverteilung integriert wird, die aber für jedes B -Feld nach obiger Überlegung eine andere ist (siehe Gleichung 3.34). Dies geschieht automatisch und ist im Programm *crab* implementiert. Zur Minimierung der χ^2 -Statistik wurden nur die Fermi-Messungen oberhalb von 700 MeV verwendet, um den Synchrotronbeitrag auszuschließen. Bei einem variierbaren Parameter und 13 verwendeten Datenpunkten ergeben sich insgesamt 12 Freiheitsgrade (d.o.f.). Die Werte von $\chi^2/\text{d.o.f.}$ in Abhängigkeit vom B -Feld sind in Abbildung 3.6 gezeigt. Der 68,3% Fehler der Anpassung ergibt sich bei einer Erhöhung des minimalen χ^2 um $\Delta\chi^2 = 1$ (siehe auch Anhang B.2). Dieser statistische Fehler beinhaltet nicht die Unsicherheiten, die sich aus der Anpassung des Elektronenspektrums an die Daten des Synchrotronkontinuums ergeben. Aus der systematischen Unsicherheit der Fermienergieskala, die mit $\Delta E/E = \begin{smallmatrix} +5\% \\ -10\% \end{smallmatrix}$ angenommen wird (Abdo *et al.* 2009), ergibt sich außerdem ein systematischer Fehler auf das B -Feld. Des Weiteren ist der Fehler abhängig vom gewählten Modell, da nicht ausgeschlossen werden kann, dass ein anderes Modell eine ebenso gute Beschreibung liefert. Die beste Anpassung ergibt sich für

$$B = \left(123 \begin{smallmatrix} +6 \\ -4 \end{smallmatrix} (\text{stat.}) \begin{smallmatrix} +12 \\ -5 \end{smallmatrix} (\text{sys.}) \right) \mu\text{G}. \quad (3.45)$$

Für diesen Wert beläuft sich der minimale $\chi^2/\text{d.o.f.}$ Wert auf 0,492.

Diskussion des Modells

Als Abschluss dieses Abschnittes soll die vorgestellte Anpassung der SED mit weiteren Modellen verglichen werden.

Vergleich mit Magnetohydrodynamischen Rechnungen. Das vorgestellte Modell liefert eine akkurate Beschreibung des Spektrums und hat außerdem den Vorteil,

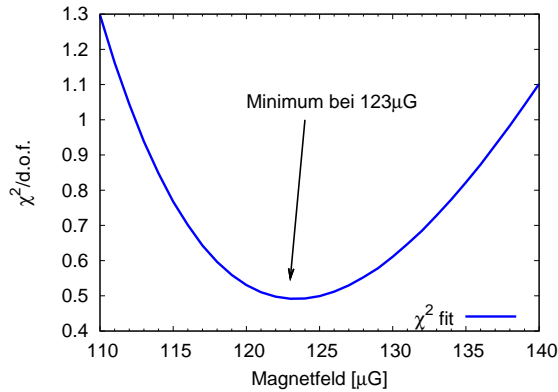


ABBILDUNG 3.6: χ^2 -Minimierung der Anpassung des IC-Flusses an die Fermi/LAT Messung durch Variation des B -Feldes.

dass die Berechnung relativ wenig Rechenzeit in Anspruch nimmt. Ein besser physikalisch motivierter Zugang besteht jedoch in der magnetohydrodynamischen (MHD) Beschreibung des Plasmas im (weiterhin angenommenen) sphärischen Nebel mit der die Entwicklung des B -Feldes und der Teilchen im Nebel berechnet werden können. Ein solches Modell wurde von Rees & Gunn (1974) und Kennel & Coroniti (1984) entwickelt, wobei letztere ebenfalls die Synchrotronemission des Nebels vorhersagen konnten. Atoyan & Aharonian (1996) erweiterten es, um den hochenergetischen Teil des Spektrums zu beschreiben. In der MHD-Beschreibung kann das B -Feld als Funktion vom Abstand zur Schockfront, an der der relativistische Teilchenwind des Pulsars endet und die Teilchen beschleunigt werden (siehe Kapitel 2.1), angegeben werden. Eine räumliche Mittelung, wie sie im vorherigen Modell bereits impliziert ist, ist nicht mehr notwendig.

Die MHD-Berechnung benötigt neben der Teilchenanzahl $n(\gamma)$ pro Einheitsvolumen und Energieintervall $[\gamma, \gamma + d\gamma]$ zwei weitere Parameter: den Abstand der Schockfront vom Zentrum r_s und den Magnetisierungsparameter σ , der gleich dem Verhältnis von Poynting- zu Teilchenfluss ist. Rees & Gunn (1974) nahmen einen Schockabstand von $r_s = 0,10$ pc an, wohingegen Chandrabebachtungen darauf hindeuten, dass der Abstand $r_s = (0,14 \pm 0,01)$ pc beträgt. Meyer *et al.* (2010) haben für einen Wert von $\sigma = 0,005$ und dem neuen Wert von r_s versucht, ihr Modell, welches auf der Arbeit von Atoyan & Aharonian (1996) basiert, an die neue Zusammenstellung der Daten anzupassen. Allerdings können Meyer *et al.* (2010) das beobachtete Spektrum nicht zufriedenstellend beschreiben. Die Daten werden also von dem vereinfachten Modell besser beschrieben, allerdings stehen dort auch mehr freie Parameter zu Verfügung.

Für den angenommenen Wert von σ stimmt das B -Feld gut mit dem räumlich gemittelten Feld von $123 \mu\text{G}$ überein. Die sehr gute Beschreibung durch das vereinfachte Modell legt den Schluss nahe, dass das magnetische Feld im Nebel nicht stark variiert.

Möglicher Beitrag von Ionen zum Spektrum. Eine weitere Komponente, die nicht im oben vorgestellten Modell behandelt wird, ist die Anwesenheit von Ionen

im Nebel. Arons (2004) argumentiert, dass Ionen einen zur diffusen Fermi-Beschleunigung (siehe Abschnitt 3.3.1) alternativen Beschleunigungsmechanismus der Elektronen und Positronen liefern könnten. Am Terminationsschock des Windes würde demnach das Elektron-Positron-Plasma thermisch aufgeheizt und Ionen, die in das Plasma eindringen, würden im Magnetfeld abgelenkt. Diese Änderung der Teilchenbahn würde dann zur Emission elektromagnetischer Wellen führen, die bei resonanter Zyklotronabsorption durch das Paarplasma zu dessen nicht-thermischer Beschleunigung führen würde.

Falls Ionen im Wind anwesend sind, könnten sie durch Produktion von Gammastrahlung theoretisch nachgewiesen werden. Durch inelastische Streuprozesse der Ionen mit Windmaterie entstünden neutrale und geladene Pionen, die bei ihrem Zerfall Gammastrahlung emittieren würden. Dies führt zu einer weiteren Komponente im IC-Fluss.

Im oben vorgestellten Modell ist so eine Komponente nicht nötig, um den beobachteten Fluss zu erklären. Ein rein leptonisches Szenario, also IC-Streuung und Synchrotronstrahlung einer Elektronenverteilung, ist hinreichend, um das Modell an die Daten anzupassen. Aharonian *et al.* (2004) haben den Energieanteil, den Ionen an der Spindown-Leuchtkraft des Pulsars haben könnten, auf maximal 20% abgeschätzt, falls der Lorentzfaktor Γ der Ionenverteilung zwischen 10^4 und 10^6 liegt. Für höhere Lorentzfaktoren kann auch ein höherer Anteil nicht ausgeschlossen werden. Allerdings geht in die Berechnung eine sehr scharfe Energieverteilung der Ionen ein, die nicht unbedingt gegeben sein muss.

3.3 Diskussion der Elektronenspektren

In diesem Abschnitt sollen die Elektronenspektren, die zur Erzeugung des Modells der SED angepasst wurden, vorgestellt werden. Hierzu werden zuerst einige theoretische Grundlagen zur Teilchenbeschleunigung an Schockfronten vorgestellt. Es wird sich zeigen, dass sich die zunächst nur aus den Beobachtungen gerechtfertigten Annahme der Potenzgesetze auch theoretisch herleiten lassen. Zu dem ist es möglich, die spektralen Indizes mit Hilfe der Theorie vorauszusagen. Diese Vorhersagen werden dann mit den eigentlichen Spektren in Abschnitt 3.3.2 verglichen.

3.3.1 Fermi-Beschleunigung an Schockfronten und Kühlprozesse

Eine der am stärksten diskutierten Theorie zur Erklärung der Teilchenbeschleunigung an Schockfronten stellt die Fermi-Beschleunigung dar. Der Mechanismus wurde ursprünglich von Fermi (1949) vorgeschlagen. Als Referenzen für diesen Abschnitt dienen die Arbeiten von Longair (1994, Kapitel 21) und Kirk & Duffy (1999).

Fermi-Beschleunigung

Fermis ursprüngliche Idee bestand darin, dass geladene Teilchen an Unregelmäßigkeiten des galaktischen magnetischen Feldes gestreut werden können. Aufgrund der zufälligen Bewegung dieser „magnetischen Spiegel“ konnte Fermi zeigen, dass Teilchen durch Streuung statistisch beschleunigt werden. Anstelle eines magnetischen Spiegels kann man auch eine massive Wolke des interstellaren Mediums annehmen.

Man stelle sich die Wolke als Grenzfläche vor, die sich mit der Geschwindigkeit V entlang der Flächennormalen in x -Richtung bewegt, der entsprechendem Lorentzfaktor ist $\gamma_V = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} = (1 - \beta_V^2)^{-1/2}$. Das Teilchen fällt in einem Winkel θ zur Flächennormalen der Wolke mit einem Impuls $p \cos \theta$ entlang der x -Achse ein*. Der Rückstoß der Wolke bei der Streuung des Teilchens kann als vernachlässigbar klein angenommen werden. Im Ruhesystem der Wolke sind Energie und Impuls des Teilchens gegeben durch (unter ausdrücklicher Angabe von c)

$$E' = \gamma_V(E + \beta_V c p \cos \theta), \quad (3.46a)$$

$$p'_x = \gamma_V(p \cos \theta + \beta_V E/c). \quad (3.46b)$$

Aus Energie- und Impulserhaltung folgt, dass die Energie vor dem Stoß gleich der Energie nach dem Stoß ist, der Impuls in x -Richtung sich aber genau umkehrt, $p'_x \rightarrow -p'_x$. Daher liefert eine weitere Lorentztransformation in das Laborsystem nach der Streuung das Resultat

$$E'' = \gamma_V(E' + \beta_V c p'_x). \quad (3.47)$$

Einsetzen von E' und p'_x in obere Gleichung und Ausnutzung der Identität $p_x/E = (\gamma m v \cos \theta)/(\gamma m c^2) = v \cos \theta/c^2$ liefert in zweiter Ordnung in β_V die Energieänderung†

$$\Delta E = E'' - E = E \left(\frac{2v\beta_V \cos \theta}{c} + 2\beta_V^2 \right). \quad (3.48)$$

Für relativistische Teilchen mit $v \approx c$ ist die Wahrscheinlichkeit einer Kollision gegeben durch $\gamma_V(1 + \beta_V \cos \theta)$ (Longair 1994, S. 347). Bewegen sich die Wolken zufällig, ist es sinnvoll, über alle möglichen Winkel $\theta \in [0; \pi]$, unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit einer Kollision, zu mitteln. Mit $x = \cos \theta$ erhält man

$$\langle 2\beta_V \cos \theta \rangle = 2\beta_V \frac{\int_{-1}^1 x(1 + \beta_V x) dx}{\int_{-1}^1 (1 + \beta_V x) dx} = \frac{2}{3} \beta_V^2. \quad (3.49)$$

Somit ist der gesamte Energiezuwachs gegeben durch $\langle \Delta E/E \rangle = 8/3 \beta_V^2$ und ist demnach von zweiter Ordnung in β_V . Aus diesem Grund spricht man von der *Fermi-Beschleunigung zweiter Ordnung*. Die Teilchen werden für eine charakteristische Zeit

* In diesem Zusammenhang wird θ ebenfalls häufig als Pitch-Winkel bezeichnet (so zum Beispiel in Kirk & Duffy 1999; Achterberg *et al.* 2001).

† In der Herleitung von Longair (1994) fehlt im folgenden Ausdruck die Energie E .

τ_{esc} beschleunigt, in der sie sich in der Beschleunigungsregion aufhalten. Die Zeit τ_{esc} ist somit mit der Wahrscheinlichkeit P verknüpft, dass die Teilchen nach der Streuung in der Beschleunigungsregion verbleiben. Ist außerdem die mittlere Energie eines Teilchens nach der Streuung gegeben durch $E = \kappa E_0$ mit $\kappa \propto \Delta E$, so kann leicht eingesehen werden, dass das resultierende Spektrum einem Potenzgesetz folgt. Nach k Kollisionen befinden sich noch $N_{\text{el}} = N_0 P^k$ Teilchen mit Energien $E = E_0 \kappa^k$ in der Beschleunigungsregion. Eliminierung von k liefert

$$\frac{\ln(N_{\text{el}}/N_0)}{\ln(E/E_0)} = \frac{\ln P}{\ln \kappa} \quad \Leftrightarrow \quad N_{\text{el}} = N_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\ln P / \ln \kappa}. \quad (3.50)$$

Demnach folgt die Teilchenverteilung in der Energie der Funktion

$$\frac{dN_{\text{el}}}{dE} \propto E^{-1 + \ln P / \ln \kappa}. \quad (3.51)$$

Es bleiben jedoch zwei Probleme. Erstens wird keine Vorhersage über die Werte von κ oder P getroffen. Zweitens ist, vor allem für $V \ll c$, die Beschleunigung sehr ineffizient. Betrachtet man Gleichung 3.48, so wird deutlich, dass für frontale Kollisionen der Energiezuwachs linear in β_V ist. Man spricht deshalb von *Fermi-Beschleunigung erster Ordnung*. Solche Kollisionen wären demnach wirksamer, um schneller hohe Beschleunigungen zu erzielen. Dieses Szenario ist bei der Beschleunigung an Schockfronten realisiert, die im nächsten Teilabschnitt besprochen wird.

Beschleunigung an Schockfronten

Für die Beschreibung von Schockfronten in Gasen oder Flüssigkeiten bedient man sich der relativistischen Hydrodynamik, im Falle von Plasmen findet die Magnetohydrodynamik (MHD) Anwendung. Die Gleichungen, die eine Schockfront in beiden Fällen charakterisieren, sollen nun kurz vorgestellt werden, bevor auf die Teilchenbeschleunigung selbst eingegangen wird.

Relativistische Hydrodynamik. Eine ideale Flüssigkeit mit den Koordinaten x^μ und der Eigenzeit τ kann durch ihre Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (3.52)$$

und den Energie-Impulstensor charakterisiert werden,

$$T^{\mu\nu} = (e + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.53)$$

wobei e die Gesamtenergiedichte und p den Druck beschreibt (Hillebrandt & Müller 2005). Die Grösse h bezeichnet spezifischen Enthalpie und ρ die Ruhemassendichte. Die Eigenenthalpiedichte ist gegeben durch $w = \rho h$ und wird in nachfolgenden Glei-

chungen benötigt.

Für eine kräftefreie Bewegung ohne externe Energiequellen und -senken, ist die Bewegung der Flüssigkeit bestimmt durch Energie- und Impulserhaltung sowie der Teilchenzahlerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_{\mu} (\rho u^{\mu}) = 0, \quad (3.54)$$

mit der kovarianten Ableitung ∇_{μ} (siehe zum Beispiel Hobson *et al.* 2006). Die Schockwelle ist eine Fläche in der Raum-Zeit, die durch eine Funktion ϕ mit der Bedingung $\phi(x^{\mu}) = 0$ beschrieben werden kann und einen Normalenvektor ℓ^{μ} besitzt, mit $\ell_{\mu} \ell^{\mu} = 1$. Die Schockfront beschreibt außerdem eine Unstetigkeit in den Flüssigkeitsvariablen. Aus Energie-, Impuls- und Teilchenzahlerhaltung folgen dann die Schockbedingungen,

$$(\rho u^{\mu}) \ell_{\mu} = 0, \quad T^{\mu\nu} \ell_{\nu} = 0. \quad (3.55)$$

Zwei wichtige Inertialsysteme sind durch die Ruhesysteme der Flüssigkeiten vor der Schockwelle (stromaufwärts, gekennzeichnet mit dem Index „-“) und nach der Schockwelle (stromabwärts, gekennzeichnet mit dem Index „+“) gegeben, in denen man das Lorentzskalar

$$v_{\pm} = \frac{|u_{\pm}^{\mu} \ell_{\mu}|}{\sqrt{1 + |u_{\pm}^{\mu} \ell_{\mu}|^2}}, \quad (3.56)$$

definiert und entsprechend den Lorentzfaktor $\Gamma_{\pm} = (1 - v_{\pm}^2/c^2)^{-1/2}$. Das Skalar v_{\pm} gibt die Geschwindigkeit der Schockfront im jeweiligen Ruhesystem wieder. Im Ruhesystem des Schocks mit der Schocknormalen und der Geschwindigkeit des Plasmas stromaufwärts entlang der x -Achse lassen sich die Größen stromabwärts aus den Erhaltungssätzen aus der Gleichung 3.55 herleiten,

$$\Gamma_{-} \rho_{-} v_{-} = \Gamma_{+} \rho_{+} v_{+} \quad (3.57a)$$

$$\Gamma_{-}^2 w_{-} v_{-}^2 + p_{-} = \Gamma_{+}^2 w_{+} v_{+}^2 + p_{+} \quad (3.57b)$$

$$\Gamma_{-}^2 w_{-} v_{-} = \Gamma_{+}^2 w_{+} v_{+}. \quad (3.57c)$$

Magnetohydrodynamik. In der idealen relativistischen MHD wird angenommen, dass das elektrische Feld im Ruhesystem des Plasmas verschwindet. In diesem Fall kann das Plasma durch die quellenfreien Maxwellgleichungen beschrieben werden, $\nabla_{\mu} (*F^{\mu\nu})$, wobei $*F^{\mu\nu} = 1/2 \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa}$ den dualen elektromagnetischen Feldtensor beschreibt. Bei verschwindendem E -Feld vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\nabla_{\mu} (B^{\mu} u^{\nu} - u^{\mu} B^{\nu}) = 0, \quad (3.58)$$

mit $B^{\mu} = -u_{\nu} (*F^{\mu\nu})$. An der Schockfront gelten die selben Bedingungen wie in Gleichung 3.55, wobei obige Gleichung zusätzlich hinzu kommt und am Schock zu der Bedingung $(B^{\mu} u^{\nu} - u^{\mu} B^{\nu}) \ell_{\mu} = 0$ wird. Der Energie-Impulstensor muss außerdem die Energie und den Impuls des Feldes berücksichtigen, so dass er folgendermaßen modi-

fiziert wird:

$$T^{\mu\nu} = \left(w + \frac{B^2}{4\pi} \right) u^\mu u^\nu + \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) g^{\mu\nu} - \frac{B^\nu B^\mu}{4\pi}. \quad (3.59)$$

Die Schockgleichungen können in der Regel nicht mehr analytisch gelöst werden.

Beschleunigung an Schockfronten. Der besonders einfache Fall eines nicht relativistischen Plasmas ($\Gamma_\pm = 1$) an einem starken Schock, in dem der Druck stromaufwärts vernachlässigt werden kann, $p_- \approx 0$, gilt nach Gleichung 3.57a,

$$\rho_- v_- = \rho_+ v_+. \quad (3.60)$$

Es lässt sich zeigen, dass $\rho_+/\rho_- = (\hat{\gamma} + 1)/(\hat{\gamma} - 1)$ gilt, wobei $\hat{\gamma} = 5/3$ der adiabatische Exponenten für ein einatomiges Gas ist. Demnach ist $v_+ = 1/4v_-$, vergleiche Abbildung 3.7(a). Eine Lorentztransformation in das Ruhesystem des Plasmas stromaufwärts beziehungsweise stromabwärts liefert für das jeweilig andere Plasma den Impuls p'_\pm in x -Richtung

$$p'_\pm = \Gamma m v'_\pm = \Gamma_+ \Gamma_- m (v_\pm - v_\mp). \quad (3.61)$$

Die verschiedenen Situationen sind in Abbildung 3.7 dargestellt. Abbildung 3.7(b) zeigt das Ruhesystem des Plasmas stromaufwärts, nach obiger Gleichung strömt das Plasma stromabwärts mit der Geschwindigkeit $v'_+ = -3/4v_-$ im nicht-relativistischen Fall auf die Schockfront zu. Im Ruhesystem des Plasmas stromabwärts (Abbildung 3.7(c)) ist die Geschwindigkeit des Plasmas stromaufwärts $v'_- = 3/4v_-$ in Richtung des Schocks. Für ein nicht-relativistisches Plasma kann die Annahme gemacht werden, dass sich die Teilchen im Ruhesystem isotrop bewegen und ein Teilchen, das den Schock überquert ebenfalls durch Streuung im Pitch-Winkel isotropisiert wird, wie in den Abbildungen 3.7(b) und (c) gezeigt. Diese Isotropisierung kann beispielsweise durch Streuung an Irregularitäten im Magnetfeld entstehen. Somit ist die Situation in beiden Ruhesystemen identisch. Der Energiegewinn ist nach Gleichung 3.48 im nicht-relativistischen Fall $\Delta E/E \propto v_-/c$, wobei eine genaue Rechnung ergibt, dass im Mittel $\langle \Delta E/E \rangle = (2/3)(v_-/c)$ gilt. Da auf beiden Seiten des Schocks die selbe Situation vorherrscht, gewinnt also ein Teilchen für Hin- und Rückweg die Energie $\langle \Delta E/E \rangle = (4/3)(v_-/c)$. Somit ist κ aus Gleichung 3.51 gegeben durch $\kappa = 1 + 4v_-/(3c)$. Aus der Annahme der Isotropie der Teilchenbewegung im Ruhesystem stromabwärts kann außerdem gefolgert werden, dass für die Fluchtwahrscheinlichkeit $P = 1 - v_-/c$ gilt. Für den Exponenten aus Gleichung 3.51 findet man mit Hilfe der Reihenentwicklung von $\ln(1+x)$ deshalb,

$$-1 + \frac{\ln P}{\ln \kappa} = -1 + \frac{\ln(1 - v_-/c)}{\ln(1 + v_-/c)} \approx -1 - 1 = -2. \quad (3.62)$$

Im Krebsnebel handelt es sich jedoch um eine relativistische Schockfront. In diesem Fall darf man nicht mehr die Annahme der isotropen Pitch-Winkel-Verteilung machen, da die Lorentztransformation von einem Ruhesystem ins andere dann die Winkelver-

teilung stark verändert. Achterberg *et al.* (2001) haben zum Beispiel für ultrarelativistische Schocks gezeigt, dass Teilchen in einem Winkel $\theta_c = 1/\Gamma_s$, mit Γ_s dem Lorentzfaktor des Schocks im Ruhesystem des Plasmas stromaufwärts, über den Schock stromaufwärts gestreut werden und das Streuprozedere diesen Winkel nur um einen Betrag $\Delta\theta \approx \theta_c$ ändern, bevor die Teilchen erneut den Schock passieren.

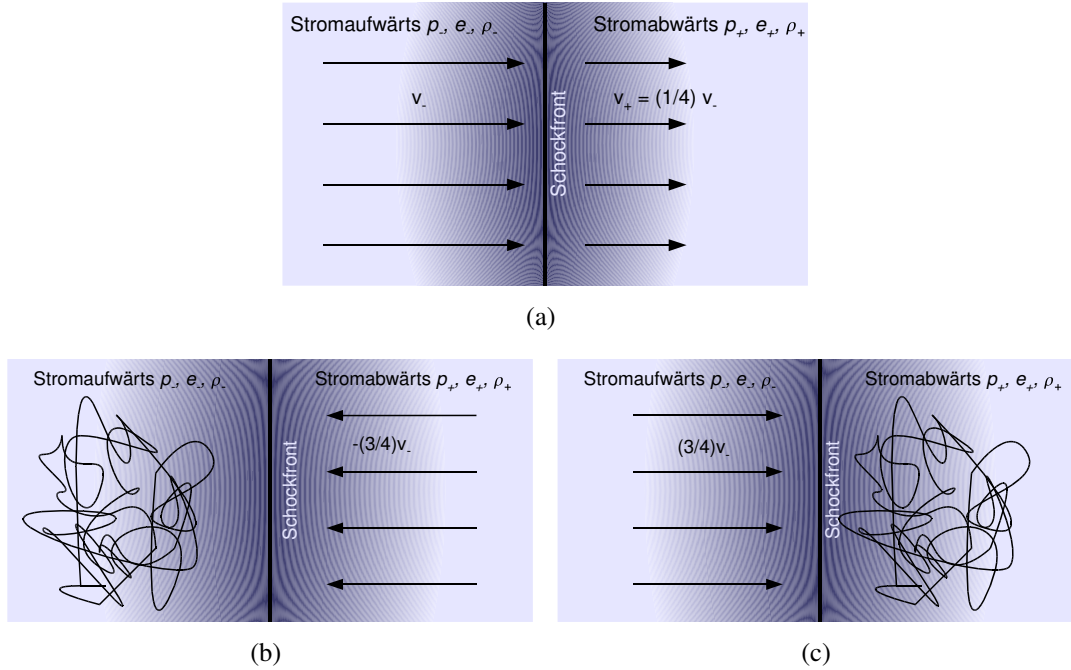


ABBILDUNG 3.7: (a) Ruhesystem der Schockwelle. Im nicht-relativistischen Fall folgt aus den Schockbedingungen, dass für einen starken Schock die Geschwindigkeiten der Plasmen stromauf- und stromabwärts verknüpft sind durch $v_+ = 1/4v_-$. (b) Ruhesystem des Plasmas stromaufwärts, als Ergebnis einer Lorentztransformation des Ruhesystems der Schockfront. Die Teilchen bewegen sich isotrop im Pitch-Winkel und das Plasma stromabwärts läuft mit einer Geschwindigkeit von $3/4v_-$ auf den Schock zu. (c) Ruhesystem des Plasmas stromabwärts. Es zeigt sich die selbe Situation wie in (b). Die Abbildungen sind angelehnt an Longair (1994, Abbildung 21.3)

Der Energiegewinn ist in diesem Fall abhängig von der Pitch-Winkel-Verteilung und für die Impulsverteilung der Teilchen muss eine Diffusionsgleichung gelöst werden. Der Diffusionskoeffizient des Pitch-Winkels[‡] D_{xx} mit $x = \cos\theta$ ist anhängig von dessen Verteilung und D_{xx} ist beispielsweise für eine isotrope Verteilung $\propto 1 - x^2$. Werden die Teilchen an wellenförmigen Irregularitäten mit der Wellenzahl k gestreut, wobei die Komponente parallel zum ungestörten Magnetfeld durch $k_{\parallel} = qB/(p|x|)$ gegeben

[‡] Normalerweise gibt der Diffusionskoeffizient die Stärke an, mit der sich beispielsweise die Teilchenzahl pro Zeit durch einen Fluss ändert und er trägt die Einheit [Fläche/Zeit], siehe Gleichung 3.63. In diesem hier betrachteten Fall gibt er die Stärke der Änderung der Impulsverteilung mit der Zeit für Impulse parallel zur Schockfront an, da $x = \cos\theta \approx \beta_{\parallel}$ mit β_{\parallel} der Geschwindigkeitskomponente parallel zur Schocknormalen (Achterberg *et al.* 2001).

ist, mit dem Impuls p der Teilchen mit Ladung q , so ist der Diffusionskoeffizient von der Form $D_{xx} \propto k_{\parallel} \epsilon(k_{\parallel})$ (Heavens & Drury 1988). Für einen Verlauf von der Form $\epsilon(k_{\parallel}) \propto k_{\parallel}^{5/3}$ spricht man von einem *Kolmogorov-Spektrum*.

Durch numerische Lösungen der Diffusionsgleichung finden beispielsweise Ballard & Heavens (1992) spektrale Indizes in der Region 2,0 – 2,4. Achterberg *et al.* (2001) finden in ihren Simulationen damit übereinstimmend Werte zwischen 2,2 und 2,3.

Kühlprozesse

Nach der Injektion der hochenergetischen Elektronen in den Nebel verlieren diese durch verschiedene Prozesse Energie. Die Entwicklung der Anzahl der Elektronen N_{el} wird durch eine Diffusions-Energieverlust-Gleichung von folgender Form beschrieben (Manolakou *et al.* 2007; Longair 1994)

$$\frac{\partial N_{\text{el}}(\gamma, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \gamma} [\dot{\gamma}(\gamma) N_{\text{el}}(\gamma, t)] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial N_{\text{el}}}{\partial x_j} \right) + \frac{N_{\text{el}}(\gamma, t)}{\tau_{\text{esc}}} = Q(\gamma, t). \quad (3.63)$$

Die Funktion $Q(\gamma, t)$ beschreibt die Rate, mit der die Elektronen injiziert werden, D_{ij} ist der Diffusionskoeffizient (gemessen in Fläche pro Zeit) und τ_{esc} ist die bereits eingeführte charakteristische Zeit, die die Elektronen in der Quellregion verbleiben. Der Energieverlust $\partial \gamma / \partial t = \dot{\gamma}$ kann aus mehreren Beiträgen zusammen gesetzt sein. Diese sind (Longair 1994, Kapitel 19):

- *Ionisationverluste*. Durch die Ionisation (Kollisionen) des umgebenen Mediums verlieren Elektronen Energie mit $\dot{\gamma} \propto N$, mit N der Anzahldicke der Wasserstoffatome.
- *Bremsstrahlung*. Durch die Abbremsung in elektrostatischen Feldern von Ionen und Atomkernen verlieren die Elektronen Energie mit $\dot{\gamma} \propto N$.
- *Adiabatische Verluste*. In einem expandierenden Medium verlieren die Elektronen Energie durch die nach außen gerichtete Konvektion. Ist die Änderung des Volumens des Nebels bestimmt durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, so ist der Energieverlust gegeben durch $\dot{\gamma} = (1/3)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \gamma$ (Longair 1992, Kapitel 11).
- *Synchrotronverluste*. Durch die Emission von Synchrotronstrahlung verlieren die Elektronen ihre Energie gemäß Gleichung 3.9 beziehungsweise 3.10.
- *Inverse Compton-Streuung*. Die inverse Compton-Streuung verursacht einen Energieverlust, der durch Gleichung 3.27 beschrieben wird.

Die Diffusionsgleichung 3.63 ist streng genommen nur für einen stetigen Energieverlust und somit nicht im extremen Klein-Nishina-Grenzfall gültig. Für eine homogene Quelle kann die Diffusion vernachlässigt werden. Sind des Weiteren die Energieverluste und die Fluchtzeit unabhängig von der Zeit, so kann die Diffusionsgleichung

durch die Methode der Greenschen Funktionen oder der Laplace-Transformation gelöst werden (Manolakou *et al.* 2007 und dortige Referenzen). Dominieren Synchrotronverluste, die von der Form $\dot{\gamma} = b_s \gamma^2$ sind, so beschreibt die Lösung den Prozess des spektralen Alterns (*spectral ageing*), was bedeutet, dass der spektrale Index um plus Eins ansteigt. Für eine Injektionsrate, die einem Potenzgesetz folgt (wie bei der Fermi-Beschleunigung), $Q(\gamma, t) = Q_0 \gamma^{-p}$, findet man (siehe zum Beispiel Blumenthal & Gould 1970; Longair 1994; Manolakou *et al.* 2007)

$$N(\gamma, t) = \frac{Q_0 \gamma^{-p}}{(p-1)b_s \gamma} \cdot \begin{cases} [1 - (1 - b_s \gamma t)^{p-1}] & \text{für } 0 \leq b_s \gamma t \leq 1 \\ 1 & \text{für } b_s \gamma t > 1. \end{cases} \quad (3.64)$$

Zusammenfassend lässt sich fest halten, dass man durch die Fermi-Beschleunigung an Schockfronten Potenzgesetze für die spektrale Verteilung der Elektronen erwartet, deren spektrale Indizes typischerweise im Bereich zwischen 2,0 und 2,4 liegen. Zieht man außerdem Kühleffekte in Betracht, so erhöht sich der spektrale Index um Eins, falls Synchrotronkühlung dominiert. Weitere Variationen können zudem auftreten, wenn sich die Teilchen in turbulenten Plasmen bewegen.

Im folgenden Abschnitt werden die modellierten Elektronenspektren anhand dieser Ergebnisse diskutiert.

3.3.2 Modellierte Elektronenspektren

Wie bereits mehrfach erwähnt, werden zwei unterschiedliche Elektronenspektren, die jeweils mit einer Elektronenpopulation identifiziert werden, an die beobachteten Daten angepasst. Die Elektronen, die für die Synchrotronstrahlung unterhalb optischer Energien verantwortlich sind, werden dabei als *Radioelektronen* bezeichnet. Für sie wird folgendes Potenzgesetz angenommen:

$$\frac{dN_{\text{el}}^r}{d\gamma} = \begin{cases} N_0^r \gamma^{-S_r} & \text{für } \gamma_{\text{min}}^r \leq \gamma \leq \gamma_{\text{max}}^r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.65)$$

Die Elektronen, die für die Synchrotronemission von optischen und höheren Energien verantwortlich sind, werden dagegen als *Windelektronen* bezeichnet, da diese kontinuierlich durch den Wind des Pulsar nachgeliefert werden, um dann an der Schockfront beschleunigt zu werden. Dies ist bei den Radioelektronen nicht der Fall, wie im nächsten Abschnitt argumentiert wird. Das Spektrum der Windelektronen folgt ebenfalls einem Potenzgesetz, welches jedoch zum einen einen „Knick“ aufweist und zum anderen bei hohen und niedrigen Energien superexponentiell abbricht (*superexponential*

cut-off) aufweist*:

$$\frac{dN_{\text{el}}^w}{d\gamma} = \begin{cases} N_0^w \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\text{break}}^w}\right)^{-S_w} \exp\left(-\left[\frac{\gamma_{\text{min}}^w}{\gamma}\right]^{\beta_{\text{min}}^w}\right), & \text{für } \gamma < \gamma_{\text{break}}^w, \\ N_1^w \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\text{max}}^w}\right)^{-(S_w+\Delta S)} \exp\left(-\left[\frac{\gamma}{\gamma_{\text{max}}^w}\right]^{\beta_{\text{max}}^w}\right), & \text{für } \gamma \geq \gamma_{\text{break}}^w, \end{cases} \quad (3.66)$$

Die Normierung N_1^w wird so gewählt, dass das Gesamtspektrum bei $\gamma = \gamma_{\text{break}}^w$ stetig ist,

$$N_1^w = N_0^w \left(\frac{\gamma_{\text{break}}^w}{\gamma_{\text{max}}^w}\right)^{S_w+\Delta S} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_{\text{min}}^w}{\gamma_{\text{break}}^w}\right)^{\beta_{\text{min}}^w}\right] \exp\left[\left(\frac{\gamma_{\text{break}}^w}{\gamma_{\text{max}}^w}\right)^{\beta_{\text{max}}^w}\right]. \quad (3.67)$$

Die Werte der Parameter beider Populationen sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst und die Spektren sind in Abbildung 3.8 gezeigt. Wie bereits zu Beginn von Abschnitt 3.2 diskutiert, wurden die Parameter „per Hand“ an die Daten angepasst. Meyer *et al.* (2010) ist es jedoch gelungen, die Parameter mittels einer χ^2 -Anpassung zu bestimmen und die Kovarianzmatrix (siehe Anhang B.2, Gleichung B.9) zu berechnen. Wie zu erwarten ist, sind die Parameter der Radioelektronen miteinander korreliert, vor allem die Normierung mit dem spektralen Index ($N_0^r; S^r$) und der Hochenergie-Cut-Off und die Normierung, ($N_0^r; \gamma_{\text{max}}^r$). Im Windelektronenspektrum sind die spektralen Indizes mit der Knickenergie, der Cut-Off-Energie und den superexponentiellen Cut-Off-Parametern am stärksten korreliert, ($\Delta S; \gamma_{\text{break}}^w$), ($\Delta S; \beta_{\text{min}}^w$), ($\Delta S; \beta_{\text{max}}^w$) und ($\beta_{\text{max}}^w; \gamma_{\text{max}}^w$). Dies ist nicht verwunderlich, da ein sehr ähnliches Spektrum modelliert werden kann, indem man diese Parameterpaare so anpasst, dass sich Änderungen nahezu ausgleichen. Alles in allem sind die meisten Parameter jedoch nur schwach oder gar nicht korreliert. Dies zeigt, dass der Raum der Parameter, die das Spektrum beschreiben, sehr beschränkt und die Wahl der Parameter nicht willkürlich ist. Da die Daten des Synchrotronkontinuums gut durch das Modell beschrieben werden, kann man demnach zuversichtlich sein, Parameter nahe des globalen Minimums der Anpassung ausgewählt zu haben.

Im Folgenden sollen nun die beiden Elektronpopulationen noch genauer besprochen werden.

Radioelektronen

Der Ursprung der Radioelektronen (Kennel & Coroniti 1984; Atoyan & Aharonian 1996; Atoyan 1999; Aharonian *et al.* 2004) ist nicht genau bekannt. Zum einen ist der spektrale Index von $S_r = 1,58$ nicht gut mit den Vorhersagen der Fermi-Beschleunigung (siehe Abschnitt 3.3.1) vereinbar. Zum anderen kann ausgeschlossen werden, dass an der Schockfront nur eine einzige Population von Elektronen beschleunigt wird. Der mittlere Lorentzfaktor der Radioelektronen beträgt $\bar{\gamma}^r = 3,53 \cdot 10^4$, wohingegen der

* Ein exponentieller Cut-Off einer Funktion $f(\gamma)$ beschreibt eine Funktion von der Form $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma) \exp(-\gamma)$ während ein superexponentieller Cut-off eine Funktion der Form $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma) \exp(-\gamma^\beta)$ mit $\beta > 0$ beschreibt.

TABELLE 3.3: Parameter des Elektronenspektrums. Neben den Normierungen und der Knickposition im Windspektrum, sind die superexponentiellen Cut-Off-Parameter angegeben. Für die Radioelektronen bricht das Spektrum bei γ_{\min} und γ_{\max} scharf ab, während die Windelektronen dort superexponentiell abfallen (vergleiche auch Gleichungen 3.65 und 3.66.)

Parameter		Modell SED	
		Radio	Wind
Normierungs-Konstanten.....	N_0	$1,16 \cdot 10^{52}$	$5,30 \cdot 10^{34}$
Niederenergie-Cut-Off.....	γ_{\min}	22,3	$4,58 \cdot 10^5$
Position des Knicks	γ_{break}	–	$1,98 \cdot 10^8$
Hochenergie-Cut-Off.....	γ_{\max}	$1,16 \cdot 10^5$	$5,28 \cdot 10^9$
Spektraler Index (nach dem Knick)	S	1,58	3,24 (3,57)
Niederenergie superexponentieller Cut-Off	β_{\min}^w	–	1,3
Hochenergie superexponentieller Cut-Off	β_{\max}^w	–	2,5

mittlere Lorentzfaktor der Windelektronen $\bar{\gamma}^w = 2,02 \cdot 10^6$ (vergleiche nächsten Abschnitt) ist. Die Werte wurden durch numerische Integration mit Hilfe des Programms *total_en*, siehe Anhang A.1, ermittelt. Aus der Erhaltung des Energie- und des Teilchenflusses am Schock folgt, dass der Lorentzfaktor des Windes stromaufwärts vom Schock, $\gamma_*^w \approx 10^6$, ungefähr gleich dem mittleren Lorentzfaktor des Windes $\bar{\gamma}^w$ stromabwärts vom Schock sein muss (Kundt & Krotscheck 1980; Kennel & Coroniti 1984; Arons 1996). Dies kann mit dem Lorentzfaktor der Radioelektronen nicht gewährleistet werden, da dieser zu gering ist. Atoyan (1999) folgert deswegen, dass die Radioelektronen *Reliktelektronen* darstellen, die in einer frühen Phase mit hoher Spin-down-Leuchtkraft des Pulsars in den Nebel injiziert wurden. Es kann gezeigt werden, dass dies in Einklang mit der Synchrotronkühlzeit der Radioelektronen ist, die gegeben ist durch ($\beta \approx 1$),

$$t_{\text{sy}} = \frac{E}{-dE/dt} = \frac{6\pi m^2 c^3}{\sigma_{\text{T}} B^2 E}, \quad (3.68)$$

wobei dE/dt Gleichung 3.10 entnommen wurde. Die kritische Energie der Photonen $\epsilon_c = h\nu_c$, mit ν_c aus Gleichung 3.18 und $\langle \sin \theta \rangle = \sqrt{2/3}$, ist gegeben durch

$$\epsilon_c = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h e B E^2}{2\pi m^3 c^5} \approx 1,142 \cdot 10^{-12} \gamma^2 \left(\frac{B}{10^{-4} \text{ G}} \right) \text{ eV}. \quad (3.69)$$

Formt man ϵ_c nach der Elektronenenergie E um und setzt den Ausdruck in die Synchrotronkühlzeit ein, so erhält man in passenden Einheiten (Aharonian 2004),

$$t_{\text{sy}}(\epsilon) \approx 1600 \left(\frac{B}{10^{-4} \text{ G}} \right)^{-3/2} \left(\frac{\epsilon}{\text{eV}} \right)^{-1/2} \text{ a}. \quad (3.70)$$

Somit erhält man für Photonen mit $\epsilon \leq 1 \text{ eV}$ und einem magnetischen Feld von $B = 123 \mu\text{G}$ Synchrotronkühlzeiten von $t_{\text{sy}} \geq 1200$ Jahren, was länger ist, als das Alter

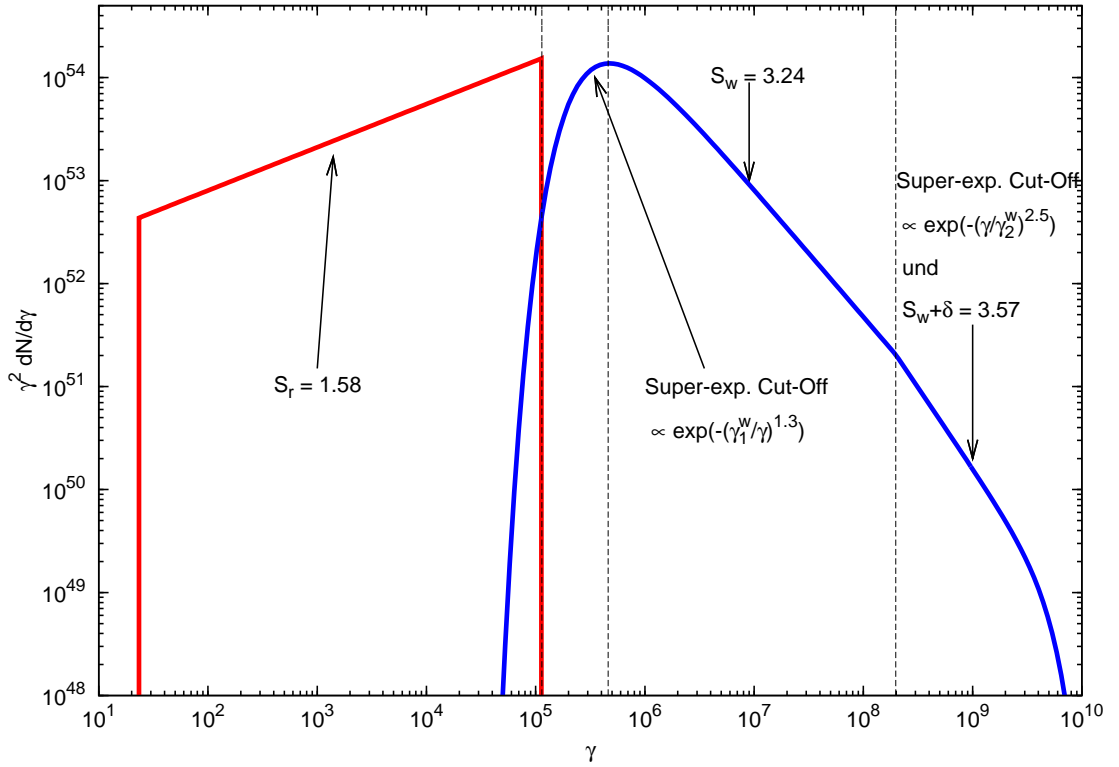


ABBILDUNG 3.8: Elektronenspektrum, das für die Modellierung der SED verwendet wird. In Rot ist der Beitrag der Radioelektronen, in Blau der Beitrag der Windelektronen gezeigt.

des Nebels, $t_{\text{Nebel}} = 956$ Jahre. Somit wären Radioelektronen, die in der frühen Entwicklungszeit des Pulsarwindnebels entstanden sind, noch nicht vollständig gekühlt. Die Elektronen verlieren ihre Energie nicht nur durch Synchrotronstrahlung, sondern auch durch adiabatische Kühlung, da sich der Nebel weiter ausdehnt. Vernachlässigt man diesen Beitrag, so kommt der Abbruch des Radioelektronenspektrums bei hohen Energien nur durch Synchrotronkühlung zustande. Formt man Gleichung 3.68 nach dem B -Feld um, kann durch Einsetzen von t_{Nebel} und der Cut-Off-Energie $\gamma_{\text{max}}^r = 1,14 \cdot 10^5$ eine obere Grenze für das B -Feld bestimmt werden,

$$B \leq 475 \left(\frac{\gamma}{1,14 \cdot 10^5} \right)^{-1/2} \left(\frac{t_{\text{sy}}}{956 \text{ a}} \right)^{-1/2} \mu\text{G}. \quad (3.71)$$

Der Cut-Off ist jedoch schwierig zu bestimmen, da in diesem Bereich sowohl die Synchrotronemissionen beider Elektronenpopulationen als auch die thermische Emission des Staubs überlappen. Eine untere Grenze für das Magnetfeld kann abgeleitet werden, indem man die Normierung der Radioelektronen und das Magnetfeldes solange variiert, bis die IC-Komponente des Spektrums über die von Fermi gemessenen Punkte hinauschießt. Dies führt zu einer unteren Grenze von $B \geq 100 \mu\text{G}$. Diese Grenzen sind gut im Einklang mit dem Wert des mittleren magnetischen Feldes aus Gleichung 3.45.

Der untere scharfe Abbruch bei $\gamma = 22,32$ (was einer Energie von 10^7 eV entspricht) wurde zur schnelleren Berechnung des Spektrums gewählt und enthält keine physikalischen Implikationen. Photonen, die bei dieser Energie durch Synchrotronstrahlung emittiert werden, haben Frequenzen im Bereich von 0,1 MHz (siehe Gleichung 3.18 für $\langle \sin \theta \rangle = \sqrt{2/3}$), die nicht beobachtet sind, wie aus der SED in Abbildung 3.1 deutlich wird.

Windelektronen

Die Windelektronen werden kontinuierlich in den Nebel an der Schockfront injiziert und erzeugen durch Synchrotronstrahlung den Hauptteil des Spektrums jenseits des Submillimeter- und Infrarotenergiebereichs. Dies ist in Abbildung 3.1 durch die blau gestrichelte Kurve klar zu erkennen. Das Elektronenspektrum (blaue Kurve in Abbildung 3.8), das durch Gleichung 3.66 gegeben ist, weist, bis zum Knick im Spektrum bei $\gamma_{\text{break}}^w = 1,98 \cdot 10^8$, einen spektralen Index von $S_w = 3,24 = 2,24 + 1$ auf.

Dies führt im Synchrotronpektrum auf einen Spektralindex von $\alpha = 0,62$ beziehungsweise einen Photonenindex von $\Gamma = 2,12$, siehe Tabelle 3.2, in Übereinstimmung mit dem Index gemessen von XMM-Newton (Kirsch *et al.* 2005).

Der Spektralindex stimmt gut mit den Vorhersagen des vorangegangenen Abschnittes zur Fermi-Beschleunigung 1. Ordnung an einem ultrarelativistischen Schock mit anschließender Synchrotronkühlung überein. Im Gegensatz zum Radioelektronenspektrum, das bei niedrigen Energien scharf abbricht, ist für die Windelektronen ein superexponentieller Cut-Off gewählt. Dies ist notwendig, um das Maximum der SED bei optischen Wellenlängen und den steilen Abfall zu infraroten Wellenlängen (vor allem zu den Spitzer-Messungen) erklären zu können. Der Knick bei $\gamma = \gamma_{\text{break}}^w$ entspricht der Änderung des Spektrums bei harter Röntgenstrahlung von ≈ 55 keV. Der spektrale Index ändert sich dabei um $\Delta S = 0,3$. Dieser Knick muss mit der Beschleunigung und beziehungsweise oder der Injektion der Teilchen zu tun haben. Es kann sich nicht um eine energieabhängige Flucht der Teilchen aus dem Nebel handeln, da die Elektronen im Röntgenbereich durch Synchrotronstrahlung ihre Energie verlieren, bevor sie den Nebel verlassen können. Der Wert von $\Delta S = 0,3$ könnte auf eine Diffusion in Kolmogorov-Turbulenzen hindeuten (Meyer *et al.* 2010), wie sie in Abschnitt 3.3.1 besprochen wurde.

Der obere superexponentielle Cut-Off des Spektrums kann dadurch erklärt werden, dass Teilchen nur auf eine maximale Energie beschleunigt werden können. Bei sehr hohen Energien entkommen die Teilchen der Beschleunigungsregion der Schockfront sehr schnell, sie überqueren den Schock nur wenige Male.

Abschließend soll noch die totale Energie, die im Elektronenspektrum gespeichert ist,

berechnet werden:

$$E_r = mc^2 \int_1^{\infty} \gamma \frac{dN_{el}^r}{d\gamma} d\gamma = 3,0 \cdot 10^{48} \text{ ergs}, \quad (3.72a)$$

$$E_w = mc^2 \int_1^{\infty} \gamma \frac{dN_{el}^w}{d\gamma} d\gamma = 2,2 \cdot 10^{48} \text{ ergs}. \quad (3.72b)$$

Die Integrale wurden mit Programm *total_en* berechnet. Für eine mittlere Spin-down-Leuchtkraft von $1,2 \cdot 10^{39} \text{ ergs s}^{-1}$, ergibt sich die gesamte abgestrahlte Energie bis heute zu $E \approx 3,6 \cdot 10^{49} \text{ ergs}$, so dass ungefähr 14% der gesamten Pulsarenergie in Teilchenenergie umgewandelt wurde.

3.4 Cross-Kalibration der IACTs und dem Fermi/LAT

Die theoretische Modellierung des Energiespektrums eröffnet die Möglichkeit, die Energieskalen unterschiedlicher Instrumente relativ zueinander zu kalibrieren, was in dieser Arbeit als *Cross-Kalibration* bezeichnet wird. Das grundlegende Problem der abbildenden Cherenkov-Teleskope besteht darin, dass eine direkte Kalibration nicht möglich ist und stattdessen die Energieskala indirekt über Monte-Carlo-Simulationen der Luftschauer bestimmt wird (siehe Abschnitt 2.2). Dies ergibt typischerweise Fehler von $\Delta E/E \approx 15\%$ auf die absolute Energieskala. Aus diesem Grund unterscheiden sich die Messungen der einzelnen IACTs*. Für Breitbandbeobachtungen und zum besseren Vergleich der Messungen untereinander wäre es jedoch wünschenswert, wenn alle Daten an der selben Energieskala kalibriert wären. Hierzu bietet das berechnete Modell eine ausgezeichnete Möglichkeit. Erste Versuche, die IACTs untereinander mit Hilfe des Krebsnebels zu kalibrieren, wurden bereits von Horns *et al.* (2005) und Zechlin *et al.* (2008) vorgeschlagen. In dieser Arbeit bietet dagegen das Modell, das im IC-Bereich an die Fermi/LAT Daten angepasst wurde, indirekt die Möglichkeit, von der Kalibration des Fermi/LAT zu profitieren. Der Fehler der absoluten Energieskala des Fermi/LAT beläuft sich auf $\Delta E/E = \begin{smallmatrix} +5\% \\ -10\% \end{smallmatrix}$ (Abdo *et al.* 2009). Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass man die unterschiedlichen Energieskalen relativ zueinander kalibrieren kann.

Die Cross-Kalibration wird folgendermaßen erreicht (siehe auch Meyer *et al.* 2009, 2010): Nachdem das *B*-Feld durch die Anpassung an die Fermi-Daten bestimmt ist (vergleiche Gleichung 3.45), werden die Messdaten der IACTs entlang der Energieachse verschoben. Dafür sorgt ein Skalierungsfaktor der Energie, s_{IACT} ,

$$E = E_{\text{meas}} \cdot s_{\text{IACT}}, \quad (3.73)$$

* Innerhalb des betrachteten Zeitraumes der IACT-Messungen wird der Krebsnebel hierbei als zeitlich konstante Quelle betrachtet.

3 Modell der spektralen Energieverteilung des Krebsnebels

TABELLE 3.4: Energieskalierungsfaktoren der Cross-Kalibration für drei IACTs und dem Fermi/LAT. Der Fehler auf den Skalierungsfaktor von Fermi rührt von der Unsicherheit des magnetischen Feldes her. Zusätzlich sind die χ^2 /d.o.f.-Werte der Datenpunkte vor und nach der Skalierung gezeigt.

Instrument	Skalenfaktor s_{IACT}	Stat. Fehler Δs	$\chi^2_{\text{nachher}}/\text{d.o.f.}$	$\chi^2_{\text{vorher}}/\text{d.o.f.}$
Fermi/LAT	1	+0,04 – 0,06	0,492	–
HEGRA	1,063	$\pm 0,005$	0,974	15,36
H.E.S.S.	0,973	$\pm 0,009$	6,091	7,541
MAGIC	1,034	$\pm 0,007$	0,390	1,547

wobei E_{meas} die gemessene Energie bezeichnet. Mithilfe einer χ^2 -Minimierung werden für die einzelnen Instrumente die besten Skalierungsfaktoren bestimmt. Dies geschieht mit Hilfe des Programmes *scaleit*, das in Anhang A.1 beschrieben wird. Die Faktoren sind in Tabelle 3.4 zusammen mit dem 68,3% Fehler der Anpassung gezeigt. Aufgrund der verwendeten Konstruktion der Anpassung ist der Skalierungsfaktor für das Fermi/LAT gleich eins, allerdings überträgt sich der statistische Fehler des B -Feldes auf dessen Skalierungsfaktor. Des Weiteren sind die χ^2 -Werte vor und nach der Skalierung angegeben. Ein Vergleich zwischen den unskalierten und skalierten Messungen ist außerdem in Abbildung 3.9 gezeigt. In den kleinen Abbildungen sind die Abweichungen der Punkte von der theoretischen Vorhersage des Modells gezeigt. Wie man erkennt, beschreiben die Daten nach der Skalierung die Modellrechnungen wie erwartet deutlich besser.

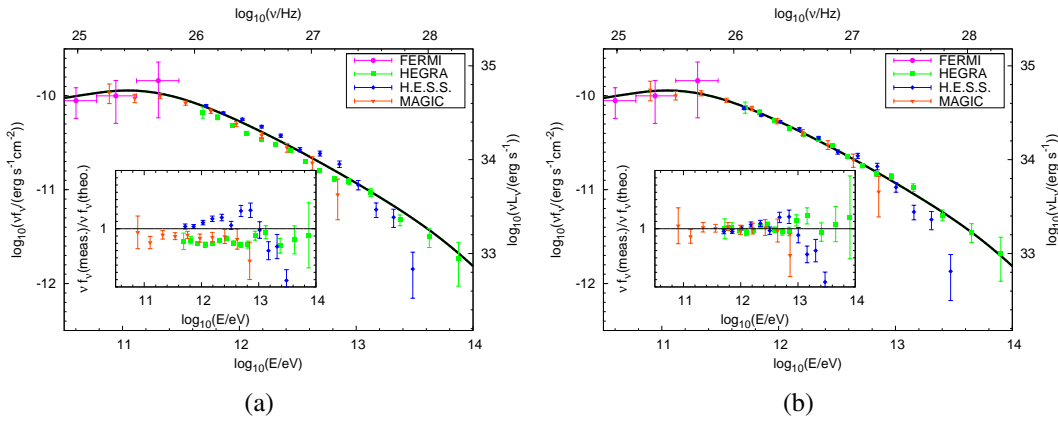


ABBILDUNG 3.9: (a) Der VHE-Teil des Modells der SED ist als schwarze durchgezogene Linie gezeigt, zusammen mit den Messungen des Fermi/LAT, sowie von MAGIC, HEGRA und H.E.S.S. Die eingefügte Abbildung zeigt das Verhältnis zwischen den gemessenen Werten $(vf_v)_{\text{meas}}$ und der theoretischen Vorhersage des Modells, $(vf_v)_{\text{theo}}$. (b) Die Abbildung zeigt das Selbe wie 3.9(a), jedoch mit den Skalierungsfaktoren aus Gleichung 3.73 und Tabelle 3.4 angewendet auf die Daten der IACTs.

Nach der Cross-Kalibration ist die systematische Unsicherheit der einzelnen Energies-

kalen eliminiert, was allerdings bleibt, ist die systematische Unsicherheit der Fermi/LAT-Messung. Die Cross-Kalibration lässt sich auf eine Vielzahl von Situationen anwenden. Ein Beispiel wird im nächsten Abschnitt vorgestellt, in dem Einschränkungen auf den diffusen Photonenhintergrund berechnet werden.

3.5 Anwendung der Cross-Kalibration auf den diffusen Photonenhintergrund

Die Cross-Kalibration ermöglicht es, die Aussagekraft von kombinierten Messungen vom Fermi/LAT und IACTs deutlich zu verbessern, da die relative Energieskala zwischen den Instrumenten fixiert wird. Ein Beispiel sind die Messungen des kosmischen $e^+ + e^-$ -Spektrums vom Fermi/LAT (Abdo *et al.* 2009) und H.E.S.S. (Aharonian *et al.* 2008, 2009), die als Referenzen für diesen Abschnitt dienen.

Hochenergetische kosmischen Elektronen und Positronen (im Folgenden werden sie unter dem Begriff „Elektronen“ zusammengefasst) müssen durch nahe Quellen erzeugt werden, weil sie schnell ihre Energie durch IC-Streuung und Synchrotronstrahlung verlieren. Messungen dieses Spektrums können Aufschluss über ihren Ursprung und ihre Propagation im interstellaren Medium liefern.

Kontrovers diskutiert sind vor allem die Messungen der PAMELA-Kollaboration, die einen Überschuss an Positronen detektiert haben (Adriani *et al.* 2009) und des ATIC-Experiments, das ein Maximum im $e^+ + e^-$ -Spektrum gemessen hat (Chang *et al.* 2008). Diese Ergebnisse können als Beitrag eines nahegelegenen Pulsars oder alten Supernovaüberrestes, aber auch als ein Signal Dunkler Materie interpretiert werden.

Die Messungen des Fermi/LAT und H.E.S.S. sind in Abbildung 3.10 gezeigt. Die systematischen Unsicherheiten des Fermi/LAT und H.E.S.S. sind als schraffierte Bänder dargestellt. Sie ergeben sich im Falle des Fermi/LAT aus der Rekonstruktion der elektromagnetischen Schauer im Kalorimeter, sowie der Lepton-Hadron-Separation. Gleiches gilt für die systematischen Unsicherheiten der H.E.S.S.-Messungen, wobei hier die Schauer, die in der Atmosphäre entstehen, rekonstruiert werden. Zusätzlich kommt ein Beitrag des diffusen Photonenhintergrundes hinzu. Im Gegensatz zum Fermi/LAT ist es mit H.E.S.S. derzeit nicht möglich, photoneninduzierte elektromagnetische Schauer von solchen zu unterscheiden, die durch Elektronen eingeleitet wurden

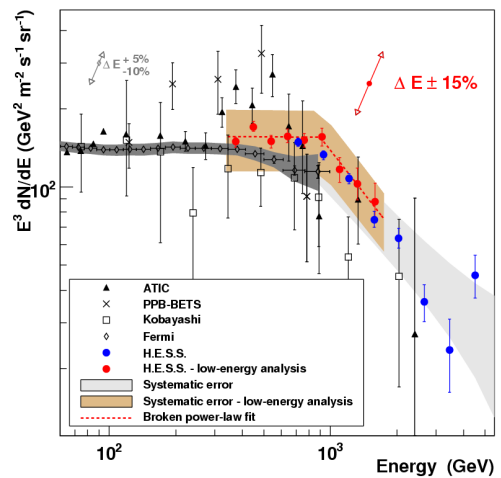


ABBILDUNG 3.10: Kombinierte Messungen des diffusen Photonenhintergrundes bei TeV-Energien von Fermi, H.E.S.S. und ATIC. Quelle der Abbildung: Aharonian *et al.* (2009).

(vergleiche Kapitel 2.2). Um den Beitrag des diffusen Hintergrundes möglichst gering zu halten, wurden für die H.E.S.S.-Auswertungen nur Beobachtungen verwendet, bei denen mindestens 7° ober- oder unterhalb der galaktischen Ebene und in Gebieten ohne bekannte Quellen von VHE-Gammastrahlung gemessen wurde.

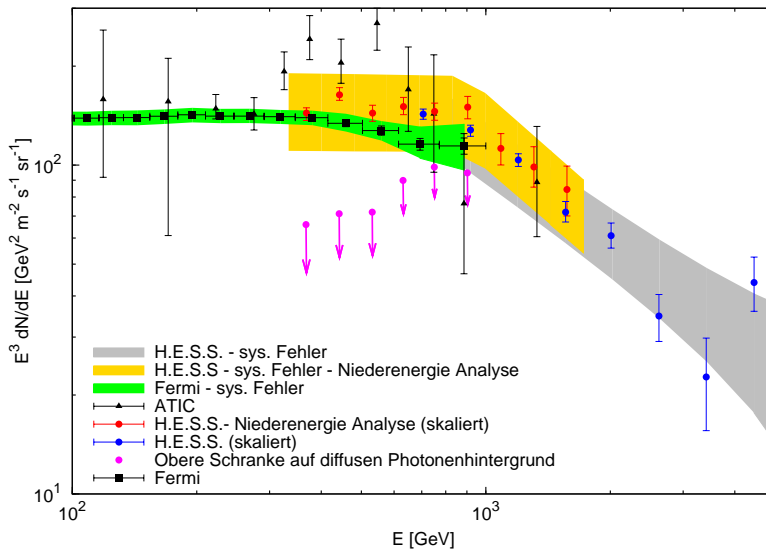


ABBILDUNG 3.11: $e^- + e^+$ Spektrum gemessen von H.E.S.S. und Fermi. Die Cross-Kalibrierungsfaktoren wurden auf die H.E.S.S.-Daten angewendet, so dass die Unsicherheit auf die globale Energieskala eliminiert sind. Aus der Differenz der Messungen zwischen Fermi und H.E.S.S. lassen sich obere Grenzen für den diffusen Photonenhintergrund ableiten, dargestellt als magentafarbene Pfeile.

Dass H.E.S.S. nicht zwischen Photonen und Elektronen als Primärteilchen unterscheiden kann, bietet die Möglichkeit, aus der Differenz der gemessenen Flüsse vom Fermi/LAT und H.E.S.S. den diffusen Photonenhintergrund zu bestimmen. Problematisch sind jedoch die systematischen Fehler der Energieskalen der einzelnen Instrumente, die für zwei beliebige Punkte in Abbildung 3.10 durch Pfeile dargestellt sind. Eine Lösung bietet die Cross-Kalibration. Sie skaliert zum einen die H.E.S.S.-Punkte und zum anderen kalibriert sie die Messungen relativ zueinander. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.11 gezeigt. Aus den skalierten Messungen lassen sich obere Grenzen auf den diffusen Photonenfluss bestimmen. Dafür werden die H.E.S.S.-Punkte der niederenergetischen H.E.S.S.-Analyse (rote Punkte in Abbildung 3.11) auf ihren maximal zugelassenen systematischen Fehler skaliert und die entsprechenden Fermipunkte auf den minimal zugelassenen systematischen Fehler. Anschließend werden die Flüsse voneinander subtrahiert, wobei zwischen dem Fermi/LAT-Daten interpoliert wurde. Die obere Grenze für das 68,3% Konfidenzlevel wird dann aus dem fortgepflanzten statistischen Fehler der Differenz der Messpunkte ermittelt. Die Ergebnisse sind durch magentafarbene Pfeile in Abbildung 3.11 dargestellt.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis der Cross-Kalibration ist, dass das ATIC-Maximum im kosmischen $e^+ + e^-$ -Spektrum nach der Skalierung für die H.E.S.S.-Daten unwahr-

3.5 Anwendung der Cross-Kalibration auf den diffusen Photonenhintergrund

scheinlicher erscheint.

4 Theorie verborgener Photonen

Eine weitere Aufgabe dieser Arbeit ist es, die Strahlung des Krebsnebels auf Phänomene von *Physik jenseits des Standardmodells* zu untersuchen. Das Standardmodell der Materie ist eine der erfolgreichsten Theorien in der Physik. Es vereinigt drei der vier Kräfte der Natur: die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Trotz der Erfolge und Vorhersagekraft ist das Standardmodell in gewissem Maße unvollständig. Zum einen weist es um die dreißig freie Parameter auf, die von der Theorie nicht eingeschränkt sind. Zum anderen ist das Teilchen, das für die Erzeugung jeglicher Masse im Standardmodell verantwortlich ist – das Higgs-Boson – noch nicht experimentell nachgewiesen. Des Weiteren müssen einige Parameter sehr fein eingestellt werden, um Divergenzen, die in der Berechnung von Wirkungsquerschnitten auftreten, exakt weg zu heben. Dem Standardmodell gelingt es zudem nicht, die vierte Art der Wechselwirkung, die Gravitation, zu beschreiben. Eine Vereinheitlichung aller Kräfte der Natur ist bislang nicht vollständig gelungen, da die Quantisierung der Raum-Zeit noch nicht hinreichend verstanden ist. Physik jenseits des Standardmodells soll Antworten auf diese und weitere offene Fragen liefern.

Die einzigen experimentellen Hinweise, dass Erweiterungen zum Standardmodell nötig sind, ergeben sich aus astronomischen Beobachtungen. Messungen von Häufigkeiten leichter Elemente, aus denen sich mit Hilfe der Theorie der primordialen Nucleosynthese (*Big Bang Nucleosynthesis*, BBN) Abschätzungen auf den baryonischen Anteil der gesamten Energiedichte im Universum machen lassen, zeigen, dass sich der Anteil der baryonischen Massendichte auf nur ungefähr 4% der kritischen Energiedichte* beläuft. Unter der Annahme, dass der Kosmos ein euklidischer Raum mit verschwindender Krümmung ist, sagen jedoch die Friedmann-Lemaître-Gleichungen† vorraus, dass die gesamte Energiedichte gleich der kritischen Energiedichte sein muss (Unsöld & Baschek 2002). Unter dieser Annahme muss also deutlich mehr Materie im Universum vorhanden sein, als für uns sichtbar ist. Experimentelle Hinweise auf das Vorhandensein *Dunkler Materie* (DM) liefert zum Beispiel der Gravitationslinseneffekt von Galaxienhaufen. Durch die Gravitation des Haufens wird Licht von Hintergrundgalaxien abgelenkt und die Bilder der Hintergrundgalaxien verzerrt. Die sichtbare Materie in den Haufen reicht dabei nicht aus, um die Stärke dieses Effektes zu erklären. Zudem könnte kalte, das heißt nicht-relativistische, Dunkle Materie durch ihre Gravitation die Bildung von Galaxien und Galaxienhaufen erklären (Blumenthal

* Die kritische Energiedichte $\rho_c(t)$ ist definiert als $\rho_c(t) = 3H^2(t)/(8\pi G)$ mit $H(t)$ der Hubblefunktion und G der Gravitationskonstanten (Unsöld & Baschek 2002).

† Diese Differentialgleichungen beschreiben die Expansion des Universums und folgen aus den Einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

et al. 1984).

Die besten Anpassungen von Theorien an Beobachtungen liefern einen Dunkle-Materie-Anteil von rund 20% der kritischen Energiedichte. Verschiedene Erweiterungen des Standardmodells beinhalten schwere Teilchen, die Kandidaten für Dunkle Materie sind.

Ferner wird eine beschleunigte Expansion des Universums beobachtet, was eine kosmologische Konstante in den Friedmann-Lemaître-Gleichungen ungleich Null voraussetzt. Für die Expansion wird eine bislang wenig verstandene *Dunkle Energie* verantwortlich gemacht, die ca. 74% der kritischen Dichte des Universums ausmacht. Dies entspricht einer Energiedichte ρ_Λ im $\text{GeV}/\text{m}^3 \hat{=} \text{meV}^4$ Bereich[‡]. Die Dunkle Energie könnte im Rahmen der Quantenfeldtheorie durch die im Vakuum gespeicherte Energiedichte erklärt werden, da diese einen negativen Druck aufweist und somit der Gravitation entgegenwirkt. Allerdings ist es im Moment nicht möglich, die theoretisch berechneten Werte der Vakuumenergiedichte mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen (Unsöld & Baschek 2002).

Einer der zukünftigen Hauptaufgaben der Experimente am LHC wird die Suche nach dem Higgs-Boson und Kandidaten für Dunkle Materie sein. Er eignet sich jedoch nicht, um kleine Energieskalen im Sub-eV-Bereich zu untersuchen. In diesem Energiebereich ist aber die bislang einzige Erweiterung des Standardmodells – massebehaftete Neutrinos – experimentell bestätigt worden. Im Standardmodell sind Neutrinos exakt masselos, jedoch haben verschiedene Experimente Oszillationen der Neutrino flavors nachgewiesen, die durch eine nichtverschwindende Masse dieser Teilchen erklärt wird. Es ist also lohnenswert, auch nach neuer Physik bei kleinen Masseskalen zu suchen. Es existieren bereits eine Reihe von Theorien, die sich mit der Phänomenologie solcher schwach wechselwirkenden[§] Sub-eV-Teilchen (*weakly interacting sub eV particles*, WISPs) befassen. Die Emission des Krebsnebels soll auf die Vorhersagen einer dieser Theorien, der Theorie der verborgenen Photonen, hin untersucht werden.

Die Theorie wird, zusammen mit den Grundlagen von Eichtheorien, im Abschnitt 4.1 vorgestellt. Eine rein quantenfeldtheoretische Betrachtung folgt in Abschnitt 4.2. Bestehende Einschränkungen an mögliche Parameter der verborgenen Photonen werden in Abschnitt 4.3 zusammengefasst und die für Beobachtungen von vorhergesagten Effekten der Theorie nötige Kohärenz wird im letzten Abschnitt 4.4 untersucht.

4.1 Verborgene Photonen

Die Theorie der verborgenen Photonen ist, wie das Standardmodell selber, eine Quantenfeldtheorie (QFT) mit einer bestimmten Eichsymmetrie (Eichsymmetrien werden im nächsten Abschnitt erläutert). Eine quantenfeldtheoretische Behandlung ist immer

[‡] Dieser Wert ergibt sich mit einer Hubblekonstanten von $H_0 = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ und $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda / \rho_c = 0,74$ (Unsöld & Baschek 2002; Amsler *et al.* 2008). Das $\text{GeV}/\text{m}^3 \hat{=} \text{meV}^4$ gilt, folgt aus der Betrachtung in natürlichen Einheiten, in denen $[\text{Länge}]^{-1} = [\text{Energie}]$ ist.

[§] Hier ist nicht notwendigerweise die schwache Wechselwirkung gemeint.

dann nötig, wenn Vielteilchensysteme mit Wechselwirkungen (wie zum Beispiel dem Erzeugen und Vernichten von Teilchen) relativistisch korrekt beschrieben werden sollen. Die definierende Größe einer QFT ist die Wirkung \mathcal{S} , beziehungsweise die Lagrangedichte \mathcal{L} , die eine Funktion der Felder ϕ und deren Ableitungen $\partial_\mu\phi$ ist, wobei die Felder selbst operatorwertig sind (siehe beispielsweise Peskin & Schroeder 1995),

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \quad (4.1)$$

Jedes Feld und dessen Ableitung stellt eine unabhängige Variable dar. Die Bedingung, dass die Variation der Wirkung $\delta\mathcal{S} = 0$ ist, liefert die Euler-Lagrange-Gleichungen, die den Bewegungsgleichungen der Felder entsprechen. Die Lagrangedichte \mathcal{L} sollte verschiedene Anforderungen erfüllen: sie sollte ein Skalar unter Lorentztransformationen von der Dimension [Energie]⁴ sein und außerdem invariant unter *CPT*-Transformation[¶] sein.

Eichsymmetrien

Es können Symmetrien postuliert werden, die die Lagrangedichte, bis auf Oberflächenterme, invariant lassen und mit Hilfe des Noether-Theorems auf Erhaltungsgrößen führen. Solche Symmetrien sind zum Beispiel globale Phasentransformationen, das heißt, Transformationen von der Form $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp(i\alpha)\phi(x)$, wobei die Phase α nicht von x abhängt. Im Gegensatz dazu stehen lokale Transformationen, sogenannte *Eichtransformationen*, bei denen die Transformation von Ort und Zeit abhängt.

Die in der Physik vorkommenden Eichtransformationen bilden immer eine Gruppe im mathematischen Sinn. Dies bedeutet, dass zwei aufeinander folgende Eichtransformation wieder eine Eichtransformation liefern (Abgeschlossenheit), dass das Assoziativgesetz gilt, dass ein neutrales Element existiert (die Eichtransformation ändert die Felder nicht) und dass sich zu jeder Transformation auch ein Inverses finden lässt, so dass die Verknüpfung einer Transformation mit seinem Inversen das neutrale Element ergibt. In der Teilchenphysik sind Lie-Gruppen, die die Transformation mit kontinuierlichen Parametern (wie zum Beispiel einer Phase, die sich kontinuierlich in Abhängigkeit von x ändert, $\alpha = \alpha(x)$) beschreiben, von besonderem Interesse (Sternberg 1995). Die Invarianz von \mathcal{L} unter Eichtransformationen zieht zwangsläufig die Existenz von Eichfeldern nach sich. Dies liegt daran, dass bei einer Ableitung die Felder an zwei unterschiedlichen Orten x und $x + \epsilon$ (mit dem Limes $\epsilon \rightarrow 0$) verglichen werden, die unter Eichtransformationen jedoch unterschiedlich transformieren. Um einen Zusammenhang zwischen den Feldern an unterschiedlichen Orten herzustellen, wird die Ableitung durch die kovariante Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ ersetzt. Dabei stellt $A_\mu(x)$ das Eichfeld und g die Kopplung dar^{||}. Somit wird das Eichfeld über die zugrundeliegen-

[¶] Die *CPT*-Transformation ist eine Kombination der Ladungskonjugation C , der Paritätstransformation P und der Zeitumkehr T .

^{||} Dieselbe Situation findet man in der allgemeinen Relativitätstheorie vor, in der ebenfalls eine kovariante Ableitung über Zusammenhänge definiert wird (siehe zum Beispiel Hobson *et al.* 2006).

de Gruppe der Eichtransformation bestimmt (siehe zum Beispiel Peskin & Schroeder 1995, Kapitel 15).

Die Eichgruppe \mathcal{G}_{SM} des Standardmodells setzt sich aus nicht-abelschen und abelschen Eichgruppen zusammen,

$$\mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y \xrightarrow[\text{Mechanismus}]{\text{Higgs-}} SU(3) \times U(1)_{\text{EM}}.$$

Die Eichfelder – auch Eichbosonen genannt – der $SU(3)$ bilden die Gluonen der starken Wechselwirkung, die W^\pm -Bosonen und das Z^0 -Boson sind die Eichfelder der schwachen Wechselwirkung. Der Higgs-Mechanismus sorgt dafür, dass die Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung gebrochen wird, $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{EM}}$, da das Higgs-Boson unterhalb einer bestimmten Energie einen Vakuumerwartungswert annimmt, der nicht symmetrisch unter $SU(2) \times U(1)_Y$ ist. Das Photon ist das Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung $U(1)_{\text{EM}}$, die nach dieser spontanen Symmetriebrechung durch den Higgs-Mechanismus entsteht**. Vereinheitlichte Feldtheorien, sogenannte GUTs (*Grand Unified Theories*), sowie die Stringtheorie basieren ebenfalls auf Eichgruppen, die die Eichgruppe des Standardmodells beinhalten, $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_{\text{SM}}$. Dabei werden häufig weitere $U(1)$ Eichgruppen vorhergesagt. Die Theorie der verborgenen Photonen baut genau auf einer derartigen Symmetrie auf. Der Begriff „verborgen“ deutet eine Eigenschaft dieser Theorie an, nämlich dass die Eichbosonen nicht mit Materie des Standardmodells wechselwirken.

Verborgene Photonen

Im einfachsten Fall, der ausschließlich in dieser Arbeit betrachtet werden soll, wird eine weitere Eichsymmetrie $U_{\text{hid}}(1)^{\dagger\dagger}$ angenommen. Die Lagrangedichte ist nach der Symmetriebrechung der elektroschwachen Wechselwirkung durch den Higgs-Mechanismus für Photonen und verborgene Photonen gegeben durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{\sin\chi_0}{2}F_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{\cos^2\chi_0}{2}\mu^2 X^\mu X_\mu. \quad (4.2)$$

Der erste Term beinhaltet den bereits eingeführten elektromagnetischen Feldtensor des Photonenfeldes, der zweite Term ist dazu das Analogon der verborgenen Photonen, $X^{\mu\nu} = \partial^\mu X^\nu - \partial^\nu X^\mu$, mit dem Eichfeld X^μ des verborgenen Photons. Die Terme sind demnach die kinetischen Terme der Eichbosonen. Der letzte Term ist ein möglicher Masseterm der verborgenen Photonen mit der Masse μ . Durch ihn ist die Eichsymmetrie $U_{\text{hid}}(1)$ explizit gebrochen, was entweder durch einen Higgs-Mechanismus im verborgenen Sektor oder durch den Stückelberg-Mechanismus möglich ist (Ahlers *et al.* 2008). Der dritte Term ist eine Mischung der kinetischen Terme und erlaubt ei-

** Die Lie-Gruppe $SU(N)$ bildet die Gruppe der speziellen unitären Matrizen U , für die $U^\dagger = U^{-1}$ und $\det U = 1$ gilt. Die Anzahl der Generatoren ist gegeben durch $N^2 - 1$. Die Lie-Gruppe $U(N)$ der unitären Matrizen weist nur erstere der beiden Eigenschaften auf.

^{††} Der Index „hid“ steht für *hidden*, zu deutsch, verborgen.

ne Wechselwirkung zwischen Photonen und verborgenen Photonen. Dieser Term wird in der Literatur auch als *kinetic mixing term* bezeichnet. Der dimensionslose Parameter χ_0 ist der Mischungswinkel zwischen Photonen und verborgenen Photonen. Der Mischterm kann als effektiver Operator einer Theorie bei niedrigen Energien verstanden werden, ähnlich wie die Fermi-Vierpunktwechselwirkung die schwache Wechselwirkung bei niedrigen Energien beschreibt. Bei hohen Energien zeigt Abbildung 4.1 die Wechselwirkung zwischen Photonen und verborgenen Photonen mit der Einschleifenkorrektur. In der Schleife laufen schwere Fermionen um, die sowohl unter $U_{\text{EM}}(1)$ als auch $U_{\text{hid}}(1)$ geladen sind. Holdom (1986a,b) hat gezeigt, dass die Amplitude des Einschleifendiagramms den Mischungswinkel ergibt,

$$\sin \chi_0 = \frac{ee'}{6\pi^2} \sum_i Q_i Q'_i \ln m_i, \quad (4.3)$$

wobei e die elektromagnetische Ladung, e' die Ladung der verborgenen Photonen und Q_i , beziehungsweise Q'_i (in Einheiten von e und e'), die Ladung der Fermionen der Massen m_i ist, die in der Schleife umlaufen und über die summiert wird. Der einheitenbehaftete Logarithmus ist so zu verstehen, dass er bei einer Berechnung noch durch ein Standardverfahren, wie zum Beispiel einer ultravioletten Abbruchskala, reguliert werden muss (Redondo 2008a). Theoretische Einschränkungen des Mischungswinkels sind abhängig von der zugrunde liegenden Theorie, die zusätzliche Eichgruppen vorhersagt. Kompaktifizierungen von Stringtheorien ergeben beispielsweise einen großen Wertebereich, in dem der Mischungswinkel liegen kann. Typischerweise findet man (Jaeckel & Ringwald 2010)

$$10^{-12} \lesssim \chi_0 \lesssim 10^{-3}. \quad (4.4)$$

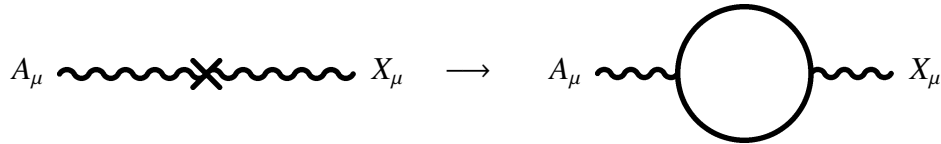


ABBILDUNG 4.1: Feynmandiagramme für die kinetische Mischung von Photonen und verborgenen Photonen. Neben dem Diagramm der niedrigsten Ordnung (*Tree-level*) ist die Einschleifenkorrektur gezeigt. Die Wechselwirkung wird durch schwere Fermionen vermittelt, die unter beiden Eichgruppen geladen sind.

Der kinetische Mischterm kann durch eine Transformation der Felder eliminiert werden:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A_R = \cos \chi_0 A \\ X &\longrightarrow S = X - \sin \chi_0 A. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die erste Transformation des Photonfeldes ist gleichbedeutend mit einer Renormierung der elektrischen Ladung $e \rightarrow e / \cos \chi_0$ (Ahlers *et al.* 2007), weswegen der Index R im Folgenden weggelassen wird. Durch Einsetzen der transformierten Felder in \mathcal{L}

und unter Verwendung der Notation $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu(x), S_\mu(x))^T$ erhält man

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathbf{A}_\mu^T \mathcal{M}^2 \mathbf{A}^\mu. \quad (4.6)$$

Die Matrix \mathcal{M}^2 stellt eine nicht-diagonale Massenmatrix dar,

$$\mathcal{M}^2 = \mu^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \chi_0 & \sin \chi_0 \cos \chi_0 \\ \sin \chi_0 \cos \chi_0 & \cos^2 \chi_0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Die Zustände $\{A, S\}$ bezeichnet man als Wechselwirkungszustände oder auch Flavorzustände, da das Quantum γ des Feldes A nur mit Standardmodellmaterie wechselwirkt, wohingegen die Quanten γ_s des S -Feldes komplett steril gegenüber Standardmodellwechselwirkungen sind (Mirizzi *et al.* 2009). Die Masseneigenzustände $\{A_m, S_m\}$ erhält man durch eine $SU(2)$ Transformation,

$$\mathbf{A}_m = U^\dagger \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \chi_0 & -\sin \chi_0 \\ \sin \chi_0 & \cos \chi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ S \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

wodurch die Massenmatrix diagonalisiert wird zu $\mathcal{M}_{\text{diag}}^2 = U^\dagger \mathcal{M}^2 U = \text{diag}(0, \mu^2)$. Die kinetischen Terme sind dagegen invariant unter der $SU(2)$ Transformation^{††}. Somit wird ebenfalls deutlich, dass die Eichsymmetrie der $U_{\text{EM}}(1)$ auch in der Basis $\{A, S\}$ noch intakt ist^{‡‡}. Ein weiterer Punkt ist, dass durch die Transformation aus Gleichung 4.5 deutlich wird, dass Fermionen, die nur unter der $U_{\text{hid}}(1)$ geladen sind, ebenfalls eine Ladung unter $U_{\text{EM}}(1)$ erhalten. Der Wechselwirkungsterm von möglichen verborgenen Fermionen h mit verborgenen Photonen ist analog zur Quantenelektrodynamik (QED) gegeben durch

$$e' \bar{h} \not{X} h \longrightarrow e' \bar{h} \not{S} h - e' \sin \chi_0 \bar{h} \not{A} h, \quad (4.9)$$

wobei die übliche Notation $\not{A} \equiv A_\mu \gamma^\mu$ und $\bar{h} \equiv h \gamma^0$ mit den Dirac-Matrizen γ^μ benutzt wurde (Peskin & Schroeder 1995). Somit erhalten die verborgenen Fermionen eine Ladung unter $U_{\text{EM}}(1)$ von $\epsilon e = e' \sin \chi_0$. Ist $\chi_0 \ll 1$, wie von einigen Experimenten (vergleiche Abbildung 4.2) und der Stringtheorie vorhergesagt wird, ist $|\epsilon| \ll 1$ und man spricht von *minicharged particles*^{*}. Ahlers *et al.* (2007) haben jedoch gezeigt, dass die Kopplung des Photons an verborgene Fermionen identisch verschwindet, falls sich das externe Photon auf der Massenschale befindet. Der Grund dafür ist, dass der Beitrag durch die Kopplung des Photons an die Ladung ϵe des verborgenen Fermions

^{††} Die Invarianz ist gegeben, da $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \text{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und die Spur zyklisch ist. Für $F'_{\mu\nu} = U^\dagger F_{\mu\nu} U$ findet man

$$\text{tr} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = \text{tr} (U^\dagger F_{\mu\nu} U U^\dagger F^{\mu\nu} U) = \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U U^\dagger) = \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

^{‡‡} Dies kann man auch direkt aus Gleichung 4.6 sehen, wenn man eine Eichtransformation durchführt mit $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ und beachtet, dass das S -Feld transformiert mit $S_\mu \rightarrow S'_\mu = X_\mu + \sin \chi_0 (A'_\mu)^R = S_\mu + \tan \chi_0 \partial_\mu \alpha$.

^{*} *Minicharged particles* lässt sich mit „sehr gering geladenen Teilchen“ übersetzen.

genau durch die Kopplung aufgrund der nicht diagonalen Massenmatrix aufgehoben wird.

Bereits Okun (1982) zeigte, dass die nicht diagonale Massenmatrix zu Oszillationen zwischen Photonen und verborgenen Photonen führt[†], die analog zu den Neutrinooszillationen behandelt werden können. Die Wahrscheinlichkeit der Konversion eines Photons γ zu einem verborgenen Photon γ_s im Vakuum in einem Abstand d von der Quelle der Photonen kann durch die Lösung der Bewegungsgleichung, die man durch den Euler-Lagrange-Formalismus erhält, aus Gleichung 4.6 berechnet werden. Löst man die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz ebener Wellen, so zeigt sich, dass mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Photonen in verborgene Photonen umgewandelt werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch (siehe beispielsweise Ahlers *et al.* 2007; Zechlin 2009)

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma_s} = \sin^2(2\chi_0) \sin^2\left(\frac{\mu^2 d}{4E}\right), \quad (4.10)$$

wobei E die Energie des Photons ist. Diese Gleichung gilt in der Näherung ebener Wellen mit hohen Photonenenergien (Zechlin 2009). In geeigneten Einheiten erhält man

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma_s} = \sin^2(2\chi_0) \sin^2\left[0,03909 \left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}}\right)^2 \left(\frac{E}{\text{keV}}\right)^{-1} \left(\frac{d}{\text{kpc}}\right)\right]. \quad (4.11)$$

Diese Gleichung wird bei der Analyse der Krebsnebeldata auf Photonenoszillationen häufig verwendet werden.

4.2 QFT von Photonenoszillationen

Die Oszillationswahrscheinlichkeit wurde im vorherigen Abschnitt rein quantenmechanisch aus der Lagrangedichte berechnet. Blasone & Vitiello (1995) haben jedoch für Fermionfelder gezeigt, dass der Hilbertraum für Felder mit festgelegtem Flavor unitär inäquivalent ist zum Hilbertraum der Felder mit definierter Masse (freie Felder). Dieser Schluss wurde auf neutrale und komplexe bosonische Felder und auf komplexe Felder höherer Spins übertragen (Blasone *et al.* 2001; Ji & Mishchenko 2002; Blasone & Palmer 2004). Unitäre Inäquivalenz bezeichnet die Eigenschaft, dass im schwachen Limes $t \rightarrow \pm\infty$ die Felder abhängig von der gewählten Darstellung sind (Blasone & Vitiello 1995). Dieses Phänomen tritt vor allem bei Quantenfeldtheorien auf, weil man es dort mit unendlich vielen Freiheitsgraden zu tun hat. Der obige Limes ist deshalb wichtig, weil in einer QFT Observablen durch freie Felder ausgedrückt werden, die man aus genau dieser Grenzbetrachtung erhält, was mit dem LSZ[‡]-Formalismus

[†] Okun (1982) prägte in seiner Arbeit den Begriff der *Paraphotonen* für verborgene Photonen, der auch häufiger in der Literatur verwendet wird.

[‡] LSZ steht für die Namen der „Entdecker“ dieses Formalismus: Harry Lehmann, Kurt Symanzik und Wolfhart Zimmermann.

gezeigt werden kann (siehe zum Beispiel Itzykson *et al.* 1984). Es ist deshalb besonders wichtig, sich die Abbildung zwischen dem Hilbertraum der Flavoreigenzustände und dem der Masseneigenzustände zu betrachten. Dies soll im Folgenden für den Fall der Photonenoszillationen geschehen. Es handelt sich hierbei um die Mischung von zwei neutralen Vektorbosonen. „Neutral“ sind hierbei reelle Felder, die keine Ladung (oder Leptonenzahl, Isospin, etc.) aufweisen. Der vorgestellte Formalismus könnte in Zukunft dahingehend weiterentwickelt werden, um die Oszillationswahrscheinlichkeit aus rein quantenfeldtheoretischen Überlegungen herzuleiten.

Die Lagrangedichte \mathcal{L} für die Flavoreigenzustände A_f^μ (sie werden der Deutlichkeit halber mit dem Index „ f “ versehen) aus Gleichung 4.5 ist mit der Lagrangedichte der Masseneigenzustände A_m^μ über die $SU(2)$ -Transformation aus Gleichung 4.8 verknüpft. Hierbei bezeichnet der Index $\sigma = \{A, S\}$ die Flavorfelder und der Index $i = 1, 2$ die Masseneigenzustände,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma=\{A,S\}} F_{\sigma,\mu\nu} F_{\sigma}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_{f,\mu}^T \mathcal{M}^2 A_f^\mu = -\frac{1}{4} \sum_{i=\{1,2\}} F_{i,\mu\nu} F_i^{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_{m,\mu}^T \mathcal{M}_{\text{diag}}^2 A_m^\mu. \quad (4.12)$$

Ein Vergleich mit der vorherigen Notation zeigt, dass beispielsweise $F_S^{\mu\nu} \equiv S^{\mu\nu}$ ist (die Indizes, die mit Kommata versehen sind, bezeichnen keine Ableitung). Der Lagrangian ist also eine Summe von masselosen und massiven Vektorbosonen, sogenannten Proca-Feldern (Itzykson *et al.* 1984). Für die Berechnung der Abbildung zwischen den Hilberträumen ist ferner der konjugierte Impuls der Felder nötig. Da es sich hier um Eichtheorien handelt (für die $U_{\text{hid}}(1)$ vor der Symmetriebrechung), muss der obige Lagrangian erweitert werden, um die Integration in der Wirkung über eichäquivalente Felder zu berücksichtigen. Ansonsten würde die nullte Komponente des konjugierten Impuls gleich Null sein und man könnte keine kanonischen Vertauschungsrelationen postulieren. Dies kann entweder durch einen Lagrangeschen-Multiplikator oder durch die Quantisierung über Pfadintegrale und dem Faddeev-Popov-Formalismus geschehen (siehe zum Beispiel Peskin & Schroeder 1995). Man erhält einen zusätzlichen Term, $-1/(2\alpha)(\partial_\mu A_m^\mu)^2$, wobei α ein frei wählbarer Parameter ist, der sich in der Berechnung von Observablen immer weghebt. Nach einer kurzen Rechnung (siehe Anhang C.1) erhält man in der Feynmaneychung ($\alpha = 1$) für den kanonisch konjugierten Impuls

$$\pi_i^\mu = -\dot{A}_i^\mu. \quad (4.13)$$

Die Entwicklung nach ebenen Wellen der freien Felder im Grenzwert des unendlichen Volumens liefert

$$A_i^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k},i}}} \left(a_{i,\mathbf{k}}^\lambda \epsilon_{i,\mathbf{k}}^{\lambda,\mu} e^{-i\omega_{\mathbf{k},i}} + a_{i,-\mathbf{k}}^{\dagger,\lambda} (\epsilon_{i,-\mathbf{k}}^{\lambda,\mu})^* e^{i\omega_{-\mathbf{k},i}} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.14a)$$

$$\pi_i^\mu(x) = i \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k},i}}{2}} \left(a_{i,\mathbf{k}}^\lambda \epsilon_{i,\mathbf{k}}^{\lambda,\mu} e^{-i\omega_{\mathbf{k},i}} - a_{i,-\mathbf{k}}^{\dagger,\lambda} (\epsilon_{i,-\mathbf{k}}^{\lambda,\mu})^* e^{i\omega_{-\mathbf{k},i}} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.14b)$$

wobei $a_{i,\mathbf{k}}^\lambda$ und $a_{i,-\mathbf{k}}^{\dagger,\lambda}$ die Vernichtungs- beziehungsweise Erzeugungsoperatoren eines masselosen ($i = 1$) beziehungsweise eines massiven verborgenen Photons ($i = 2$) mit der Polarisation λ und Impuls \mathbf{k} sind. Man beachte, dass sich die Polarisationsvektoren $\epsilon_{i,\mathbf{k}}^{\lambda,\mu}$ für den masselosen und massiven Fall unterscheiden. Die Vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten sind

$$[\pi_i^\mu(x), A_j^\nu(y)]_{x_0=y_0} = -ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij}, \quad (4.15)$$

und alle anderen Kombinationen sind Null. Gesucht wird nun die Abbildung $G_\chi(t)$, die die $SU(2)$ Transformation zwischen Flavor- und Masseneigenzuständen aus Gleichung 4.8 erzeugt, so dass

$$A_\sigma^\mu(x) = G_\chi^{-1}(t) A_i^\mu(x) G_\chi(t). \quad (4.16)$$

Dies wird gelöst durch den Ansatz

$$G_\chi(t) = \exp[\chi(S_+(t) - S_-(t))], \quad (4.17)$$

wobei S_+ und S_- gegeben sind durch

$$S_+ = -i \int d^3x \pi_1^\mu(x) A_\mu^2(x) \quad (4.18a)$$

$$S_- = -i \int d^3x \pi_2^\mu(x) A_\mu^1(x). \quad (4.18b)$$

Setzt man den Ansatz in Gleichung 4.16 ein, so erhält man nach kurzer Rechnung (siehe Anhang C.2)

$$\frac{d^2}{d\chi^2} A_A^\mu(x) = \frac{d^2}{d\chi^2} [G_\chi^{-1}(t) A_1^\mu(x) G_\chi(t)] = -A_A^\mu(x). \quad (4.19)$$

Analog gilt, dass $d^2/d\chi^2 A_S^\mu(x) = -A_S^\mu(x)$ ist. Zusammen mit den Anfangsbedingungen $A_A^\mu(x)|_{\chi=0} = A_1^\mu(x)$ und $A_S^\mu(x)|_{\chi=0} = A_2^\mu(x)$ ergibt sich so die Transformation aus Gleichung 4.8. Für ein endliches Volumen ist $G_\chi(t)$ unitär mit $G_\chi^{-1}(t) = G_{-\chi}(t) = G_\chi^\dagger(t)$. Die Operatoren S_- und S_+ bilden zusammen S_3 Generatoren einer $SU(2)$ Algebra, wie in Anhang C.2 gezeigt wird, mit

$$S_3 = -\frac{i}{2} \int d^3x [\pi_1^\mu(x) A_\mu^1(x) - \pi_2^\mu(x) A_\mu^2(x)], \quad (4.20a)$$

$$S_0 = -\frac{i}{2} \int d^3x [\pi_1^\mu(x) A_\mu^1(x) + \pi_2^\mu(x) A_\mu^2(x)]. \quad (4.20b)$$

Dabei ist S_0 der Casimir-Operator, der mit allen Generatoren kommutiert. Betrachtet man nun den Erwartungswert mit zwei beliebigen Zuständen $|a\rangle_{1,2}$ und $|b\rangle_{1,2}$ des Hilbertraums $\mathcal{H}_{1,2}$ der Masseneigenzustände und verwendet das Inverse der Relation aus

Gleichung 4.16,

$${}_{1,2} \langle a | A_1^\mu(x) | b \rangle_{1,2} = {}_{1,2} \langle a | G_\chi(t) A_A^\mu(x) G_\chi^{-1}(t) | b \rangle_{1,2}, \quad (4.21)$$

so sieht man, da $A_A^\mu(x)$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{A,S}$ der Flavoreigenzustände definiert ist, dass $\{G_\chi^{-1}(t) | b \rangle_{1,2}, G_\chi^{-1}(t) | a \rangle_{1,2}\} \in \mathcal{H}_{A,S}$ gelten muss. Somit ist die Abbildung zwischen den Hilberträumen gefunden,

$$G_\chi^{-1} : \mathcal{H}_{1,2} \longrightarrow \mathcal{H}_{A,S}. \quad (4.22)$$

Insbesondere lässt sich so der Vakuumzustand des Flavorraums durch den Vakuumzustand von $\mathcal{H}_{1,2}$, $|0\rangle_{1,2}$, mit $a_{i,\mathbf{k}}^\lambda |0\rangle_{1,2} = 0$, bestimmen. Es handelt sich dabei um einen sogenannten kohärenten Zustand (Perelomov 1986), der durch die $SU(2)$ Generatoren der Abbildung $G_\chi^{-1}(t)$ induziert wird,

$$|0(\chi, t)\rangle_{A,S} = G_\chi^{-1}(t) |0\rangle_{1,2}. \quad (4.23)$$

Der vorgestellte Formalismus kann prinzipiell verwendet werden, um die Oszillationswahrscheinlichkeit nicht-störungstheoretisch herzuleiten. Blasone & Palmer (2004) haben dies für neutrale Bosonen durchgeführt. Dazu betrachten sie den Energie-Impulstensor, da es keine Ladungsgröße gibt, die oszillieren kann, wie es zum Beispiel bei den Neutrinos die Leptonenzahl ist. Dazu ist es nötig, die Auf- und Absteigeoperatoren der Flavorfelder,

$$a_{A,\mathbf{k}}^\lambda(t) = G_\chi^{-1}(t) a_{1,\mathbf{k}}^\lambda G_\chi(t) \quad (4.24a)$$

$$a_{S,\mathbf{k}}^\lambda(t) = G_\chi^{-1}(t) a_{2,\mathbf{k}}^\lambda G_\chi(t), \quad (4.24b)$$

unter Ausnutzung der Baker-Hausdorff-Formel in Abhängigkeit der Auf- und Absteigeoperatoren der Masseneigenzustände zu schreiben. Im Fall der Photonenoszillationen kommt allerdings erschwerend hinzu, dass es sich um Spin-1-Teilchen handelt und somit die Polarisationsvektoren mit berücksichtigt werden müssen. Diese unterscheiden sich im Fall von massiven und masselosen Vektorbosonen, da letztere keine longitudinale Polarisation aufweisen können, was sich aus den Darstellungen der Poincaré-Gruppe ergibt (siehe zum Beispiel Itzykson *et al.* 1984). Im Fall der Spin-0-Bosonen zeigt dieser Formalismus interessante Korrekturen zu den quantenmechanischen Oszillationsformeln, die sich vor allem bei niedrigen Energien bemerkbar machen. Eine Untersuchung der Photonenoszillationen auf ein ähnliches Verhalten ist deshalb ebenfalls reizvoll, dies muss aber in zukünftigen Arbeiten geschehen.

4.3 Einschränkung des Parameterraums

Die Wahrscheinlichkeit für Oszillationen von Photonen in verborgene Photonen ist nach Gleichung 4.10 bestimmt durch den Mischungswinkel und die Masse der ver-

borgenen Photonen. Der mögliche Parameterraum (μ, χ_0) umfasst viele Größenordnungen. Die Suche nach verborgenen Photonen muss deshalb mit einer Vielzahl von Experimenten durchgeführt werden. Zum einen werden Labor- und Beschleunigerexperimente verwendet, zum anderen werden astrophysikalische – sowohl Satelliten, als auch bodengestützte – Experimente benutzt. In diesem Abschnitt sollen die bereits bestehenden Einschränkungen an die Masse und den Mischungswinkel vorgestellt werden. Sofern nicht anders angegeben, dient die Zusammenfassung von Jaeckel & Ringwald (2010) und dort angegebene Quellen als Referenz.

Eine Zusammenstellung der ausgeschlossenen Regionen ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Die einzelnen Experimente sollen im Folgenden kurz vorgestellt werden.

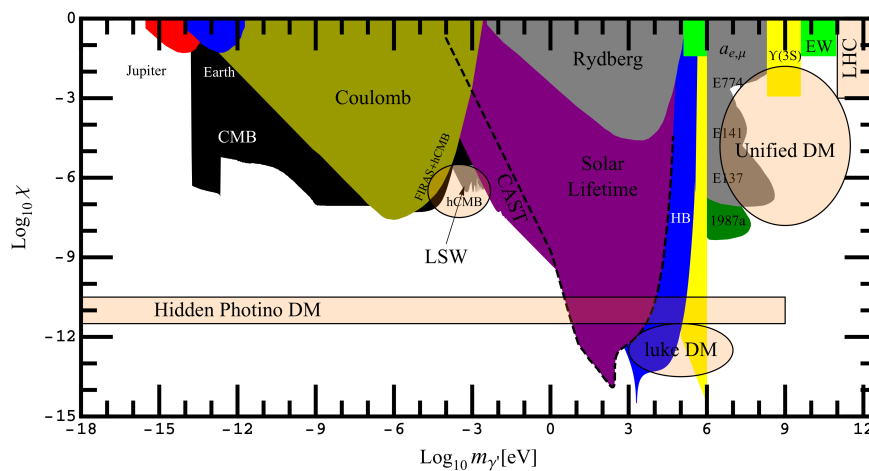


ABBILDUNG 4.2: Einschränkungen des Parameterraums verborgener Photonen. Gezeigt sind die Ausschlussregionen verschiedenster Experimente sowie Regionen von speziellem theoretischen Interesse in durchsichtigem Gelb. Siehe Text für Details zu den einzelnen Versuchen. Quelle der Abbildung: Jaeckel & Ringwald (2010)

Astrophysikalische und kosmologische Einschränkungen

Angefangen bei kleinen Massen, sind zunächst die Einschränkungen durch Messungen des magnetischen Feldes von Erde und Jupiter zu nennen (Goldhaber & Nieto 1971), die eine obere Grenze für die Photonmasse ergeben. Die nächste starke Einschränkung stammt aus der Messung des kosmischen Mikrowellenhintergrundes (CMB, siehe Abschnitt 3.2) mit dem FIRAS Experiment. Die Konversion von Photonen in verborgene Photonen führt zu Störungen im CMB Spektrum, die durch die genauen Messungen deutlich eingeschränkt werden können.

Des Weiteren würden verborgene Photonen zu einen Beitrag zur effektiven Neutrinoanzahl führen. So würde sich die effektive Anzahl der Neutrinos zur Zeit des CMBs und der Formationen von Strukturen auf großen Skalen im Universum von der effektiven Anzahl der Neutrinos zur Zeit der BBN unterscheiden. Im ersteren Fall kann die Anzahl durch Anisotropien im CMB und für letzteren Fall durch das Verhältnis der

Neutronen zu Protonen im Universum bestimmt werden. Die WMAP-Daten legen tatsächlich nahe, dass ein weiterer Beitrag zur Strahlungsdichte, außer den drei bekannten Neutrinos, nötig ist. Dies könnte durch verborgene Photonen mit bestimmten Parametern, markiert durch die Theorie des *hCMB* – hidden CMB – in Abbildung 4.2, erklärt werden.

Weitere theoretisch interessante Regionen sind gekennzeichnet durch *Unified DM*, *luke DM* und *hidden Photino DM*. Sie alle beschreiben Parameterregionen, in denen verborgene Photonen direkte oder indirekte Kandidaten für Dunkle Materie sind. Bei *unified DM* („vereinheitlichte“ DM) handelt es sich um Modelle, in denen Kandidaten für DM im verborgenen Sektor vermutet werden. Der Name leitet sich aus dem Versuch ab, verschiedenste Hinweise auf DM zu erklären. In *luke* („lauwarmen“) DM Modellen werden verborgene Photonen und weitere Teilchen, die unter der $U_{\text{hid}}(1)$ geladen sind, mit DM in Verbindung gebracht. Schließlich stellen *hidden photino DM* Modelle dar, in denen der supersymmetrische Partner des verborgenen Photons – das verborgene Photino – als DM-Kandidat gehandelt wird.

Weitere astrophysikalische Einschränkungen ergeben sich aus den Lebensdauern der Sonne und der Sterne des Horizontalastes (*Horizontal Branch*, gekennzeichnet durch „HB“ in Abbildung 4.2) des Hertzsprung-Russel-Diagramms der Sternentwicklung*. Bei der Existenz von verborgenen Photonen eröffnet sich ein neuer Energieverlustkanal, der die Lebensdauer der Sonne verkürzen könnte, bei Roten Riesen allerdings dieses Stadium der Sternentwicklung durch Kühlungseffekte verlängern würde. Weitere Einschränkungen können durch die Dauer des Ausbruches von Neutrinos bei der Supernovaexplosion SN1987A gefunden werden.

Einschränkungen durch Laborexperimente und Beschleuniger

Laborexperimente und Beschleuniger können ebenfalls genutzt werden, um nach verborgenen Photonen zu suchen. Okun (1982) zeigte bereits, dass verborgene Photonen zu einer Erweiterung des Coulombpotenzials um einen Yukawaterm führen (Popov 1999),

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(\cos^2 \chi_0 + \sin^2 \chi_0 e^{-\mu r} \right), \quad (4.25)$$

mit α , der Feinstrukturkonstanten. Diese Abweichung kann experimentell untersucht werden, zum Beispiel durch die Messung des elektrischen Feldes zwischen zwei konzentrischen Sphären (Popov 1999, und dortige Quellen). Des Weiteren können Präzisionsvermessung der Rydbergkonstanten von inneratomaren Übergängen weitere Einschränkungen liefern, die mit den Einschränkungen, die sich aufgrund von Abschätzungen der Lebenszeit der Sonne ergeben, kompatibel sind.

Eine weitere Art von Experimenten, die gezielt nach WISPs aller Art sucht, sind die „Licht durch Wände“ (*Light Shining through a Wall*, LSW) -Experimente. Dabei stahlt ein Laser bei optischen Wellenlängen auf eine opake Wand. Die Idee ist, dass Photo-

* Auf dem Horizontalast befinden sich metallarme Rote Riesen der Population II Sterne, die bereits einen erheblichen Anteil ihrer Masse verloren haben (Unsöld & Baschek 2002).

nen im Laserstrahl in verborgene Photonen konvertieren und hinter der Wand wieder in Photonen umgewandelt werden. Diese können dann mittels einer CCD-Kamera nachgewiesen werden. Für verborgene Photonen ist dies bis jetzt die einzige Möglichkeit, den Parameterraum zwischen den Ausschlussregionen der Sonnenlebensdauer und des CMBs zu testen. Ein vergrößerter Ausschnitt dieses Bereiches ist in Abbildung 4.3 gezeigt.

Auf ähnliche Weise funktionieren Helioskope, wie zum Beispiel das CAST-Experiment am CERN. Hierbei wird als Lichtquelle jedoch kein Laser, sondern die Sonne verwendet. Als Wand dienen verschiedene Abschirmungen, wie die Wand der Experimentierhalle und das Detektorgehäuse. Die Hoffnung besteht darin, dass Photonen der Sonne in WISPs konvertieren und dann im Detektor wieder zu Photonen umgewandelt werden.

Weitere Experimente, deren Ausschlussregionen in Abbildung 4.2 gezeigt sind, sind elektroschwache Präzisionsmessungen (EW), die vor allem mit dem LEP-Beschleuniger am CERN ausgeführt worden sind, sogenannte Fixed-target-Experimente (EXXX), Zerfallsmessungen des Ypsilons (Υ_{3S}) sowie zukünftig mögliche testbare Regionen mit dem LHC.

4.4 Kohärenzbedingung für Photonenoszillationen

In der Herleitung der Oszillationsformel 4.10 wurden ebene Wellen zur Lösung der Bewegungsgleichung angenommen. Diese Näherung darf allerdings nur unter bestimmten Voraussetzungen getroffen werden. Vielmehr können generell Bedingungen formuliert werden, unter denen Photonenoszillationen auftreten, was in diesem Abschnitt geschehen soll.

Trotz der Probleme, die zu Anfang von Abschnitt 4.2 über eine quantenmechanische Behandlung der Oszillationen geäußert wurden, wird in diesem Abschnitt ausschließlich Quantenmechanik verwendet, um Bedingungen herzuleiten, für die Photonenoszillationen auftreten. Zum einen ist die Konstruktion eines Fock-Raumes für Flavor- und Masseneigenzustände weiterhin umstritten (siehe zum Beispiel Giunti *et al.* 1992;

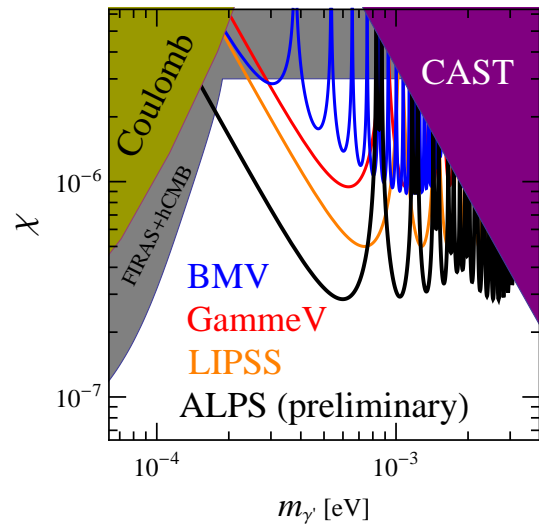


ABBILDUNG 4.3: Ausschnitt des Parameterraums, der durch LSW-Experimente getestet werden kann. Gezeigt sind Obergrenzen verschiedener Experimente. Im ALPS-Experiment ist es möglich, statt eines Vakuums den Laser in einer geringen Konzentration von Argongas operieren zu lassen, um so die Lücken zwischen den Maxima zu schließen. Quelle der Abbildung: Jaeckel & Ringwald (2010)

Fujii *et al.* 1999). Zum anderen treten quantenfeldtheoretischen Korrekturen nur für niedrige Energien auf (vergleiche beispielsweise die Behandlung von neutralen Bosonen in Blasone & Palmer 2004). In dieser Arbeit werden allerdings ausschließlich verborgene Photonen untersucht, deren Energien ultra-relativistisch sind.

Angenommen, in einer Quelle im Abstand d werden Photonen und verborgene Photonen produziert, die dann in Richtung eines Beobachters propagieren. Dies lässt sich durch die Propagations- beziehungsweise Masseneigenzustände beschreiben, da dies die Zustände der wechselwirkungsfreien Theorie sind. Die Propagation dieser Zustände kann durch die Ausbreitung von Wellenpaketen im Ortsraum beschrieben werden. Die Ausdehnung des Wellenpakets in Propagationsrichtung des Photons sei σ_x . Die Masseneigenzustände unterscheiden sich um die Masse μ der verborgenen Photonen, womit sich die Gruppengeschwindigkeiten um einen Wert $\Delta\beta$ unterscheiden und die Wellenpakete auseinander laufen. Eine Mischung tritt nur solange auf, wie sich die Wellenpakete noch überlappen. Eine charakteristische Länge, die Kohärenzlänge L_{coh} , die beschreibt, bis zu welchem Abstand von der Quelle die Pakete noch überlappen, kann somit definiert werden als (Nussinov 1976)

$$L_{\text{coh}} = \frac{\sigma_x}{\Delta\beta}. \quad (4.26)$$

Die folgende Betrachtung zur genauen Herleitung von L_{coh} und zur Bestimmung weiterer Bedingungen folgt der Behandlung von Neutrinooszillationen durch Giunti & Kim (1998), die sich ohne Probleme auf Photonenoszillationen übertragen lassen.

Zunächst sollen noch allgemeine Überlegungen zu möglichen Oszillationen vorgebracht werden. Die Ausdehnung eines Wellenpakets entlang der Propagationsrichtung setzt sich zusammen aus der Unsicherheit, wo das Photon entstanden ist, also über den Produktionsprozess, σ_x^{P} , und wo genau im Detektor das Teilchen nachgewiesen wird, also die Unsicherheit im Detektionsprozess σ_x^{D} . Die gesamte Ausdehnung des Wellenpakets ist dann gegeben durch $\sigma_x^2 = (\sigma_x^{\text{P}})^2 + (\sigma_x^{\text{D}})^2$. Damit Oszillationen überhaupt nachgewiesen werden können, müssen die räumlichen Unsicherheiten des Produktions- und Detektionsprozesses viel geringer als die Wellenlänge L_{osz} der Oszillation sein,

$$\sigma_x \ll L_{\text{osz}}. \quad (4.27)$$

Diesen Vorgang kann man sich anhand von Abbildung 4.4 veranschaulichen. Ist, wie in Abbildung 4.4(a) schematisch für eine feste Energie dargestellt, $\sigma_x^{\text{P}} > L_{\text{osz}}$, so können Photonen an vielen unterschiedlichen Orten in der Quelle entstehen. Die resultierenden Photonenoszillationen sind gegeneinander phasenverschoben und eine Modulation des Spektrums kann nicht mehr nachgewiesen werden, selbst wenn $\sigma_x^{\text{D}} \ll L_{\text{osz}}$ gilt. Ist andererseits $\sigma_x^{\text{D}} > L_{\text{osz}}$, so können ebenfalls keine Modulationen nachgewiesen werden, da der Detektor immer unterschiedliche Amplituden messen wird, je nachdem, wo im Detektor das Photon detektiert wird. Anders sieht es in Abbildung 4.4(b) aus, in der die Situation aus Gleichung 4.27 dargestellt ist. Alle Oszillationen haben ungefähr die gleiche Phase und der Detektor misst immer die gleiche Amplitude.

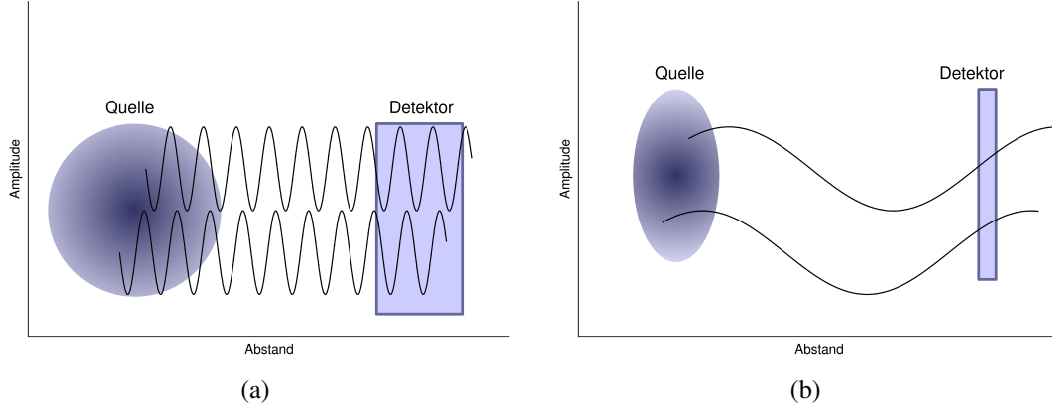


ABBILDUNG 4.4: (a) In diesem Fall können keine Oszillationen nachgewiesen werden, da sowohl σ_x^D als auch σ_x^P größer sind als die Wellenlänge der Oszillation. (b) Hier ist der in Gleichung 4.27 angegebene Fall gezeigt, für den Oszillationen nachgewiesen werden können. Siehe Text für weitere Details.

Des Weiteren müssen Energie- und Impulsunschärfe des Detektors geringer sein als die Unterschiede zwischen Energie und Impuls der Masseneigenzustände und trivialerweise muss gelten, dass $L_{\text{osz}} < L_{\text{coh}}$, damit Oszillationen überhaupt auftreten können.

Im Folgenden soll nun noch die Kohärenzlänge aus dem Ansatz der Wellenpakete bestimmt werden. Zudem sollen die Unschärfen des Produktions- und Detektionsprozess berechnet werden. Dadurch soll überprüft werden, dass es theoretisch möglich ist, Photonenoszillationen nachzuweisen, wenn der Krebsnebel als Synchrotronquelle für Röntgenphotonen angenommen wird, die mit einer CCD-Kamera nachgewiesen werden.

Hierzu betrachte man im Schrödingerbild einen Flavoreigenzustand $|\gamma_\sigma(t)\rangle$ mit $\sigma = \{A, S\}$ als Superposition von Masseneigenzuständen $|\gamma_i\rangle$, mit $i = 1, 2$ und der Mischungsmatrix U aus Gleichung 4.8,

$$|\gamma_\sigma(t)\rangle = \sum_i U_{\sigma i}^* \int d\mathbf{p} \psi_i(p; p_i, \sigma_p^P) e^{-i\omega_i(\mathbf{p}) t} |\gamma_i(p)\rangle, \quad (4.28)$$

mit $\omega_i(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_i^2}$. Das Wellenpaket der Masseneigenzustände $\psi_i(p; p_i, \sigma_p^P)$ wird als Gaußfunktion im Impulsraum angenommen, damit die Oszillationswahrscheinlichkeit analytisch berechnet werden kann,

$$\psi_i(p; p_i, \sigma_p^P) = [2\pi(\sigma_p^P)^2]^{-1/4} \exp\left[-\frac{(p - p_i)^2}{4(\sigma_p^P)^2}\right], \quad (4.29)$$

wobei p_i der mittlere Impuls der Masseneigenzustände ist, der viel größer angenommen wird als die Masse (der verborgenen Photonen), $p_i \gg m_i$. Die Unschärfe ist bestimmt durch den Produktionsprozess, σ_p^P . Ferner wird angenommen, dass die Wel-

lenfunktion ein scharfes Maximum im Impulsraum besitzt. Die Wellenfunktion des Flavorzustandes $|\gamma_\sigma(x, t)\rangle = \langle x | \gamma_\sigma(t) \rangle$ kann durch Berechnung des Gaußintegrals mittels einer quadratischen Ergänzung und unter Ausnutzung, dass $\langle \gamma_i | \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ und $\sigma_x^P \sigma_p^P = 1/2$ gilt, berechnet werden. Der detektierte Flavorzustand (das Photon), $|\gamma_A\rangle$, ist ebenfalls eine Superposition aus Masseneigenzuständen, die jedoch nicht in der Zeit propagiert. Die Detektion findet in einem Abstand d vom Produktionsort statt und die Propagationszeit ist T . Die Amplitude der Flavoroszillation ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} A_{A\sigma}(L, T) &= \int dx \langle \gamma_A(x-L) | \gamma_\sigma(x, T) \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2\sigma_x^P \sigma_x^D}{\sigma_x^2}} \sum_i U_{\sigma i}^* U_{A i} \exp \left[-i\omega_i T + i|\mathbf{p}_i|L - \frac{(L - v_i T)^2}{4\sigma_x^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

mit v_i der Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes. In der Amplitude wird deutlich, dass sowohl die Unschärfe des Detektions- als auch des Produktionsprozesses zur Oszillationswahrscheinlichkeit beitragen. In einem realistischen Experiment ist zwar der Abstand d konstant und bekannt, die Propagationsdauer T dagegen nicht. Die Oszillationswahrscheinlichkeit erhält man deshalb aus der Quadrierung der Amplitude und Mittelung über T , sowie der Normierung $\sum_\sigma P_{\sigma\sigma'} = 1$,

$$P_{\sigma A} = \sum_{i,j} U_{\sigma i}^* U_{A i} U_{\sigma j} U_{A j}^* \exp \left[-2\pi i \frac{d}{L_{\text{osc}}} - \left(\frac{d}{L_{\text{coh}}} \right)^2 \right] F_{ij}. \quad (4.31)$$

Die Wellenlänge und die Kohärenzlänge sind gegeben durch (mit $\omega = E$)

$$L_{\text{osz}} = \frac{4\pi E}{\mu^2}, \quad (4.32a)$$

$$L_{\text{coh}} = \frac{4\sqrt{2}\sigma_x E^2}{\mu^2}, \quad (4.32b)$$

und F_{ij} ist ein Dämpfungsterm, mit einem dimensionslosen Parameter ξ , der von Ordnung $O(1)$ ist und der bestimmt ist durch die Energie- und Impulserhaltung im Produktionsprozess,

$$F_{ij} = \exp \left[-2\pi^2 \xi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{\text{osz}}} \right)^2 \right]. \quad (4.33)$$

Aus Gleichung 4.32b könnte man schließen, dass die Kohärenzlänge dadurch erhöht werden kann, dass man schlechtere Detektoren verwendet, die eine hohe Unsicherheit σ_x^D aufweisen. Der Exponent des Dämpfungsfaktors aus Gleichung 4.33 steigt jedoch quadratisch mit dem Inversen von σ_x , so dass für eine zu schlechte Detektorauflösung die Wahrscheinlichkeit für Oszillationen gegen Null strebt und somit Gleichung 4.27 folgt.

Abschließend sollen die räumlichen Unsicherheiten für Detektions- und Produktions-

prozess im Fall der Röntgenemission vom Krebsnebel abgeschätzt werden.

Produktionsprozess

Röntgenphotonen werden im Krebsnebel durch die Synchrotronstrahlung erzeugt. Die räumliche Unschärfe σ_x^P ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge eines Elektrons im Magnetfeld. Sie ist durch die Unschärferelation verknüpft mit der mittleren Zeit $\Delta\tau$, die das Elektron für diese Strecke braucht (unter expliziter Angabe von c und \hbar),

$$\sigma_x^P \approx \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \frac{\hbar c}{\Delta E} \approx c\Delta\tau. \quad (4.34)$$

Die Zeit $\Delta\tau$ schätzt man ab, in dem man annimmt, dass das Elektron nur monochromatische Photonen der Energie $\epsilon_c = h\nu_c$ emittiert, wobei ν_c die kritische Frequenz aus Gleichung 3.18 ist und der Energieverlust gegeben ist durch Gleichung 3.10. Für $\sin\theta = \sqrt{2/3}$ und $\beta \approx 1$ erhält man,

$$\Delta\tau = \frac{\epsilon_c}{-dE/dt} = 0,215 \left(\frac{B}{10^{-4} \text{ G}} \right)^{-1} \text{ s}. \quad (4.35)$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Photonen- oder Elektronenenergie. Für $B = 123 \mu\text{G}$ findet man

$$\sigma_x^P = c\Delta\tau = 5,2 \cdot 10^7 \text{ m}. \quad (4.36)$$

Dies ist somit die Unsicherheit des Produktionsprozesses.

Detektionsprozess

Werden Röntgenstrahlen mit einer CCD-Kamera – also einem Halbleiter – detektiert, so erzeugen die Photonen Elektron-Loch-Paare im Material, die durch eine angelegte Spannung getrennt und nachgewiesen werden können. Dies kann man durch die Streuung von Photonen an Elektronen in einem Fermigas beschreiben. Der Detektionsvorgang bleibt solange kohärent, bis das Elektron im Festkörper ein weiteres Mal gestreut wird. Die Detektionsunsicherheit σ_x^D ist nach dieser Überlegung gleich der mittleren freien Weglänge eines Elektrons im Fermigas. Sie ergibt sich aus dem Produkt der thermischen Geschwindigkeit \bar{v}_{th} und der mittleren Stoßzeit τ . Für einen Siliziumdetektor ist σ_x^D gegeben durch (Kittel 1976)

$$\sigma_x^D = \bar{v}_{\text{th}}\tau = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \frac{\mu_{\text{Si}} \bar{m}_{\text{Si}}^*}{e} \quad (4.37)$$

mit $\mu_{\text{Si}} = 1350 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ der Beweglichkeit und $\bar{m}_{\text{Si}}^* \approx 0,45m$ der mittleren effektiven Masse von Elektronen in Silizium. Für $T = 300 \text{ K}$ erhält man $\sigma_x^D = 35 \text{ nm}$. Die räumliche Unsicherheit ist somit bestimmt durch den Produktionsprozess,

$$\sigma_x^D \ll \sigma_x^P \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_x \approx \sigma_x^P = 5,2 \cdot 10^7 \text{ m} = 1,7 \cdot 10^{-12} \text{ kpc}. \quad (4.38)$$

Die Bedingung, dass $\sigma_x \ll L_{\text{osz}}$ ist, kann approximiert werden zu $\sigma_x \lesssim (1/10)L_{\text{osz}}$. Durch Umformung von Gleichung 4.32a erhält man daraus eine Bedingung für die Masse der verborgenen Photonen,

$$\left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}}\right) \lesssim 0,11 \left(\frac{\sigma_x}{\text{kpc}}\right)^{-1/2} \left(\frac{E}{\text{keV}}\right)^{1/2}. \quad (4.39)$$

Einsetzen von σ_x und $E = 1 \text{ keV}$ ergibt eine obere Grenze auf die Masse der verborgenen Photonen von $\mu \lesssim 10^{-7} \text{ eV}$. Die Kohärenzlänge ergibt sich mit dieser Masse und Energie zu

$$L_{\text{coh}} \approx 5,55 \cdot 10^{20} \left(\frac{E}{\text{keV}}\right)^2 \left(\frac{\mu}{10^{-7} \text{ eV}}\right) \left(\frac{\sigma_x}{\text{kpc}}\right) \text{ kpc} = 9,4 \cdot 10^8 \text{ kpc}. \quad (4.40)$$

Damit Oszillationen überhaupt stattfinden, darf L_{osz} nicht viel größer sein als $d = 2 \text{ kpc}$. Für $L_{\text{osz}} = 2 \text{ kpc}$ ist auch die Bedingung $L_{\text{osz}} < L_{\text{coh}}$ erfüllt, da das Verhältnis $L_{\text{osz}}/L_{\text{coh}} \approx 2 \cdot 10^{-9}$ beträgt. Röntgendaten des Krebsnebels können nach diesen Überlegungen auf Massen der verborgenen Photonen von $\mu \lesssim 10^{-7} \text{ eV}$ untersucht werden.

Die Oszillationslänge ist für $\mu = 10^{-7} \text{ eV}$ und $E = 1 \text{ keV}$ gegeben durch

$$L_{\text{osz}} \approx 80,37 \left(\frac{E}{\text{keV}}\right) \left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}}\right)^{-2} \text{ kpc} \approx 10^{-8} \text{ kpc}. \quad (4.41)$$

Ferner wird an dieser Gleichung deutlich, dass es nicht sinnvoll ist Massen mit $\mu < 10^{-12} \text{ eV}$ zu untersuchen, da die Oszillationslänge zu groß wird, um Auswirkungen der Photonenoszillationen auf das Spektrum zu beobachten. Für ultra-relativistische verborgene Photonen, die in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet werden, und für $L_{\text{osz}} < L_{\text{coh}}$ kann man den Ansatz der ebenen Wellen weiter verwenden, so dass weiterhin die Gleichung 4.10 für die Wahrscheinlichkeit vom Auftreten von Photonenoszillationen verwendet werden kann.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich aufgrund der Kohärenz Massen in einem Bereich von $\mu \in [10^{-12} \text{ eV}; 10^{-7} \text{ eV}]$ für Röntgenstrahlung untersuchen lassen. Weitere Einschränkungen auf die Masse der verborgenen Photonen und den Mischungswinkel ergeben sich aus den Detektoreigenschaften, was im nächsten Kapitel besprochen wird.

5 Analyse von Röntgendaten des Krebsnebels auf Photonenoszillationen

Die Vielzahl der Messungen über einen großen Energiebereich bieten die Möglichkeit nach Physik jenseits des Standardmodells zu suchen. Zechlin (2009) hat in seiner Arbeit bereits VHE-Spektren des Krebsnebels verwendet, um nach verborgenen Photonen zu suchen und den Parameterraum der Photonenoszillationen für den Massenbereich $2 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \lesssim \mu \lesssim 10^{-5} \text{ eV}$ einzuschränken. In diesem Kapitel sollen nun zwei Möglichkeiten vorgestellt werden, den (μ, χ_0) -Parameterraum mit Hilfe der Röntgendaten des XMM-Newton-Satelliten einzuschränken.

Dazu wird in Abschnitt 5.1 zunächst kurz auf die Extrahierung der Daten und Erzeugung der Spektren des Nebels aus den Rohdaten eingegangen. Die so gewonnenen Daten werden anschließend auf Modulationen durch Photonenoszillationen untersucht. Dies geschieht auf zwei unterschiedliche Arten: In Abschnitt 5.2 wird die Analysesoftware *Xspec* vorgestellt und anschließend der Raum der Parameter der Photonenoszillationen, der mit XMM-Newton-Daten untersucht werden kann, abgeschätzt. Mittels *Xspec* wird dann ein Emissionsmodell mit Photonenoszillationen modifiziert und an die Daten angepasst. In Abschnitt 5.3 wird die dazu komplementäre Methode der Frequenztests vorgestellt. Die Anwendbarkeit dieser Tests wird anhand von Simulationen verifiziert, darauf folgend das Verfahren auf die Daten angewendet und die Ergebnisse mit denen der Methode der Datenanpassung durch *Xspec* verglichen.

5.1 Datenauswahl und Spektrumserzeugung

Die ESA, die den XMM-Newton-Satelliten (siehe Kapitel 2.2 für eine ausführlichere Beschreibung) betreibt, stellt dessen Daten der Wissenschaft öffentlich zur Verfügung. Die Daten lassen sich in drei Kategorien unterteilen:

1. *Observational Data Files (ODF)*. Diese Beobachtungsdatendateien im Dateiformat *FITS* beinhalten alle unkalibrierten Daten der Röntgenkameras und des optischen Monitors.
2. *Pipeline processing System (PPS)* Dateien. Diese Dateien beinhalten kalibrierte Daten zu den einzelnen Beobachtungen. Für ältere Beobachtungen sind diese

allerdings meist veraltet, da sich fortlaufend das Verständnis des Detektors verbessert und neue Kalibrationsdateien veröffentlicht werden.

3. *Current Calibration Files (CCF)*. Kalibrationsdaten der einzelnen Kameras, die zur Analyse benötigt werden.

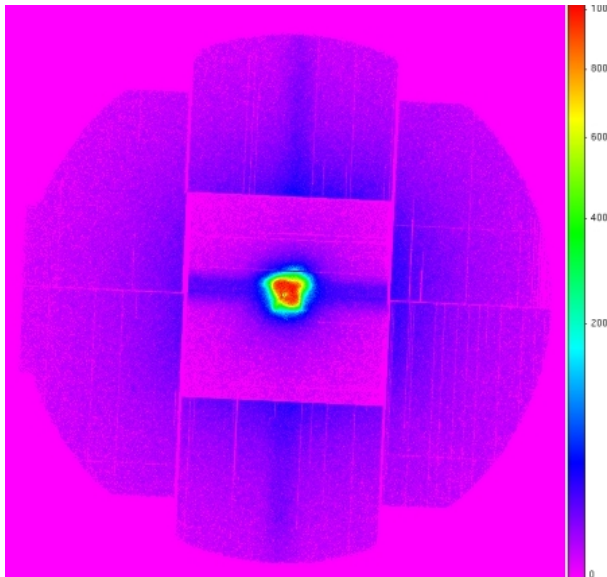


ABBILDUNG 5.1: Der Krebsnebel aus der Sicht der MOS-CCD-Kamera.

Zur Analyse der ODFs und Erstellung der PPS-Dateien wurde die *Science Analyses Software (SAS)* entwickelt. Diese, sowie die ODFs, CCFs und PPS-Produkte lassen sich von der XMM-Newton-Homepage (<http://xmm.esac.esa.int/>) herunterladen. Im Folgenden wird beschrieben, wie die ODFs einer Beobachtung des Krebsnebels bearbeitet werden, um schließlich Ereignislisten und Spektren zu erstellen. Ereignislisten (*Eventlists*) beinhalten alle Informationen einer Beobachtung, wie zum Beispiel die Energie eines einfallenden Photons und der Pixel, auf dem das Photon detektiert wurde. Auf die Details von SAS soll hier nicht weiter eingegangen werden; es sei auf die verschiedenen Handbücher verwiesen*.

Die hier beschriebene Datenauswahl orientiert sich eng an Haberl & Grupe (2008) und Snowden *et al.* (2009). Jeder Beobachtung ist eine Identifikationsnummer und die jeweilige Nummer des Umlaufs (also wie oft der Satellit bereits die Erde umrundet hat) zugeordnet. Als Beispiel für die Auswertung wird die Beobachtung mit der Nummer 0153750501 verwendet, die zum Umlauf 411 gehört.

Nachdem die ODFs und CCFs heruntergeladen sind, kann eine Reihe von Programmen gestartet werden, die mit Hilfe der aktuellen CCFs eine erste Ereignisliste erstellen. Aus dieser Liste werden anschließend Ereignisse anhand von vorher definierten Regeln, sogenannten Filtern, verworfen. Der erste Filter entfernt alle fehlerhaften Pixel aus der Ereignisliste. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.1 für die MOS-CCD-Kamera gezeigt. In der Mitte der Abbildung ist deutlich der Krebsnebel mit seiner torusförmigen Struktur zu erkennen.

Die MOS-Kamera ist allerdings eher ungeeignet, um den Krebsnebel zu untersuchen. Das Problem ist das Phänomen des sogenannten *Pile-ups* (zu deutsch „Auftürmen“). Dieser Effekt tritt immer bei sehr hellen Quellen auf, nämlich dann, wenn mehrere Photonen einen oder die nächstbenachbarten Pixel während eines Auslesezyklus der CCD

* <http://xmm.esac.esa.int/sas/current/howtousesas.shtml>

treffen. Statt der Detektion mehrerer Photonen wird dieses Ereignis als ein Photon mit höherer Energie gewertet, was das gesamte Spektrum zu höheren Energien verschiebt. Einen Ausweg bietet der *Burst-Modus* der pn-CCD-Kamera mit einer zeitlichen Auflösung von $7 \mu\text{s}$. Im Vergleich dazu wird in dem Modus, in dem die komplette CCD-Anordnung belichtet wird, eine Auslesezeit von $73,3 \text{ ms}$ benötigt, wobei der Chip selbst $68,7 \text{ ms}$ belichtet wird (Strüder *et al.* 2001). Dagegen werden im Burst-Modus 200 Zeilen eines CCD-Chips innerhalb von $7 \mu\text{s}$ ausgelesen und es werden weitere $7 \mu\text{s}$ benötigt, um den Inhalt des Chips zu löschen und für einen neuen Auslesevorgang bereit zu machen. Bei diesem Vorgang wird fortlaufend Ladung über die Transferregister zur Ausleseelektronik übertragen (vergleiche auch Abbildung 2.4(b)), wodurch die räumliche Auflösung in der Ausleserichtung verloren geht[†]. Die letzten 20 Zeilen sind am längsten der Quelle ausgesetzt und somit auch schon vom Pile-up betroffen. Diese Daten werden gar nicht erst zur Bodenstation gesendet (Kirsch *et al.* 2006). Das resultierende Bild ist in Abbildung 5.2 gezeigt. Die vertikale Richtung stellt die Ausleserichtung dar und es ist zu erkennen, dass die obersten Pixel am längsten der Röntgenstrahlung ausgesetzt waren.

Anschließend werden Regionsfilter auf die Ereignisliste angewendet. Dadurch wird zum einen die Quellregion und zum anderen die Hintergrundregion definiert. Dieses ist durch die schwarzen Boxen in Abbildung 5.2 gekennzeichnet. Dabei wurden die selben Regionen verwendet wie in der Analyse von Kirsch *et al.* (2006). Die Region in der Mitte der Abbildung stellt den Beitrag des Nebels dar. So wird der Anteil des Pulsars herausgefiltert. Die Region am Rand des Bildes definiert

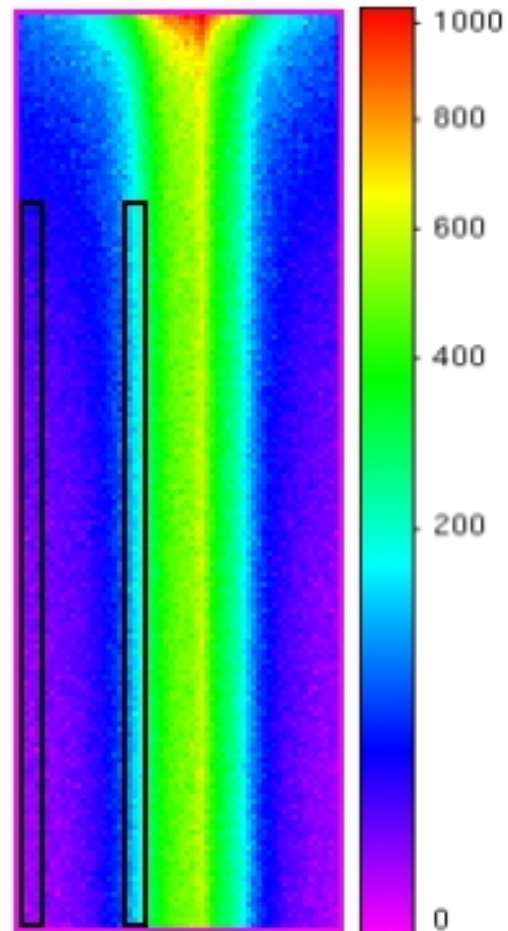


ABBILDUNG 5.2: Bild der pn-Kamera vom Krebs im Burst-Modus. Die oberen Pixel wurden als letzte ausgelesen, weswegen dort die Zählrate am höchsten ist. Die mittlere schwarze Box dient zur Erstellung des Nebelspektrums, während die äußere Box für den Hintergrund verwendet wird. Die Regionen wurden analog zur Analyse in Kirsch *et al.* (2006) gewählt.

[†] Im Gegensatz dazu wird in den normalen Modi der CCD-Chip erst für eine Zeit lang belichtet und dann Pixel für Pixel ausgelesen.

den Beitrag des Hintergrundes.

Bevor das Spektrum der Quelle erstellt wird, muss man überprüfen, ob der Effekt des Pile-ups nun gänzlich vermieden worden ist. Dazu vergleicht SAS die Daten aus der Quell- und Hintergrundsregion mit theoretischen Erwartungen für verschiedene Arten von Ereignissen. Dies können sogenannte *single*, *double*, *triple*, etc. Ereignisse sein, also Ereignisse, bei denen ein oder mehrere benachbarte Pixel ein Photon detektiert haben. Ein solcher Test ist in Abbildung 5.3 für Einzel- (rot) und Doppelereignisse (blau) dargestellt. Die obere Abbildung zeigt das gemessene Spektrum. Die durchgezogene Linie in der unteren Abbildung entspricht der theoretischen Erwartung, während das Histogramm die Daten zeigt. Da keine starke Abweichung zu erkennen ist, ist kein Pile-up vorhanden und ein Spektrum kann ohne Bedenken erstellt werden.

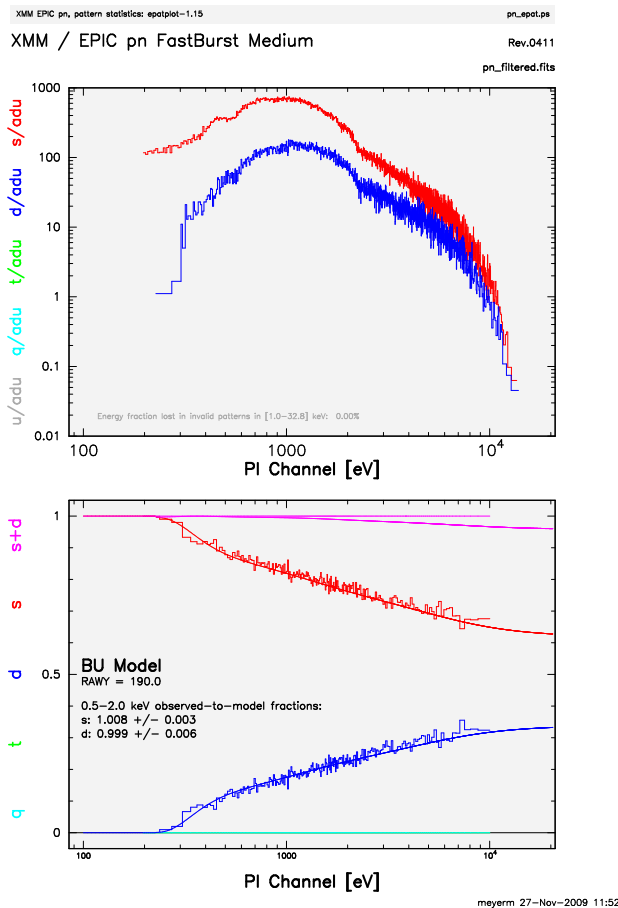


ABBILDUNG 5.3: Ergebnis des Tests der Daten auf Pile-up. In rot sind *single Events* gezeigt, dies sind Ereignisse bei denen das einfallende Photon ein Signal auf nur einem Pixel verursacht hat, während in blau die *double Events* gezeigt sind, also Ereignisse bei denen zwei benachbarte Pixel das Photon detektiert haben. Im oberen Bild ist das Spektrum in logarithmischer Darstellung gezeigt. Das untere Bild vergleicht die theoretische Erwartung (durchgezogene Linie) mit den Daten (Histogramm). Im Falle des Pile-ups würde die theoretische Erwartung bei hohen Energien von den Daten abweichen, was hier jedoch nicht zu erkennen ist. Auf der x -Achse ist die Energie in eV der PI-Kanäle aufgetragen. PI steht für *Pulse Height Invariant*, was bedeutet, dass Einzel- und Doppelereignisse zu einem einzigen Ereignis kombiniert wurden.

Für das Spektrum wird das gesamte Energieintervall der Ereignisliste der Quelle und des Hintergrundes in Teilintervalle der Größe 5 eV unterteilt (*binning*) und jedes einzelne Teilintervall wird dann wie in einem Histogramm mit den Ereignissen der entsprechenden Energie aufgefüllt.

Abschließend werden noch Ereignislisten der *Photon Redistribution Matrix* (RMF) und *Ancillary Region File* (ARF) erstellt. Erstere ist die Detektorantwortmatrix, welche die Antwort des Instruments als Funktion der Energie und der PI-Kanäle (siehe Bildunterschrift von Abbildung 5.3) beschreibt. Sie ist proportional zur Wahrscheinlichkeit ein Photon einer gewissen Energie in einem gewissen Instrumentenkanal zu detektieren. Sie beinhaltet Korrekturen der Ereignisse, die aufgrund von Effekten des Detektors auf die Messung nötig werden. Das ARF ist die ergänzende Antwortmatrix. Sie beinhaltet die Informationen über die effektive Fläche und die Quanteneffizienz des Detektors (Haberl & Grupe 2008). Für das finale Spektrum wird abschließend das Programm `grppha` des FTOOLS[‡] Softwarepaket gestartet. Es kombiniert die Ereignisliste des Spektrums mit der RMF und ARF und unterteilt das Spektrum erneut in Teilintervalle, so dass sich mindestens 25 Photonen in einem Teilintervall befinden. Die so entstandene Ereignisliste kann nun mit dem Programm *Xspec* ausgewertet und theoretische Modelle an das gemessene Spektrum angepasst werden. Dies wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt.

Die vorgestellte Datenauswahl und Spektrumserzeugung wurde für insgesamt 22 Beobachtungen des Krebsnebels im Burst-Modus durchgeführt. Alle Beobachtungen sind in der Tabelle 5.1 aufgelistet. Zusätzlich wurden noch Ereignislisten mehrerer Beobachtungen mit dem Befehl `merge` von SAS zu einer Ereignisliste zusammengefügt. Es lassen sich allerdings nur solche Listen zusammenfassen, bei denen die Beobachtungen unter den selben Voraussetzungen durchgeführt wurden. Deshalb wurden zum einen die Listen des Umlaufs 411 zusammengefügt, da dort ein anderer Filter als bei den restlichen Beobachtungen verwendet wurde. Des Weiteren wurden die Beobachtungen der Umläufe 234, 874 - 1414 und der Umläufe 1504 - 1797 zu zwei Ereignislisten zusammengefügt. Aufgrund mangelnden Arbeitsspeichers konnten diese zwei Listen nicht weiter zu einer Liste verbunden werden.

5.2 Analyse des Röntgenspektrums mit Xspec

Das im vorangegangenen Kapitel erstellte Spektrum kann mit Hilfe der Analysesoftware *Xspec* (Arnaud 1996; Arnaud *et al.* 2009) auf Photonenoszillationen untersucht werden. *Xspec* ermöglicht es, unter Berücksichtigung der Detektorantwort theoretische Modelle der Emissionsquelle an die Daten anzupassen. Das grundlegende Problem der (Röntgen-) Astronomie besteht darin, dass das Quellenspektrum $f(E)$ im Allgemeinen nicht bekannt ist und nicht direkt gemessen wird. Was detektiert wird, sind Photonenergebnisse $C(I)$, die von dem spezifischen Instrumentenkanal I abhängen (zum Beispiel die PI-Kanäle aus dem letzten Abschnitt). Das Quellenspektrum ist mit den Photonenergebnissen über die Detektorantwortmatrix $R(I, E)$ durch eine Vor-

[‡] Das Softwarepaket FTOOLS beinhaltet Programme zur Bearbeitung von FITS Dateien, siehe http://heasarc.nasa.gov/lheasoft/ftools/ftools_menu.html

TABELLE 5.1: Beobachtungs- und Umlaufnummern der XMM-Newton-Beobachtungen zusammen mit den jeweils verwendeten Filtern, M = Medium, T = Dick (*thick*), sowie den gemessenen und simulierten (siehe Abschnitt 5.3.3) Ereigniszahlen.

Beobachtungs-ID	Umlaufnummer	Filter	Belichtungszeit [ks]	Anzahl der Ereignisse	Anzahl simulierter Ereignisse
0135730701	234	T	10,0	430.519	118.968
0153750301	411	M	9,0	308.201	78.613
0153750501	411	M	9,0	305.424	78.613
0160960401	874	T	14,7	488.743	118.968
0160960601	874	T	4,0	135.911	36.423
0160960801	955	T	5,0	159.757	36.423
0160960901	955	T	8,2	254.847	69.673
0160961101	1049	T	5,0	66.719	16.874
0160961301	1140	T	5,0	186.122	50.900
0160961501	1140	T	6,7	255.549	69.673
0315790201	1138	T	5,0	160.941	36.423
0412590301	1249	T	8,9	157.518	36.423
0412590701	1325	T	8,9	320.606	92.712
0412591001	1414	T	13,2	229.081	50.900
0412591201	1414	T	13,4	226.318	50.900
0412591401	1504	T	21,7	907.960	220.385
0412591601	1504	T	20,2	799.136	220.385
0412591901	1600	T	5,8	101.745	23.106
0412592101	1600	T	15,4	272.864	69.673
0412592401	1687	T	18,9	802.949	220.385
0412592601	1687	T	18,2	530.956	118.968
0412593001	1797	T	10,2	194.191	36.423
kombiniert	411	M	18,0	159.978	154.237
kombiniert	234 - 1414	T	108,0	850.876	849.061
kombiniert	1504 - 1797	T	110,4	996.607	991.021

wärtsfaltung verknüpft,

$$C(I) = \int_0^{\infty} f(E)R(I, E)dE. \quad (5.1)$$

Die Detektorantwortsmatrix ist im Allgemeinen nicht diagonal, weswegen Gleichung 5.1 nicht ohne Weiteres invertiert werden kann. Alternativ benutzt man ein Modellspektrum $M(E)$, das mit wenigen Parametern $\{p_i\}$ beschrieben werden kann. Für jedes so erzeugte Quellspektrum wird $C_p(I)$ berechnet und mit den Daten $C(I)$ verglichen. Die Parameter werden variiert und über eine Teststatistik die Güte der Anpassung an die Daten berechnet.

All diese Aufgaben übernimmt Xspec und verwendet dabei die χ^2 -Statistik als Teststatistik. Sie ist in Anhang B.2 beschrieben. Die Parameter, für die der χ^2 -Wert minimal

wird, bezeichnet man als *best-fit*- (beste Anpassungs-) Parameter. Xspec geht für die Berechnung der Statistik folgendermaßen vor (Arnaud *et al.* 2009):

- Die Zählrate der Ereignisse $C(I)$ wird folgendermaßen bestimmt: Die Regionen des Hintergrundes und der Quellenregion werden durch die jeweiligen Belichtungszeiten geteilt und die Hintergrundrate auf die Fläche der Quellregion skaliert. Anschließend wird die Hintergrundrate von der Quellrate subtrahiert und als Ergebnis erhält man $C(I)$.
- Die Detektorantwortmatrix ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit ein Photon der Energie E im Kanal I zu detektieren und ist somit eine kontinuierliche Funktion von der Energie E . Xspec unterteilt diese in mehrere diskrete Matrizen R_D im Energieintervall $[E_{j-1}, E_j]$,

$$R_D(I, j) = \frac{\int_{E_{j-1}}^{E_j} R(I, E) dE}{E_{j-1} - E_j}. \quad (5.2)$$

Xspec liest $R_D(I, j)$, sowie die Energieintervalle aus der RMF ein, die mit SAS erzeugt wurde. Außerdem wird die ARF $A_D(j)$ eingelesen und mit der Antwortmatrix multipliziert:

$$R_D(I, j) \rightarrow R'_D(I, j) = R_D(I, j) \cdot A_D(j). \quad (5.3)$$

Die Detektorantwortmatrix wird üblicherweise in Einheiten von cm^2 angegeben.

- Das Modellspektrum $M(E)$, welches von Modellparametern $\{p_i\}$ charakterisiert wird, wird analog zur Detektorantwortmatrix zu $M_D(j)$ diskretisiert,

$$M_D(j) = \int_{E_{j-1}}^{E_j} M(E) dE \quad (5.4)$$

und hat die Einheit $\text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}$.

- Durch Minimierung der χ^2 -Statistik nach den Modellparametern $\{p_i\}$ werden anschließend die *best-fit*-Parameter ermittelt. Die modellierte Zählrate ist gegeben durch $C_p(I) = \sum_j R'_D(I, j) \cdot M_D(j)$ und wird über die χ^2 -Statistik mit der gemessenen Zählrate verglichen. Der Messfehler wird mit $\sqrt{C(I)}$ abgeschätzt. Die zur Minimierung nötigen Ableitungen werden dabei nach Möglichkeit analytisch berechnet. Xspec kann außerdem die Konfidenzintervalle (siehe Anhang B.2) der Parameter berechnen.

Xspec kann des Weiteren die Daten, Modelle und effektiven Flächen des Detektors graphisch darstellen. Abbildung 5.4 zeigt als Beispiel das Krebspektrum aus dem Umlauf 411.

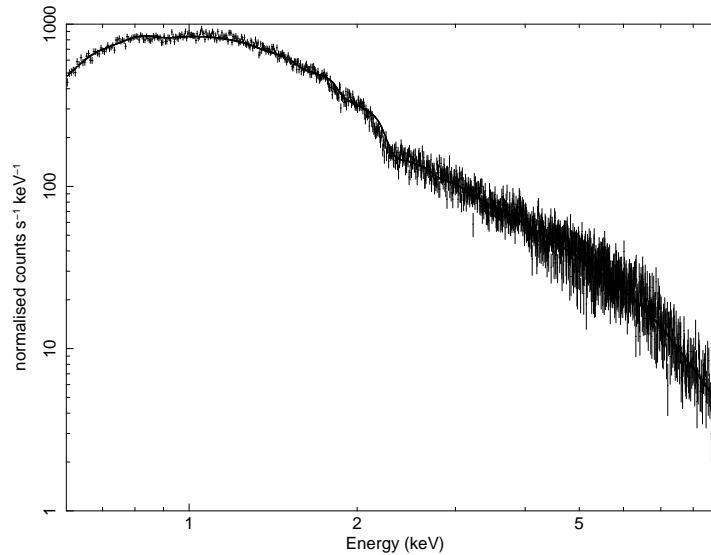


ABBILDUNG 5.4: Krebspektrum in doppellogarithmischer Darstellung des Umlaufs 411, das mit der Xspec-Software erstellt wurde. Eingezeichnet sind die Datenpunkte der differentiellen Zählrate dN/dE gegen die Energie E .

Bevor mit der eigentlichen Analyse der Röntgendaten auf Photonenoszillationen begonnen wird, soll der Parameterraum der Photonenoszillationen noch weiter eingeschränkt werden, da sich aufgrund der gemessenen Photonenergebnisse aus Tabelle 5.1 und aus den Eigenschaften der XMM-Newton-Detektoren weitere Bedingungen ergeben.

Erwartungen

In Abschnitt 4.4 zeigte sich, dass die testbare Photonemasse durch die Kohärenzbedingungen beschränkt ist auf $\mu \in [10^{-7} \text{ eV}; 10^{-12} \text{ eV}]$. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass die Photonemasse, die mit XMM-Newton getestet werden kann, noch stärker begrenzt ist. Zudem lassen sich Einschränkungen auf den Mischungswinkel finden, für die Oszillationen noch nachweisbar sind.

XMM-Newton detektiert einzelne Photonen. Bei einer mittleren Photonennrate r und der einer Beobachtungszeit T ist die Wahrscheinlichkeit n Photonen zu messen durch die Poissonstatistik gegeben (Stanford *et al.* 1995),

$$P(n, rT) = \frac{(rT)^n}{n!} e^{-rT}, \quad (5.5)$$

mit dem Mittelwert rT und der Varianz \sqrt{rT} . Mit den Werten für T und n aus Tabelle

5.1 ergibt sich eine mittlere Photonennrate von $r \approx 30 \text{ s}^{-1}$ und eine mittlere Beobachtungszeit von $\bar{T} \approx 11 \text{ ks}$. Der relative statistische Fehler ist somit $rT / \sqrt{rT} = 1 / \sqrt{rT} \approx 2 \cdot 10^{-3}$. Wenn keine Photonenoszillationen entdeckt werden, muss also die Amplitude $P_{\gamma \rightarrow \gamma_s}^a$ der Oszillation kleiner sein als $2 \cdot 10^{-3}$. Der Mischungswinkel kann dementsprechend eingeschränkt werden (Zechlin 2009), da für kleine χ_0 gilt

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma_s}^a = \sin^2(2\chi_0) \approx 4\chi_0^2. \quad (5.6)$$

Somit erhält man als obere Grenze für χ_0

$$\chi_0 \lesssim \left(\frac{P_{\gamma \rightarrow \gamma_s}^a}{4} \right)^{1/2} \approx 0,02, \quad (5.7)$$

wenn *keine* Photonenoszillationen beobachtet werden. Andererseits kann für beliebige Werte von χ_0 ein Massenintervall abgeschätzt werden, für das XMM-Newton in der Lage ist Photonenoszillationen zu detektieren. Generell gilt, dass für $E \rightarrow \infty$ die Photonenoszillationen „ausfrieren“, da $\sin^2(1/E) \rightarrow 0$ und somit nach Gleichung 4.10 keine Oszillationen mehr nachweisbar sind. Bei der minimalen Photonenergie, die XMM-Newton noch detektieren kann, $E_{\min} \approx 150 \text{ eV}$, muss dann

$$\sin^2(2\chi_0) \sin^2\left(\frac{\mu^2 d}{4E_{\min}}\right) > 2 \cdot 10^{-3} \quad (5.8)$$

gelten. Bei maximaler Mischung von $\chi_0 = \pi/4$ erhält man so eine untere Grenze für die Masse μ in Abhängigkeit von dem Abstand zur Quelle d ,

$$\left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}} \right) \gtrsim 0,4 \left(\frac{d}{\text{kpc}} \right)^{-1/2}. \quad (5.9)$$

Auf der anderen Seite darf μ auch nicht zu groß werden, zum einen aufgrund der oberen Schranke auf die Masse, die sich aus der Kohärenzbedingung (siehe Abschnitt 4.4) ergibt, zum anderen können zu schnelle Oszillationen nicht mehr aufgelöst werden. Um durch letzteren Punkt eine obere Grenze abzuleiten, betrachte man zunächst die Energieauflösung der pn-Kamera, welche $E/\Delta E = 10 - 50$ (Kirsch *et al.* 2006) beträgt. Setzt man optimistisch $E/\Delta E = 50$ und konstant über das gesamte Energieintervall der pn-Kamera, so ist die maximale Anzahl der Oszillationen, die noch aufgelöst werden können, $\approx 100^*$. Andererseits ist die Anzahl der Oszillationen Δn zwischen den

* Dies kann man sich einfach verdeutlichen: für eine Energieauflösung $\Delta E = E/50$ ist die mittlere Energieauflösung $\overline{\Delta E}$ im Intervall $E \in [E_{\min}; E_{\max}]$ gegeben durch

$$\overline{\Delta E} = \frac{\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \Delta E dE}{\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE} = \frac{1}{100} \frac{E_{\max}^2 - E_{\min}^2}{E_{\max} - E_{\min}}.$$

Somit ergibt sich die maximale Anzahl Δn der Oszillationen, die noch aufgelöst werden können, zu $\Delta n_{\max} = (E_{\max} - E_{\min}) / \overline{\Delta E} \approx 100$.

Energien E_{\min} und E_{\max} gegeben durch die Anzahl der Maxima des Sinus,

$$\Delta n = \frac{\mu^2 d}{4\pi} \left(\frac{1}{E_{\min}} - \frac{1}{E_{\max}} \right) \approx \frac{\mu^2 d}{4\pi} \frac{1}{E_{\min}}, \quad (5.10)$$

für $E_{\max} \gg E_{\min}$. Kombiniert man nun diese zwei Überlegungen, so erhält man eine obere Grenze auf μ , die restriktiver als die Kohärenzbedingungen und abhängig vom Abstand ist,

$$\left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}} \right) \lesssim 50 \left(\frac{d}{\text{kpc}} \right)^{-1/2}. \quad (5.11)$$

Der erreichbare Parameterraum ist in Abbildung 5.5 gezeigt. Für $d \approx 2 \text{ kpc}$ ist die

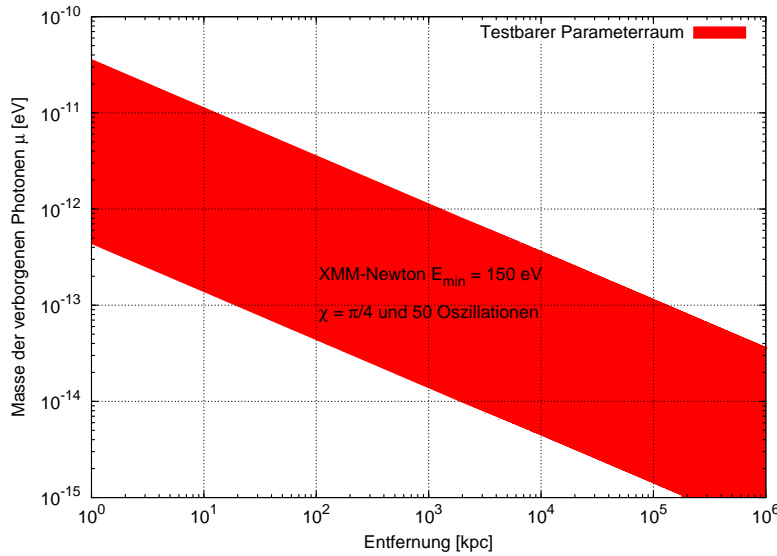


ABBILDUNG 5.5: Testbarer Parameterraum der Photonmasse μ in Abhängigkeit vom Abstand der Quelle d mit XMM-Newton. Die rote Region zeigt, für welche Werte von μ XMM-Newton Photonenoszillation entdecken kann, wenn maximale Mischung $\chi_0 = \pi/4$ angenommen wird und unter der Annahme, dass XMM-Newton Oszillationen im abgedeckten Energiebereich auflösen kann.

untere Grenze für μ aus Gleichung 5.9 kleiner als 10^{-12} eV , dieser Bereich ist aber nach den Überlegungen zur Kohärenzlänge bereits ausgeschlossen, vergleiche Gleichung 4.41. Als obere Grenze ergibt sich nach Abbildung 5.5, dass $\mu \lesssim 3 \cdot 10^{-11} \text{ eV}$ ist. Diese wird jedoch vorsichtshalber auf $2 \cdot 10^{-10} \text{ eV}$ erhöht, um den gemachten Annahmen Rechnung zu tragen. Somit werden in den Abschnitten 5.2 und 5.3 verborgene Photonmassen für den Krebsnebel im Intervall $[2 \cdot 10^{-12}; 2 \cdot 10^{-10}] \text{ eV}$ untersucht. Ein Vergleich mit Abbildung 4.2 zeigt, dass dieser Massebereich bereits durch Vermessung des CMBs ausgeschlossen ist. Nichtsdestotrotz ist es sinnvoll, die Methoden zur Suche nach Photonenoszillationen für Röntgendaten anhand des Krebsnebels zu entwickeln, da, wie aus Abbildung 5.5 hervorgeht, es in Zukunft möglich sein könnte

auf analoge Weise sehr weit entfernte Quelle zu untersuchen. Dadurch könnte der Parameterraum für Massen im Bereich von 10^{-15} eV abgedeckt werden, der bislang nur für wenige Mischungswinkel ausgeschlossen ist.

Datenanalyse und Ergebnisse

Die mit SAS erstellten Spektren wurden einmal ohne und einmal mit Photonenoszillationen ausgewertet. Ohne Photonenoszillationen wurden die in Xspec implementierten Modelle *phabs* und *powerlaw* kombiniert und an die Daten angepasst. Das Modell *phabs* beschreibt die photoelektrische Absorption von Röntgenstrahlung durch Atome im Krebsnebel und interstellaren Medium entlang der Sichtlinie,

$$M_{phabs}(E) = \exp(-N_H \sigma(E)), \quad (5.12)$$

mit festen Wirkungsquerschnitten $\sigma(E)$ und relativen Häufigkeiten der Elemente schwerer als Wasserstoff (siehe *phabs* Modell in Arnaud *et al.* 2009, und dortige Referenzen). Der einzige freie Parameter ist die äquivalente Wasserstoffsäule N_H in den Einheiten 10^{22} cm^{-2} . Das Modell *powerlaw* beschreibt ein einfaches Potenzgesetz von der Form

$$M_{pow}(E) = N_0 \left(\frac{E}{\text{keV}} \right)^{-\Gamma}, \quad (5.13)$$

mit den freien Parametern N_0 der Normierung in $\text{keV}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ bei 1 keV und dem Spektralindex Γ . Kombiniert ergibt sich das anzupassende Modell zu

$$M(E) = \exp(-N_H \sigma(E)) \cdot N_0 \left(\frac{E}{\text{keV}} \right)^{-\Gamma}, \quad (5.14)$$

wobei die Wasserstoffsäule mit $N_H = 2,76 \cdot 10^{21} \text{ cm}^2$ als konstant gewählt wird (Kirsch *et al.* 2006), so dass insgesamt zwei freie Parameter variiert werden. Das Modell und die effektive Fläche sind in Abbildung 5.6(b) und 5.6(a) für den Umlauf 411 gezeigt. Die best-fit-Parameter sind in Tabelle 5.2 aufgelistet.

TABELLE 5.2: Beispiel der Xspec-Auswertung des Krebspektrums des Umlaufs 411 von XMM-Newton ohne Photonenoszillationen. An das Spektrum wurde ein Potenzgesetz mit Photoabsorption angepasst, wobei die Wasserstoffsäule $N_H = 2,76 \cdot 10^{21} \text{ cm}^2$ als konstant angenommen wurde. Die Fehler der Parameter sind als 90% Konfidenzintervall angegeben.

Beobachtungs-ID	Spektraler Index Γ	Normierung N_0	$\chi^2/\text{d.o.f.}$
411	$2,1915 \pm 0,0063$	$1,6588 \pm 0,0076$	1,2072

Zur Untersuchung von Photonoszillationen wurde ein weiteres multiplikatives Modell

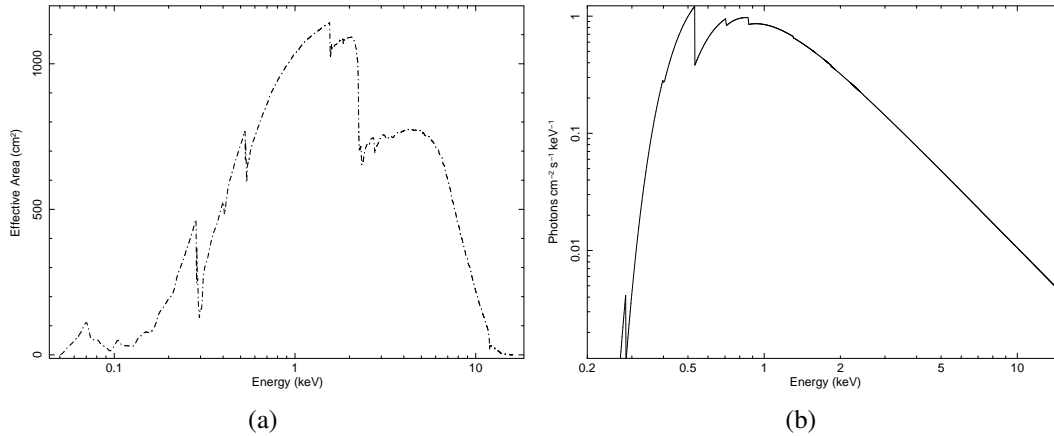


ABBILDUNG 5.6: (a) Effektive Fläche von XMM-Newton in Abhängigkeit von der Energie. (b) Theoretisches Spektrum unter Annahme eines Potenzgesetzes und Photoabsorption für den Krebsnebel. Die Absorptionsbanden sind deutlich als scharfe Maxima zu erkennen. Die Faltung der Effizienz aus Abbildung (a) und des Modells in Abbildung (b) wird an das gemessene Spektrum aus Abbildung 5.4 angepasst.

osc definiert und in Xspec eingebunden,

$$M_{osc}(E) = 1 - \sin^2(2\chi_0) \sin \left[3,909 \cdot 10^{22} \left(\frac{\mu}{\text{eV}} \right)^2 \left(\frac{E}{\text{keV}} \right)^{-1} \left(\frac{d}{\text{kpc}} \right) \right] \quad (5.15)$$

Insgesamt wurde dann das Modell $M_{phabs} \cdot M_{pow} \cdot M_{osc}$ mit insgesamt vier freien Parametern χ_0 , μ , N_0 und Γ angepasst. Der Abstand d wurde bei 2 kpc festgehalten. Die Anpassung des Modells an die Datenpunkte ist in einem selbstgeschriebenen tcl- (Tool command language) Skript (siehe Anhang A.3) implementiert. Das Skript ist folgendermaßen aufgebaut:

- Der Massenparameter μ wird konstant gesetzt, beginnend mit $\mu = 2 \cdot 10^{-12}$ eV.
- Die drei restlichen Parameter χ_0 , μ und Γ werden von Xspec an die Daten angepasst.
- Ist der best-fit gefunden, wird der best-fit-Mischungswinkel χ_0 erhöht, um das Konfidenzintervall zu berechnen. Es wird die obere Grenze mit einem 90% Konfidenzintervall gesucht (siehe Anhang B.2 für die Definition von Konfidenzintervallen). Bei effektiv drei anzupassenden Parametern entspricht dies einer Erhöhung vom minimalen χ^2 um $\Delta\chi^2 = 6,25$. Der zugehörige Wert von χ_0 wird gemeinsam mit den anderen Parametern abgespeichert.
- Die Masse μ wird um ein Prozent des vorherigen Wertes erhöht und die Anpassung fängt von Neuem an, solange $\mu < 2 \cdot 10^{-10}$ eV gilt.

Die Ergebnisse des 90% Konfidenzintervalls (C.L., *Confidence Level*) sind in den Abbildungen 5.7(a) und 5.7(b) für die kombinierten Beobachtungen mit dickem Filter, in 5.8 für die kombinierten Beobachtungen mit mittlerem Filter und für alle Einzelmessungen in Abbildung 5.9 gezeigt.

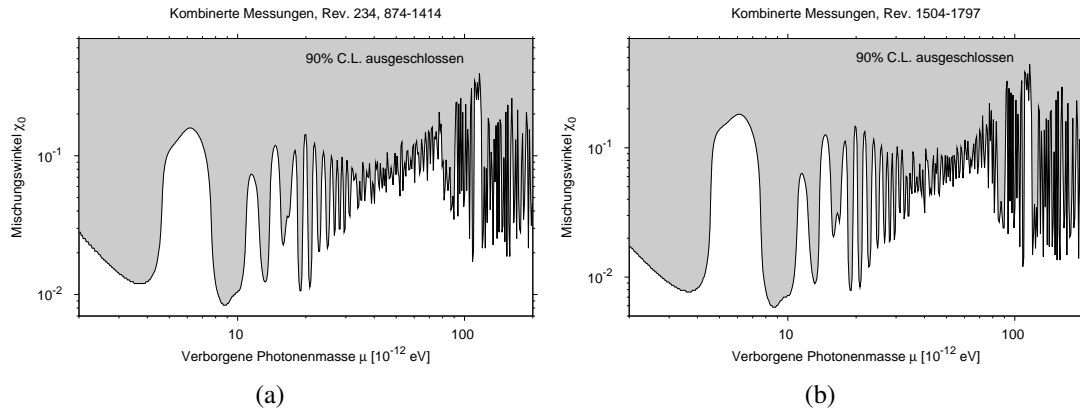


ABBILDUNG 5.7: (a) Kombinierte Ergebnisse der Messungen der Umläufe 234, 874-1414. (b) Kombinierte Ergebnisse der Messungen der Umläufe 1504-1797.

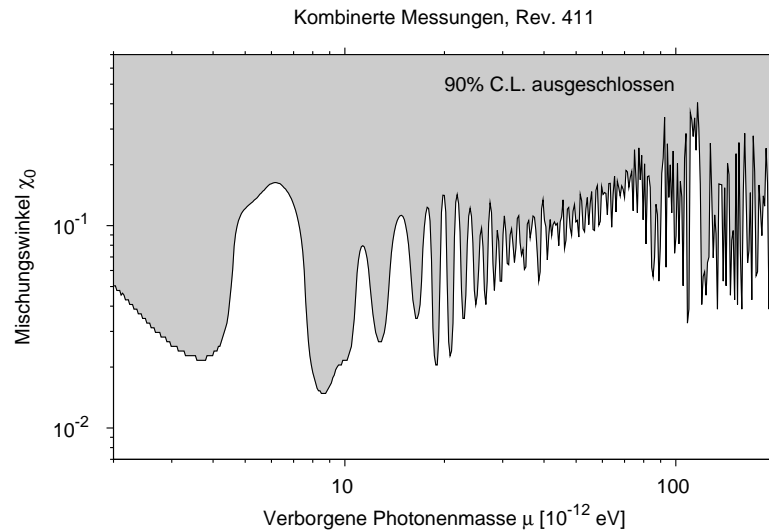


ABBILDUNG 5.8: Kombinierte Ergebnisse der Messung des Umlaufs 411.

Die generelle Morphologie der Ausschlussregionen ist bei allen Ergebnissen die selbe. Für niedrigere Massen können immer weniger Mischungswinkel ausgeschlossen werden, weil die Masse zu gering wird, als dass Oszillationen im Energiebereich von XMM-Newton stattfinden könnten. Für höhere Massen oszilliert das Signal immer schneller, ist aber im Mittel konstant. Die Oszillationslänge wird so gering, dass die einzelnen Schwingungen nicht mehr auflösbar sind.

Für die kombinierten Datensätze können erwartungsgemäß nach der Diskussion unterhalb Gleichung 5.5 größere Regionen des Mischungswinkels ausgeschlossen werden. Allerdings bleibt die Sensitivität hinter der formulierten Erwartung, dass Mischungswinkel $\chi_0 \gtrsim 0,02$ ausgeschlossen werden können, zurück. Dies hängt damit zusammen, dass neben χ_0 auch der Photonindex Γ und die Normierung N_0 freie Parameter darstellen. Dadurch erhöht sich zum einen $\Delta\chi^2$ von 2,71 für einen auf 6,25 für drei freie Parameter bei einem 90% Konfidenzintervall. Zum anderen bestände die einzige Möglichkeit, bei einem vorgegeben Potenzgesetz eine bessere Anpassung zu erreichen, darin, den Mischungswinkel zu verringern. Betrachtet man allerdings N_0 und Γ als frei, so kann eine Anpassung mit größerem χ_0 gefunden werden, die die Daten ebenso gut beschreibt.

Ein Vergleich mit Abbildung 4.2 zeigt, dass durch diese Ergebnisse keinen neuen Einschränkungen des Parameterraums verborgener Photonen resultieren. Dazu wäre eine viel größere Anzahl von Photonenergebnissen nötig, um die Ausschlussregion, die sich aus der Analyse des kosmischen Hintergrundes ergibt (Mirizzi *et al.* 2009), zu vergrößern. Mit den abgeschätzten Erwartungen (vergleiche Abbildung 5.5) sieht man jedoch, dass es eventuell möglich ist, für sehr entfernte Objekte mit $d > 100$ Mpc in Regionen von Massen $\mu < 10^{-15}$ eV vorzustößen, die bis jetzt kaum ausgeschlossen sind.

5.2 Analyse des Röntgenspektrums mit Xspec

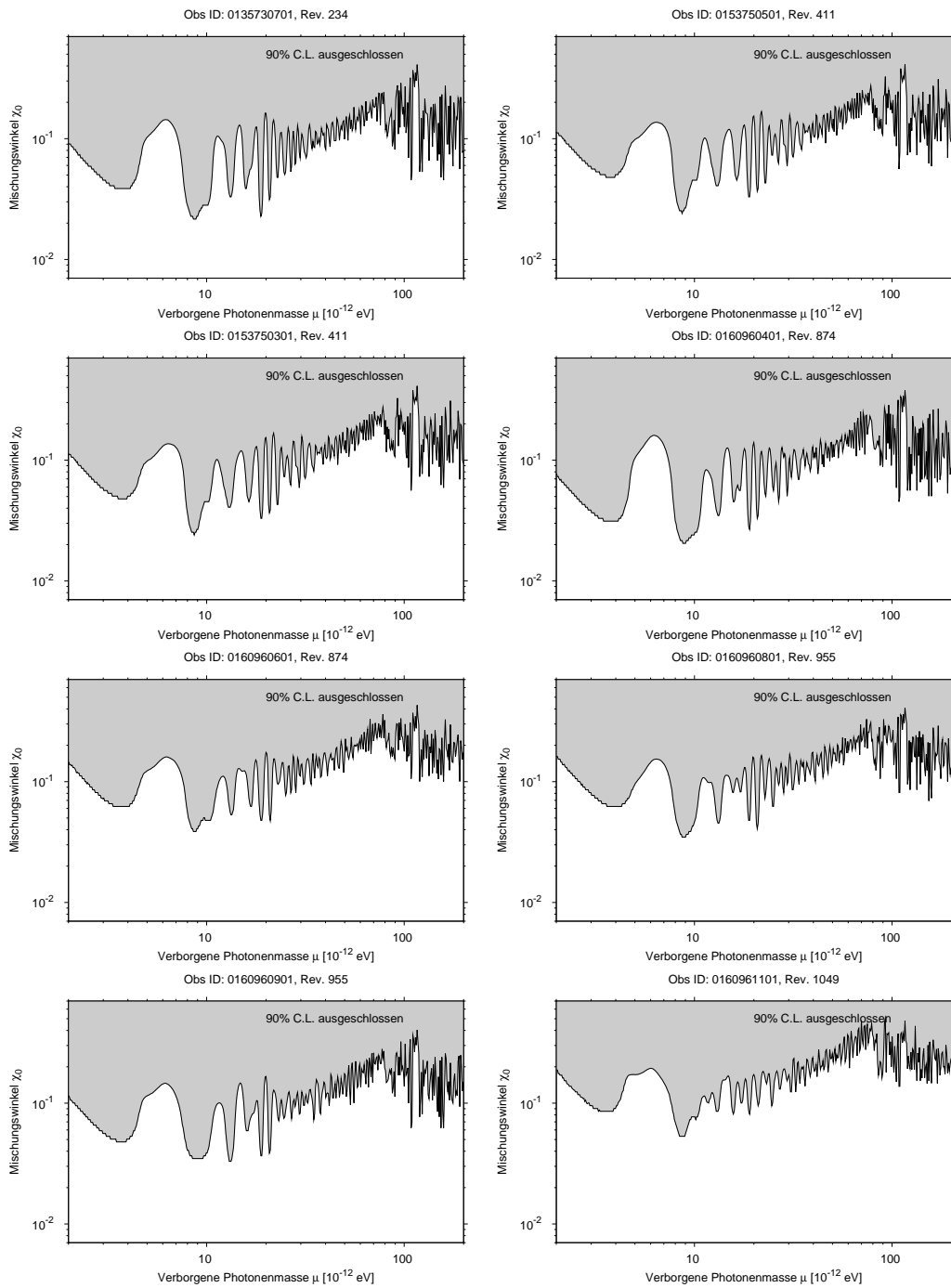


ABBILDUNG 5.9: Konfidenzintervalle aller Beobachtungen, erstellt mit Xspec.

5 Analyse von Röntgendaten des Krebsnebels auf Photonenoszillationen

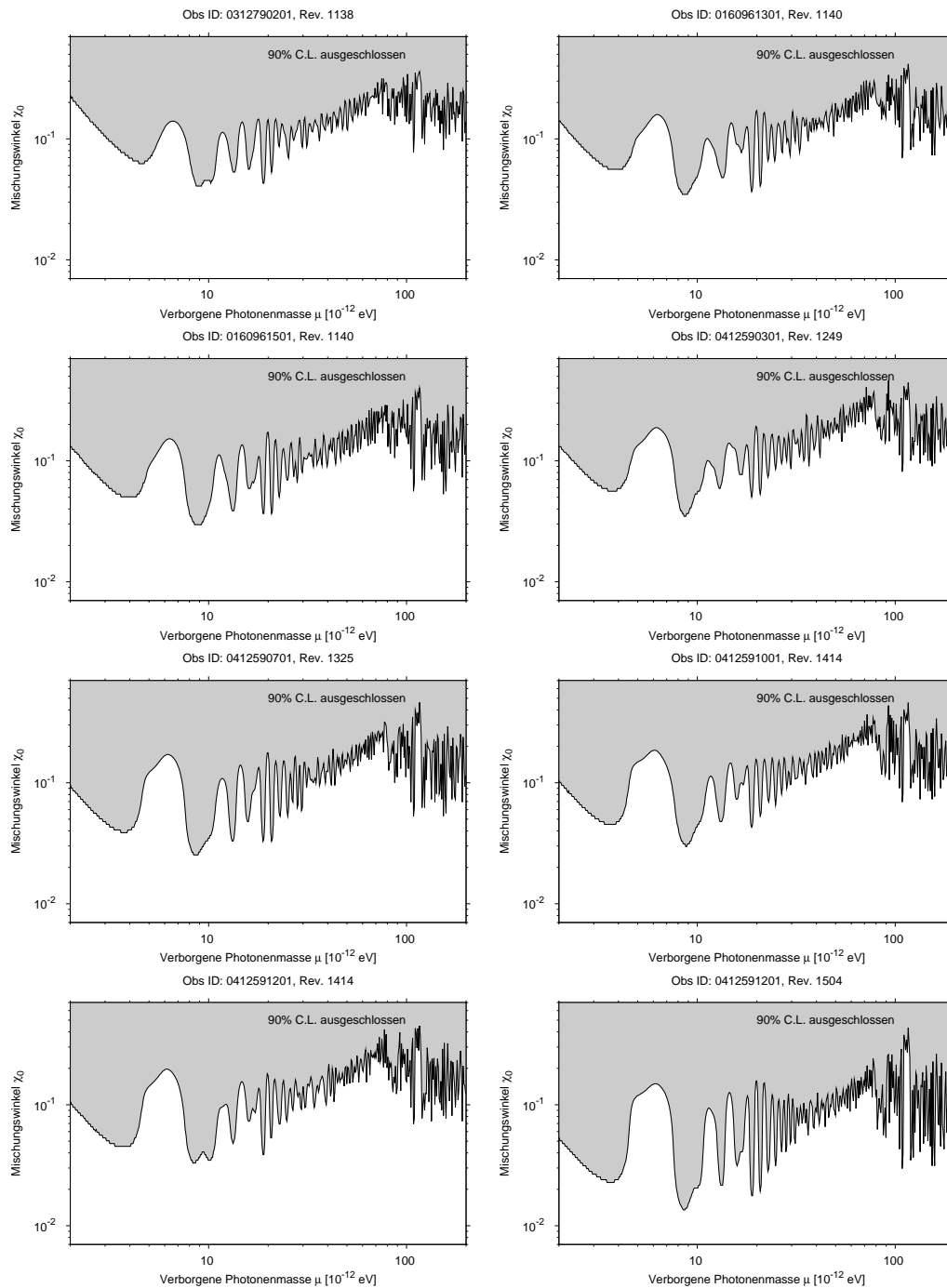


ABBILDUNG 5.9: Fortsetzung.

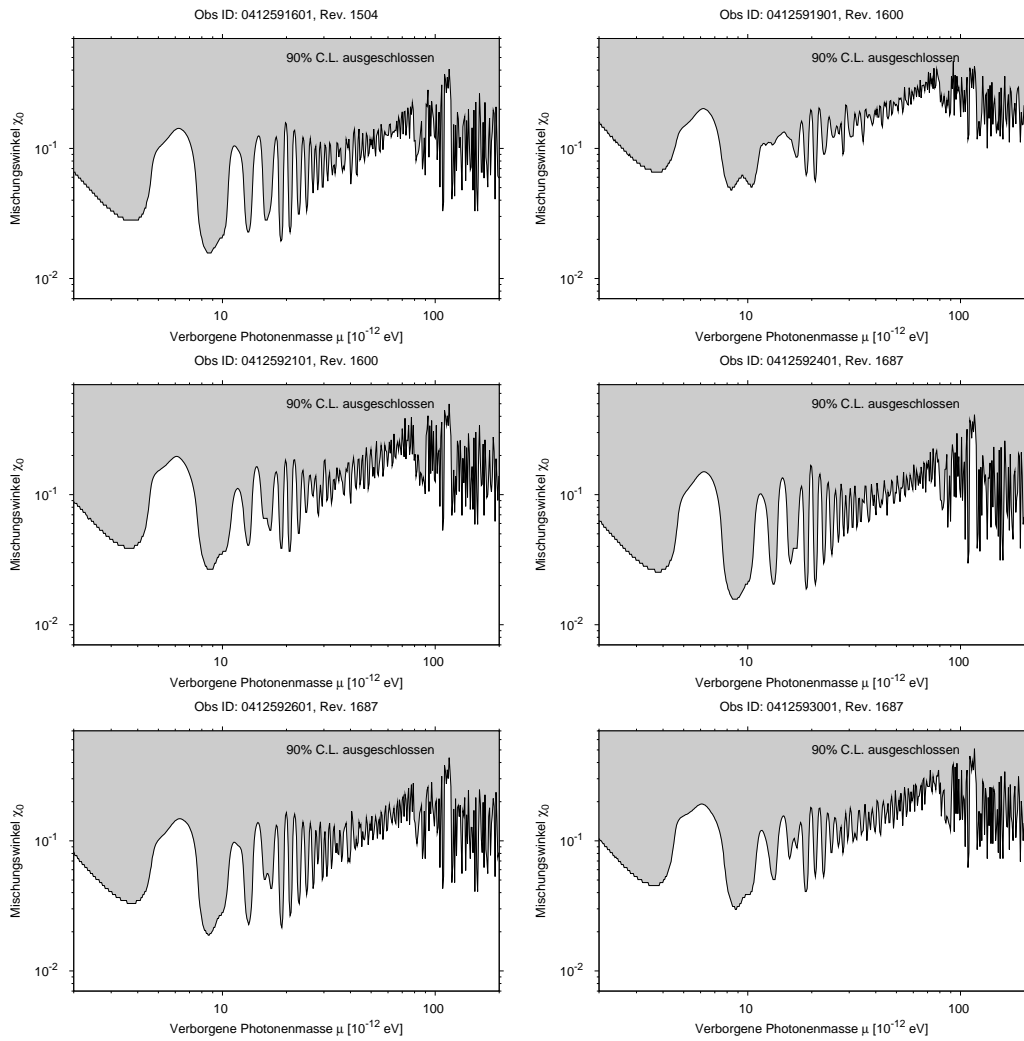


ABBILDUNG 5.9: Fortsetzung.

5.3 Periodizitätsanalyse

Eine weitere Möglichkeit nach einem Signal verborgener Photonen zu suchen, besteht in der Anwendung von Frequenztests auf die Daten von XMM-Newton. Solche Tests werden in der Astrophysik verwendet, um ein Signal auf eventuelle periodische Modulationen in der Zeit zu untersuchen. Dabei werden die Ankunftszeiten einzelner Photonen gemessen und auf mögliche Perioden untersucht. Mit Hilfe eines solchen Tests kann beispielsweise die Pulsationsperiode eines Neutronensterns, wie dem Krebspulsar, gemessen werden. Im Falle der Photonenoszillation interessiert nicht die zeitliche Modulation, sondern eine Oszillation in der Energie. Dazu muss der Detektor in der Lage sein, die Energien einzelner Photonen nachweisen zu können, was bei XMM-Newton der Fall ist.

Im Folgenden soll nun zunächst die Funktionsweise von Frequenztests für zeitlich modulierte Signale vorgestellt werden, die anschließend auf Photonenoszillationen übertragen wird. Als Referenzen dienen dabei de Jager *et al.* (1989); Stanford *et al.* (1995); Beilicke (2001) und Amsler *et al.* (2008). Anschließend wird durch die Simulation von Signalen überprüft, ob Frequenztests im Falle der Photonenoszillationen anwendbar sind und welche sich für die Analyse am besten eignen. Des Weiteren wird der zu erwartende Hintergrund diskutiert und mit Hilfe der Software *SciSim* simuliert. Hier nach werden die Ergebnisse vorgestellt.

5.3.1 Frequenztests

Es wird angenommen, dass eine Serie von Ankunftszeiten $\{t_i\}$, mit $i = 1, \dots, n$ von Photonen in der Zeit $T = t_n - t_1$ gemessen wurde. Bei einer beliebigen Periode P beziehungsweise einer beliebigen Frequenz $\nu = 1/P$, werden diese auf eine Menge von Zyklen $\{k_i\}$, $i = 1, \dots, n$, abgebildet, mit

$$k_i(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \nu}{\partial t^j} \right|_{t=t_i} (t_i - t_0)^{j+1} \quad (5.16)$$

für eine Referenzzeit t_0 für die ν bekannt ist. Ist die Frequenz unabhängig von der Zeit, so reduziert sich der Ausdruck für den i . Zyklus' auf $k_i = \nu (t_i - t_0)$. Die Werte der k_i geben an, wieviele Schwingungen seit der Referenzzeit t_0 durchlaufen wurden. Jedem Zyklus kann nun eine Phase zugeordnet werden, die modulo 2π ist. Die Menge der Phasen $\{\theta_i\}$, $i = 1, \dots, n$, ist gegeben durch*

$$\theta_i(\nu) = 2\pi (k_i(\nu) - [k_i(\nu)]), \quad (5.17)$$

wobei $[k_i]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner ist als k_i . Somit ist $\theta_i \in [0; 2\pi] \forall i$. Im Allgemeinen soll ein Frequenztest die Frage beantworten, zu welcher

* In diesem Kapitel wird die Phase durchweg mit θ bezeichnet, wie es in der Literatur üblich ist. Sie ist nicht mit dem Pitch-Winkel aus vorherigen Kapiteln zu verwechseln.

Wahrscheinlichkeit Daten mit einer gewissen Frequenz periodisch moduliert sind. Diese Frage wird statistisch durch Hypothesen formuliert. Die Null-Hypothese H_0 besagt, dass das Signal nur aus Rauschen besteht und keine Periodizität aufweist. Für $T \gg P$ sind die Phasen dann gleichförmig auf dem Intervall $[0; 2\pi]$ verteilt. Die Phasen θ stellen Zufallsvariablen dar und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Phase zwischen θ und $\theta + d\theta$ gemessen wird, ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeitsdichte (*probability distribution function*, p.d.f.) $f(\theta)d\theta$, siehe auch Anhang B.2. Im Fall der Frequenztests bezeichnet man $f(\theta)$ alternativ auch als Lichtkurve.

Die Null-Hypothese ist gegeben durch

$$H_0 : f(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad (5.18)$$

so dass $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 1$ ist. Im Falle eines periodischen Signals wird die p.d.f. von der Obigen abweichen. Dies kann mit der alternativen Hypothese H_A folgendermaßen formuliert werden:

$$H_A : f(\theta) = p_s f_s(\theta) + \frac{1 - p_s}{2\pi}. \quad (5.19)$$

Die Stärke der Modulation ist gegeben durch p_s und $f_s(\theta)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeitsdichte des periodischen Signals. Letztere ist ebenfalls normiert durch die Gleichung $\int_0^{2\pi} f_s(\theta)d\theta = 1$. Ist das Signal mit einer Frequenz moduliert, so zeichnet sich dies durch Maxima in der Lichtkurve $f_s(\theta)$ aus. Die Maxima sind in $f(\theta)$ schwächer ausgeprägt, da das Signal zusätzlich von Rauschen überlagert wird. Als Beispiel für eine Lichtkurve ist in Abbildung 5.10 das Pulsprofil des Krebspulsars gezeigt.

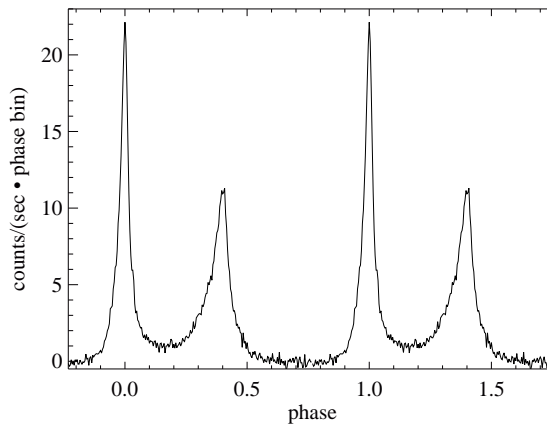


ABBILDUNG 5.10: Pulsprofil des Krebspulsars, wobei hier die Phase $\theta/(2\pi)$ aufgetragen ist. Als Frequenztest wurde der Pearson- χ^2 -Test verwendet. Aufgetragen ist die Zählrate pro Sekunde pro Breite des Teilintervalls. Quelle der Abbildung: Kirsch *et al.* (2006)

Getestet wird nun die Gleichförmigkeit der Phasen (H_0 mit $p_s = 0$) gegen H_A mit $p_s > 0$. Als Maß für die Abweichung von der Gleichförmigkeit kann das folgende

Funktional verwendet werden,

$$\Psi[f] = \int_0^{2\pi} \left(f(\theta) - \frac{1}{2\pi} \right)^2 d\theta. \quad (5.20)$$

Größere Werte von $\Psi[f]$ deuten auf ein periodisches Signal hin. Da die Lichtkurve des Signals im Allgemeinen unbekannt ist, muss diese durch geeignete Schätzfunktionen \hat{f} ersetzt werden. Ein wichtiges Kriterium für eine solche Schätzfunktion ist die Konsistenz. Darunter versteht man die Eigenschaft, dass die Signifikanz der Detektion eines periodischen Signals mit zunehmender Datenmenge ebenfalls ansteigt. Weitere Eigenschaften zur Konstruktion einer sinnvollen Schätzfunktion können Amsler *et al.* (2008) entnommen werden. Oftmals sind die Schutzfunktionen mit einem Glättungsparameter h verknüpft. Einige Beispiele für Schätzfunktionen werden weiter unten angeführt und auf ihre Praktikabilität im Falle von Photonenoszillationen hin diskutiert.

Signifikanz von Frequenztests

Es wird angenommen, dass ein Frequenztest das Ergebnis (auch *Power* genannt) $z_0 \propto \Psi(f)$ ergeben hat. Die Signifikanz der Abweichung zwischen den Testergebnissen und der Erwartung unter der Annahme, dass H_0 wahr ist, ist durch den p -Wert quantifiziert (siehe Anhang B.2). Dieser gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein $z > z_0$ zu finden, wenn H_0 wahr ist, was mit $P(z > z_0)$ bezeichnet wird. Sei $f(z)$ die zu den Testergebnissen zugehörige p.d.f. (die im Allgemeinen verschieden ist von $f(\theta)$), dann ist der p -Wert

$$P(z > z_0) \equiv p(z_0) = \int_{z_0}^{\infty} f(z) dz. \quad (5.21)$$

Da jede Funktion einer Zufallsvariable selbst wieder eine Zufallsvariable ist, sind sowohl die Lichtkurve, das Maß $\Psi(f)$, als auch $P(z > z_0)$ Zufallsvariablen.

Im Allgemeinen ist die Frequenz eines möglichen Signals unbekannt. Der direkteste Weg, verschiedene Frequenzen zu untersuchen besteht darin, die Teststatistik mit verschiedenen Frequenzen innerhalb eines Intervalls $\nu \in [\nu_1; \nu_2]$ zu berechnen. Die Frage ist nun, in welchen Schritten $\Delta\nu$ das Frequenzintervall abgesucht werden soll. Wählt man $\Delta\nu$ zu groß, so läuft man Gefahr, ein Maximum in der Teststatistik zu übersehen. Wählt man hingegen $\Delta\nu$ zu klein, so kommt es zum sogenannten *Oversampling*: bei einem Maximum z_0 der Teststatistik bei der Frequenz ν_0 , werden Frequenzen, die sich nahe an ν_0 befinden, ebenfalls ein hohes Testergebnis liefern. Diese Frequenzen sind also in hohem Maße korreliert. Die Anzahl der untersuchten Frequenzen, für die die Frequenzen unkorreliert sind, ist gegeben durch

$$x = (\nu_2 - \nu_1)(t_n - t_1) = (\nu_2 - \nu_1)T, \quad (5.22)$$

und ist gleich der Anzahl der *Independent Fourier Spacings* (IFS) Δx . Dies entspricht einer Schrittweite von

$$\Delta\nu_{\text{IFS}} = 1/T \quad \text{und} \quad \Delta x = 1. \quad (5.23)$$

Wählt man $\Delta\nu = \Delta\nu_{\text{IFS}}$, so ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit $P_x(z_0)$ bei x Versuchen unter H_0 ein $z > z_0$ zu finden zu

$$P_x(z_0) = 1 - (1 - P(z > z_0))^x. \quad (5.24)$$

Um sicherzustellen, dass kein Maximum übersehen wird, sollte $\Delta\nu < \Delta\nu_{\text{IFS}}$ gewählt werden. Dann muss allerdings der Effekt des Oversamplings bei der Berechnung der Signifikanz berücksichtigt werden. Dies erreicht man über den Oversamplingfaktor $r_x(z_0)$, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$r_x(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta x = 1 \\ \text{Konstante, } \text{Konstante} > 1 & \text{für } \Delta x \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit $P_x(z_0)$ wird dann modifiziert zu

$$P_x(z_0) = r_x(z_0)[1 - (1 - P(z > z_0))^x]. \quad (5.26)$$

Der Oversamplingfaktor muss in der Regel durch Monte-Carlo-Simulationen bestimmt werden. De Jager *et al.* (1989) geben verschiedene Werte von $r_x(z_0)$ für verschiedene Tests an und schlagen vor, standardmäßig einen Frequenzabstand von $\Delta x = 0.05$ IFS zu verwenden.

Im Folgenden sollen nun einige Teststatistiken vorgestellt werden.

Beispiele für Frequenztests

Pearson- χ^2 -Test. Die einfachste Methode, die Gleichförmigkeit der Phasenverteilung zu testen, besteht darin, das Intervall der Phasen $[0; 2\pi]$ in K gleichgroße Teilintervalle zu unterteilen und jede Phase in das ihr entsprechende Intervall einzuordnen. Das so entstandene Histogramm kann dann mit dem Pearson- χ^2 -Test, der gleichzeitig dem Maß aus Gleichung 5.20 mit dem Glättungsparameter $h = K$ entspricht, auf Gleichförmigkeit untersucht werden,

$$\Psi[\hat{f}_K] = \sum_{j=1}^K \frac{(n_j - n/K)^2}{n/K}, \quad (5.27)$$

wobei n_j die Anzahl der Phasen im j -ten Teilintervall ist. Für eine große Anzahl von Ereignissen n geht die Poisson-Statistik der gemessenen Photonen in eine Gaußverteilung über und der Pearson- χ^2 -Test verhält sich dann wie ein χ^2 -Test mit $K - 1$ Freiheitsgraden unter H_0 , der zusätzlich mit einer Normierung von $2\pi n$ versehen ist,

$$\chi_{K-1}^2 = 2\pi n \Psi[\hat{f}_K]. \quad (5.28)$$

Die Anzahl der Teilintervalle K ist a priori nicht vorgegeben, was einen enormen Nachteil dieses Tests ausmacht. Ein Experimentator, der die Häufung einer Phase vermutet, wird die Breite der Teilintervalle dementsprechend wählen und somit die statistische Aussagekraft dieses Tests verfälschen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der χ^2 -Statistik, die nötig ist, um den p -Wert zu berechnen, ist in Anhang B.2 zu finden.

Z_m^2 und Rayleigh-Test. Einen Test, der ohne die Unterteilung des Gesamtintervalls auskommt, stellt der Z_m^2 -Test dar, wobei hier der Glättungsparameter $h = m$ die Anzahl der getesteten Oberwellen ist. Als Schätzfunktion dienen hier die Fourierreihenschätzfunktionen (*Fourier Series Estimator*, FSE) \hat{f}_m mit

$$\hat{f}_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^m [\hat{\alpha}_k \cos(k\theta) + \hat{\beta}_k \sin(k\theta)] \right), \quad (5.29)$$

wobei $\hat{\alpha}_k$ und $\hat{\beta}_k$ die empirischen Fourieramplituden darstellen, die gegeben sind durch

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(k\theta_i) \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(k\theta_i). \quad (5.30)$$

Das Maß $\Psi(\hat{f}_m)$ ergibt sich durch Einsetzen von $\hat{\alpha}_k$ und $\hat{\beta}_k$ zu

$$\begin{aligned} \Psi[\hat{f}_m] = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k, k'=1}^m \int_0^{2\pi} & [\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_{k'} \cos(k\theta) \cos(k'\theta) \\ & + \hat{\beta}_k \hat{\beta}_{k'} \sin(k\theta) \sin(k'\theta) + 2\hat{\alpha}_k \hat{\beta}_{k'} \sin(k\theta) \cos(k'\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Durch partielle Integration zeigt man, dass Terme mit $k \neq k'$ nicht zu Ψ beitragen. Für $k = k'$ lassen sich die Terme quadratisch in Sinus und Kosinus mit der Identität $\sin^2 x = 1/2(1 - \cos(2x))$, beziehungsweise $\cos^2 x = 1/2(1 + \cos(2x))$, berechnen. Das Ergebnis ist einfach $\pi \hat{\alpha}_k^2$ und $\pi \hat{\beta}_k^2$, wohingegen der Mischterm nach partieller Integration identisch verschwindet. Der Z_m^2 -Test ist nun definiert als

$$Z_m^2 = 2n\pi\Psi[\hat{f}_m] = 2n \sum_{k=1}^m (\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m \left[\left(\sum_{i=1}^n \cos(k\theta_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \sin(k\theta_i) \right)^2 \right]. \quad (5.32)$$

Der Rayleigh-Test ist ein Spezialfall des Z_m^2 -Tests mit $m = 1$, der ohne den Faktor 2 des Z_m^2 -Tests definiert ist,

$$R^2 = n\pi\Psi[\hat{f}_1] = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \cos(\theta_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \sin(\theta_i) \right)^2 \right]. \quad (5.33)$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt Z_m^2 unter Annahme von H_0 ebenfalls einer χ^2 -Verteilung mit $2m$ Freiheitsgraden. Somit kann man den p -Wert des Rayleigh-Test analytisch berechnen.

Für $d = 2$ Freiheitsgrade vereinfacht sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der χ^2 -Statistik (Gleichung B.10) zu $f(z, 2) = 1/2 \exp(-z/2)$ und mit $z = 2R^2$ erhält man

$$P(z > z_0) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^{\infty} e^{-z/2} dz = e^{-z_0/2} = e^{-R_0^2}. \quad (5.34)$$

Bildlich kann man sich den Rayleigh-Test wie folgt vorstellen: jeder Phase wird ein Einheitsvektor in der komplexen Ebene mit den zwei linear-unabhängigen kartesischen Koordinaten $\cos(k\theta_i)$ und $\sin(k\theta_i)$ zugeordnet. Diese Vektoren werden addiert und die Länge des Gesamtvektors berechnet. Bei gleichförmig verteilten Phasen sollte der resultierende Vektor gleich dem Nullvektor sein und somit die Länge Null haben, siehe die linke Seite aus Abbildung 5.11. Bei einem periodischen Signal sind die zugehörigen Phasen bevorzugt, siehe rechte Seite von Abbildung 5.11. Je länger der Gesamtvektor, desto wahrscheinlicher ist ein periodisches Signal.

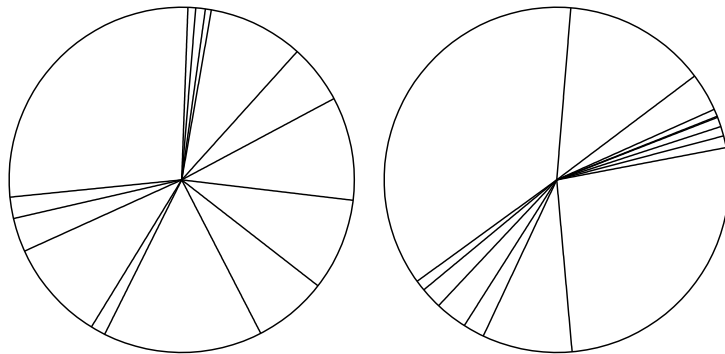


ABBILDUNG 5.11: Gezeigt sind die Phasenvektoren mit der Länge eins auf dem Einheitskreis. Auf der linken Seite sind die Vektoren zufällig verteilt, während auf der rechten Seite Phasen mit $\theta \approx \pi/20$ und $\theta \approx 2\pi/3$ bevorzugt sind, was auf ein periodisches Signal mit entsprechenden Frequenzen hindeutet.

Der Rayleigh-Test ist nur sensitiv auf die erste Oberwelle eines Signals. Er ist demnach besonders gut geeignet, um sinusförmige Modulationen zu detektieren. Für scharfe oder mehrere Maxima tragen allerdings die Fourieramplituden höherer Oberwellen stärker bei, weswegen der Z_m^2 -Test für ein oder mehrere scharfe Maxima sensitiver ist. Da meist das Signal nicht vorher bekannt ist, führt eine Wahl des Parameters m , ähnlich wie bei der Wahl der Abstände der Teilintervalle im Pearson- χ^2 -Test, a posteriori zu einer Verfälschung der Signifikanz eines Tests.

H-Test. Eine Lösung des Problems der Wahl eines Glättungsparameters besteht in dem sogenannten H -Test, der von de Jager *et al.* (1989) vorgeschlagen wurde. Er eignet sich am besten, wenn nichts über die Form der Modulation bekannt ist. Der Test basiert auf dem Z_m^2 -Test, jedoch wird das m gewählt, das den Unterschied zwischen der Schätzfunktion und der wahren Lichtkurve $f(\theta)$ minimiert. Dieser Wert, man nenne ihn

M , wird folgendermaßen bestimmt:

$$\max_{1 \leq m \leq \infty} (Z_m^2 - 4m + 4) = Z_M^2 - 4M + 4. \quad (5.35)$$

Für praktische Anwendungen und zur Minimierung des Rechenaufwands schlagen de Jager *et al.* (1989) die Berechnung von M mit den ersten 20 Oberwellen vor. Der H -Test ergibt sich dementsprechend zu

$$H = \max_{1 \leq m \leq 20} (Z_m^2 - 4m + 4) = Z_M^2 - 4M + 4. \quad (5.36)$$

Trotz dieser Vereinfachung eignet sich der Test eher für Zeitserien mit kleinen Ereigniszahlen, da sich die Rechenschritte auf eine Größenordnung von $O(40n)$ belaufen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des H -Tests bei Gleichverteilung der Phasen muss durch Monte-Carlo-Simulationen ermittelt werden.

Im nächsten Abschnitt sollen nun die eingeführten Begriffe auf den Fall der Photonenoszillationen übertragen werden. Hierzu gilt es vor allem den Begriff der Frequenz und des Independent Fourier Spacings der geänderten Situation anzupassen. Außerdem werden Energieserien simuliert, auf die die Frequenztests angewendet und auf ihre Funktionstüchtigkeit überprüft werden.

5.3.2 Überprüfung der Funktionsweise

Im Folgenden sollen nun die Daten von XMM-Newton auf Photonenoszillationen mit Frequenztests untersucht werden. Das heißt, dass keine Zeitserien $\{t_i\}$ untersucht werden, sondern Energieserien $\{E_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Es wird demnach nötig sein, die oben eingeführten Ausdrücke für die Frequenz und die Phase entsprechend zu modifizieren. Des Weiteren soll überprüft werden, welcher Frequenztests geeignet ist, um eine periodische Modulation zu detektieren. Dazu werden Signale, die mit Photonenoszillation mit bekanntem Mischungswinkel χ_0 und Masse μ überlagert sind, simuliert.

Für Photonenoszillationen wird ein Signal $F(E)$ einer Quelle nach Gleichung 4.10 modifiziert,

$$F(E) \rightarrow F(E) [1 - P_{\gamma \rightarrow \gamma_s}] = F(E) \left[1 - \sin^2(2\chi_0) \sin^2\left(\frac{\mu^2 d}{4E}\right) \right]. \quad (5.37)$$

Somit wird nach Modulationen von der Form $\sin^2(1/E)$ gesucht. Um die Phasen $\{\theta_i\}$ zu bestimmen, schreibt man den oszillierenden Term in $P_{\gamma \rightarrow \gamma_s}$ in folgender Weise:

$$\sin^2\left(\frac{\mu d^2}{4E}\right) = \sin(\nu(E)E) \quad \text{mit} \quad \nu(E) = \frac{\mu^2 d}{4E^2}. \quad (5.38)$$

Die Frequenz selbst ist demnach von der Energie abhängig und hat die Einheit (Energie) $^{-1}$. Für die Berechnung der Anzahl der durchlaufenden Zyklen nach Gleichung 5.16 ist die

j .-Ableitung nötig. Durch Induktion nach j kann gezeigt werden, dass

$$\frac{d^j \nu}{dE^j} = (-1)^j (j+1)! \frac{\tilde{c}}{E^{j+2}} \quad (5.39)$$

gilt, wobei \tilde{c} eine Konstante ist mit

$$\tilde{c} = \frac{\mu^2 d}{4} = 0,03909 \left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}} \right)^2 \left(\frac{d}{\text{kpc}} \right) \text{ keV}. \quad (5.40)$$

Einsetzen der j .-Ableitung an der Stelle $E = E_0$ in Gleichung 5.16 ergibt

$$k_i = \frac{\tilde{c}}{E_0} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{E_i}{E_0} - 1 \right)^{j+1}. \quad (5.41)$$

Dies ist eine alternierende Reihe, die nur konvergiert, wenn es sich bei der Folge $\{(E_i/E_0 - 1)^{j+1}\}$ um eine monoton fallende Nullfolge handelt (Leibniz-Kriterium), wobei die Referenzenergie E_0 dementsprechend gewählt werden muss. Eine Möglichkeit ist, E_0 so zu wählen, dass

$$0 < \frac{E_i}{E_0} - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} E_i < E_0 < E_i \quad (5.42)$$

gilt. Dies kann zum Beispiel durch die Wahl $E_0 = 3/4 E_i$ erreicht werden, so dass sich die Anzahl der Zyklen für die i . gemessene Energie bei einer Berechnung der Reihe ergibt zu

$$k_i = \frac{4\tilde{c}}{3E} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{3} \right)^{j+1} = \frac{4\tilde{c}}{3E_i} \frac{1}{3} = \frac{\tilde{c}}{3E_i} \quad (5.43)$$

Die Frequenz an der Stelle $E_0 = 3/4 E$ ist somit

$$\nu(E_0) = \frac{4\mu^2 d}{9E_i^2} = 0,06949 \left(\frac{\mu}{10^{-12} \text{ eV}} \right)^2 \left(\frac{d}{\text{kpc}} \right) \left(\frac{E}{\text{keV}} \right)^{-2} \text{ keV}^{-1}. \quad (5.44)$$

Die Phase kann dann mit Gleichung 5.17 bestimmt werden. Sie ist in Abbildung 5.12 als Funktion der gemessenen Energie beispielhaft für $\mu = 3 \times 10^{-11} \text{ eV}$ zu sehen. Die Anzahl x der IFS kann nach Gleichung 5.22 berechnet werden,

$$\Delta \nu_{\text{IFS}} = \frac{1}{E_n - E_1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\Delta \nu_{\text{IFS}}}. \quad (5.45)$$

Die Wahl des am besten geeigneten Frequenztests wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

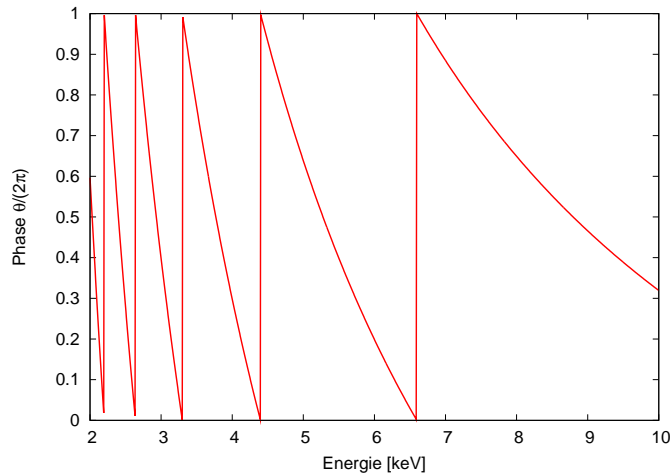


ABBILDUNG 5.12: Die Phase θ als Funktion der gemessenen Energie für eine verborgenen Photonenmasse von $\mu = 3 \times 10^{-11}$ eV. Für kleinere Werte von μ verschiebt sich das erste Maximum zu immer höheren Energien und es treten immer weniger Stellen auf, an der die Funktion nicht stetig-differenzierbar ist.

Simulation von Ereignissen und Wahl des Frequenztests

Die Eignung eines Frequenztest Photonenoszillationen zu detektieren, muss erst durch Simulationen gezeigt werden. Durch die Auswertung simulierter Energien lässt sich zudem die Frage beantworten, welcher Test am besten geeignet ist. Ein Test sollte in der Lage sein, Oszillationen auch bei schwachen Amplituden $\sin^2(2\chi_0)$ noch nachweisen zu können. Zusätzlich sollte der Test möglichst wenig Rechenschritte benötigen, da der Krebsnebel eine sehr helle Quelle ist und mit Ereigniszahlen von $n \approx O(10^5)$ zu rechnen ist.

Somit stellt sich der H -Test als eher ungeeignet dar. Da man eine sinusförmige Modulation erwartet, werden aufgrund der Diskussion im Abschnitt 5.3.1 der Rayleigh-Test und der Z_2^2 -Test auf ihre Fähigkeiten untersucht, eine Oszillationen zu entdecken.

Die EPIC-pn-Kamera an Bord von XMM-Newton kann Photonen in einem Energiebereich von 0,15 keV bis 15 keV nachweisen (vergleiche Abschnitt 2.2). Um Charakteristiken im Spektrum und in der Effizienz des Detektors auszuschließen, die eine Oszillation vortäuschen können, werden allerdings nur Energien mit $E \in [2 \text{ keV}; 10 \text{ keV}]$ für die Analyse verwendet. Auf diese Weise sind die Photoabsorptionsbanden im Röntgenbereich (siehe Abbildung 5.6(b)) und Effizienzfluktuationen (vergleiche Abbildung 5.6(a)) zum Großteil ausgeschlossen.

Für die Simulation wird ein Quellspektrum $F(E')$ von konstanter Stärke angenommen, das mit Photonenoszillationen variiert:

$$F(E') = \tilde{C} \left[1 - \sin^2(2\chi_0) \sin^2\left(\frac{\mu^2 d}{4E'}\right) \right], \quad (5.46)$$

wobei \tilde{C} eine beliebige Konstante ist. Um ein Detektorsignal zu simulieren, muss das

Quellspektrum mit einer Detektorantwort gefaltet werden. Für die Simulation wird eine Antwortfunktion $R(E', E)$ angenommen, die die Wahrscheinlichkeit angibt, ein Photon der Energie E' bei der Energie E zu messen. Diese Wahrscheinlichkeit wird zwischen der einer Minimalenergie $E_{\min} = 2 \text{ keV}$ und der Energie E als konstant und sonst Null angenommen, wobei außerdem $E \leq E_{\max} = 10 \text{ keV}$ gilt,

$$R(E'; E; E_{\min}) = \begin{cases} 1 & \text{für } E_{\min} \leq E' \leq E_{\max}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.47)$$

Wie in Abschnitt 5.1 diskutiert, ist die gemessene Zählrate $C(E)$ gleich einer Faltung zwischen Signal und Antwortfunktion. Zur Simulation von Energieserien ist es sinnvoll, dass $C(E) \in [0; 1]$ mit $C(E_{\min}) = 0$ und $C(E_{\max}) = 1$ ist, da so Zahlen zwischen 0 und 1 mit einem Zufallsgenerator „ausgewürfelt“ werden können und durch Invertierung von $C(E)$ die zugehörige Energie abgespeichert werden kann. Die Detektorantwort ist gerade so gewählt, dass für bestimmte Parameterwerte von (μ, χ_0) $C(E)$ eine monoton wachsende bijektive Funktion ist, die mit den Photonenoszillationen überlagert ist. Die Funktion $C(E)$ berechnet sich auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} C(E) &= N_0(F * R)(E) = N_0[(F * \Theta)(E) - (F * \Theta)(E_{\min})] \\ &= N_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(E') \Theta(E' - E_{\min}) dE' \right) - \int_{-\infty}^{+\infty} F(E') \Theta(E - E') dE' \\ &= N_0 \int_{E_{\min}}^E F(E') dE' \quad \text{für } E_{\min} \leq E \leq E_{\max}. \end{aligned}$$

Die Konstante N_0 sorgt für die richtige Normierung von $C(E)$,

$$N_0^{-1} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} F(E') dE'. \quad (5.48)$$

Explizit ergibt sich die Zählrate zu

$$C(E) = N_0 \tilde{C} \left[E - E_{\min} - \sin^2(2\chi_0) \int_{E_{\min}}^E \sin^2\left(\frac{\mu^2 d}{4E'}\right) dE' \right]. \quad (5.49)$$

Der letzte Term kann mit Hilfe der Substitution $z = \mu^2 d / (4E)$ und partieller Integration vereinfacht werden,

$$\int_{E_{\min}}^E \sin^2\left(\frac{\mu^2 d}{4E'}\right) dE' = \int_{z_{\min}}^z \frac{\sin^2(z')}{z'^2} dz' = -\frac{\sin^2 z'}{z'} \Big|_{z_{\min}}^z + \int_{z_{\min}}^z \frac{\sin(2z')}{z'} dz' \quad (5.50)$$

Mit Hilfe einer weiteren Substitution mit $y = 2z$ formt man den zweiten Term weiter zum Integralsinus um, der definiert ist als

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz,$$

so dass man den folgenden Ausdruck erhält,

$$\int_{z_{\min}}^z \frac{\sin(2z')}{z'} dz' = \int_{2z_{\min}}^{2z} \frac{\sin(y)}{y} dy = \text{Si}(2z) - \text{Si}(2z_{\min}). \quad (5.51)$$

Fügt man alle Resultate zusammen, so ergibt sich $f(E)$ zu

$$C(E) = N_0 \tilde{C} \left[E + \sin^2(2\chi_0) \left(\text{Si}(2z(E)) - \frac{\sin^2 z(E)}{z(E)} \right) \right] \Big|_{E_{\min}}^E. \quad (5.52)$$

Das Detektorsignal $C(E)$ kann für bestimmte Parameter (χ_0, μ) numerisch invertiert werden. Simulierte Energieserien werden nun dadurch erzeugt, dass Werte zwischen 0 und 1 durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden und mit $C^{-1}(E)$ der entsprechende Energiewert abgespeichert wird. Dies ist im zu diesem Zweck geschriebenen Programm *simul* (siehe Anhang A.2) implementiert.

Die so erzeugten Energieserien können anschließend mit Frequenztests untersucht werden. Im Zuge dieser Arbeit wurde dafür das Programm *periodicity* geschrieben, welches ebenfalls in Anhang A.2 beschrieben wird.

Es wurden Signale mit verschiedenen Parametern (χ_0, μ) und $n = 7 \times 10^5$ Ereignisenergien simuliert und mit dem Rayleigh-Test und dem Z_2^2 -Test untersucht. Als Schrittweite wurde $\Delta x = 1$ IFS gewählt. Für maximale Mischung, $\chi_0 = \pi/4$, ist das Rayleigh-Power-Spektrum in Abbildung 5.13 gezeigt. Es sind ausgeprägte Maxima für die entsprechenden Werte der verborgenen Photonemasse μ zu sehen, was zeigt, dass der Rayleigh-Test sich gut eignet um die Energieserien von XMM-Newton zu untersuchen. Mit zunehmender Masse nimmt der Wert des Maximums ab, das Verhältnis des Maximums zum Untergrund nimmt dagegen bis $\mu = 80 \cdot 10^{-12}$ eV zu und nimmt erst anschließend wieder ab. Der Grund für die Abnahme des Maximalwertes und für das schlechtere Verhältnis von Maximum zu Untergrund für Massen $> 80 \cdot 10^{-12}$ eV besteht darin, dass für hohe Werte von μ die Oszillationen so schnell werden, dass sie nicht mehr von einer mittleren Änderung des Flusses unterschieden werden können. Es macht daher keinen Sinn, nach Photonemassen mit $\mu > 1,5 \cdot 10^{-10}$ eV zu suchen. Ferner ist ein globaler Anstieg der Rayleigh-Power hin zu kleineren Massen zu erkennen. Dies stellt ein ernst zunehmendes Problem dar, weil auf diese Weise die Signifikanz des Tests verfälscht wird. So zeigt sich beim Untergrund ein maximales Ergebnis von $R^2 \approx 2 \times 10^4$, was nach Gleichung 5.34 und 5.26 stark auf ein Signal hindeutet, was aber nicht der Fall sein kann.

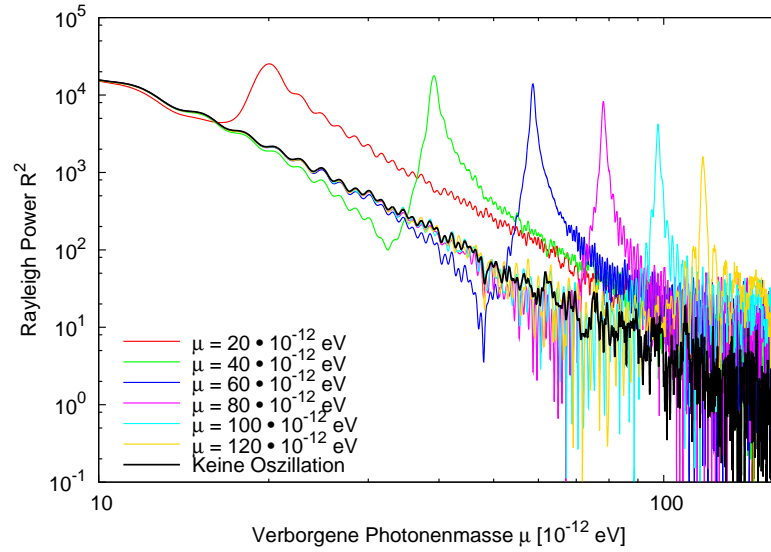


ABBILDUNG 5.13: Powerspektrum des Rayleigh-Tests für simulierte Energieserien mit verschiedenen Massen und einem Mischungswinkel $\chi_0 = \pi/4$. Die Maxima sind deutlich zu erkennen.

Ursache dieses Anstiegs ist, dass generell nicht, wie im Anfang von Abschnitt 5.3.1 gefordert, $T = E_n - E_i \gg P$ gilt. Dies führt dazu, dass für kleine Werte von μ nicht mehr alle Werte zwischen 0 und 2π von θ angenommen werden und somit keine Gleichverteilung mehr vorliegt. So erhöht sich die Anzahl der Phasen mit Werten nahe 2π , so dass sich die Rayleigh-Power immer weiter dem Wert $R^2 \rightarrow n$ annähert. Um dieses Verhalten zu beseitigen, muss für die Berechnung der Signifikanz die Rayleigh-Power R_{bkg}^2 des Untergrundes abgezogen werden. Der Untergrund selbst ist allerdings abhängig von den simulierten Ereigniszahlen. Je mehr Ereignisse simuliert werden, desto höher der Untergrund. Aus diesem Grund darf die Energieserie des Hintergrunds maximal so viele Ereignisse umfassen, wie das Signal selbst, da sonst Maxima im Powerspektrum verloren gehen könnten. Gleichung 5.34 wird somit modifiziert zu

$$P(R^2 > R_0^2) = \begin{cases} \exp[-(R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2)] & \text{für } R_0^2 \geq R_{\text{bkg}}^2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.53)$$

Die zweite Bedingung, dass $P(R^2 > R_0^2) = 1$ für $R_0^2 < R_{\text{bkg}}^2$ ist, ist nötig, da Werte von $P(R^2 > R_0^2) > 1$ in der Wahrscheinlichkeitsinterpretation nicht sinnvoll sind. Damit ein Maximum noch klar vom Untergrund unterschieden werden kann, werden die Energieserien von XMM-Newton auf Photonenmassen mit $\mu > 3 \cdot 10^{-11}$ eV untersucht. Daraus ergibt sich ein abzusuchendes Massenintervall von $\mu \in [3 \cdot 10^{-11} \text{ eV}; 15 \cdot 10^{-11} \text{ eV}]$. Für den Z_2^2 -Test zeigt sich das selbe Verhalten, die Maxima sind klar zu erkennen, ebenso wie ein Anstieg hin zu kleinen Massen. Das Powerspektrum ist in Abbildung 5.14 gezeigt. In die Berechnung des Powerspektrums geht nun zusätzlich die zweite Oberwelle ein, was zwei Maxima pro simulierter Energieserie von ungefähr gleicher

Höhe verursacht. Der Wert der simulierten Frequenz $\nu(\mu)$ wird beim zweiten, stärkeren Maximum angenommen.

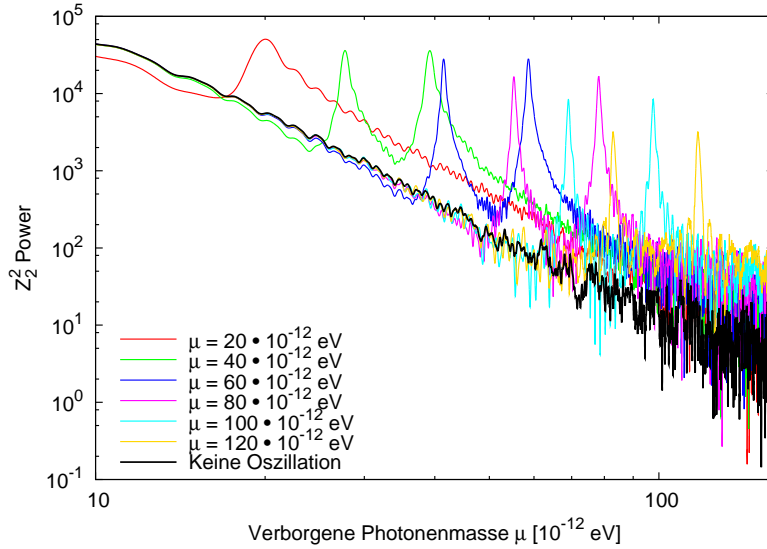


ABBILDUNG 5.14: Powerspektrum des Z_2^2 -Tests für simulierte Energieserien mit verschiedenen Massen. Da neben der ersten auch die zweite Oberwelle in die Teststatistik eingeht, sind zwei Maxima zu erkennen.

Die Abhängigkeit der Testergebnisse vom Mischungswinkel wurde zusätzlich für den Rayleigh-Test und den Z_2^2 -Tests untersucht und ist in Abbildung 5.15(a) beispielhaft für $\mu = 6 \times 10^{-11}$ eV und den Rayleigh-Test dargestellt. Für Werte von χ_0 kleiner als die maximale Mischung von $\pi/4$ ist ein steiler Abfall zu erkennen. Dies macht eine Detektion von Signalen mit kleinem Mischungswinkel unmöglich. Bei der Berechnung von Konfidenzintervallen für die XMM-Newton-Daten muss dieser Umstand berücksichtigt werden. Dafür werden für alle Massen im betrachteten Suchintervall in Schritten von 10^{-12} eV die maximale Rayleigh-Power in Abhängigkeit des Mischungswinkels simuliert und die so entstandene Funktion $R^2(\chi_0)$ interpoliert. Dies wird in Abschnitt 5.3.4 zur Bestimmung des Konfidenzintervalls nötig und ist exemplarisch für $\mu = 6 \cdot 10^{-11}$ eV in Abbildung 5.15(b) dargestellt.

Abschließend ist festzuhalten, dass sich der Rayleigh-Test am besten eignet, um Energieserien auf Photonenoszillationen zu untersuchen. Im Signal-zu-Rauschverhältnis sind der Rayleigh-Test und der Z_2^2 -Test zwar vergleichbar, jedoch liefert der Z_2^2 -Test zwei Maxima im Powerspektrum. Außerdem ist der Rayleigh-Test weniger rechenintensiv, weswegen der H -Test von vornherein ausgeschlossen werden muss. Die Sensitivität des Tests ist vor allem durch den zu erwartenden Hintergrund limitiert. Deswegen ist es nötig, Hintergrundenergieserien zu simulieren, die keine Oszillationen beinhalten, jedoch die gleichen Eigenschaften wie der verwendete Detektor (also die EPIC-pn-Kamera) aufweisen. Dazu wird die Software *SciSim* verwendet, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

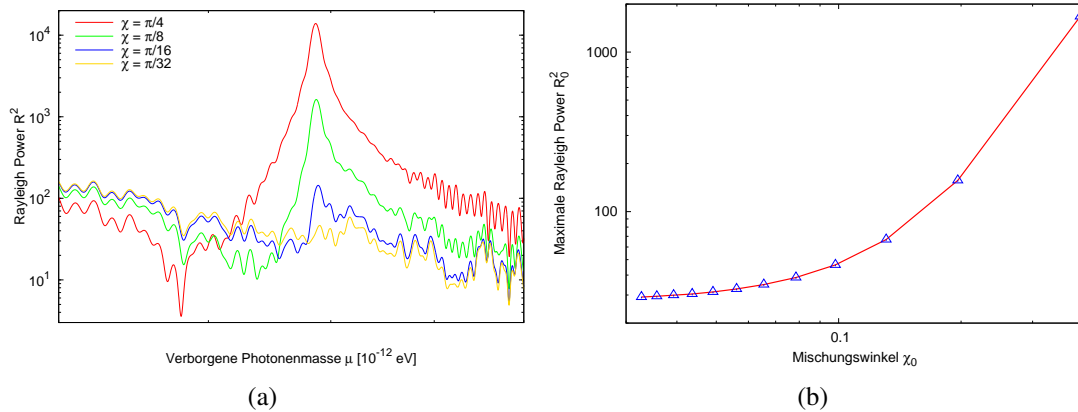


ABBILDUNG 5.15: (a) Rayleigh-Power in Abhängigkeit des Mischungswinkels χ_0 . Der Fall $\chi_0 = \pi/4$ stellt maximale Mischung dar. Für kleinere Werte fällt das Maximum schnell ab und ist für $\chi_0 = \pi/32$ nicht mehr von Rauschen zu unterscheiden. (b) Das Maximum der Rayleigh-Power ist als Funktion des Mischungswinkels χ_0 exemplarisch für $\mu = 6 \cdot 10^{-11}$ eV aufgetragen. Aufgrund der langen Rechenzeit wurde der Rayleigh-Test für 12 Werte von χ_0 berechnet und die daraus entstandene Funktion interpoliert.

5.3.3 Simulation des Hintergrundes

Der zu erwartende Hintergrund für das Rayleigh-Powerspektrum soll möglichst realistisch simuliert werden. Das bedeutet, dass eine Energieserie simuliert werden muss, die die selben Charakteristika wie ein wirklicher Datensatz von XMM-Newton vom Krebsnebel aufweist, bei dem jedoch bekannt ist, dass die Ereignisse nicht mit Photonenoszillationen moduliert sind. Dies kann mit Hilfe der *SciSim* Software (Gabriel *et al.* 2005) erreicht werden. *SciSim* ist ein Akronym und steht für *Science Simulator*, der vom *XMM-Newton Science Operation Center* entwickelt wurde. Er dient dazu „realistische wissenschaftliche Daten“* zu erzeugen. *SciSim* ermöglicht es sowohl Punktquellen als auch ausgedehnte Objekte zu simulieren, die entweder ein komplexes oder monochromatisches Spektrum aufweisen. Dabei können komplizierte Spektren mit Xspec erzeugt und in Scisim importiert werden. Außerdem muss der integrierte Fluss über das Energieband des Detektors und die Ausdehnung der Quelle (außer bei Punktquellen) definiert werden.

Zur Abschätzung des Hintergrundes wurde ein einfaches Potenzgesetz mit Photoabsorption, aber ohne Photonenoszillationen an die XMM-Newton-Daten, wie in Abschnitt 5.1 erklärt, mit Xspec angepasst und exportiert. Der Krebsnebel wurde als ausgedehnte, sphärische Quelle mit räumlich konstantem Fluss angenommen. Die verwendeten Parameter für das Modell sind in Tabelle 5.3 aufgeführt.

Mit der angenommenen Quelle werden innerhalb *SciSim* verschiedene Simulatoren

* Freie Übersetzung aus dem *SciSim* Benutzerhandbuch, siehe http://xmm.esac.esa.int/external/xmm_data_analysis/scisim/release/latest/help/html/scisim/scisim.html

TABELLE 5.3: Parameter für simuliertes Krebspektrum. Der Fluss wurde über das Energieintervall von 0,25 keV bis 12 keV integriert.

Fit- parameter	Wasserstoff- säule N_H [cm^2]	Photonindex Γ	Normierung N_0 [$\text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$]	Radius [$^\circ$]	integrierter Fluss [$\text{ergs cm}^{-2} \text{s}^{-1}$]
Wert	$2,76 \cdot 10^{21}$	2,19149	1,65878	0,03	$5,271 \cdot 10^{-9}$

gestartet, die verschiedenste Effekte und Instrumente, die bei der Erstellung eines Bildes eine Rolle spielen, simulieren. Angefangen von der Bewegung des Satelliten über den Strahlenverlauf, die Spiegelausrichtung und das Reflexionsgitter bis hin zur eigentlichen Kamera wird so der gesamte Verlauf der Photonen, von der Quelle bis zum Detektor, generiert. Als Endprodukt erhält man die ODFs, wie bei wirklichen Beobachtungen. Somit enthalten die simulierten Daten auch die Detektoreigenschaften, so dass sie sich eignen, um mögliche vorgetäuschte Signale von wirklichen Photonenoszillation zu unterscheiden. Allerdings ist in SciSim nicht der Burst-Modus implementiert. Zwar tritt bei den simulierten Daten kein Pile-up auf, jedoch können vom Burst-Modus eventuell vorgetäuschte Signale im Rayleigh-Spektrum nicht mehr ausgeschlossen werden.

Der simulierte Krebsnebel, wie er für die EPIC-pn-Kamera zu sehen ist, ist in Abbildung 5.16 gezeigt. Wie im vorangegangenen Kapitel besprochen, ist es wichtig, dass die simulierten Energieserien zur Subtraktion des Hintergrunds ungefähr die selben Anzahlen von Ereignissen aufweisen, wie die Energieserien der wirklichen Daten. Zu diesem Zweck werden nur bestimmte Regionen des simulierten Krebsnebels verwendet, wie durch die Kreise in Abbildung 5.16 angedeutet. Dazu wird das Programm *ds9* verwendet. Dabei wird der Radius der äußeren Region konstant gehalten und der Radius des inneren Kreises so lange angepasst, bis die Ereigniszahlen ungefähr übereinstimmen. Die Ereignislisten werden dann mit dem SAS und diesen Regionen gefiltert, so dass nur Ereignisse aus diesem Kreisring übrig bleiben.

Aus den simulierten Ereignislisten werden abschließend nur solche Ereignisse verwendet, deren Energie zwischen 2 keV und 10 keV liegt, wie in Abschnitt 5.3.2 diskutiert. Dazu wird der Befehl *fcopy* verwendet, der Teil des FTOOLS-Programmpakets ist. In Tabelle 5.1 sind die einzelnen Beobachtungen mit der Anzahl der Ereignisse und die Anzahl der Ereignisse der verwendeten Hintergrundsimulation zusammengefasst.

5.3.4 Ergebnisse und Diskussion

Die Ereignislisten wurden mit dem Programm *periodicity* (siehe Anhang A.2) anhand des Rayleigh-Tests auf periodische Modulationen von der Form der Photonenoszillationen untersucht. Das Programm *periodicity* sortiert die Ereignislisten in aufsteigender Reihenfolge und berechnet anschließend die Schrittweite $\Delta_{V_{\text{IFS}}}$, in der der Frequenzraum nach Oszillationen abgesucht wird. Diese beläuft sich für alle Energieseri-

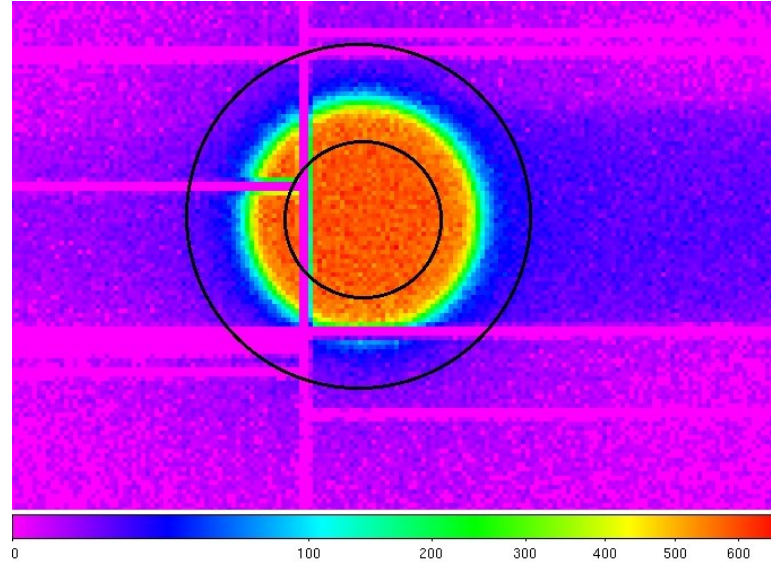


ABBILDUNG 5.16: Der mit SciSim simulierte Krebsnebel. Der Nebel wird als sphärische Quelle mit einem Radius von $0,03^\circ$ angenommen, über der der Fluss konstant ist. Für die verschiedenen Ereigniszahlen der simulierten Quelle aus Tabelle 5.1 wurden Kreisringe als Regionsfilter definiert und nur Ereignisse aus diesen Regionen mit in die Analyse einbezogen. Für die verschiedenen Ereigniszahlen wurde jeweils der Radius des inneren Ringes geändert.

en zu

$$\Delta\nu_{\text{IFS}} = \frac{1}{E_n - E_1} \approx 0,125 \text{ keV}, \quad (5.54)$$

da bei der hohen Anzahl von Ereignissen die minimale Energie von $E_1 = 2 \text{ keV}$ und die maximale Energie von $E_n = 10 \text{ keV}$ immer Elemente der Ereignislisten sind. Anstelle der Frequenz, die durch Gleichung 5.44 gegeben ist, wird die Masse μ variiert. Für unkorrelierte Frequenzen ist daher die Schrittweite $\Delta\mu_{\text{IFS}}$ für die Masse mit $\Delta\nu_{\text{IFS}}$ verknüpft. Betrachtet man die Frequenz der Einfachheit halber bei der Energie $E = \sqrt{4/3} \text{ keV}$, so ist die Schrittweite gegeben durch

$$\Delta\mu_{\text{IFS}} = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{4\Delta\nu_{\text{IFS}}}{d}}. \quad (5.55)$$

Wie in Abschnitt 5.3.2 besprochen, werden Massen im Intervall $\mu \in [3 \cdot 10^{-11}; 1,5 \cdot 10^{-10}] \text{ eV}$ untersucht. Dies ergibt die Anzahl der untersuchten IFS,

$$x = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\Delta\nu_{\text{IFS}}} \approx 13.510 \text{ IFS}. \quad (5.56)$$

Anschließend wird die Rayleigh-Power der Daten R_0^2 (Gleichung 5.33), der SciSim-Simulation R_{bkg}^2 und die Gesamtwahrscheinlichkeit $P_x(R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2)$ aus Gleichung 5.26,

dass ein Ergebnis $R^2 > R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2$ erzielt werden kann, für jede Masse berechnet, wobei eine Schrittweite von $\Delta x = 1$ verwendet wird. Wie die Simulationen in Abschnitt 5.3.2 gezeigt haben, ist dies ausreichend, um ein Maximum im Powerspektrum zu detektieren. Außerdem wird so die Rechenzeit klein gehalten und der Oversamplingfaktor ist $r_x(R_0^2) = 1$.

Das Powerspektrum ist in Abbildung 5.17 exemplarisch für die Beobachtung 01537-50301 (Umlauf 411) gezeigt. Wie man sieht, ist kein Maximum zu erkennen und die simulierte Energieserie weist die selbe Morphologie auf wie der eigentliche Datensatz.

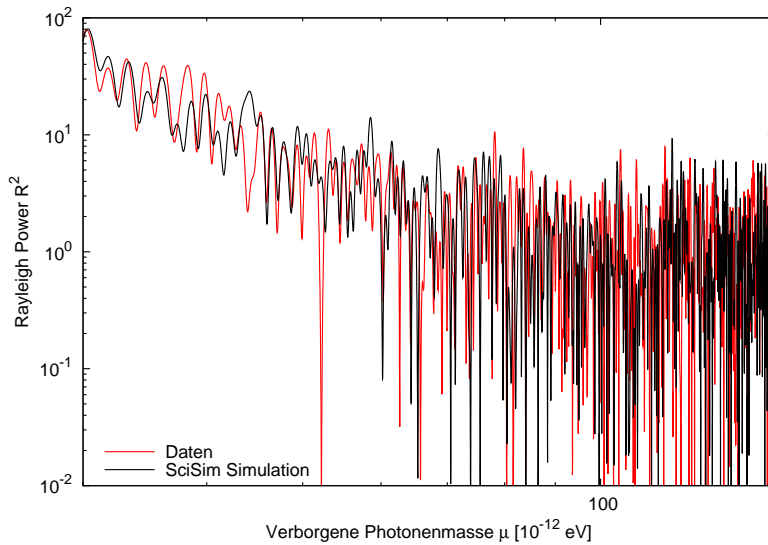


ABBILDUNG 5.17: Das Powerspektrum des Rayleigh-Tests für den simulierten Datensatz und der Energieserie des Umlaufs 411. Es ist kein Maximum zu erkennen, weswegen obere Schranken für den Mischungswinkel hergeleitet werden können.

Da kein Maximum zu erkennen ist, können obere Schranken für den Parameterraum (μ, χ_0) angegeben werden. Aufgrund der Tatsache, dass Frequenztests kein Ergebnis zur Amplitude liefern, müssen die Simulationen von Energieserien zur Abhängigkeit $R^2(\chi_0)$ aus Abschnitt 5.3.2 herangezogen werden, vergleiche Abbildung 5.15(b). Diese Abhängigkeit wurde jedoch nicht mit der Antwortfunktion von XMM-Newton, sondern mit der idealisierten Funktion erstellt, was einen systematischen Fehler für die oberen Grenzen nach sich zieht. Des Weiteren wurde die funktionale Abhängigkeit der Rayleigh-Power vom Mischungswinkel aufgrund der langen Rechenzeit lediglich in Schritten von μ von 10^{-12} eV durchgeführt. Beim Frequenztest mit $x \approx 13.510$ IFS ist die Auflösung jedoch deutlich höher. Dies führt zu weiteren Ungenauigkeiten in der Bestimmung der oberen Grenzen.

Die oberen Schranken des Mischungswinkels werden wie folgt bestimmt: da der Rayleigh-Test für große n einer χ^2 -Verteilung mit zwei Freiheitsgraden folgt, können die Konfidenzintervalle (C.L.) für diese Verteilung verwendet werden. Bei zwei Freiheitsgraden entspricht ein 90 % C.L. einer Erhöhung von R_0^2 um $\Delta R^2 = 4,61$ (Press *et al.* 1992, und Tabelle B.1). Der aus dem Frequenztest ermittelte Wert wird demnach um ΔR^2 erhöht

und der entsprechende Winkel aus den Simulationen (siehe Abbildung 5.15(b)) abgelesen. Die Ergebnisse, zusammen mit den Zufallswahrscheinlichkeiten $P_x(R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2)$, sind in der Abbildung 5.20 am Ende des Kapitels für alle Beobachtungen zusammengefasst. Die Konfidenzintervalle für die kombinierten Messungen sind in den Abbildungen 5.18(a), 5.18(b) und 5.19 dargestellt.

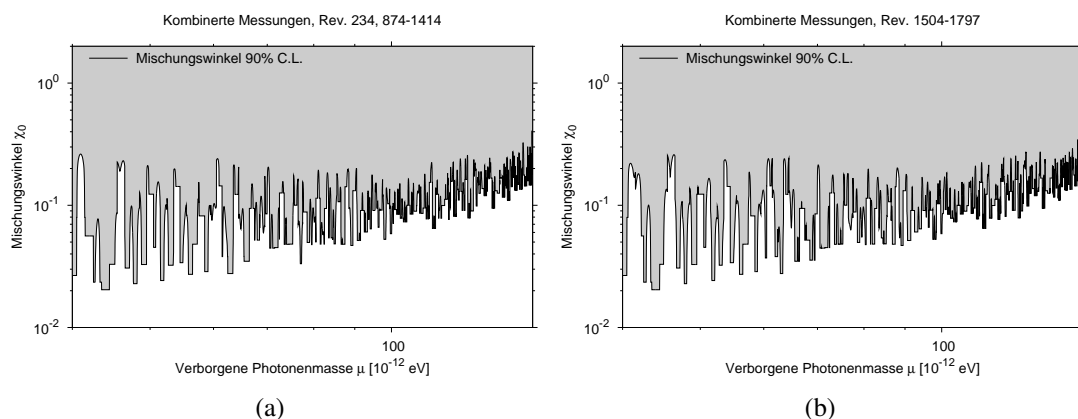


ABBILDUNG 5.18: 90% Konfidenzintervalle für den Mischungswinkel in Abhängigkeit von der Masse der verborgenen Photonen, $\chi_0(\mu)$, für (a) die kombinierten Energieserien für die Umläufe 234, 874-1414 und (b) die kombinierten Energieserien für die Umläufe 1504-1797.

In allen Abbildungen erkennt man einen stufenförmige Verlauf der 90% Konfidenzintervalle. Dieser Verlauf spiegelt die feinere Abtastrate beim Frequenztest als bei der Simulation der funktionalen Abhängigkeit der R^2 von χ_0 wider, wie bereits oben erwähnt. Ferner sind für die einzelnen Beobachtungen zum Teil viele ausgeprägte lokale Minima in der Zufallswahrscheinlichkeit $P_x(R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2)$ zu sehen. Vor allem in der Beobachtung des Umlaufs 1504 in Abbildung 5.20 weicht die Zufallswahrscheinlichkeit $P_x(R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2)$ oft von dem Wert eins ab. Dies könnte als Hinweis auf ein Signal von Photonenoszillationen gedeutet werden. Vergleicht man allerdings die Ereigniszahlen der Beobachtungen des Umlaufs 1504 mit denen des verwendeten Hintergrunds in Tabelle 5.1, so wird deutlich, dass es sich hierbei um einen systematischen Fehler handelt. Insbesondere in der Beobachtung 0412591401 weichen die Ereigniszahlen um mehr als 34.000 voneinander ab, der Untergrund ist also stark unterschätzt. Dies täuscht dann Minima in der Zufallswahrscheinlichkeit vor.

Dieser Umstand spiegelt gleichzeitig den Vor- und Nachteil des Frequenztest wider: zum einen ist er sehr sensitiv auf Maxima im Powerspektrum, zum anderen ist es deshalb von extremer Wichtigkeit, gut zwischen Signal und Untergrund unterscheiden zu können. Zwar ist dies prinzipiell mit dem Simulator SciSim möglich, eine genaue Simulation der Beobachtungen des Krebsnebels ohne mögliche Photonenoszillationen ist jedoch ausgeschlossen, da zum einen die Morphologie des Nebels und zum anderen der Burst-Modus nicht exakt oder überhaupt nicht simuliert werden können.

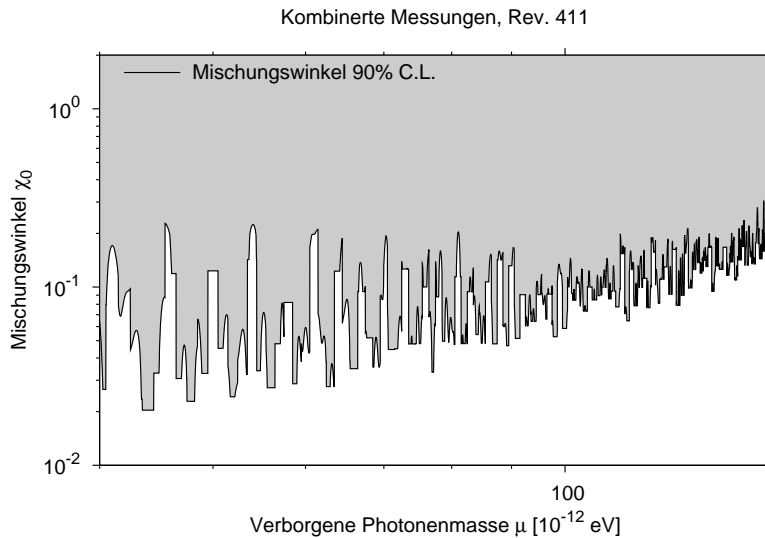


ABBILDUNG 5.19: 90% Konfidenzintervalle für den Mischungswinkel in Abhängigkeit von der Masse der verborgenen Photonen, $\chi_0(\mu)$, für die kombinierten Energieserien für den Umlauf 411.

Erschwerend kommt der Effekt bei kleinen Massen hinzu, der dazu führt, dass nicht mehr alle Phasen auf das betrachtete Energieintervall abgebildet werden, wie in Abschnitt 5.3.2 angesprochen. Ist nun der Untergrund nicht hinreichend genau simuliert, so führt der Effekt dazu, dass bei geringeren Massen der Frequenztest eine niedrigere Zufallswahrscheinlichkeit ergibt, was ebenfalls als Signal fehlinterpretiert werden kann. Als Lösung dieses Problems könnte man entweder ein kleineres Massenintervall testen oder einen Detektor mit einem größerem Energiefenster verwenden. Im Röntgenbereich wäre SPI (SPectrometer on INTEGRal) im Energiebereich 20 keV bis 8 MeV (Kirsch *et al.* 2005) an Bord des INTEGRAL-Satelliten eine Alternative. Wie jedoch bereits in Kapitel 3 erwähnt, verfügt SPI nicht über das räumliche Auflösungsvermögen, um den Krebspulsar aus den Messungen herauszuschneiden. Somit könnten nur Datensätze verwendet werden, in denen die Strahlungskegel des Pulsars nicht in Beobachtungsrichtung zeigen (Bereich der Phasen im Abbildung 5.10, die zwischen den Maxima liegen), wobei dieser Bereich schwierig zu definieren. Es müsste sichergestellt werden, dass die Periode des Pulsars nicht die Datensätze zur Suche nach Photonenoszillationen kontaminiert.

Trotz all dieser Einschränkungen sind die Ergebnisse der Konfidenzintervalle vergleichbar mit denen, die durch die Methode der kleinsten Quadrate mit Xspec ermittelt wurden. Frequenztests bieten demnach bei guter Kenntnis des Untergrundes eine komplementäre Möglichkeit, Signale auf Photonenoszillationen zu untersuchen. Es wird außerdem deutlich, dass Frequenztests nicht nur auf Zeitserien, sondern auch auf Oszillationen in der Energie anwendbar sind.

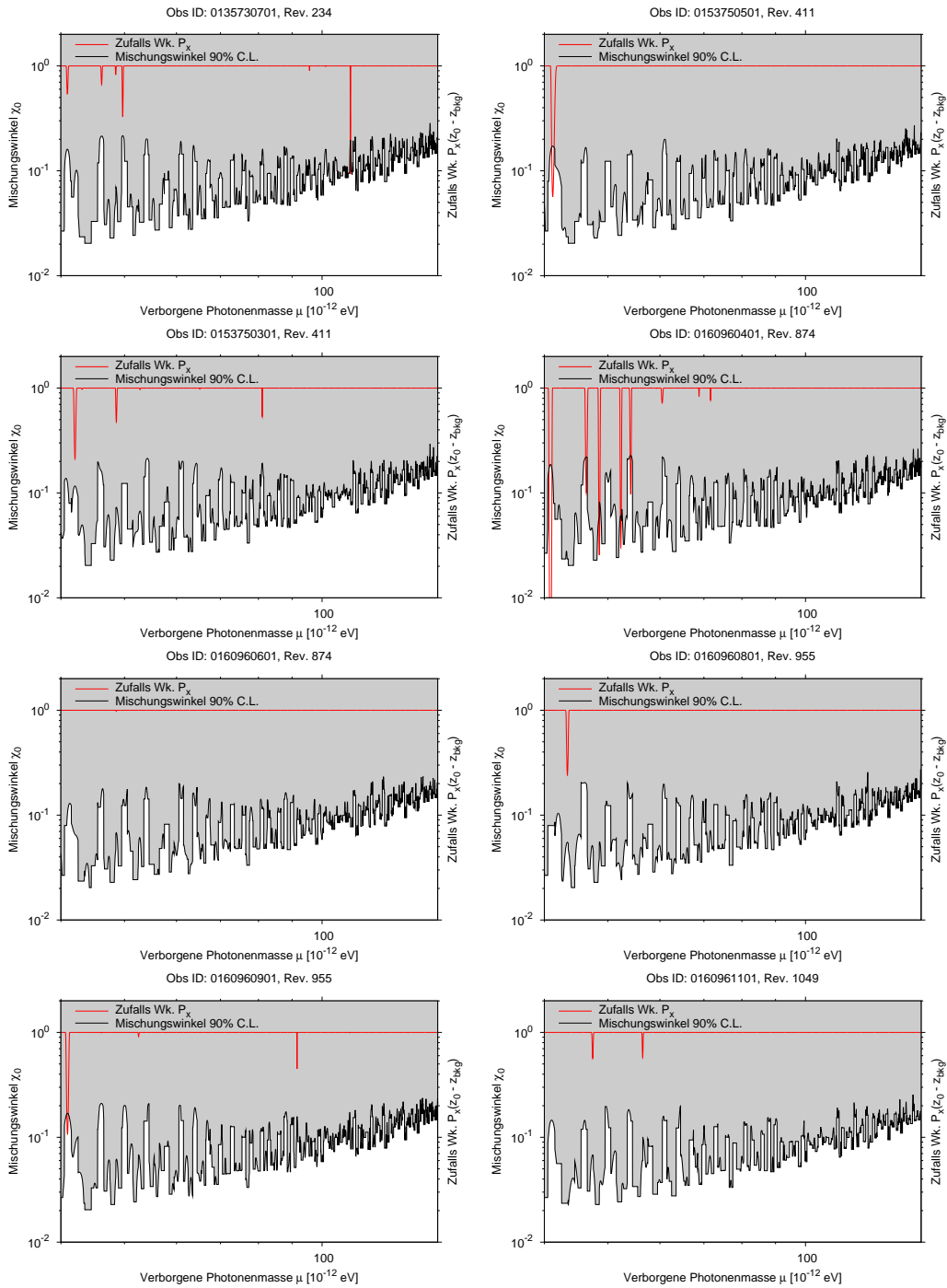


ABBILDUNG 5.20: Konfidenzintervalle aller Beobachtungen für den Rayleigh-Test, zusammen mit den Zufallswahrscheinlichkeiten $P_x(R_0^2 - R_{\text{bkg}}^2)$.

5 Analyse von Röntgendaten des Krebsnebels auf Photonenoszillationen

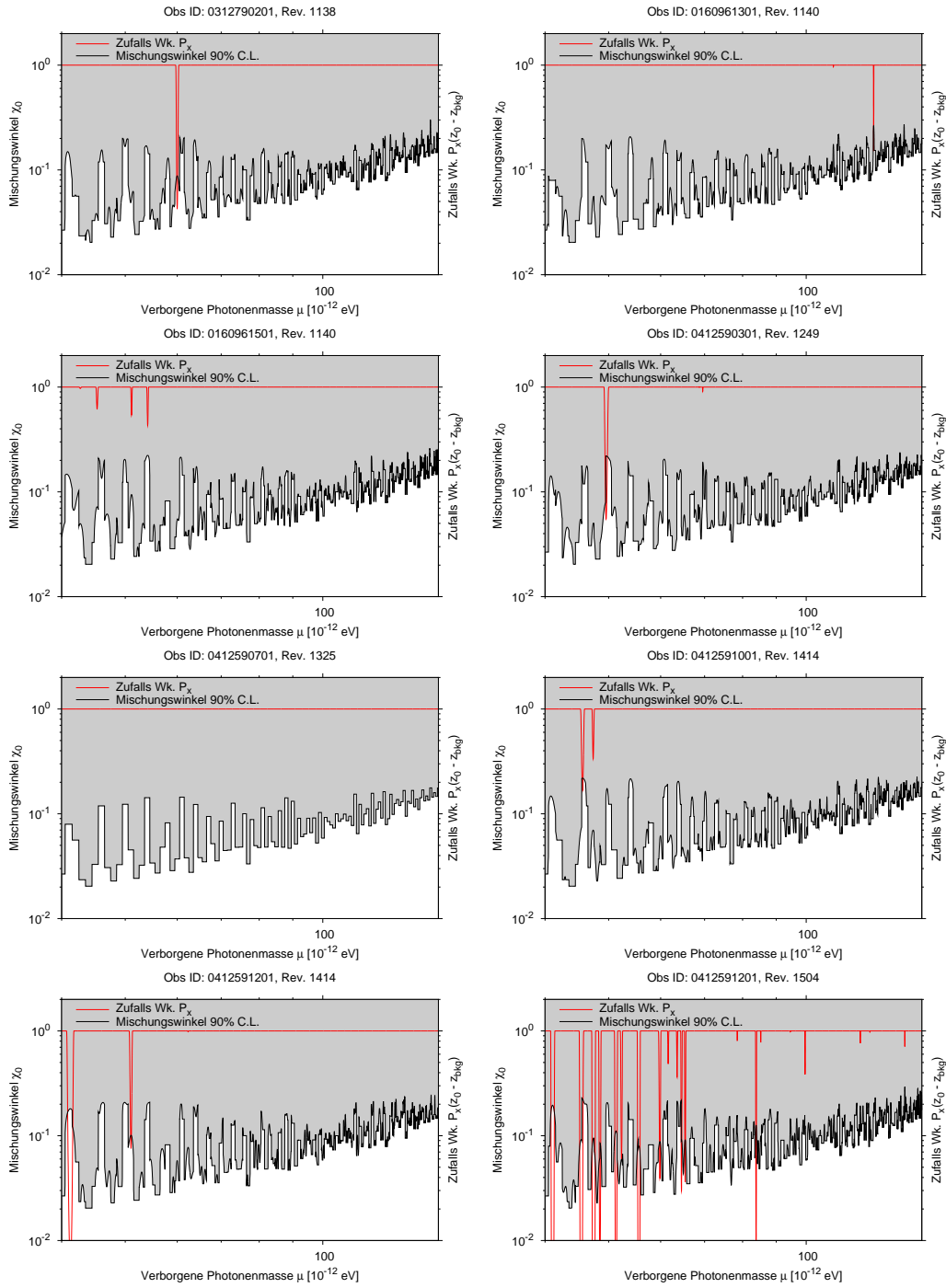


ABBILDUNG 5.20: Fortsetzung.

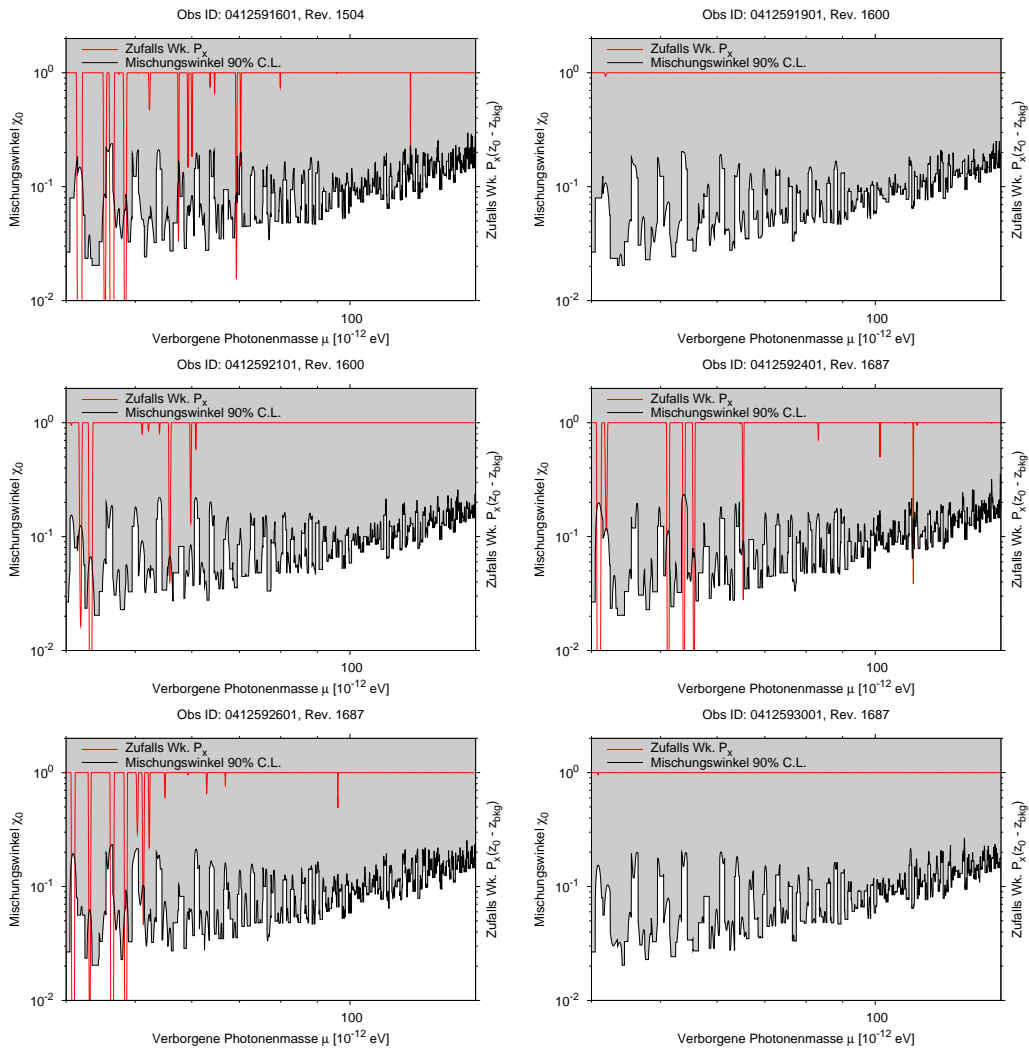


ABBILDUNG 5.20: Fortsetzung.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss dieser Arbeit sollen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse hervorgehoben und ein Ausblick darüber gegeben werden, wie diese in Zukunft verwendet und erweitert werden können.

Im ersten Teil wurde ein Modell für die spektrale Energieverteilung des Krebsnebels vorgestellt. Es berücksichtigt alle beobachtbaren Komponenten des Krebsnebels – die Synchrotronstrahlung, thermische und Linienemission, sowie inverse Compton-Streuung an den verschiedenen Photonenfeldern – und ihm gelingt es, durch Anpassung der Anzahlverteilung der Elektronen im Nebel die Beobachtungen über fast 20 Größenordnungen gut zu reproduzieren. Dies ist deshalb erstaunlich, weil es a priori nicht trivial ist, dass $O(200)$ Datenpunkte mit einem Modell mit 15 freien Parametern (12 vom Elektronenspektrum plus Temperatur und Normierung der Staubemission sowie dem Normierungsfaktor der optischen Linienemission) beschrieben werden können.

Aus dem Modell lassen sich wichtige Rückschlüsse auf das Magnetfeld und das Teilchenspektrum ziehen. Zum einen wird deutlich, dass das Magnetfeld innerhalb des Nebels nicht stark variieren kann, da die SED mit dem räumlich gemittelten Magnetfeld sehr gut beschrieben wird. Zum anderen kann die Elektronenpopulation des Windes durch Fermi-Beschleunigung erster Ordnung an einem relativistischen Schock erklärt werden. Der Knick im Spektrum bei Röntgenenergien legt außerdem nahe, dass sich die Teilchen möglicherweise in Kolmogorov-artigen Turbulenzen bewegen.

Aus dem Modell können in Zukunft noch weitere Informationen über die Physik des Krebsnebels gewonnen werden. So könnte man beispielsweise aus dem theoretisch vorhergesagten Fluss bei maximalen Synchrotron- und IC-Energien schließen, wie stark das magnetische Feld an der Schockfront ist. Für diese hochenergetischen Emissionen sind die selben Elektronen verantwortlich, die sofort kühlen und sich nicht weit von der Schockfront entfernen können.

Ein enormer Vorteil der exakten Modellierung des Spektrums ist die dadurch ermöglichte Cross-Kalibration der abbildenden Cherenkov-Teleskope untereinander und mit dem Fermi/LAT. Die Cross-Kalibration eliminiert eine Fehlerquelle bei der Beobachtung eines Objektes mit mehreren Instrumenten und stärkt somit die Aussagekraft von Resultaten, die auf kombinierten Messungen beruhen. Ein Anwendungsbeispiel wurde bereits vorgestellt: mit Hilfe der Cross-Kalibration gelingt es, aus den vom Fermi/LAT und H.E.S.S. gemessenen Elektronen und Positronen der kosmischen Strahlung obere Grenzen auf den diffusen Photonenhintergrund abzuleiten. Des Weiteren erscheint das von ATIC gemessene Maximum im Spektrum nach der Cross-Kalibration unwahrscheinlicher. Weitere denkbare Anwendungsgebiete sind zum Beispiel die kombinierte

Suche nach Dunkler Materie oder die Vermessung des extragalaktischen Hintergrundlichtes.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde das Spektrum des Krebsnebels auf mögliche Modulationen durch Photonenoszillation untersucht. Dazu wurde zunächst die Theorie der verborgenen Photonen vorgestellt und gezeigt, dass die quantenfeldtheoretische Behandlung von Oszillationen von Feldern (siehe zum Beispiel Blasone & Vitiello 1995) auf das Gebiet der verborgenen Eichgruppen übertragen werden kann. Eine interessante Erweiterung dieses Ergebnisses wäre der Versuch, die Oszillationsformel aus diesen rein quantenfeldtheoretischen Überlegungen herzuleiten. Sollte dies gelingen, könnten sich, wie im Falle von komplexen bosonischen Feldern (Blasone *et al.* 2001), Korrekturen bei niedrigen Energien ergeben, die eventuell beobachtbar wären.

Um die Strahlung des Krebsnebels zu untersuchen, wurden zwei zueinander komplementäre Ansätze verfolgt. Zum einen wurde ein Modellspektrum, das mit Photonenoszillation überlagert ist, über die Methode der Vorwärtsfaltung an das gemessene Spektrum angepasst. Dies hat, im Vergleich zur Analyse von Daten, die bereits in Teilintervalle unterteilt wurden, den Vorteil, dass mögliche Effekte der Unterteilung des Spektrums umgangen werden. Die gefundenen Einschränkungen liefern zwar keine neuen Ausschlussregionen, doch kann im Prinzip dieselbe Analyse auf Quellen bei höheren Distanzen angewendet werden, für die die Massen der verborgenen Photonen mit $\mu < 10^{-14}$ eV überprüft werden könnten. Hierzu eignen sich helle Objekte im Röntgenbereich – vor allem Blazare – in Entfernungen von mehreren hundert Mpc.

Die zweite Methode bestand aus der Anwendung von Frequenztests auf Energieserien, die von XMM-Newton gemessen wurden. Diese Methode bietet den großen Vorteil, dass die Rohdaten des Detektors verwendet werden können und nicht Spektren mit der Antwortmatrix des Detektors erstellt werden müssen. Mit Hilfe von Simulationen wurde nachgewiesen, dass Frequenztests sich eignen, um Photonenoszillationen nachzuweisen. Die Schwierigkeit bestand jedoch in der Behandlung des Untergrundes. Zu diesem Zweck wurden Krebspektren ohne oszillatorische Modulation simuliert, jedoch gestaltete sich ein genauer Vergleich der simulierten und gemessenen Spektren als schwierig. Problematisch ist, dass die Ergebnisse der Frequenztests abhängig von der Anzahl der gemessenen Ereignisse sind. Wählt man für die simulierten Untergrundserien eine zu geringe Anzahl, so können Fluktuationen im Rauschen der gemessenen Serien schnell als Signal fehlinterpretiert werden. Zu viele Ereignisse führen dagegen zu einer Unterschätzung der Signifikanz eines möglichen Signals. Außerdem musste die Abhängigkeit der Teststatistiken von der Amplitude der Modulation mit den simulierten Energieserien eines Signals bestimmt werden. Eine Verbesserung bestände darin, die simulierten Serien mit SciSim zu erstellen, was jedoch einen hohen Zeitaufwand nach sich zöge.

Trotz dieser Schwierigkeiten ist fest zu halten, dass Frequenztests auf Energieserien übertragbar sind und möglicherweise auf andere Phänomene angewendet werden können. Aufgrund ihrer hohen Sensitivität könnte beispielsweise versucht werden, Spektren auf Zyklotronresonanzen zu untersuchen, die auch als möglicher Beschleunigungsmechanismus an Schockfronten gehandelt werden (Arons 2004).

Eine zusätzliche wichtige Erweiterung der vorgestellten Arbeit besteht in der Einbeziehung von Effekten des Plasmas auf Photonenoszillationen (Redondo 2008b; Mirizzi *et al.* 2009). Innerhalb des Krebsnebels kann nicht die Annahme getroffen werden, dass verborgene Photonen im Vakuum produziert werden. Dies könnte zu Resonanz- oder Dämpfungseffekten bei der Produktion verborgener Photonen führen, die bei der Modulation der Spektren berücksichtigt werden sollten.

A Programme

Die Quelldateien der geschriebenen Programme sowie die Programme selbst sind im Internet unter <http://www.desy.de/~meyerm/> abrufbar.

A.1 C Programme zur Modellierung der spektralen Energiedichte

Programmname: *crab*

Funktion: Das Programm berechnet das komplette Krebspektrum mit allen Komponenten, die in Kapitel 3 beschrieben wurden, und speichert es in Form einer Tabelle ab. Die Tabelle beinhaltet sechs Spalten:

1. Die Frequenz in Hz,
2. der gesamte inverse Compton-Fluss f_{ν}^{IC} in $\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$,
3. der komplette Synchrotronfluss, ebenfalls in Einheiten von f_{ν}^{Sy} ,
4. die thermische Strahlung des Staubs in νf_{ν} ,
5. inverse Compton-Streuung durch Linienemission in νf_{ν} ,
6. der Fluss der Linienemission ebenfalls in Einheiten von νf_{ν} .

Das Elektronenspektrum ist in der Datei `nel.c` spezifiziert und alle Parameter sind in `initialize.c` angegeben.

Optionen: Die Optionen sind in folgender Tabelle angegeben.

Parameter	Option
-f<DATEINAME>	Speichert die auszugebende Tabelle in <DATEINAME>
-i<DATEINAME>	Speichert den gesamten inversen Compton-Fluss in <DATEINAME>
-n<0, 1, 2>	Berechnet das Spektrum mit beiden Elektronenpopulation (0) oder nur mit Radio- (1) bzw. Windelektronen (2)
-B<DOUBLE>	Setzt den Wert des magnetischen Feldes auf <DOUBLE>
-e	Gibt das Elektronenspektrum in der Datei <code>Electron_Spec</code> als Tabelle in γ und $dN_{el}/d\gamma$ aus
-s	Berechnet den Synchrotronbeitrag der einzelnen Elektronenspektren und speichert sie in <code>Sync_Pop_R</code> , bzw. <code>Sync_Pop_W</code>
-c	Berechnet die einzelnen IC-Komponenten separat und speichert sie in den Dateien <code>ICc</code> , <code>ICcc</code> und <code>ICccc</code>

Programmname: `total_en`

Funktion: Berechnet die totale Energie des Radio- und Windelektronenspektrums anhand der Gleichungen 3.72a und 3.72b mittels numerischer Integration. Des Weiteren werden die mittleren Energien, $\bar{\gamma}$, der beiden Spektren berechnet mit

$$\bar{\gamma} = \frac{\int \gamma (dN_{el}/d\gamma) d\gamma}{\int (dN_{el}/d\gamma) d\gamma}. \quad (\text{A.1})$$

Die berechneten Werte werden auf der Standardausgabe ausgegeben.

Programmname: `scaleit`

Funktion: Berechnet die Skalierungsfaktoren s_{IACT} der Cherenkov-Teleskope aus einer χ^2 -Anpassung der Datenpunkte an das theoretische Modell. Genaugenommen wird das Modell an die Datenpunkte angepasst: die inverse Compton-Komponente des Spektrums, welches mit dem Programm `crab` berechnet wurde, wird interpoliert und als Funktion $dN/dE(E)$ in den Einheiten $(\text{s cm}^2 \text{ TeV})^{-1}$ abgespeichert. Diese Funktion wird dann mittels einer χ^2 -Minimierung mit dem freien Parameter s_{IACT} an die Datenpunkte angepasst,

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{dN/dE(E \cdot s_{\text{IACT}}) - (dN/dE)_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (\text{A.2})$$

Der Aufruf erfolgt in der Kommandozeile über

```
$ scaleit <DATEN DATEI> <OUTPUT DATEI> <SPEKTRUM DATEI>
```

`DATEN DATEI` beinhaltet eine Tabelle mit den Messpunkten und Messfehlern der Teleskope, angegeben in Frequenz und νL_ν ; in der `OUTPUT DATEI` wird die Tabelle mit

den Skalierungsfaktoren und den entsprechenden Werten von χ^2 und $\chi^2/\text{d.o.f.}$ abgespeichert. Auf der Standardausgabe wird zusätzlich der Skalierungsfaktor mit minimalem χ^2 angegeben sowie der χ^2 -Wert ohne Skalierung. Die SPEKTRUM DATEI wird mit dem Programm `crab` mit der Option `-i` erstellt und enthält den IC-Teil mit allen Komponenten.

A.2 C Programme für Frequenztests

Programmname: *simul*

Funktion: Das Programm simuliert Energieserien zwischen den Energien E_{\min} und E_{\max} von Photonenoszillationen, die mit einem perfekten Detektor, wie in Kapitel 5 beschrieben, gemessen werden. Dazu wird das Detektorsignal $C(E)$, das Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, aus Gleichung 5.52 berechnet und numerisch invertiert. Anschließend werden Zahlen zwischen 0 und 1 ausgewürfelt und die zugehörige Energie in einer Tabelle abgespeichert.

Optionen: Die Optionen sind in folgender Tabelle gegeben.

Parameter	Option
-m<DOUBLE>	Bestimmt die Masse der verborgenen Photonen in Einheiten von 10^{-12} eV
-c<DOUBLE>	Bestimmt den Mischungswinkel, kann maximal $\pi/4$ sein.
-f<DATEINAME>	Die Energieserie wird in der Datei <DATEINAME> abgelegt
-s<0, 1>	Bei 0 wird das Oszillationssignal simuliert, bei 1 ein Signal mit konstantem Fluss ohne Oszillation
-e<DOUBLE>	Gibt den Wert von E_{\min} an
-E<DOUBLE>	Gibt den Wert von E_{\max} an

Programmname: *periodicity*

Funktion: Das Programm testet eine Energieserie, die in einer Datei in einer Spalte in der Einheit eV abgespeichert ist, auf mögliche Signaturen von Photonenoszillationen. Verwendet werden entweder der Rayleigh-, der Z_m^2 - oder der H -Test. Ein Intervall der verborgenen Photonenmasse $[\mu_{\min}; \mu_{\max}]$ wird in Schritten $\Delta\nu_{\text{IFS}}/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ durchlaufen und für jeden Schritt die gewählte Teststatistik berechnet. Falls eine Energieserie, die den Untergrund beschreibt, gegeben ist, wird für diese ebenfalls die Statistik berechnet. Aus den Ergebnissen wird anschließend nach Gleichung 5.26 die Signifikanz des Ergebnisses bestimmt. Aus dem interpolierten Zusammenhang zwischen dem Mischungswinkel und der berechneten Teststatistik wird außerdem für jede Masse ein 90% Konfidenzlevel berechnet. Die Ausgabe erfolgt als Tabelle, die folgende Daten enthält:

1. Getestete Masse in Einheiten von 10^{-12} eV
2. Ergebnis der Teststatistik
3. Ergebnis der Teststatistik angewendet auf die Energieserie des Hintergrundes
4. Wahrscheinlichkeit $P(z > z_0)$ aus Gleichung 5.53
5. Gesamtwahrscheinlichkeit nach Gleichung 5.26
6. 90% Konfidenzlevel (obere Grenze) für den Mischungswinkel.

Optionen: Die Optionen sind in folgender Tabelle gegeben.

Parameter	Option
-f<DATEINAME>	Ausgabe wird in der Datei <DATEINAME> gespeichert
-i<DATEINAME>	<DATEINAME> ist die Datei der Energieserie, die untersucht werden soll
-u<DATEINAME>	<DATEINAME> ist die Datei der Hintergrundenergieserie
-n<INTEGER>	<INTEGER> gibt den Wert für n .
-t<0, 1, 2>	Wählt die Teststatistik: 0 (Standard): Rayleigh-Test, 1: Z_m^2 -Test, bei der m Oberwellen untersucht werden, 2: H -Test
-h<INTEGER>	<INTEGER> gibt die Anzahl m der Oberwellen, die mit dem Z_m^2 -Test getestet wird
-N<DOUBLE>	<DOUBLE> gibt den Wert für μ_{\min}
-M<DOUBLE>	<DOUBLE> gibt den Wert für μ_{\max}

A.3 tcl-Skript zur Anpassung des Krebspektrums an die XMM-Daten

Programme: *osc-test*

Funktion: Das tcl-Skript startet Xspec und lässt ein Potenzgesetz mit Photonenoszillationen an die gemessenen Daten anpassen. Dazu wird schrittweise die Masse der verborgenen Photonen durchgefahen und für jeden Wert nach dem besten Wert des Mischungswinkels mittels einer χ^2 -Statistik gesucht. Ist dieser Wert gefunden, wird zusätzlich nach dem Mischungswinkel gesucht, für den sich die Statistik um $\Delta\chi^2 = 6,25$ erhöht, was einem 90% Konfidenzlevel bei drei freien Parametern (Photonenindex, Normierung und Mischungswinkel) entspricht. Das Skript benötigt die Ereignislisten des Spektrums, der RMF und ARF, die mit SAS erstellt werden müssen.

Der Aufruf des Skripts erfolgt innerhalb von Xspec in der Kommandozeile über

```
XSPEC> @osc-test.xcm
```

Optionen: Im Skript lässt sich mit der Variable `step` die Schrittweite einstellen. Die Variable `dchibest` kontrolliert, nach welchem Wert von $\Delta\chi^2$ gesucht werden soll.

B Verwendete statistische Methoden

Oftmals muss in der Physik das Problem gelöst werden, welche freien Parameter einer Theorie Ergebnisse eines Experiments am besten beschreiben. Eine Methode, diese Parameter zu finden und eine Aussage darüber zu treffen, wie gut die Theorie die Daten beschreibt, ist die Methode der kleinsten Quadrate. Diese soll hier, zusammen mit einigen grundlegenden Größen der Statistik, die in dieser Arbeit verwendet werden, definiert werden. Als Quelle für dieses Kapitel dienen Amsler *et al.* (2008) und Zechlin (2009).

B.1 Verwendete Größen der Statistik

Ist x der Messwert eines wiederholbaren Experiments, also Element der Menge aller möglichen Messwerte, dann kann x als eine Zufallsvariable betrachtet werden. Kann x einen Wert in einem kontinuierlichen Bereich annehmen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis des Experiments im Intervall $[x; x + dx]$ liegt, durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (*probability distribution function*, p.d.f.) $f(x, \vartheta)$ gegeben und kann von einem oder mehreren Parametern ϑ abhängen. Sind diese im vorhinein unbekannt, so kann beispielsweise die Methode der kleinsten Quadrate verwendet werden, um die Parameter an Hand der Messwerte abzuschätzen. Bevor diese Methode vorgestellt wird, sollen noch einige Größen, die bei der statistischen Behandlung von Ergebnissen auftreten, eingeführt werden.

Mittelwert, Varianz und Korrelation

Die Funktion einer Zufallsvariable ist selbst wieder eine Zufallsvariable und ihr Erwartungswert ist gegeben durch das lineare Funktional

$$\langle u(x) \rangle = E[u(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Das n -te Moment einer Zufallsvariable ist definiert als $\langle x^n \rangle = E[x^n]$. Der *Mittelwert* ist dann gerade $\langle x \rangle$ und die *Varianz* σ^2 ist gegeben durch

$$\sigma^2 = V[x] = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (\text{B.2})$$

Die *Kovarianz* $\text{cov}[x, y]$ zweier Zufallsvariablen x und y gibt an, ob zwischen diesen beiden Variablen ein Zusammenhang besteht, oder ob sie unabhängig voneinander sind. Im letzteren Fall ist die Kovarianz gleich Null. Sie ist definiert als

$$\text{cov}[x, y] = E[(x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle)] = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Die Varianz kann durch die Kovarianz ausgedrückt werden: $V[x] = \text{cov}[x, x]$. Der Korrelationskoeffizient ist ein dimensionsloses Maß der Kovarianz und ist gegeben durch

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}[x, y]}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (\text{B.4})$$

Der Begriff der Korrelation wird im Kapitel 3 benötigt, um die Abhängigkeit der einzelnen Modellparameter voneinander zu beschreiben. Der Korrelationskoeffizient ist Null für zwei unabhängige Zufallsvariablen. Sie sind genau dann unabhängig, wenn die zugehörige p.d.f. faktorisiert, also $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ gilt.

B.2 Methode der größten Wahrscheinlichkeit und der kleinsten Quadrate

Bezeichnet man die unabhängigen Messergebnisse eines Experiments mit y_1, \dots, y_n , dann stellen alle y_i unabhängige Zufallsvariablen dar. Außerdem soll der Vektor $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)^T$ alle m Parameter einer Theorie beinhalten, die die Ergebnisse des Experiments beschreiben sollen. Es gilt nun ϑ so zu bestimmen, dass die Daten am besten beschrieben werden (diese werden dann als *best-fit*-Parameter, also Parameter der besten Anpassung, oder *Maximum-Likelihood*-Parameter, ML, bezeichnet). Dies kann man für die Methode der größten Wahrscheinlichkeit durch die Maximierung der *Likelihood* erreichen, die gegeben ist durch

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^n f(y_i, \vartheta). \quad (\text{B.5})$$

Sie beschreibt die Gesamtwahrscheinlichkeit, für die Parameter ϑ die Messergebnisse y_1, \dots, y_n zu beobachten. Oftmals ist es einfacher mit den Logarithmus der Likelihood zu rechnen, da aus einer Multiplikation zweier p.d.f.s eine Addition der Logarithmen wird. Dies ist vor allem bei der Berechnung mit Hilfe von Computern sinnvoll, da diese besser mit der Addition von Zahlen als mit der Multiplikation rechnen können. Die *best-fit*-Parameter, bezeichnet durch $\hat{\vartheta}$, bilden das globale Maximum von L und somit auch von $\ln L$ und können durch n Gleichungen bestimmt werden,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.6})$$

Im Gegensatz zur Methode der größten Wahrscheinlichkeit, sucht die Methode der

kleinsten Quadrate nach denjenigen Parametern ϑ , die die sogenannte χ^2 -Statistik minimieren. Angenommen es wären die Werte y_1, \dots, y_n mit normalverteilten Fehlern $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ in Abhängigkeit von x_1, \dots, x_n gemessen worden. Bezeichnet nun $y = y(x_i, \vartheta)$ die theoretische Voraussage für y_i mit den Parametern ϑ , dann ist das χ^2 gegeben durch

$$\chi^2(\vartheta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - y(x_i, \vartheta)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (\text{B.7})$$

Die best-fit-Parameter $\hat{\vartheta}$ sind diejenigen Parameter, welche χ^2 auf χ_{\min}^2 minimieren. In dem Fall, dass die Messwerte y_i einer Gaußverteilung mit Mittelwerten $y(x_i, \vartheta)$ und Varianzen σ_i^2 folgen, ist die Methode der kleinsten Quadrate gleich der Methode der größten Wahrscheinlichkeit und die Parameter $\hat{\vartheta}$, die χ^2 minimieren, maximieren auch L . Der Zusammenhang zwischen χ^2 und L ist dann

$$\chi^2(\vartheta) = -2 \ln L + \text{Konstante}. \quad (\text{B.8})$$

Für die χ^2 -Methode kann die Kovarianzmatrix bestimmt werden durch

$$(V^{-1})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \Big|_{\vartheta = \hat{\vartheta}}. \quad (\text{B.9})$$

Häufig wird anstelle von χ^2 die reduzierte χ^2 -Statistik angegeben*, wobei die χ^2 -Werte durch die Anzahl der Freiheitsgrade n_d geteilt wird. Dabei ist n_d gegeben durch die Differenz der Anzahl der Messpunkte n und der Parameter m , $n_d = n - m$. Die Werte der χ^2 -Statistik mit n_d Freiheitsgraden folgt einer p.d.f., $f(z, n_d) \equiv f(\chi^2, n_d)$ mit

$$f(z, n_d) = \frac{z^{n_d/2-1} e^{-z/2}}{2^{n_d/2} \Gamma(n_d/2)}, \quad (\text{B.10})$$

wobei $\Gamma(n_d/2)$ die Gammafunktion bezeichnet (Bronstein & Semendjajew 1991, siehe beispielsweise). Die Güte einer Anpassung der Daten (*goodness of fit*) lässt sich mittels des p -Werts quantifizieren. Dieser gibt an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei einem minimalen χ_{\min}^2 , ein χ^2 auftritt, das zufällig größer ist als χ_{\min}^2 ,

$$p(\chi_{\min}^2) = \int_{\chi_{\min}^2}^{\infty} f(z, n_d) dz. \quad (\text{B.11})$$

Beschreibt das Modell mit den Parametern $\hat{\vartheta}$ die Messwerte gut, so sollte $\chi_{\min}^2/\text{d.o.f.}$ nahe bei Eins liegen. Für Werte $\chi_{\min}^2/\text{d.o.f.} \gg 1$ kann das Modell ausgeschlossen werden. Ist $\chi_{\min}^2/\text{d.o.f.} \ll 1$, so sind entweder die statistischen Fehler unterschätzt oder nicht normalverteilt.

* Dies wird in dieser Arbeit als $\chi^2/\text{d.o.f.}$ gekennzeichnet, wobei d.o.f. für *degrees of freedom*, zu Deutsch *Freiheitsgrade*, steht.

Konfidenzintervalle

Abschließend soll beschrieben werden, wie die Fehler auf die besten Parameterwerte $\hat{\vartheta}$ abgeschätzt werden können. Diese Abschätzung kann durch die Angabe von Konfidenzintervallen erreicht werden. Dies sind Intervalle, oder für $m > 1$ Parameterregionen, die den Wert von ϑ , der die Messungen am besten beschreibt, mit einer Wahrscheinlichkeit größer oder gleich einem vorgegeben Wert enthalten.

Konfidenzintervalle können durch die *Neyman-Konstruktion* definiert werden. Geht man davon aus, dass x das Ergebnis eines Experiments und ϑ der unbekannte Parameter ist, für den man ein Konfidenzintervall angeben möchte, sowie $f(x, \vartheta)$ die zu x gehörende p.d.f., so ist das Konfidenzintervall für eine vorher festgelegte aber frei wählbare Wahrscheinlichkeit α , die die Grösse des Intervalls bestimmt, gegeben durch

$$P(x_1 < x < x_2; \vartheta) = 1 - \alpha = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \vartheta) dx. \quad (\text{B.12})$$

Die Größe $P(x_1 < x < x_2; \vartheta)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, x zwischen $x_1(\alpha, \vartheta)$ und $x_2(\alpha, \vartheta)$ zu finden. Es kann gezeigt werden, dass diese Konstruktion gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass ϑ zwischen $\vartheta(x_1) \equiv \vartheta_1(x)$ und $\vartheta(x_2) \equiv \vartheta_2(x)$ liegt,

$$1 - \alpha = P(x_1 < x < x_2; \vartheta) = P(\vartheta_1(x) < \vartheta < \vartheta_2(x)). \quad (\text{B.13})$$

Wird die Methode der kleinsten Parameter verwendet, um die best-fit-Parameter $\hat{\vartheta}$ zu erhalten, so bildet die Konfidenzregion einen m -dimensionalen Ellipsoiden und die Projektion des Ellipsoiden auf die j -Achse gibt den Fehler des Parameters $\hat{\vartheta}_j$ an.

Das Konfidenzintervall für die Methode der kleinsten Quadrate kann folgendermaßen bestimmt werden: werden die Parameter $\hat{\vartheta}$, die die Statistik zu χ_{\min}^2 minimiert haben, verändert, so wird dies zu einem $\chi^2 > \chi_{\min}^2$ führen. Die Differenz ist dann

$$\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\min}^2. \quad (\text{B.14})$$

Für vorgegebenes $\Delta\chi^2$ lässt sich ein Intervall für die Parameter ϑ bestimmen, so dass für die resultierenden χ^2 -Werte gilt

$$\chi^2(\vartheta) \leq \chi_{\min}^2 + \Delta\chi^2. \quad (\text{B.15})$$

Für $\Delta\chi^2 = 1$ (und $n_d = 1$) liegt beispielsweise der Wert für die Parameter ϑ , die das Experiment am besten beschreiben, mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% innerhalb dieses Bereiches. Weitere Werte für die Konfidenzregion $1 - \alpha$ für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden sind in Tabelle B.1 angegeben und sind ebenfalls in Press *et al.* (1992) zu finden. Solche Konfidenzintervalle werden beispielsweise in Kapitel 5.2 und 5.3 benötigt. Konfidenzintervalle können auch verwendet werden, um obere

Grenzen eines Parameters zu bestimmen,

$$1 - \alpha = P(0 \leq \vartheta < \vartheta_2(x)), \quad (\text{B.16})$$

falls $\vartheta \geq 0$ gilt. Dies wird in Kapitel 5 zur Einschränkung des Parameterraums verborgener Photonen benötigt. Standardmäßig werden dazu 90% Konfidenzintervalle angegeben und der Wert für $\Delta\chi^2$ lässt sich aus Tabelle B.1 ablesen. Als abkürzende Schreibweise für diese Konfidenzintervalle wird C.L. (*Confidence level*) verwendet.

TABELLE B.1: Werte für $\Delta\chi^2$ in Abhängigkeit des Konfidenzintervalls $1 - \alpha$ und der Anzahl der Freiheitsgrade n_d (Press *et al.* 1992).

$1 - \alpha$	$\Delta\chi^2(\alpha, n_d)$		
	n_d		
	1	2	3
68,3%	1,00	2,30	3,53
90%	2,71	4,61	6,51
95,4%	4,00	6,17	8,02
99%	6,63	9,21	11,3

C Rechnungen zu Kapitel 4

In diesem Anhang sollen die für Abschnitt 4.2 wichtigen Rechnungen im Detail vorgestellt werden.

C.1 Herleitung des kanonisch konjugierten Impuls für $U(1)$ Eichtheorien

In diesem Abschnitt wird der kanonisch konjugierte Impuls für massive und masselose Vektorfelder hergeleitet. Dazu ist es ratsam, zunächst den kinetischen Term $\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ der Lagrangedichte umzuformen. Angefangen mit der Wirkung erhält man

$$\begin{aligned}
 S_{\text{kin}} &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4x A^\mu (-g_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu. \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde partiell integriert und der Randterm ist für genügend schnell abfallende Felder gleich Null. Unter Berücksichtigung des Extraterms, der sich zum Beispiel im Formalismus von Faddeev und Popov (siehe zum Beispiel Peskin & Schroeder 1995) ergibt, erhält man somit insgesamt die Lagrangedichte für die Masseneigenzustände

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} A_i^\mu \left[-g_{\mu\nu} \partial^2 + \left(\delta_{ij} - \frac{1}{\alpha_{ij}} \right) - g_{\mu\nu} \mathcal{M}_{\text{diag}, ij}^2 \right] A_j^\nu. \tag{C.2}$$

Wählt man die Feynmanregel für beide Felder, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, so ergibt sich der konjugierte Impuls zu

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\rho^j} = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\delta}{\delta A_\rho^j} (\partial_\mu A_\mu^i \partial^\mu A_i^\nu) = -\frac{1}{2} \sum_i 2\delta_{ij} \delta_{\mu 0} \delta_{\nu \rho} \partial^\mu A_i^\nu = -A_\rho^j. \tag{C.3}$$

C.2 Lösung der Differentialgleichung der Abbildung zwischen den Hilberträumen und die Vertauschungsrelationen der zugehörigen $SU(2)$ Algebra

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die in Abschnitt 4.2 eingeführten Operatoren die Vertauschungsrelationen einer $SU(2)$ Algebra erfüllen und anschließend soll die Differentialgleichung 4.19 gelöst werden. Für die Vertauschungsrelationen ist zu zeigen, dass

$$[S_+, S_-] = 2S_3 \quad (\text{C.4a})$$

$$[S_3, S_\pm] = \pm S_\pm \quad (\text{C.4b})$$

$$[S_0, S_3] = [S_0, S_\pm] = 0, \quad (\text{C.4c})$$

für gleiche Zeiten gilt. Um dies zu zeigen, müssen nur die Vertauschungsrelationen aus Gleichung 4.15 benutzt werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} [S_+, S_-] &= - \int d^3x \int d^3y \left[\pi_1^\mu(x) A_\mu^2(x), \pi_2^\nu(y) A_\nu^1(y) \right] \\ &= - \int d^3x \int d^3y \left(\pi_1^\mu(x) \left[A_\mu^2(x), \pi_2^\nu(y) \right] A_\nu^1(y) + \pi_2^\nu(y) \left[\pi_1^\mu(x), A_\nu^1(y) \right] A_\mu^2(x) \right) \\ &= -i \int d^3x \left(\pi_1^\mu(x) A_\mu^1(x) - \pi_2^\mu(x) A_\mu^2(x) \right) \\ &= 2S_3. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Im vorletzten Schritt wurde der Kommutator eingesetzt und die Integration über y mit der δ -Distribution ausgeführt. Des Weiteren findet man

$$\begin{aligned} [S_3, S_+] &= -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \left[\pi_1^\mu(x) A_\mu^1(x) - \pi_2^\mu(x) A_\mu^2(x), \pi_1^\nu(y) A_\nu^2(y) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \left(\pi_1^\mu(x) \left[A_\mu^1(x), \pi_1^\nu(y) \right] A_\nu^2(y) - \pi_1^\nu(y) \left[\pi_2^\mu(x), A_\nu^2(y) \right] A_\mu^2(x) \right) \\ &= -i \int d^3x \pi_1^\mu(x) A_\mu^2(x) \\ &= +S_+. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Analog zeigt man, dass $[S_3, S_-] = -S_-$ gilt. Für $[S_0, S_\pm]$ muss man nur einsehen, dass sich das Vorzeichen des zweiten Summanden im zweiten Schritt in Gleichung C.6 ändert und somit $[S_0, S_\pm] = 0$ ist. Daraus folgt sofort, dass $[S_0, S_3] = 0$ ist, da gilt

$$[S_0, S_3] = \frac{1}{2} [S_0, [S_+, S_-]] = 0. \quad (\text{C.7})$$

Somit erfüllen S_{\pm} und S_3 die Vertauschungsrelationen einer $SU(2)$ Algebra mit S_0 dem zugehörigen Casimir-Operator.

Zur Berechnung der Differentialgleichung 4.19 erweisen sich noch folgende Operatoren als hilfreich:

$$[S_+ - S_-, S_+ - S_-] = 0 \quad (\text{C.8a})$$

$$[A_1^\mu(x), S_-] = 0 \quad (\text{C.8b})$$

$$[A_1^\mu(x), S_+] = -i \int d^3y [A_1^\mu(x), \pi_1^\nu(y)] A_\nu^2(y) = A_\mu^2(x) \quad (\text{C.8c})$$

$$[A_2^\mu(x), S_+] = 0 \quad (\text{C.8d})$$

$$[A_2^\mu(x), S_-] = -i \int d^3y [A_2^\mu(x), \pi_2^\nu(y)] A_\nu^1(y) = A_\mu^1(x) \quad (\text{C.8e})$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\chi} A_A^\mu(x) &= \frac{d}{d\chi} (G_\chi^{-1}(t) A_1^\mu(x) G_\chi(t)) \\ &= \left(\frac{dG_\chi^{-1}(t)}{d\chi} \right) A_1^\mu(x) G_\chi(t) + G_\chi^{-1}(t) A_1^\mu(x) \left(\frac{dG_\chi(t)}{d\chi} \right) \\ &= G_\chi^{-1}(t) (-S_+ + S_-)(t) A_1^\mu(x) G_\chi(t) + G_\chi^{-1}(t) A_1^\mu(x) G_\chi(t) (S_+ - S_-) \\ &= G_\chi^{-1}(t) [A_1^\mu, S_+ - S_-] G_\chi(t) \\ &= G_\chi^{-1}(t) A_2^\mu(x) G_\chi(t). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Die zweite Ableitung ergibt analog

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\chi^2} A_A^\mu(x) &= \frac{d}{d\chi} (G_\chi^{-1}(t) A_2^\mu(x) G_\chi(t)) \\ &= -G_\chi^{-1}(t) A_1^\mu(x) G_\chi(t) \\ &= -A_A^\mu(x). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Somit folgt Gleichung 4.19 und analog kann die Gleichung für $A_S^\mu(x)$ gezeigt werden.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Höhlenmalerei amerikanischer Ureinwohner zur Supernova 1054 . . .	5
2.2	Zusammenstellung von Aufnahmen des Krebsnebels	8
2.3	Schematische Darstellung der inneren Region des Krebsnebels	10
2.4	XMM-Newton-Satellit und pn-Chipsatz	12
2.5	Paarerzeugung im Kalorimeter des LATs	13
2.6	Schematische Darstellung der Beobachtungen von Luftschauern . . .	14
2.7	Die H.E.S.S.-Teleskope	15
3.1	Spektrale Energiedichte des Krebsnebels	19
3.2	Vergleich der numerischen Berechnung und der Näherung der Synchrotronfunktion	24
3.3	Feynmandiagramme der niedrigsten Ordnung der inversen Compton-Streuung	26
3.4	Vergrößerter Ausschnitt der SED bei Submillimeter- und fernen Infrarotenergien	32
3.5	Beiträge zum Fluss der inversen Compton-Streuung	34
3.6	Anpassung des IC-Flusses durch Variation des magnetischen Feldes an die Fermi/LAT Messung	36
3.7	Verschiedene Inertialsysteme zur Berechnung der Fermi-Beschleunigung	42
3.8	Modelliertes Elektronenspektrum	47
3.9	Vergleich der unskalierten und skalierten Datenpunkte der IACTs . . .	50
3.10	Elektronen- und Positronenspektrum von H.E.S.S. (unskaliert) und Fermi	51
3.11	Elektronen- und Positronenspektrum von H.E.S.S. (skaliert) und Fermi	52
4.1	Feynmandiagramme für die kinetische Mischung	59
4.2	Einschränkungen des Parameterraums verborgener Photonen	65
4.3	Ausschnitt des Parameterraums, der durch LSW-Experimente getestet werden kann	67
4.4	Schematische Darstellung der Kohärenzbedingung	69
5.1	Der Krebsnebel aus der Sicht der MOS-CCD-Kamera	74
5.2	Bild der pn-Kamera vom Krebs im Burst-Modus	75
5.3	Ergebnis des Tests der Daten auf Pile-up	76
5.4	Krebsspektrum des Umlaufs 411	80
5.5	Testbarer Parameterraum mit XMM-Newton	82

5.6	Effektive Fläche von XMM-Newton und Potenzgesetzmodell für den Krebsnebel	84
5.7	Kombinierte Ergebnisse der Beobachtungen mit dicken Filter	85
5.8	Kombinierte Ergebnisse der Beobachtungen mit mittlerem Filter	85
5.9	Konfidenzintervalle aller Beobachtungen, erstellt mit Xspec.	87
5.10	Pulsprofil des Krebspulsars	91
5.11	Visualisierung des Rayleigh-Tests	95
5.12	Beispiel von Phasen als Funktion der Energie	98
5.13	Powerspektrum des Rayleigh-Tests für simulierte Energieserien	101
5.14	Powerspektrum des Z_2^2 -Tests für simulierte Energieserien	102
5.15	Rayleigh-Power in Abhängigkeit des Mischungswinkels	103
5.16	Simulierter Krebsnebel	105
5.17	Rayleigh-Powerspektrum für den Umlauf 411.	106
5.18	Konfidenzintervalle für kombinierte Energieserien mit dickem Filter	107
5.19	Konfidenzintervalle für kombinierte Energieserien mit mittlerem Filter	108
5.20	Konfidenzintervalle und Zufallswahrscheinlichkeiten aller Beobachtungen für den Rayleigh-Test	109

Tabellenverzeichnis

1.1	Naturkonstanten	3
1.2	Verwendete Einheitenpräfixe und deren Wertigkeit	3
3.1	Sammlung von Beobachtungen des Krebsnebels	18
3.2	Zusammenfassung der Relationen der Spektral- und Photonenindizes.	25
3.3	Parameter des Elektronenspektrums	46
3.4	Skalierungsfaktoren der Cross-Kalibration	50
5.1	Ereigniszahlen der XMM-Newton-Beobachtungen	78
5.2	Beispiel der Xspec-Auswertung des Krebspektrums des Umlaufs 411 von XMM-Newton	83
5.3	Parameter für simuliertes Krebspektrum	104
B.1	Konfidenzintervalle für die Methode der kleinsten Quadrate	127

Literaturverzeichnis

- ABDO, A. A. (FERMI COLLABORATION), *et al.* 2009. Measurement of the Cosmic Ray $e^+ + e^-$ Spectrum from 20GeV to 1TeV with the Fermi Large Area Telescope. *Physical Review Letters*, **102**(18), 181101–+.
- ACHTERBERG, A., GALLANT, Y. A., KIRK, J. G., & GUTHMANN, A. W. 2001. Particle acceleration by ultrarelativistic shocks: theory and simulations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **328**(Dec.), 393–408.
- ADRIANI, O. (PAMELA COLLABORATION), *et al.* 2009. An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100GeV. *Nature*, **458**(Apr.), 607–609.
- AHARONIAN, F. A. 2004. *Very high energy cosmic gamma radiation : a crucial window on the extreme Universe*. World Scientific.
- AHARONIAN, F. A., & BOGOVALOV, S. V. 2003. Exploring physics of rotation powered pulsars with sub-10 GeV imaging atmospheric Cherenkov telescopes. *New Astronomy*, **8**(Feb.), 85–103.
- AHARONIAN, F. (HEGRA COLLABORATION), *et al.* 2004. The Crab Nebula and Pulsar between 500 GeV and 80 TeV: Observations with the HEGRA Stereoscopic Air Cerenkov Telescopes. *Astrophys. J.*, **614**(Oct.), 897–913.
- AHARONIAN, F. (H.E.S.S. COLLABORATION), *et al.* 2006. Observations of the Crab nebula with HESS. *Astron. Astrophys.*, **457**(Oct.), 899–915.
- AHARONIAN, F. (H.E.S.S. COLLABORATION), *et al.* 2008. Energy Spectrum of Cosmic-Ray Electrons at TeV Energies. *Physical Review Letters*, **101**(26), 261104–+.
- AHARONIAN, F. (H.E.S.S. COLLABORATION), *et al.* 2009. Probing the ATIC peak in the cosmic-ray electron spectrum with H.E.S.S. *Astron. Astrophys.*, **508**(Dec.), 561–564.
- AHLERS, M., GIES, H., JAECKEL, J., REDONDO, J., & RINGWALD, A. 2007. Light from the hidden sector: Experimental signatures of paraphotons. *Phys. Rev. D*, **76**(11), 115005–+.
- AHLERS, M., JAECKEL, J., REDONDO, J., & RINGWALD, A. 2008. Probing hidden sector photons through the Higgs window. *Phys. Rev. D*, **78**(7), 075005–+.

- ALBERT, J. (MAGIC COLLABORATION), *et al.* 2008. VHE γ -Ray Observation of the Crab Nebula and its Pulsar with the MAGIC Telescope. *Astrophys. J.*, **674**(Feb.), 1037–1055.
- AMSLER, C. (PARTICLE DATA GROUP), *et al.* 2008. Review of Particle Physics. *Physics Letters B*, **667**(Sept.), 1–6.
- ARNAUD, K. A. 1996. XSPEC: The First Ten Years. *Pages 17–+ of: G. H. JACOBY & J. BARNES (ed), Astronomical Data Analysis Software and Systems V.* Astronomical Society of the Pacific Conference Series, vol. 101.
- ARNAUD, K. A., DORMAN, B., & GORDON, C. 2009. *Xspec: An X-Ray Spectral Fitting Package, User's Guide for version 12.5.1.* HEASARC, Astrophysics Science Division, NASA/GSFC NASA/GSFC XMM-Newton Guest Observer Facility. <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xanadu/xspec/manual/manual.html>.
- ARONS, J. 1996. Pulsars as gamma ray sources. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **120**(Nov.), C49+.
- ARONS, J. 2004. Theory of pulsar winds. *Advances in Space Research*, **33**, 466–474.
- ATOYAN, A. M. 1999. Radio spectrum of the Crab nebula as an evidence for fast initial spin of its pulsar. *Astron. Astrophys.*, **346**(June), L49–L52.
- ATOYAN, A. M., & AHARONIAN, F. A. 1996. On the mechanisms of gamma radiation in the Crab Nebula. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **278**(Jan.), 525–541.
- ATTIÉ, D. (INTEGRAL COLLABORATION), *et al.* 2003. INTEGRAL/SPI ground calibration. *Astron. Astrophys.*, **411**(Nov.), L71–L79.
- ATWOOD, W. B. (FERMI COLLABORATION), *et al.* 2009. The Large Area Telescope on the Fermi Gamma-Ray Space Telescope Mission. *Astrophys. J.*, **697**(June), 1071–1102.
- BAADE, W., & ZWICKY, F. 1934. Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays. *Physical Review*, **46**(July), 76–77.
- BAARS, J. W. M. 1972. The Decrease of Flux Density of Cassiopeia A and the Absolute Spectra of Cassiopeia A, Cygnus A and Taurus A. *Astron. Astrophys.*, **17**(Mar.), 172–+.
- BALLARD, K. R., & HEAVENS, A. F. 1992. Shock acceleration and steep-spectrum synchrotron sources. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **259**(Nov.), 89–94.
- BANDIERA, R., NERI, R., & CESARONI, R. 2002. The Crab Nebula at 1.3 mm. Evidence for a new synchrotron component. *Astron. Astrophys.*, **386**(May), 1044–1054.

- BEILICKE, M. 2001. *Suche nach Zeit-Periodizitäten im Röntgen Doppelsternsystem Hercules X-1 mit dem System der HEGRA-Cherenkov-Teleskope*. Diplomarbeit, Universität Hamburg.
- BLASONE, M., & PALMER, J. S. 2004. Mixing and oscillations of neutral particles in quantum field theory. *Phys. Rev. D*, **69**(5), 057301–+.
- BLASONE, M., & VITIELLO, G. 1995. Quantum Field Theory of Fermion Mixing. *Annals of Physics*, **244**(Dec.), 283–311.
- BLASONE, M., CAPOLUPO, A., ROMEI, O., & VITIELLO, G. 2001. Quantum field theory of boson mixing. *Phys. Rev. D*, **63**(12), 125015–+.
- BLUMENTHAL, G. R., & GOULD, R. J. 1970. Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases. *Reviews of Modern Physics*, **42**, 237–271.
- BLUMENTHAL, G. R., FABER, S. M., PRIMACK, J. R., & REES, M. J. 1984. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature*, **311**(Oct.), 517–525.
- BRANDT, J. C., & WILLIAMSON, R. A. 1979. The 1054 Supernova and Native American Rock Art. *Journal for the History of Astronomy Supplement*, **10**, 1–+.
- BRONSTEIN, I. N., & SEMENDJAJEW, K. A. 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Moskau, Leipzig, Thun und Frankfurt/Main: Verlag Nauka, B.G. Teubner, Verlag Harri Deutsch.
- CHANG, J. (ATIC COLLABORATION), *et al.* 2008. An excess of cosmic ray electrons at energies of 300-800GeV. *Nature*, **456**(Nov.), 362–365.
- COLLINS, II, G. W., CLASPY, W. P., & MARTIN, J. C. 1999. A Reinterpretation of Historical References to the Supernova of A.D. 1054. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **111**(July), 871–880.
- COMELLA, J. M., CRAFT, H. D., LOVELACE, R. V. E., & SUTTON, J. M. 1969. Crab Nebula Pulsar NP 0532. *Nature*, **221**(Feb.), 453–454.
- DAVIDSON, K. 1987. Spectrophotometry of the Crab Nebula as a whole. *Astron. J.*, **94**(Oct.), 964–971.
- DAVIDSON, K., & FESEN, R. A. 1985. Recent developments concerning the Crab Nebula. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **23**, 119–146.
- DE JAGER, O. C., RAUBENHEIMER, B. C., & SWANEPOEL, J. W. H. 1989. A powerful test for weak periodic signals with unknown light curve shape in sparse data. *Astron. Astrophys.*, **221**(Aug.), 180–190.

- DUYVENDAK, J. J. L. 1942. Further Data Bearing on the Identification of the Crab Nebula with the Supernova of 1054 A.D. Part I. The Ancient Oriental Chronicles. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **54**(Apr.), 91–94.
- FERMI, E. 1949. On the Origin of the Cosmic Radiation. *Physical Review*, **75**(Apr.), 1169–1174.
- FERMI COLLABORATION. 2009. Spectral Analysis of the Crab Pulsar and Nebula with the Fermi Large Area Telescope. *ArXiv e-prints*, Sept.
- FERMI-HOMEPAGE. 2010. <http://fermi.gsfc.nasa.gov/>.
- FRANCISCO MACIAS-PEREZ, J., MAYET, F., AUMONT, J., & DESERT, F. X. 2008. Global spectral energy distribution of the Crab Nebula in the prospect of the Planck satellite polarisation calibration. *ArXiv e-prints*, Feb.
- FUJII, K., HABE, C., & YABUKI, T. 1999. Note on the field theory of neutrino mixing. *Phys. Rev. D*, **59**(11), 113003–+.
- GABRIEL, C., IBARRA IBAIBARRIAGA, A., & HOAR, J. 2005 (Aug.). SciSim: the XMM-Newton x-ray observatory data simulator. *Pages 469–478 of: O. H. W. SIEGMUND (ed), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 5898.
- GEHRZ, R. D., TRURAN, J. W., WILLIAMS, R. E., & STARRFIELD, S. 1998. Nucleosynthesis in Classical Novae and Its Contribution to the Interstellar Medium. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **110**(Jan.), 3–26.
- GIUNTI, C., & KIM, C. W. 1998. Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach. *Phys. Rev. D*, **58**(1), 017301–+.
- GIUNTI, C., KIM, C. W., & LEE, U. W. 1992. Remarks on the weak states of neutrinos. *Phys. Rev. D*, **45**(Apr.), 2414–2420.
- GOLDHABER, A. S., & NIETO, M. M. 1971. Terrestrial and Extraterrestrial Limits on The Photon Mass. *Reviews of Modern Physics*, **43**(July), 277–296.
- GONDOIN, P., ASCHENBACH, B. R., BEIJERSBERGEN, M. W., EGGER, R., JANSEN, F. A., STOCKMAN, Y., & TOCK, J.-P. 1998a (Nov.). Calibration of the first XMM flight mirror module: I. Image quality. *Pages 278–289 of: R. B. HOOVER & A. B. WALKER (ed), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 3444.
- GONDOIN, P., ASCHENBACH, B. R., BEIJERSBERGEN, M. W., EGGER, R., JANSEN, F. A., STOCKMAN, Y., & TOCK, J.-P. 1998b (Nov.). Calibration of the first XMM flight mirror module: II. Effective area. *Pages 290–301 of: R. B. HOOVER & A. B. WALKER (ed), Society*

- of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 3444.
- GREEN, D. A., TUFFS, R. J., & POPESCU, C. C. 2004. Far-infrared and submillimetre observations of the Crab nebula. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **355**(Dec.), 1315–1326.
- HABERL, F., & GRUPE, D. 2008. *XMM-Newton Data Analysis Cookbook*. Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik. <http://www.mpe.mpg.de/xray/wave/xmm/cookbook/index.php>.
- HEASARC-HOMEPAGE. 2010. http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/objects/heapow/archive/compact_objects/crab_composite.html.
- HEAVENS, A. F., & DRURY, L. O. 1988. Relativistic shocks and particle acceleration. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **235**(Dec.), 997–1009.
- HENNESSY, G. S., O'CONNELL, R. W., CHENG, K. P., BOHLIN, R. C., COLLINS, N. R., GULL, T. R., HINTZEN, P., ISENSEE, J. E., LANDSMAN, W. B., ROBERTS, M. S., SMITH, A. M., SMITH, E. P., & STECHER, T. P. 1992. Ultraviolet Imaging Telescope observations of the Crab Nebula. *Astrophys. J., Lett.*, **395**(Aug.), L13–L16.
- H.E.S.S.-HOMEPAGE. 2010. <http://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/HESS/HESS.shtml>.
- HESTER, J. J. 2008. The Crab Nebula: An Astrophysical Chimera. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **46**(Sept.), 127–155.
- HESTER, J. J., GRAHAM, J. R., BEICHMAN, C. A., & GAUTIER, III, T. N. 1990. Infrared and optical imagery of the Crab Nebula. *Astrophys. J.*, **357**(July), 539–547.
- HILLAS, A. M., AKERLOF, C. W., *et al.* 1998. The Spectrum of TeV Gamma Rays from the Crab Nebula. *Astrophys. J.*, **503**(Aug.), 744–+.
- HILLEBRANDT, W., & MÜLLER, E. 2005. *Hydrodynamik: Grundlagen und Numerische Verfahren*. Vorlesung an der TU München, Sommersemester 2005.
- HINTON, J. 2009. Ground-based gamma-ray astronomy with Cherenkov telescopes. *New Journal of Physics*, **11**(5), 055005–+.
- HO, P.-Y., PAAR, F. W., & PARSONS, P. W. 1972. The Chinese guest star of A.D. 1054 and the Crab Nebula. *Vistas in Astronomy*, **13**, 1–13.
- HOBSON, M. P., EFSTATHIOU, G. P., & LASENBY, A. N. 2006. *General Relativity*.
- HOLDOM, B. 1986a. Searching for ϵ charges and a new U(1). *Physics Letters B*, **178**(Sept.), 65–70.
- HOLDOM, B. 1986b. Two U(1)'s and ϵ charge shifts. *Physics Letters B*, **166**(Jan.), 196–198.

- HORNS, D., GÖBEL, F., MAZIN, D., WAGNER, R., & WAGNER, S. 2005. Concept of a Global Network of Cherenkov Telescopes (GNCT) and first joint observations of H.E.S.S. and MAGIC. *Pages 141–146 of: DEGRANGE, B., & FONTAINE, G. (eds), Towards a Network of Atmospheric Cherenkov Detectors VII.*
- HORNS, D., FOR THE H.E.S.S. COLLABORATION, *et al.* 2007. H.E.S.S.: Status and future plan. *Journal of Physics Conference Series*, **60**(Mar.), 119–122.
- HORNS, D. (HEGRA COLLABORATION), *et al.* 2003 (July). Studies of the Crab Nebula Based upon 400 Hours of Observations with the HEGRA System of Cherenkov Telescopes. *Pages 2373–+ of: International Cosmic Ray Conference. International Cosmic Ray Conference, vol. 4.*
- ITZYKSON, C., ZUBER, J.-B., & HIGGS, P. 1984. Quantum Field Theory. *Physics Today*, **37**, 80–+.
- JACKSON, J. D. 2006. *Klassische Elektrodynamik, 4. deutsche Auflage.* Walter de Gruyter.
- JAECKEL, J., & RINGWALD, A. 2010. The Low-Energy Frontier of Particle Physics. *ArXiv e-prints*, Feb.
- JANSEN, F., LUMB, D., ALTIERI, B., CLAVEL, J., EHLE, M., ERD, C., GABRIEL, C., GUAINAZZI, M., GONDOIN, P., MUCH, R., MUNOZ, R., SANTOS, M., SCHARTEL, N., TEXIER, D., & VACANTI, G. 2001. XMM-Newton observatory. I. The spacecraft and operations. *Astron. Astrophys.*, **365**(Jan.), L1–L6.
- JI, C.-R., & MISHCHENKO, Y. 2002. General theory of quantum field mixing. *Phys. Rev. D*, **65**(9), 096015–+.
- JOURDAIN, E., & ROQUES, J. P. 2008. 5 years of survey on the Crab Nebula with SPI/INTEGRAL. *In: Proceedings of the 7th INTEGRAL Workshop.*
- JOURDAIN, E., GÖTZ, D., WESTERGAARD, N. J., NATALUCCI, L., & ROQUES, J. P. 2008. INTEGRAL Cross-calibration Status: Crab observations between 3 keV and 1 MeV. *In: Proceedings of the 7th INTEGRAL Workshop.*
- KENNEL, C. F., & CORONITI, F. V. 1984. Magnetohydrodynamic model of Crab nebula radiation. *Astrophys. J.*, **283**(Aug.), 710–730.
- KIRK, J. G., & DUFFY, P. 1999. TOPICAL REVIEW: Particle acceleration and relativistic shocks. *Journal of Physics G Nuclear Physics*, **25**(Aug.), 163–+.
- KIRSCH, M. G., BRIEL, U. G., *et al.* 2005 (Aug.). Crab: the standard x-ray candle with all (modern) x-ray satellites. *Pages 22–33 of: O. H. W. SIEGMUND (ed), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 5898.*

- KIRSCH, M. G. F., SCHÖNHERR, G., KENDZIORRA, E., FREYBERG, M. J., MARTIN, M., WILMS, J., MUKERJEE, K., BREITFELLNER, M. G., SMITH, M. J. S., & STAUBERT, R. 2006. The XMM-Newton view of the Crab. *Astron. Astrophys.*, **453**(July), 173–180.
- KIRSHNER, R. P. 1974. Spectrophotometry of the Crab Nebula. *Astrophys. J.*, **194**(Dec.), 323–328.
- KITTEL, C. 1976. *Introduction to solid state physics*. Wiley.
- KUIPER, L., HERMSEN, W., CUSUMANO, G., DIEHL, R., SCHÖNFELDER, V., STRONG, A., BENNETT, K., & MCCONNELL, M. L. 2001. The Crab pulsar in the 0.75-30 MeV range as seen by CGRO COMPTEL. A coherent high-energy picture from soft X-rays up to high-energy gamma-rays. *Astron. Astrophys.*, **378**(Nov.), 918–935.
- KUNDT, W., & KROTSCHKE, E. 1980. The Crab nebula - A model. *Astron. Astrophys.*, **83**(Mar.), 1–21.
- LIEU, R., QUENBY, J. J., & AXFORD, W. I. 1989. Synchrotron radiation treated by the Weizsaecker-Williams method of virtual quanta. *Astron. Astrophys.*, **208**(Jan.), 351–356.
- LING, J. C., & WHEATON, W. A. 2003. Gamma-Ray Spectra and Variability of the Crab Nebula Emission Observed by BATSE. *Astrophys. J.*, **598**(Nov.), 334–348.
- LONGAIR, M. S. 1992. *High energy astrophysics. Vol.1: Particles, photons and their detection*. Cambridge University Press.
- LONGAIR, M. S. 1994. *High energy astrophysics. Vol.2: Stars, the galaxy and the interstellar medium*. Cambridge University Press.
- MANOLAKOU, K., HORNS, D., & KIRK, J. G. 2007. Spectral evolution of non-thermal electron distributions in intense radiation fields. *Astron. Astrophys.*, **474**(Nov.), 689–700.
- MARSDEN, P. L., GILLET, F. C., JENNINGS, R. E., EMERSON, J. P., DE JONG, T., & OLNON, F. M. 1984. Far-infrared observations of the Crab nebula. *Astrophys. J., Lett.*, **278**(Mar.), L29–L32.
- MAYALL, N. U., & OORT, J. H. 1942. Further Data Bearing on the Identification of the Crab Nebula with the Supernova of 1054 A.D. Part II. The Astronomical Aspects. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **54**(Apr.), 95–104.
- MEYER, M., ZECHLIN, H.-S., & HORNS, D. 2009 (Dec.). Cross Calibration of Imaging Air Cherenkov Telescopes with Fermi. In: *Fermi Symposium 2009 Conference Proceedings*. eConf Proceedings C091122. ArXiv e-prints: 0912.3754.
- MEYER, M., HORNS, D., & ZECHLIN, H. S. 2010. The Crab Nebula as a standard Candle in very high Energy Astrophysics, submitted. *Astron. Astrophys.*.

- MEZGER, P. G., TUFFS, R. J., CHINI, R., KREYSA, E., & GEMUEND, H.-P. 1986. Maps of Cassiopeia A and the Crab Nebula at lambda 1.2 MM. *Astron. Astrophys.*, **167**(Oct.), 145–150.
- MIRIZZI, A., REDONDO, J., & SIGL, G. 2009. Microwave background constraints on mixing of photons with hidden photons. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, **3**(Mar.), 26–+.
- NUSSINOV, S. 1976. Solar neutrinos and neutrino mixing. *Physics Letters B*, **63**(July), 201–203.
- OKUN, L. B. 1982. The limits of electrodynamics - Paraphotons. *Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki*, **83**(Sept.), 892–898.
- PERELOMOV, A. M. 1986. *Generalized coherent states and their applications*. Springer.
- PESKIN, M. E., & SCHROEDER, D. V. 1995. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press.
- POPOV, V. 1999. On the experimental search for photon mixing. *Turkish Journal of Physics*, **23**(May), 943–950.
- POVH, B., RITH, K., SCHOLZ, C., & ZETSCHKE, F. 2002. *Teilchen und Kerne. English. Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts*.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., & FLANNERY, B. P. 1992. *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- PRIVATE FOTOGRAFIE. 2009. <http://www.flickr.com/photos/30041070@N00/with/3498125095/>.
- REDONDO, J. 2008a. Can the PVLAS particle be compatible with the astrophysical bounds? *ArXiv e-prints: 0807.4329*, July.
- REDONDO, J. 2008b. Helioscope bounds on hidden sector photons. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, **7**(July), 8–+.
- REES, M. J., & GUNN, J. E. 1974. The origin of the magnetic field and relativistic particles in the Crab Nebula. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **167**(Apr.), 1–12.
- SCARGLE, J. D. 1969. Activity in the Crab Nebula. *Astrophys. J.*, **156**(May), 401–+.
- SNOWDEN, S., SHAFER, R., SMITH, R., VALENCIC, L., PERRY, B., & ARIDA, M. 2009. *The XMM-Newton ABC Guide: An Introduction to XMM-Newton Data Analysis*. NASA/GSFC XMM-Newton Guest Observer Facility. <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xmm/abc/>.

- STÄELIN, D. H., & REIFENSTEIN, III, E. C. 1968. Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula. *Science*, **162**(Dec.), 1481–1483.
- STANFORD, J. L., VARDEMAN, S. B., & THOMPSON, W. J. 1995. Statistical Methods for Physical Science. (Methods of Experimental Physics, Vol. 28.). *American Journal of Physics*, **63**(Sept.), 861–862.
- STERNBERG, S. 1995. *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press.
- STRÜDER, L. (XMM-NEWTON COLLABORATION), *et al.* 2001. The European Photon Imaging Camera on XMM-Newton: The pn-CCD camera. *Astron. Astrophys.*, **365**(Jan.), L18–L26.
- TEMIM, T., GEHRZ, R. D., WOODWARD, C. E., ROELLIG, T. L., SMITH, N., RUDNICK, L., POLOMSKI, E. F., DAVIDSON, K., YUEN, L., & ONAKA, T. 2006. Spitzer Space Telescope Infrared Imaging and Spectroscopy of the Crab Nebula. *Astron. J.*, **132**(Oct.), 1610–1623.
- TOOR, A., & SEWARD, F. D. 1974. The Crab Nebula as a calibration source for X-ray astronomy. *Astron. J.*, **79**(Oct.), 995–999.
- TRIMBLE, V. 1968. Motions and Structure of the Filamentary Envelope of the Crab Nebula. *Astron. J.*, **73**(Sept.), 535–+.
- UNSÖLD, A., & BASCHEK, B. 2002. *Der neue Kosmos. Einführung in die Astronomie und Astrophysik*.
- VERON-CETTY, M. P., & WOLTJER, L. 1993. Spectrophotometry of the continuum in the Crab Nebula. *Astron. Astrophys.*, **270**(Mar.), 370–378.
- VINCENT, P. 2005. H.E.S.S. Phase II. *Pages 163–+ of: International Cosmic Ray Conference*. International Cosmic Ray Conference, vol. 5.
- VLA-HOMEPAGE. 2010. http://images.nrao.edu/images/CrabNeb_RGB2001_med.jpg.
- VOLPI, D., DEL ZANNA, L., AMATO, E., & BUCCIANINI, N. 2008. Non-thermal emission from relativistic MHD simulations of pulsar wind nebulae: from synchrotron to inverse Compton. *Astron. Astrophys.*, **485**(July), 337–349.
- WEEKES, T. C., CAWLEY, M. F., FEGAN, D. J., GIBBS, K. G., HILLAS, A. M., KOWK, P. W., LAMB, R. C., LEWIS, D. A., MACOMB, D., PORTER, N. A., REYNOLDS, P. T., & VACANTI, G. 1989. Observation of TeV gamma rays from the Crab nebula using the atmospheric Cerenkov imaging technique. *Astrophys. J.*, **342**(July), 379–395.
- WEILER, K. W., & PANAGIA, N. 1978. Are Crab-type Supernova Remnants (Plerions) Short-lived? *Astron. Astrophys.*, **70**(Nov.), 419–+.

- WEISSKOPF, M. C., HESTER, J. J., TENNANT, A. F., ELSNER, R. F., SCHULZ, N. S., MARSHALL, H. L., KAROVSKA, M., NICHOLS, J. S., SWARTZ, D. A., KOŁODZIEJCZAK, J. J., & O'DELL, S. L. 2000. Discovery of Spatial and Spectral Structure in the X-Ray Emission from the Crab Nebula. *Astrophys. J., Lett.*, **536**(June), L81–L84.
- WESTFOLD, K. C. 1959. The Polarization of Synchrotron Radiation. *Astrophys. J.*, **130**(July), 241–+.
- WOLTER, H. 1952. Spiegelsysteme streifenden Einfalls als abbildende Optiken für Röntgenstrahlen. *Annalen der Physik*, **445**, 94–114.
- XMM-NEWTON-HOMEPAGE. 2010. <http://xmm.esac.esa.int/>.
- ZECHLIN, H.-S. 2009. *Einschränkung der Mischungsparameter verborgener Photonen durch Analyse sehr hochenergetischer Gamma-Spektren des Krebsnebels*. Diplomarbeit, Universität Hamburg.
- ZECHLIN, H.-S., HORNS, D., & REDONDO, J. 2008 (Dec.). New Constraints on Hidden Photons using Very High Energy Gamma-Rays from the Crab Nebula. *Pages 727–730 of: F. A. AHARONIAN, W. HOFMANN, & F. RIEGER (ed), American Institute of Physics Conference Series*. American Institute of Physics Conference Series, vol. 1085.

Danksagung

„Und Krebse können sowas?“

Eine befreundete Theologin

Zu allererst möchte ich in besonderem Maße PROF. DR. DIETER HORNS dafür danken, dass er mir die Bearbeitung der in dieser Arbeit behandelten spannenden Themenkomplexe ermöglicht hat. Durch seinen unablässigen Einsatz ergab sich mir die Chance an einem wissenschaftlichen Aufsatz mitzuarbeiten, sowie meine Ergebnisse auf dem Fermi Symposium 2009 in Washington, D.C., auf dem H.E.S.S. Meeting 2009 in Erlangen und in Zeuthen beim Treffen der Astroteilchenphysik in Deutschland 2010 vorzustellen.

Mein weiterer herzlicher Dank geht an PROF. DR. GÜNTER SIGL, der sich dazu bereit erklärt hat, meine Arbeit als Zweitgutachter zu korrigieren.

Zu besonderem Dank bin ich HANNES-SEBASTIAN ZECHLIN verpflichtet. Seine Arbeit hat mich letztendlich überzeugt meine Diplomarbeit in der Astroteilchengruppe zu schreiben. Sein Engagement, seine Ratschläge und nicht zu vergessen seine Korrekturen haben mir über das gesamte Jahr hinweg sehr geholfen.

Für weitere sehr hilfreiche Korrekturen bedanke ich mich außerdem bei DR. MARTIN RAUE.

Für die meist fröhliche und produktive Arbeitsatmosphäre, die stets offenen Ohren und netten Gruppenabende danke ich meinen Büronachbarn, MAX ANTON KASTENDIECK, MILTON VIRGILIO FERNANDES und ANDREAS MAUERER sowie natürlich der gesamten Arbeitsgruppe von Prof. Horns.

Ein Dankeschön geht außerdem an den technischen Support von RAINER PETER FELLER und ROHLAND MOHRMANN und zudem an das Entwicklerteam um MAUREEN YOST.

Meiner Familie, insbesondere meinen Eltern JOHANNA MEYER-LENZ und WOLFGANG MEYER, danke ich für die Unterstützung während meines gesamten Studiums, die stets beruhigenden Worte, wenn man sich doch zu Panikattacken hochschaukeln ließ und die Korrekturen für diese Arbeit. Für das Gegenlesen meines englischen Abstracts danke ich ROBERTO SIBBEL.

Bei meiner Partnerin TATJANA PFENDT bedanke ich mich für die seelische Unterstützung, vor allem auf der Zielgeraden, die vielen Korrekturen und unser Durchhaltevermögen. Und natürlich dafür, dass sie mich mit der Person bekannt gemacht hat, von der obiger an Genialität grenzender Ausspruch stammt.

„And now for something completely different.“

Monty Python

Erklärung

Hiermit versichere ich, Manuel Meyer, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine weiteren Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe. Mit einer universitätsinternen Veröffentlichung bin ich einverstanden.

Hamburg, den

Manuel Meyer