

Skript zur Vorlesung

Experimentalphysik für Studierende der
Biologie, Medizin und Zahnmedizin

H. Salehi

SS 2008

Inhaltsverzeichnis

1. KINEMATIK.....	1
1.1 Gleichförmige lineare Bewegung.....	1
1.2 Ungleichförmige Bewegung.....	3
1.3 Gleichförmige Kreisbewegung.....	5
1.4 Überlagerung von Bewegungen.....	7
1.5 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung.....	9
1.6 Bestimmung der zurückgelegten Wegstrecke bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung.....	10
1.7 Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.....	13
1.8 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit.....	14
1.9 Bremsvorgänge.....	15
1.10 Der freie Fall.....	19
2. KRAFT	20
2.1 Das erste Newtonsche Gesetz (Trägheitsprinzip).....	20
2.2 Das zweite Newtonsche Gesetz (Aktionsprinzip).....	20
2.3 Das dritte Newtonsche Gesetz (Wechselwirkungsprinzip).....	21
2.4 Verschiedene Arten von Kräften.....	22
2.5 Gravitation als Ursache der Schwerkraft.....	23
2.6 Reibungskraft.....	24
2.7 Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.....	25
2.8 Zentripetalkraft.....	27
2.9 Kraft senkrecht auf eine Fläche (Druck).....	28
2.10 Federkraft (Das Hooksche Gesetz).....	28
2.11 Gleichgewicht der Kräfte.....	29
3. ARBEIT, ENERGIE, IMPULS.....	31
3.1 Potenzielle Energie und Hubarbeit.....	31
3.2 Arbeit und schiefe Ebene.....	32
3.3 Allgemeine Definition der Arbeit.....	33
3.4 Spannarbeit.....	34
3.5 Kinetische Energie.....	36
3.6 Energieerhaltung und Energieumwandlung.....	37
3.7 Energieerhaltungssatz und Spannenergie.....	39
3.8 Impuls und Impulserhaltung.....	40
4. DREHMOMENT, GLEICHGEWICHT, ROTATION.....	43
4.1 Starre Körper.....	43
4.2 Schwerpunkt.....	43
4.3 Drehmoment.....	46
4.4 Kräftepaar.....	47
4.5 Hebel.....	48
4.6 Statisches Gleichgewicht.....	50
4.7 Gleichgewichtsarten.....	50
4.8 Rotation.....	52
4.9 Dynamisches Grundgesetz der Rotation.....	55

5. DEFORMIERBARE FESTE KÖRPER	56
5.1 Festkörper.....	56
5.2 Einseitige Dehnung, (Hooksches Gesetz).....	57
5.4 Scherung und Torsion	59
6. RUHENDE FLÜSSIGKEITEN	60
6.1 Stempeldruck	60
6.2 Schweredruck	62
6.3 Auftrieb.....	63
6.4 Manometer	64
7. RUHENDE GASE	65
8. GRENZFLÄCHENEFFEKTE	66
8.1 Oberflächenspannung	66
8.2 Kapillarität.....	67
9. STRÖMUNGEN DER FLÜSSIGKEITEN UND GASE	69
9.1 Kontinuitätsgleichung	69
9.2 Bernoulli-Gleichung.....	70
9.4 Stokes'sche Gesetz	72
9.5 Hagen-Poiseuille Gesetz.....	73
10. WÄRMELEHRE	76
10.1 Wärme und Temperatur.....	76
10.2 Temperaturmessung.....	76
10.3 Thermische Ausdehnung	77
10.4 Zustandsgleichung der idealen Gase	79
10.5 Wärmeenergie und Molekularbewegung.....	81
10.6. Wärmemenge (Kalorimetrie).....	84
10.7 Hauptsätze der Wärmelehre.....	85
10.8 Aggregatzustände	90
10.9 Phasengleichgewicht-Phasendiagramm	92
10.10 Wärmetransport	93
10.11 Wärmeleitung	94
10.12 Konvektion.....	94
10.13 Wärmestrahlung.....	95
11. DIFFUSION UND OSMOSE	96
11.1 Diffusion	96
11.2 Osmose.....	97
12. SCHWINGUNG	99
12.1 Federpendel.....	99
12.2 Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung.....	101
12.3 Kreisbewegung und harmonische Schwingung.....	102
12.4 Fadenpendel.....	103
12.5 Energiebilanz der harmonischen Schwingung	105
12.6 Gedämpfte Schwingung.....	106

12.7	Erzwungene Schwingung und Resonanz.....	108
12.8	Überlagerung von Schwingungen.....	110
13	WELLEN	113
13.1	Ausbreitung einer Welle	113
13.2	Interferenz, stehende Wellen.....	115
13.3	Schallwellen, Akustik	117
13.4	Schallfeldgrößen.....	118
13.5	Ultraschall	121
	BILDQUELLENVERZEICHNIS UND LITERATUR.....	123

1. Kinematik

1.1 Gleichförmige lineare Bewegung

Für die physikalische Beschreibung der Bewegung ist die Messung von Ort und Zeit notwendig. Die Lehre von den Bewegungen ohne Betrachtung der Kräfte bezeichnet man als Kinematik.

Einfachste Bewegungsart ist die gleichförmige lineare Bewegung. Bei dieser Bewegung besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen der zurückgelegten Strecke s und der Zeit t . Die graphische Darstellung der Strecke s in Abhängigkeit von der Zeit bezeichnet man als Weg-Zeit-Diagramm.

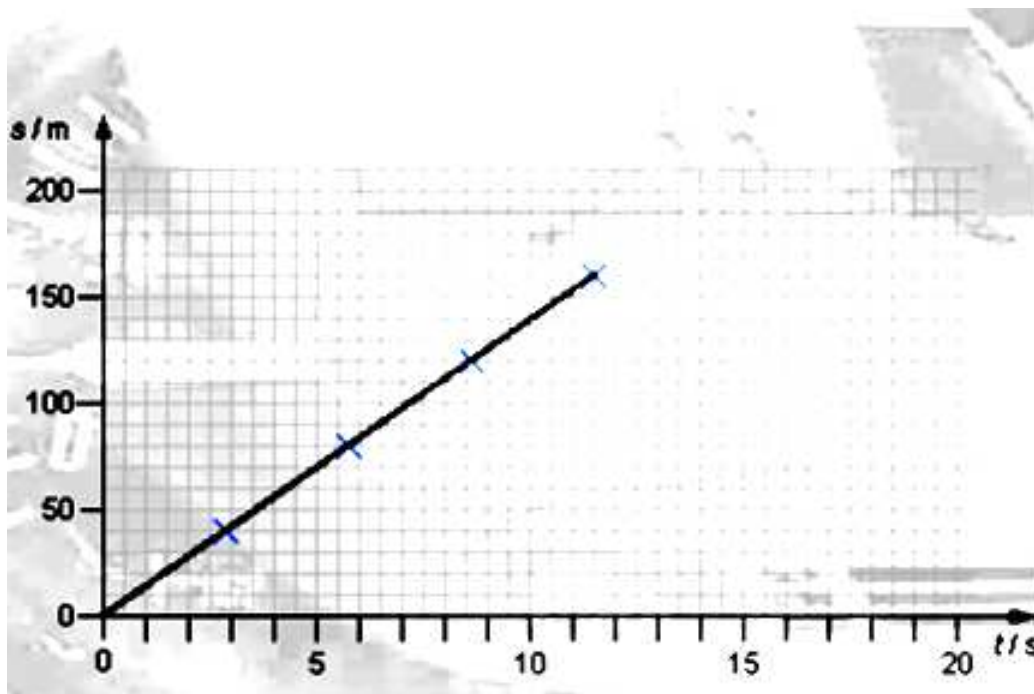


Abbildung 1: Weg-Zeit-Diagramm einer linearen Bewegung

Die Abbildung zeigt das Weg-Zeit-Diagramm einer solchen Bewegung. Der Graph ist eine Gerade.

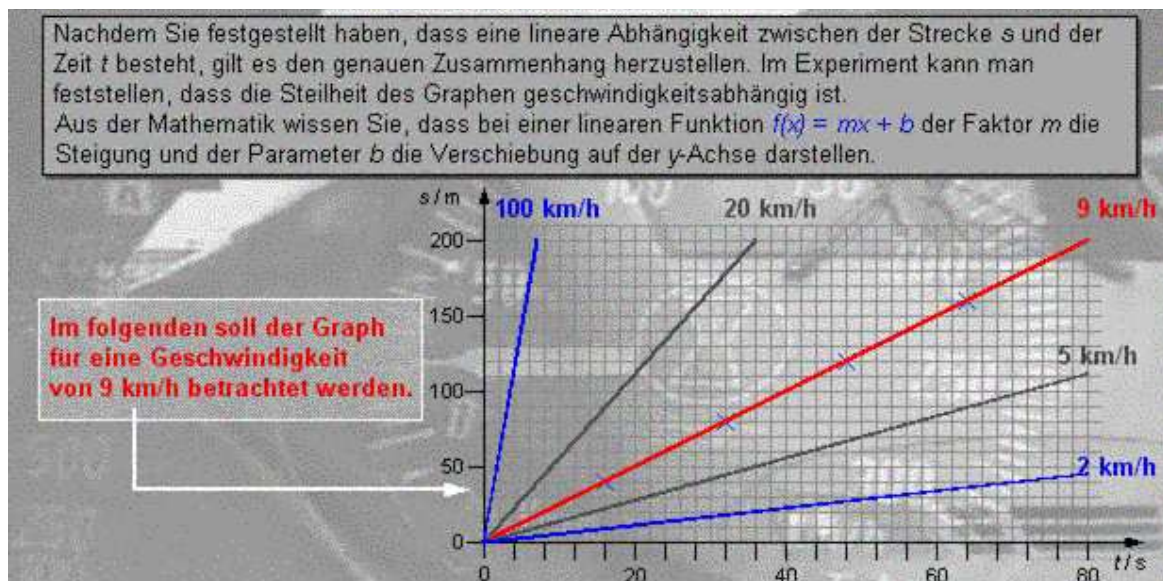


Abbildung 2: Graphen gleichförmig linearer Bewegungen

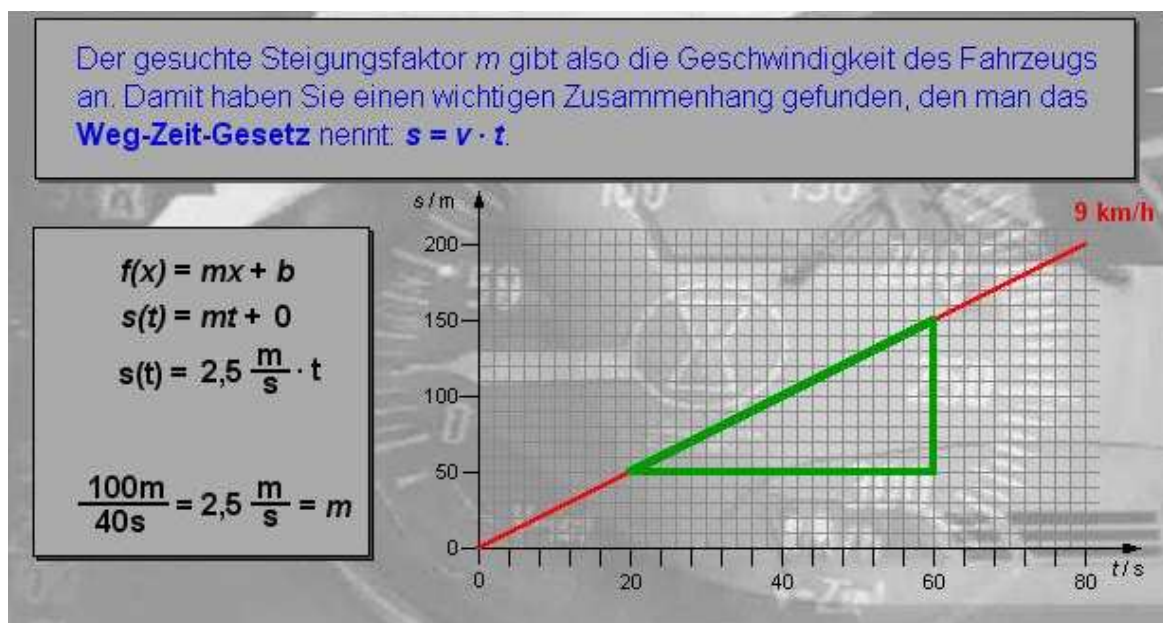


Abbildung 3: Steigungsdreieck einer gleichförmig linearen Bewegung

1.2 Ungleichförmige Bewegung

Die bisher berechnete Geschwindigkeit gilt nur für die geradlinig gleichförmige Bewegung. Die Geschwindigkeit v ist in diesem Fall konstant.

Bei Geschwindigkeitsänderung wird mit der Gleichung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

nur die **Durchschnittsgeschwindigkeit** zwischen der Zeitspanne t_1 und t_2 bestimmt. Für geradlinig ungleichförmige Bewegungen dagegen wird das Weg-Zeit-Diagramm eine gekrümmte Kurve. (Abb. 4)

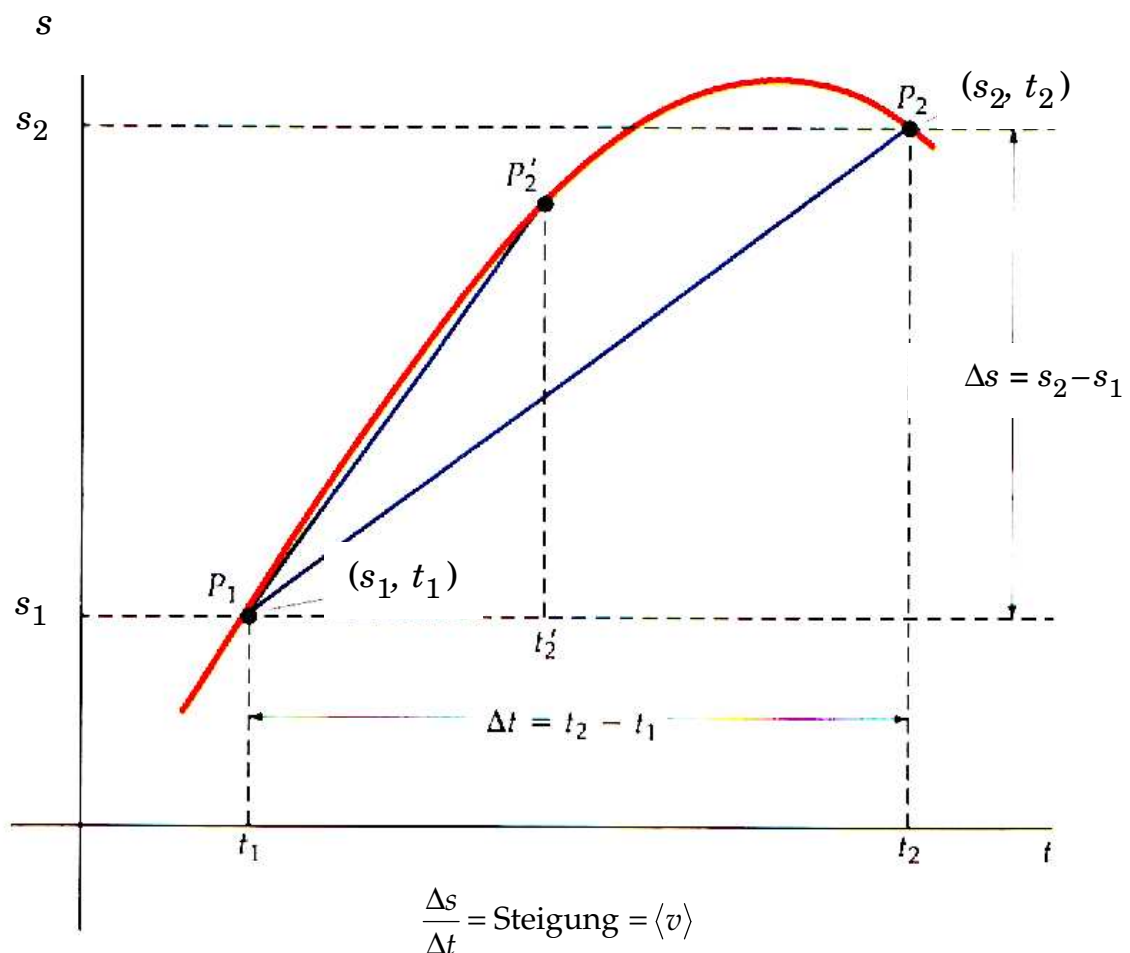


Abbildung 4: Weg-Zeit-Diagramm einer ungleichförmigen Bewegung

In diesem Weg-Zeit-Diagramm ist s der zurückgelegte Weg. Die Punkte P_1 und P_2 sind durch die Sekante verbunden. Der **Durchschnittsgeschwindigkeit** entspricht die Steigung der Sekanten $\overline{P_1 P_2}$.

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Abbildung 5 zeigt das Weg-Zeit-Diagramm einer beliebigen Bewegung. Bei Verkleinerung des Zeitintervalls $t_2 - t_1 = \Delta t$ nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit immer mehr der Steigung der Tangente an der Kurve im Punkt P_1 .

Diese Steigung ist die zeitliche Ableitung der Kurve zum Zeitpunkt t_1 . Sie entspricht der *Momentangeschwindigkeit* v .

Als **Momentangeschwindigkeit** definieren wir die Steigung der Tangenten in einem bestimmten Zeitpunkt t . Mathematisch bedeutet das: Geschwindigkeit v ist die Ableitung des Weges s nach der Zeit t oder der Differentialquotient

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

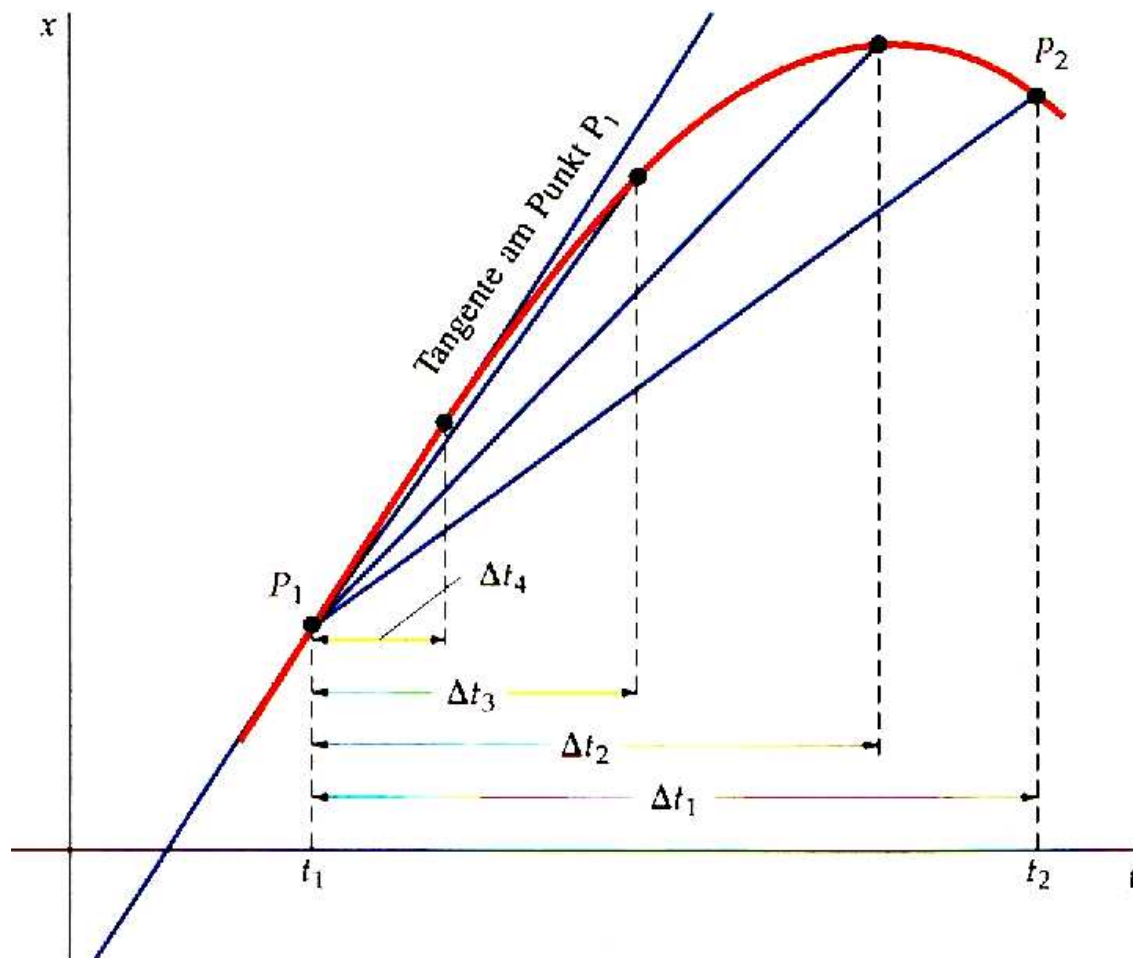


Abbildung 5: Die Steigung der Tangente entspricht der Momentangeschwindigkeit v am Punkt P_1 .

Übung:

Das Weg-Zeit-Gesetz einer Bewegung sei

$$s(t) = a \cdot t^2 - b \cdot t \quad \left| \text{mit } a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ und } b = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right.$$

Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 5\text{s}$?

1.3 Gleichförmige Kreisbewegung

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist der überstrichene Winkel $\Delta\varphi$ pro Zeiteinheit Δt konstant. Hier muss man unterscheiden zwischen **Winkelgeschwindigkeit** ω und **Bahngeschwindigkeit** v .

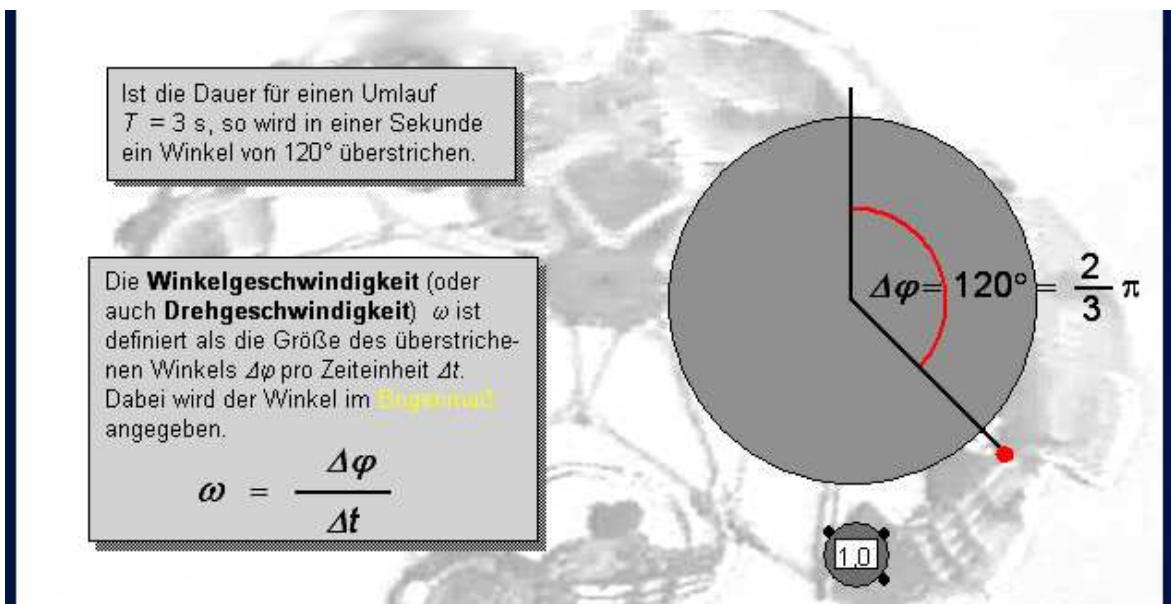


Abbildung 6: Winkelgeschwindigkeit bei gleichförmiger Kreisbewegung

Eine Kreisbewegung kann ein periodischer Vorgang sein. Mit den folgenden Größen kann ein periodischer Vorgang beschrieben werden.

T = Umlaufzeit (bei einem periodischen Vorgang auch Periode oder Schwingungsdauer genannt)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

f = Frequenz Anzahl der Umläufe pro Sekunde mit der Einheit Hertz (Hz) oder s^{-1} .

$$f = \frac{1}{T}$$

Bei periodischen Vorgängen nennt man ω auch Kreisfrequenz mit der Einheit s^{-1} . Die Kreisfrequenz ω kann man auch schreiben:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Universelle Formel

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Damit haben wir zwei Formeln, um die Winkelgeschwindigkeit ω zu errechnen. Während die eine universell einsetzbar ist, kann die zweite nur bei bekannter Umlaufdauer T benutzt werden.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Nur bei bekannter Umlaufdauer T zu gebrauchen

Abbildung 7: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit

Im vorigen Abschnitt haben wir erfahren, wie man die Winkelgeschwindigkeit errechnet. Wie aber kommt man auf die tatsächlich in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Strecke, wie bestimmt man die **Bahngeschwindigkeit**?

Hierfür benutzt man die von der linearen Bewegung bekannte Gleichung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Für die Strecke könnte man den Umfang eines Kreises mit Radius r einsetzen.

$$\Delta s = 2\pi r$$

Was ist der entsprechende Wert für Δt ?

$$\Delta t = T$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

Abbildung 8: Bahngeschwindigkeit einer gleichförmigen Kreisbewegung

1.4 Überlagerung von Bewegungen

Die Geschwindigkeit \vec{v} ist ein Vektor. Zu ihrer genauen Bestimmung sind neben Betrag und Einheit auch die Angabe der Richtung notwendig. Bei Überlagerung von Bewegungen werden deshalb die Geschwindigkeiten vektoriell addiert. Wir betrachten vier Fälle:

1. \vec{v}_1 und \vec{v}_2 sind gleichgerichtet. In diesem Fall werden die Beträge addiert. (Abb. 10)
2. \vec{v}_1 und \vec{v}_2 sind entgegengerichtet. In diesem Fall werden die Beträge subtrahiert. (Abb. 11)
3. \vec{v}_1 und \vec{v}_2 stehen senkrecht aufeinander (Abb. 9)
4. Ein allgemeiner Fall liegt vor, wenn \vec{v}_1 und \vec{v}_2 beliebige Richtungen haben. In diesem Fall können die Vektoren grafisch addiert werden, indem man den Anfang des zweiten Vektors \vec{v}_2 an die Spitze des ersten Vektors \vec{v}_1 setzt. Die resultierende Geschwindigkeit \vec{v}_R ergibt sich durch den Vektor, der den Anfang des ersten Vektors mit der Spitze des zweiten Vektors verbindet. (Abb. 12)

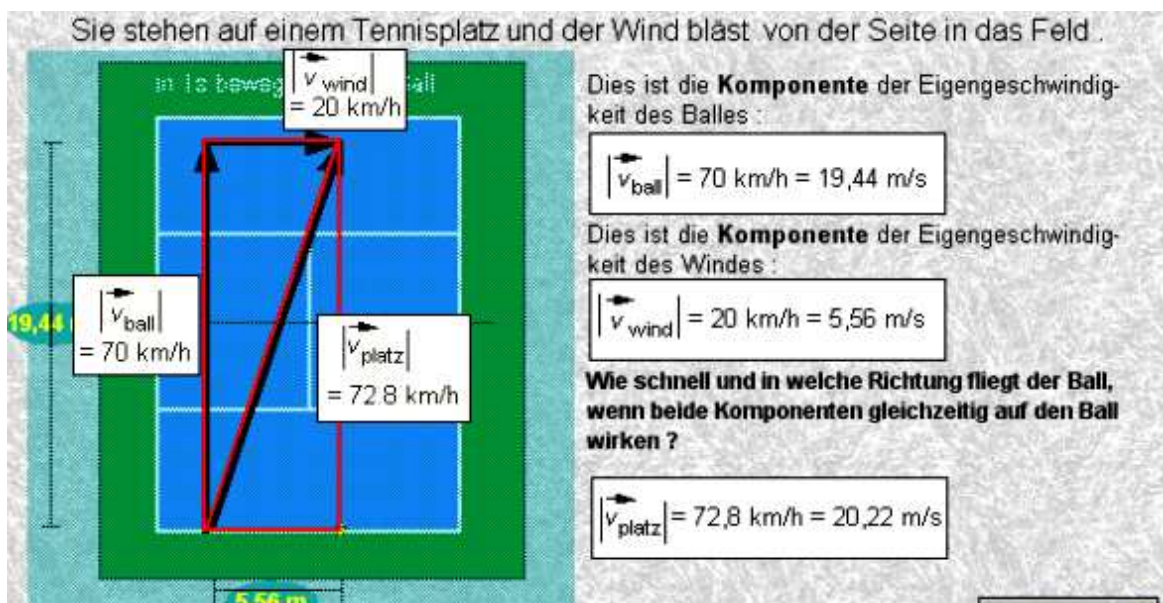


Abbildung 9: Addition zweier Geschwindigkeiten, die senkrecht aufeinander stehen

1.5 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Im Folgenden wird eine geradlinige Bewegung betrachtet. Es wird nur der Betrag der Geschwindigkeit untersucht. Ein Zug fährt aus dem Stand los. Wir betrachten, dass er langsam anfährt und immer schneller wird. Die Geschwindigkeit \vec{v} ändert sich, aber nimmt *gleichmäßig* zu, d.h. die Geschwindigkeitsänderung pro Sekunde ist gleich.

Die Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit definiert man als die Beschleunigung a mit der Einheit m / s^2 .

$$a = \text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Wenn die Beschleunigung konstant ist, nennt man die Bewegung **gleichmäßig beschleunigte** Bewegung. Man kann die Bewegung des Zuges in einem Diagramm aufzeichnen, indem man die Geschwindigkeit \vec{v} in Abhängigkeit zur Zeit aufträgt. Das Diagramm nennt man Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm.

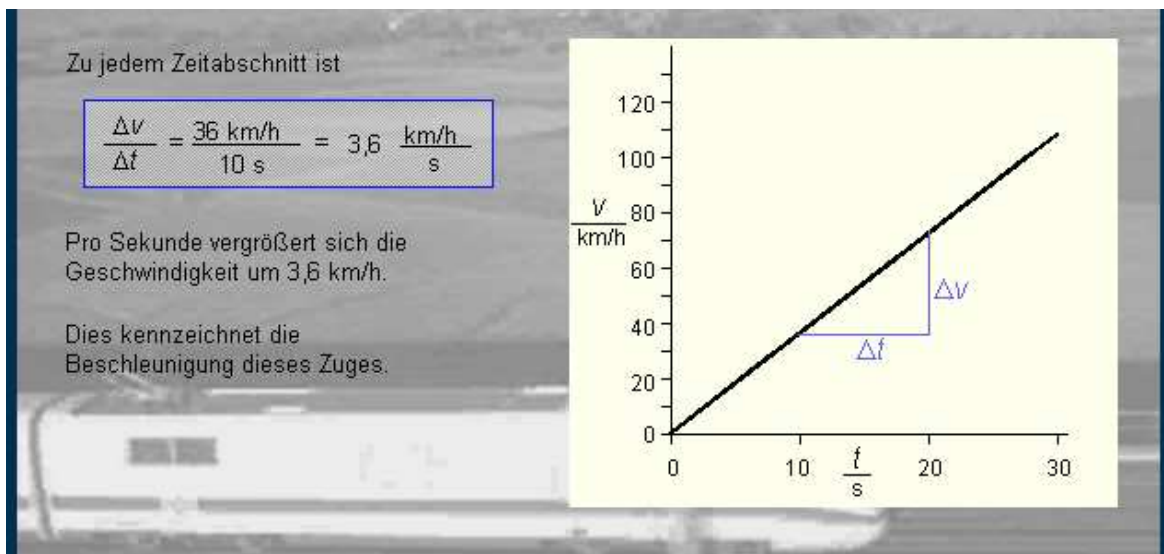


Abbildung 13: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten ist eine Gerade

In der Abbildung 13 ist zur Veranschaulichung als Einheit der Geschwindigkeit km/h angegeben. 36 km/h entspricht 10 m/s .

Die Beschleunigung ist hier $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Eine gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eine Gerade. Die Steigung $\Delta v / \Delta t$ ist in allen Zeitpunkten gleich und entspricht der konstanten Beschleunigung a . Aus $a = \Delta v / \Delta t$ kann man das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz ableiten.

Steigt die Geschwindigkeit im betrachteten Zeitabschnitt gleichmäßig, so spricht man von einer **gleichmäßig beschleunigten Bewegung**.

Um die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt zu berechnen, muss man ein wenig umformen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

nach Δv umstellen:

$$a \cdot \Delta t = \Delta v$$

Man erhält damit nach dem Weg-Zeit-Gesetz das

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = a \cdot t$

Abbildung 14: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

1.6 Bestimmung der zurückgelegten Wegstrecke bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Bei dem v, t -Diagramm unterteilen wir die t -Achse in kleine Zeitintervalle Δt . Innerhalb Δt wird die Geschwindigkeit \vec{v} als konstant angenommen und wir haben dort eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit $s = v \cdot t$ (Abbildung 15).

Innerhalb eines Zeitintervalls:
Gleichförmige Bewegung.

Für die gleichförmige Bewegung gilt:

$$s = v \cdot t$$

Beispiel: Zurückgelegte Strecke im zweiten Zeitabschnitt:

$$s_1 = v_1 \cdot \Delta t$$

Abbildung 15: Bestimmung der Wegstrecke bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Z.B. $s_1 = v_1 \cdot t_1$, $s_2 = v_2 \cdot t_2$

Kinematik

Die Flächen der Rechtecke repräsentieren also die zurückgelegten Teilstrecken s_i . Die Summe der Rechtecke $\sum_i v_i \cdot \Delta t_i$ gibt annähernd den zurückgelegten Weg an, wobei

\sum (Sigma) für Summe steht. Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ gibt die Fläche unter der Geraden $v \cdot t$ exakt den zurückgelegten Weg an.

$s = \text{Fläche} = \frac{1}{2} v \cdot t$ mit $v = a \cdot t$ ergibt:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Das ist das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

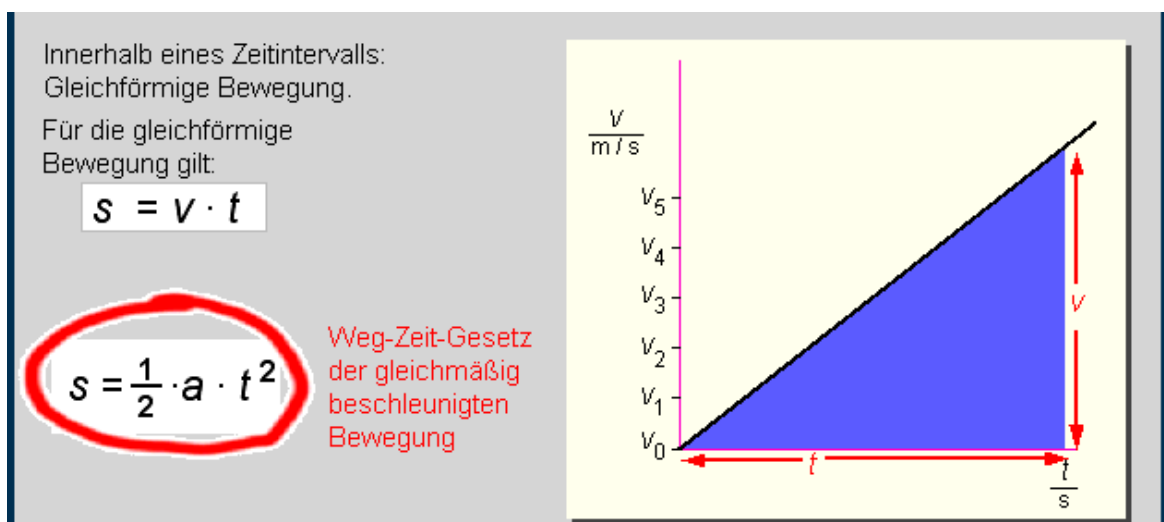


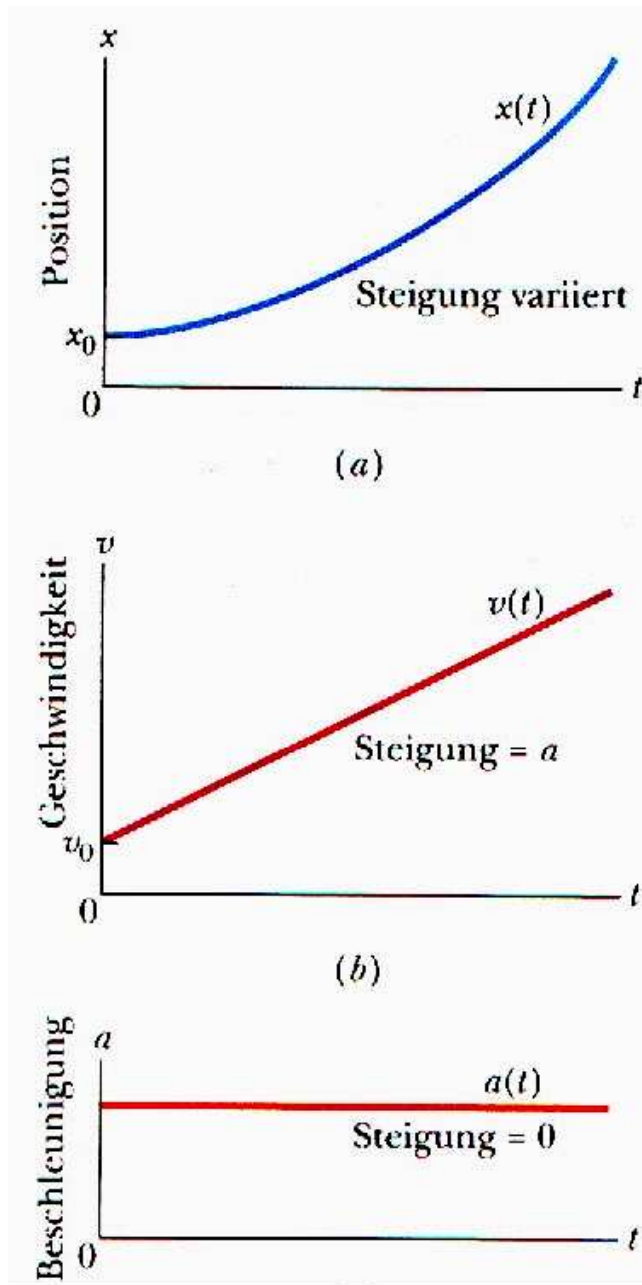
Abbildung 16: Weg-Zeit-Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Mathematisch formuliert gilt für den allgemeinen Fall:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v_i \cdot \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

Die Wegstrecke s kann also durch Integration der Geschwindigkeit v über t gewonnen werden. Die Grenzen t_1 und t_2 geben den Anfangs- und Endwert des Integrationsintervalls an. In unserem Fall ist $t_1=0$.

Zusammenfassung der Diagramme bei einer
gleichmäßig beschleunigten Bewegung.



Weg-Zeit-Diagramm

$$s = x \propto t^2$$

$x(t)$ ist eine Parabel

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

$$v \propto t$$

$v(t)$ ist eine Gerade

Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

$a(t)$ ist eine konstante Funktion

1.7 Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ein Zug wird am Anfang gleichmäßig beschleunigt und dann wird er bis zu einer Höchstgeschwindigkeit eine ungleichmäßige Bewegung mit veränderbarer Beschleunigung a zurücklegen. Im v, t -Diagramm ist diese Bewegung am Anfang eine Gerade, und dann eine gekrümmte Kurve. Hier muss man auch, wie bei der Geschwindigkeit, zwischen **Durchschnittsbeschleunigung** und **Momentanbeschleunigung** unterscheiden (siehe Abbildung 17).

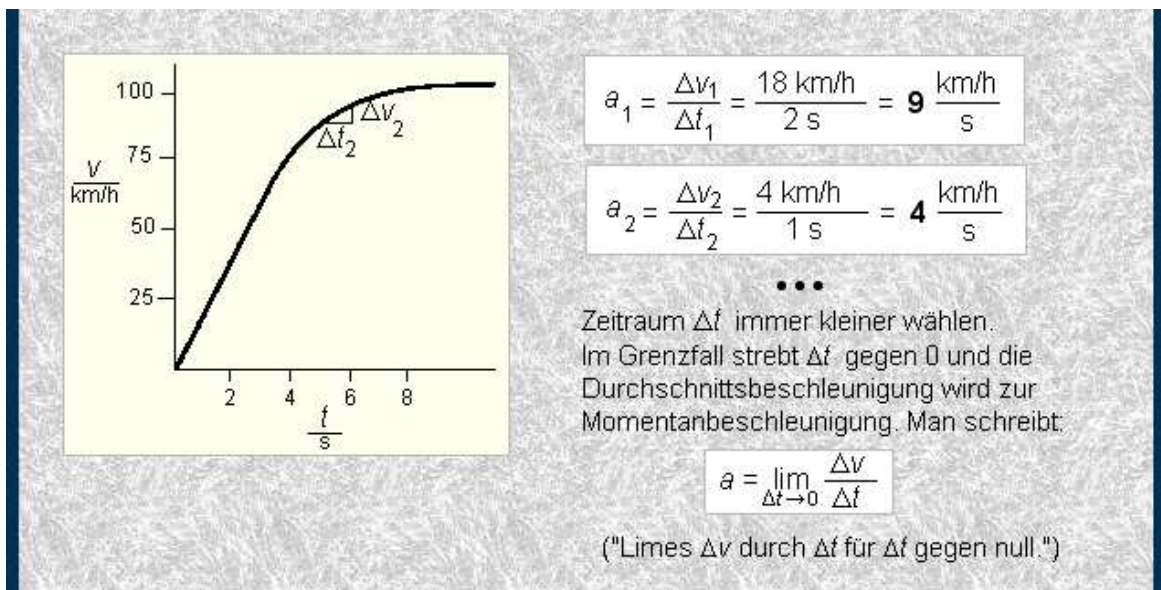


Abbildung 17: v, t -Diagramm einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung

Mathematisch formuliert: Die Beschleunigung a ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

und die Geschwindigkeit wiederum ist die Ableitung des Weges nach der Zeit

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

1.8 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

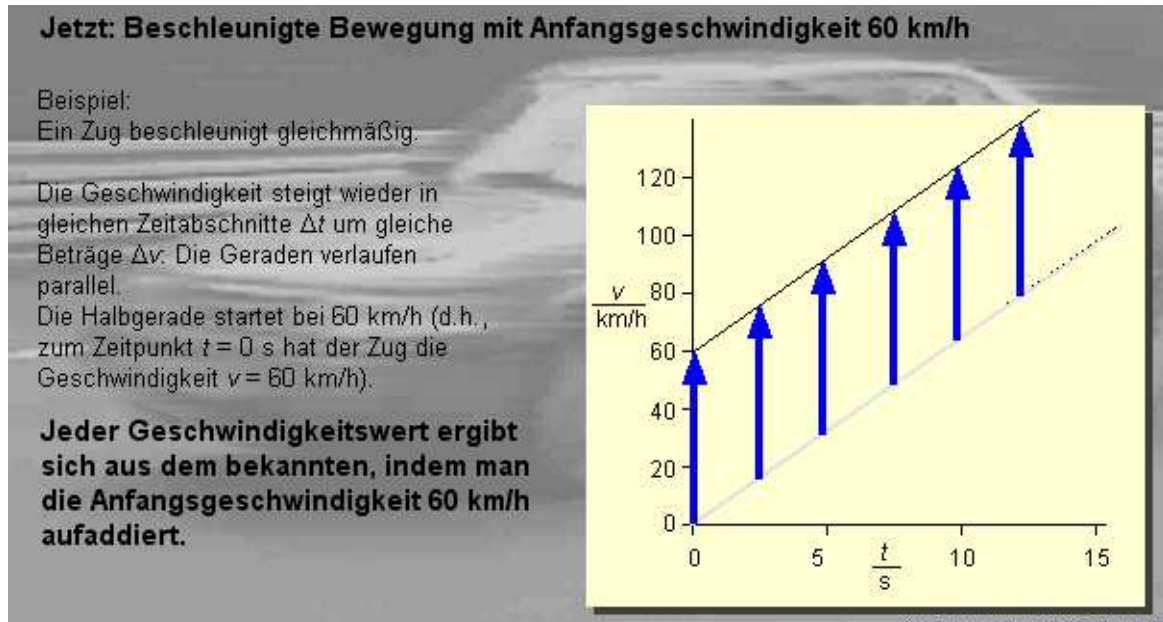


Abbildung 18: Gleichmäßige Beschleunigung mit Anfangsgeschwindigkeit)

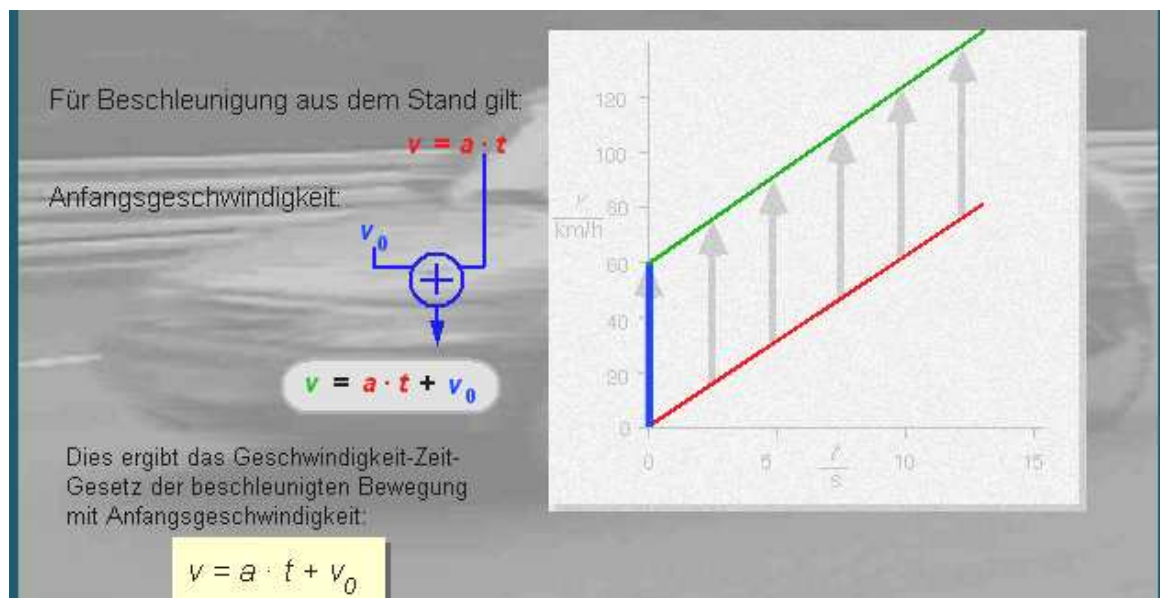


Abbildung 19: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0

1.9 Bremsvorgänge

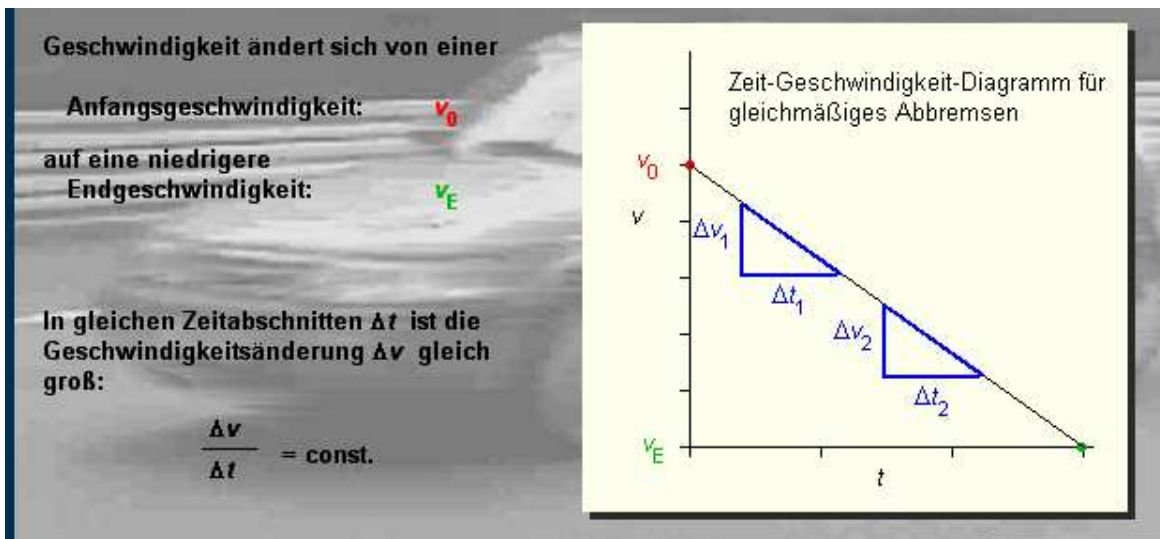


Abbildung 20: Gleichmäßige beschleunigte Bewegung mit negativer Beschleunigung (Bremsvorgang)

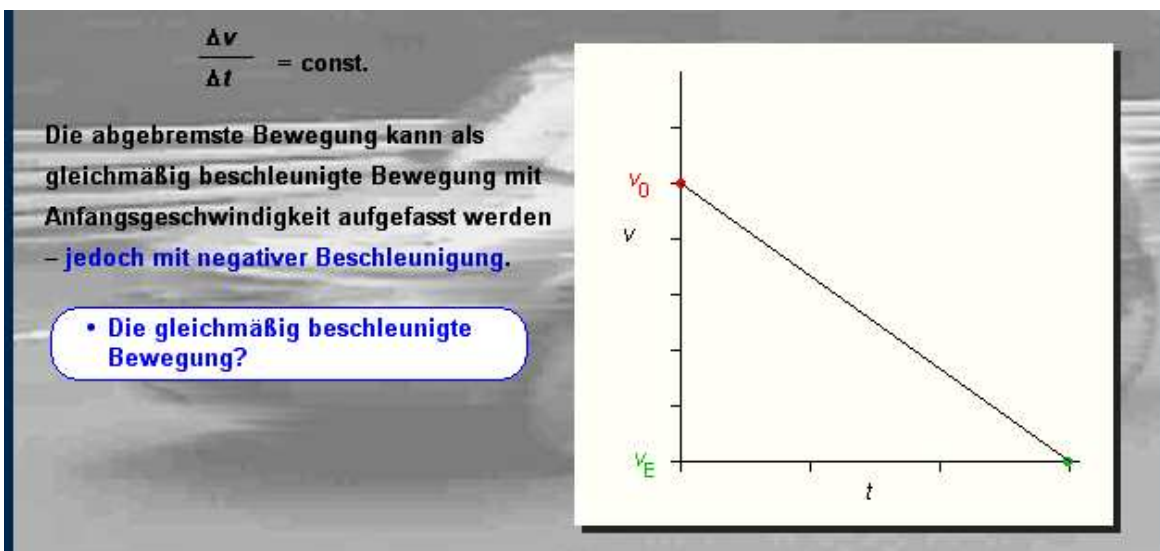


Abbildung 21: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines Bremsvorganges hat eine negative Beschleunigung

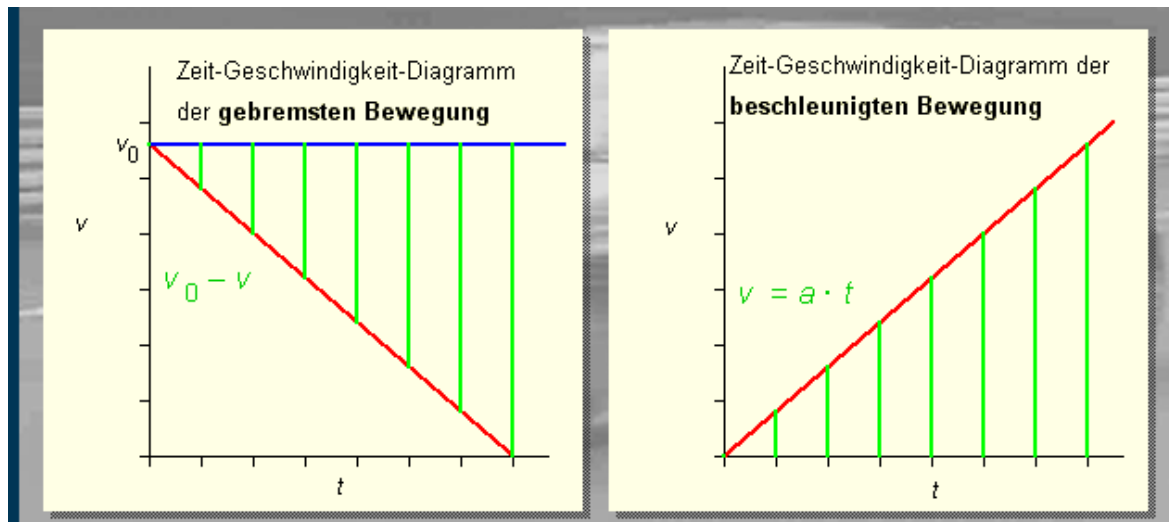


Abbildung 22: Gleichmäßige negative und positive Beschleunigung

Da die Strecken immer gleich lang sind, können wir auch die Formeln gleichsetzen:

$$v_0 - v = a \cdot t$$

$$v = v_0 - a \cdot t$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz der verzögerten Bewegung. (Dabei ist a die Bremsverzögerung.)

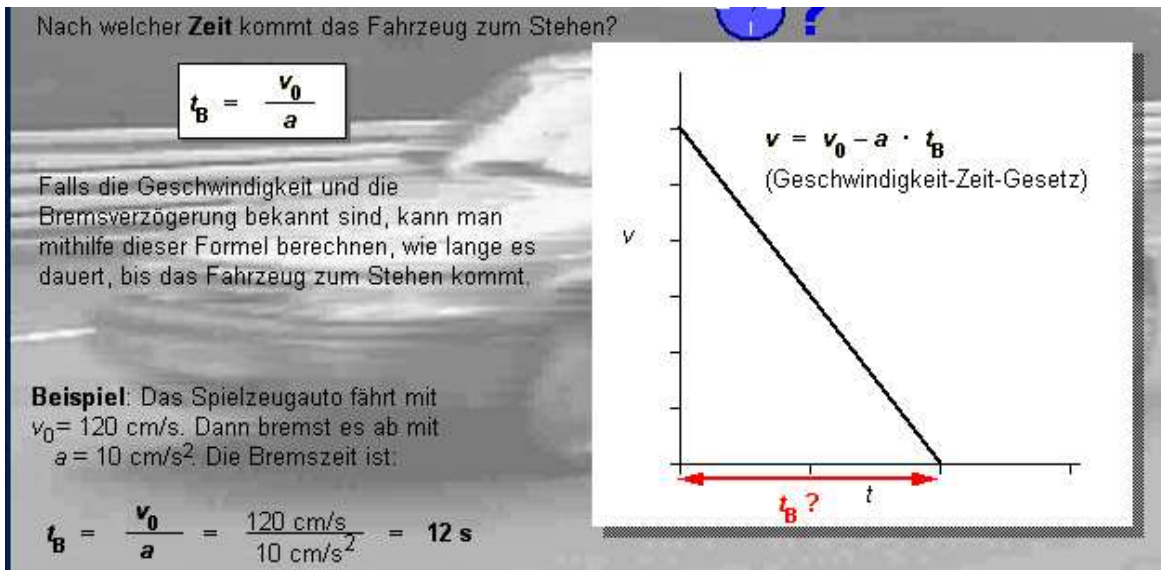


Abbildung 23: Berechnung der Bremszeit bei einer gleichmäßig verzögerten Bewegung

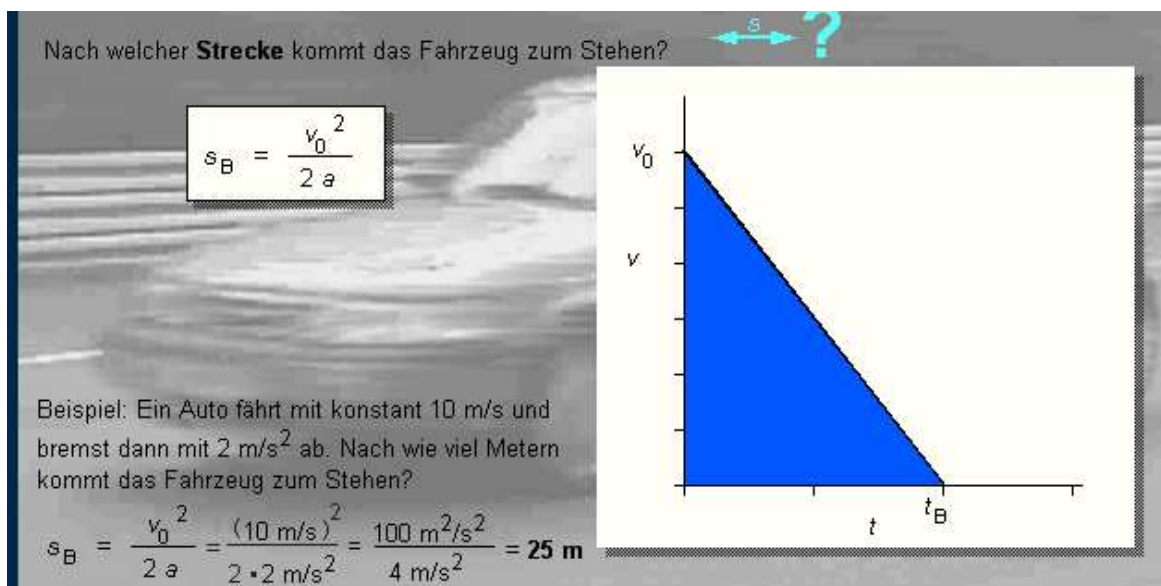


Abbildung 24: Berechnung der Bremsweges bei einer gleichmäßig verzögerten Bewegung

Zusammenfassung

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit:

- **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz**

$$v = a \cdot t + v_0$$

- **Weg-Zeit-Gesetz**

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Gleichmäßig abgebremste Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit:

- **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz**

$$v = v_0 - a \cdot t$$

- **Weg-Zeit-Gesetz**

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- **Bremszeit** beim Abbremsen auf die Geschwindigkeit null

$$t_B = \frac{v_0}{a}$$

- **Bremsweg** beim Abbremsen auf die Geschwindigkeit null

$$s_B = \frac{v_0^2}{2a}$$

1.10 Der freie Fall

Ohne den Einfluss des Luftwiderstandes oder sonstiger Störungen fallen alle Körper gleich schnell.

Die Fallgeschwindigkeit ist vom Gewicht unabhängig.

Abbildung 25: Träge Masse gleich schwerer Masse

Die Fallbeschleunigung beträgt etwa $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für den freien Fall lautet also:

$$v = g \cdot t$$

$$v = a \cdot t$$

Abbildung 26: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für den freien Fall

Der freien Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Erdbeschleunigung g .

Daher kann man hier auch das Weg-Zeit-Gesetz für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung anwenden.

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Mit der Konstanten g für a gilt dann:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Dabei ist h der Fallweg, den ein Körper in der Zeit t zurücklegt.

Abbildung 27: Weg-Zeit-Gesetz für den freien Fall

2. Kraft

Bisher haben wir verschiedene Bewegungsarten untersucht (Kinematik). Wenn wir nach der Ursache der Bewegungen fragen, tritt eine neue physikalische Größe auf, die man als **Kraft** \vec{F} bezeichnet. Die Beobachtung zeigt, dass

1. eine Änderung der Geschwindigkeit \vec{v} eines Körpers (in Betrag oder Richtung, d.h. eine Beschleunigung \vec{a}) einen Kraftaufwand bedarf,
2. die Verformung eines Körpers (z.B. einer Feder) wird auch durch eine Kraft \vec{F} verursacht (Federkraft).

Wir werden diese beiden Wirkungen zur Definition der Kraft verwenden.

2.1 Das erste Newtonsche Gesetz (Trägheitsprinzip)

Die Eigenschaft eines Körpers seinen Bewegungszustand beizubehalten bezeichnet man als Trägheit. Jeder Körper besitzt eine *träge Masse* m .

Das erste Newtonsche Gesetz (Trägheitsprinzip) besagt:
Wenn keine Kraft auf einen Körper wirkt, $\vec{F} = 0$, so kann sich die Geschwindigkeit eines Körpers nicht ändern; der Körper kann also nicht beschleunigt werden.

Ein Spezialfall ist, wenn der Körper im Ruhezustand ist, $\vec{v} = 0$, dann bleibt er ohne Krafteinwirkung in Ruhe.

2.2. Das zweite Newtonsche Gesetz (Aktionsprinzip)

Die Beobachtung zeigt, dass die Kraft \vec{F} Ursache der Beschleunigung ist und zwar proportional zur Beschleunigung \vec{a} , d.h. $\vec{F} \propto \vec{a}$. Die Proportionalitätskonstante ist die Masse (genauer: träge Masse), also:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}} \quad (*)$$

Die auf einen Körper wirkende Gesamtkraft ist gleich dem Produkt der Masse mit der Beschleunigung, oder anders formuliert:

Die Einwirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper erzeugt eine Änderung seines Bewegungszustandes, d.h. eine Beschleunigung oder Verzögerung.

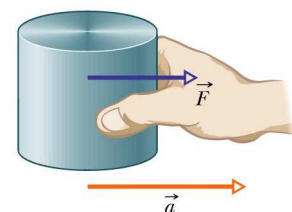


Abbildung 28: Eine Kraft \vec{F} wirkt auf eine Masse und beschleunigt sie mit der Beschleunigung \vec{a} .

Bei konstanter Masse kann man für (*) auch schreiben:

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \quad ^1)$$

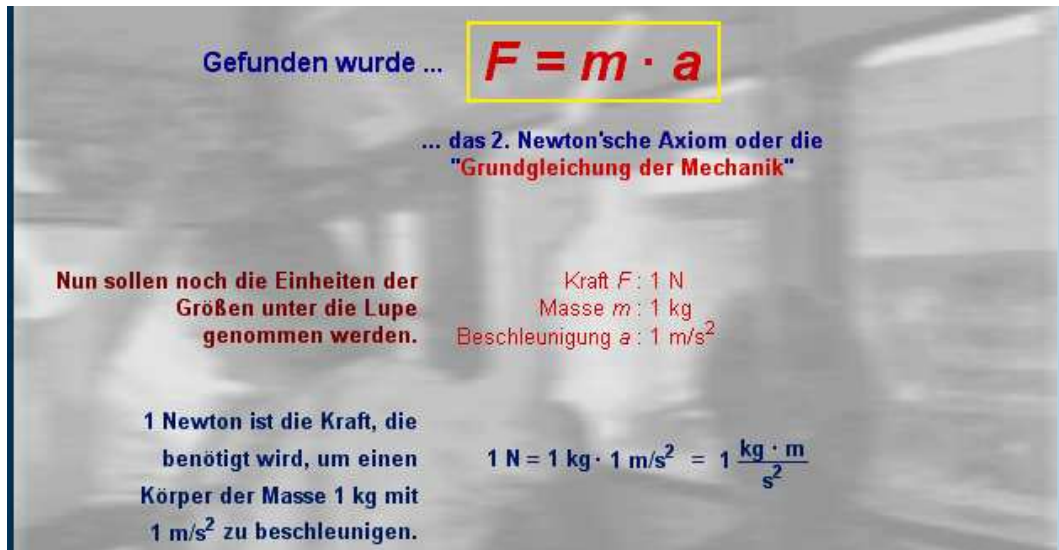


Abbildung 29: Die Kraft \vec{F} ist proportional zur Beschleunigung \vec{a}

2.3 Das dritte Newtonsche Gesetz (Wechselwirkungsprinzip)

Wenn zwei Körper einen Zug oder Druck aufeinander ausüben, so sind sie miteinander in Wechselwirkung.

Beispiel: Ein Buch B wird an eine Kiste C angelehnt (Abb. 30). Die Kiste übt eine horizontale Kraft \vec{F}_{BC} auf das Buch aus, während das Buch eine horizontale Kraft \vec{F}_{CB} auf die Kiste ausübt. Das 3. Newtonsche Gesetz besagt :

Übt ein Körper auf einen zweiten eine Kraft (actio) aus, so übt auch der zweite Körper auf den ersten eine Gegenkraft (reactio) aus, die gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtung hat.

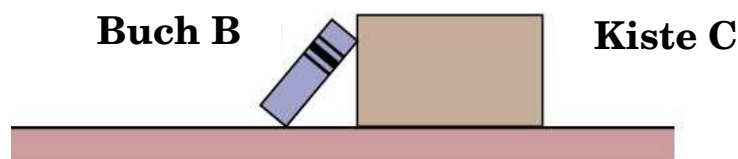
Beispiel: eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit *konstanter* Beschleunigung wird verursacht durch eine *konstante* Kraft \vec{F} :

Ein Körper der Masse 4kg befindet sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe. Eine konstante horizontale Kraft \vec{F} wirkt auf den Körper ein. Bei $t = 3s$ habe sich der Körper 2,25m weiterbewegt. Wie Groß ist die einwirkende Kraft \vec{F} ?

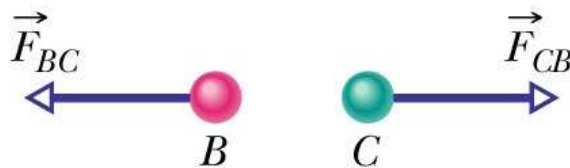
¹ Eine startende Rakete besteht zum großen Teil aus Treibstoff, der verbrannt wird. Die Masse ändert sich mit der Zeit. Die Gleichung muss erweitert werden: $\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$

Weil auf den Körper eine konstante Kraft wirkt, ist auch die Beschleunigung konstant. Für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen gilt:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2; \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; F = 4 \text{kg} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{2 \text{N}}}$$



(a)



(b)

Abbildung 30: Die Kiste übt eine Kraft \vec{F}_{BC} auf das Buch aus.
Das Buch übt eine Kraft \vec{F}_{CB} auf die Kiste aus.

2.4 Verschiedene Arten von Kräften

Eine Wechselwirkung, die eine Beschleunigung oder eine Verformung eines Körpers verursacht, wird Kraft genannt. Im Allgemeinen begegnen wir unterschiedlichen Arten von Kräften. Hier beschränken wir uns auf die mechanischen Kräfte. Die wichtigsten sind:

- Gravitationskraft
- Reibungskraft
- Zentripetalkraft
- elastische Kraft (Federkraft)

In den folgenden Abschnitten werden wir die einzelnen Kraftarten näher untersuchen.

2.5 Gravitation als Ursache der Schwerkraft

Die Kraft, die man benötigt, um einen Körper festzuhalten, nennt man **Schwerkraft** oder „**Gewichtskraft**“. Die Ursache der Schwerkraft ist die sogenannte **Gravitation**. Zwischen allen Massen wirken anziehende Kräfte, die im Gravitationsgesetz zusammengefasst sind:

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (*)$$

Das von Newton entdeckte Gravitationsgesetz besagt: Zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit der Kraft \vec{F} gegenseitig an. Die Kraft \vec{F} ist proportional zu den beiden Massen und umgekehrt proportional zu r^2 . \vec{F} ist parallel zur Verbindungslinie zwischen den Massen m_1 und m_2 .

G ist eine Universalkonstante und hat den Wert:

$$G: \text{Gravitationskonstante} = 6,68 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

Beispiel:

Schwerkraft auf der Erde

Für die Gravitationskraft auf einen Körper mit der Masse m auf der Erde wird in *) annähernd für r der Abstand zum Erdmittelpunkt und für m_1 die Masse der Erde eingesetzt.

$$(1) \quad \vec{F}_G = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}} \cdot m}{r_{\text{Erde}}^2}$$

nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt außerdem

$$(2) \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Bei Gleichsetzung von (1) und (2) folgt} \quad \vec{a} = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2} = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}.$$

\vec{a} nennt man in diesem Fall Erdbeschleunigung und bezeichnet sie mit \vec{g} .

Daraus folgt, die Schwerkraft ist gleich

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Schwerkraft ist also Masse mal Erdbeschleunigung.

Die Gewichtskraft bewirkt, dass frei bewegliche Körper zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt werden und zwar mit einer konstanten Erdbeschleunigung \vec{g} . Da \vec{g} annähernd konstant ist, ist die Bewegung geradlinig und gleichmäßig beschleunigt (freier Fall).



Abbildung 31: Unterschiedliche Schwerkraft auf vier Planeten

2.6 Reibungskraft

Die Erfahrung zeigt, dass die Reibung die Bewegung behindert und Reibungskraft entgegengesetzt der Bewegungsrichtung ist.

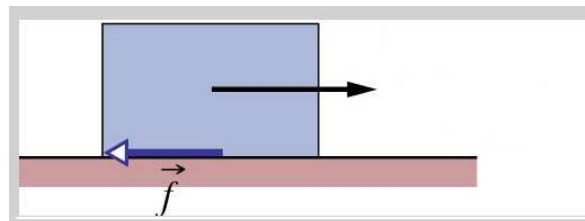


Abbildung 32: Die Bewegungsrichtung zeigt nach rechts, die der Reibungskraft f zeigt nach links

Beim Versuch, einen Körper über eine Oberfläche zu schieben, wirkt eine Reibungskraft \vec{f} der Bewegung entgegen.

Abbildung 33 zeigt, dass in der Anfangsphase wird zum Schieben eine größere Kraft benötigt wird, d.h. die Reibungskraft ist größer. Die Anfangsreibung nennt man **Haftreibungskraft** \vec{F}_{Ha} . Ist die Haftreibung einmal überwunden, ist nur noch eine geringere Kraft aufzubringen, um den Körper in Bewegung zu halten. Diese Kraft nennt man **Gleitreibungskraft** \vec{F}_R .

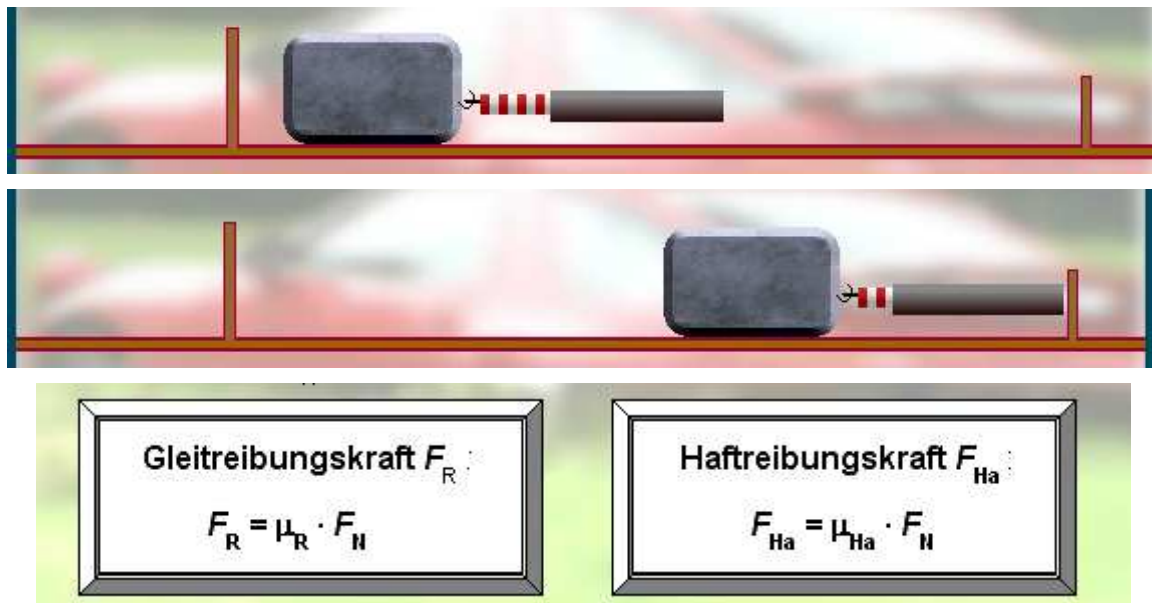


Abbildung 33: Am Anfang wirkt Haftreibungskraft, dann die Gleitreibungskraft $F_{Ha} > F_R$

Das Experiment zeigt, dass die Reibungskräfte proportional zu der Normalkraft \vec{F}_N sind, mit der ein Körper auf die Unterlage gedrückt wird (oft ist $\vec{F}_N = \vec{F}_G = \text{Gewichtskraft}$).

Für $\vec{F}_R = \text{Gleitreibungskraft}$ gilt: $\vec{F}_R = \mu_R \cdot \vec{F}_N$ | μ_R : Gleitreibungskoeffizient

Für $\vec{F}_{Ha} = \text{Haftreibungskraft}$ gilt: $\vec{F}_{Ha} = \mu_{Ha} \cdot \vec{F}_N$ | μ_{Ha} : Haftreibungskoeffizient

μ_R und μ_{Ha} sind Materialkonstanten und hängen von der Oberflächenbeschaffenheit der reibenden Flächen ab. In der Regel ist μ_{Ha} größer als μ_R .

2.7 Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte

Kraft \vec{F} ist ein Vektor. Für Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte gelten die Gesetze der Vektoraddition (wie bei der Geschwindigkeit \vec{v} , Abschnitt 1.3)

Beispiel: Schiefe Ebene

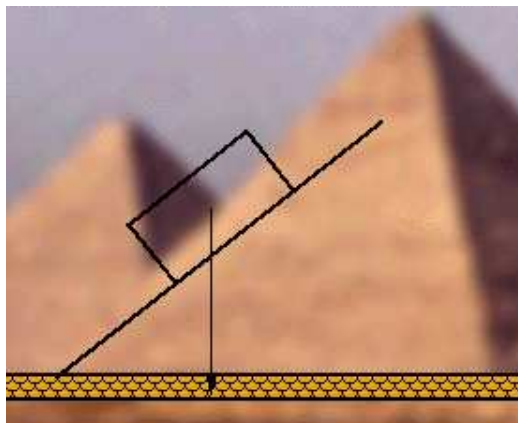


Abbildung 34: Ein Körper befindet sich auf einer schiefen Ebene, die Gewichtskraft G wird in zwei Komponenten zerlegt (unten)

Kraft

Ein Klotz befindet sich auf einer schiefen Ebene. Wir verändern die Neigung der schiefen Ebene. Am Anfang hält die Haftreibung den Klotz am Boden. Ab einer bestimmten Neigung reicht die Haftreibung nicht aus, um ihn am Rutschen zu hindern. Um diesen Effekt näher zu untersuchen, zerlegen wir die Gewichtskraft in zwei Komponenten.

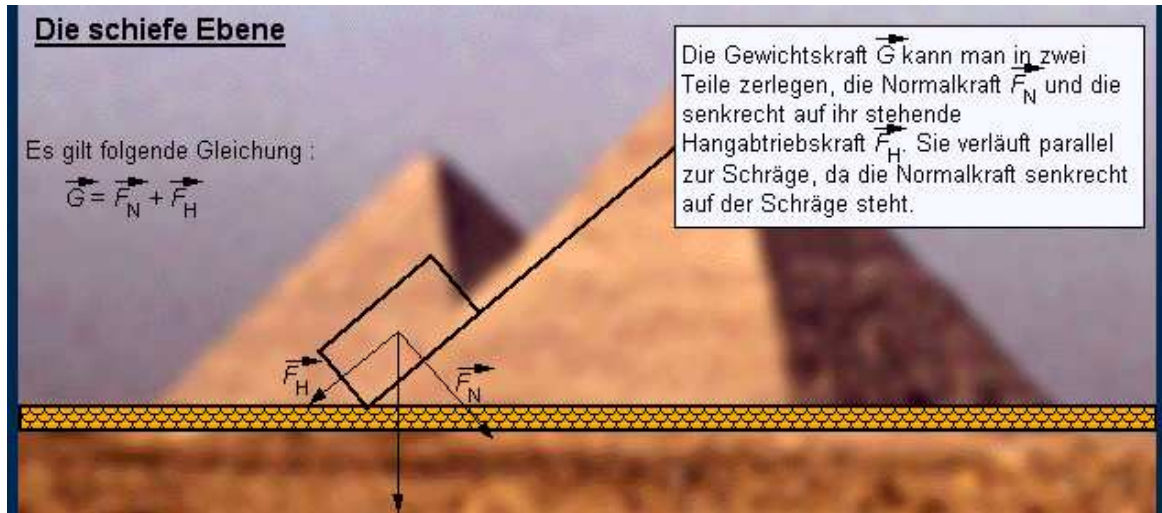


Abbildung 35: Zerlegung der Gewichtskraft \vec{G} (oder \vec{F}_G) in zwei Komponenten

Normalkraft \vec{F}_N , die den Körper auf die Unterlage presst und die Hangabtriebskraft \vec{F}_H , die den Körper zur Bewegung bringt.

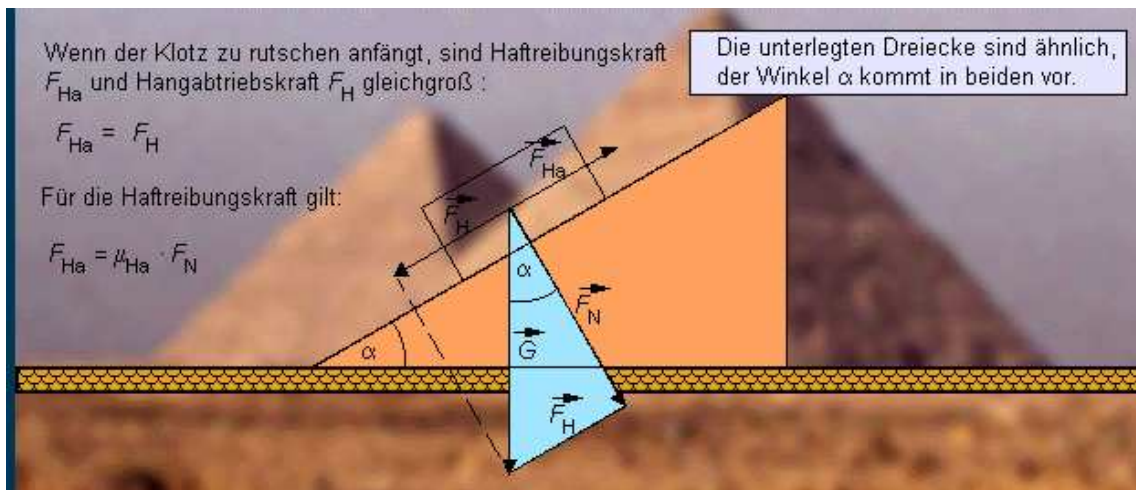


Abbildung 36: Berechnung der Haftreibungskraft

(\vec{F}_H = Hangabtriebskraft wirkt entgegengesetzt der Bewegungsrichtung)

(\vec{F}_H nicht mit \vec{F}_{Ha} verwechseln!)

$$F_{Ha} = \mu_{Ha} \cdot F_N$$

$$F_{Ha} = F_H$$

μ_{Ha} : Haftreibungskoeffizient

$$\mu_{Ha} = \frac{F_H}{F_N}$$

$$F_H = G \cdot \sin \alpha$$

$$F_N = G \cdot \cos \alpha$$

$$\mu_{Ha} = \tan \alpha$$

Damit gilt für den Winkel α , bei dem ein Klotz auf einer schiefen Ebene zu rutschen beginnt:

$$\alpha = \arctan \mu_{Ha}$$

2.8 Zentripetalkraft

Ein Körper führt eine gleichförmige Kreisbewegung aus (Abschnitt 1.2). Der Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}|$ ist konstant. Obwohl sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, wird der Körper beschleunigt, weil sich die Richtung der Geschwindigkeit ändert. Wie in Abbildung 37 zu sehen ist, \vec{v} zeigt immer in Bewegungsrichtung entlang der Tangente an der Kreisbahn, während die Beschleunigung \vec{a} immer auf den Kreismittelpunkt gerichtet ist. \vec{a} wird als **Zentripetalbeschleunigung** bezeichnet.

Der Betrag von \vec{a} ist gleich

$$a = \frac{v^2}{r},$$

mit

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{wird}$$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Die Beschleunigung \vec{a} wird von der Kraft \vec{F} verursacht, die man **Zentripetalkraft** nennt. Bei gleichförmiger Kreisbewegung gilt: $v = r \cdot \omega$ (ω = konstante Winkelgeschwindigkeit), also folgt

$$\vec{F} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}.$$

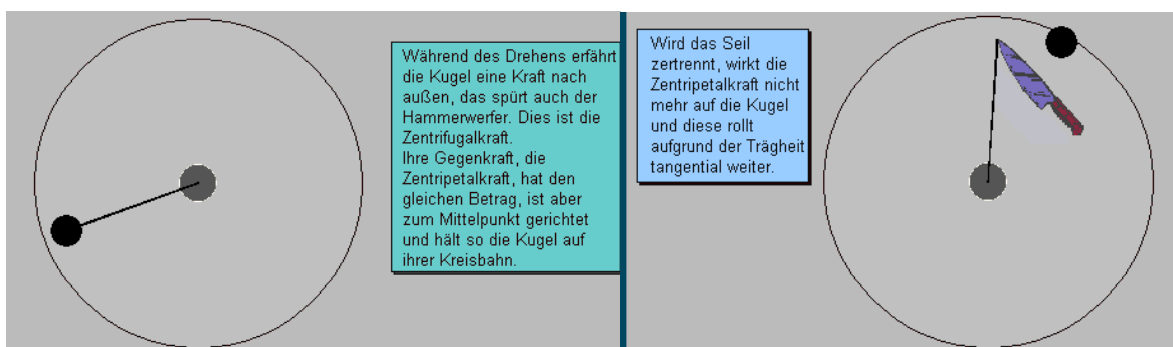
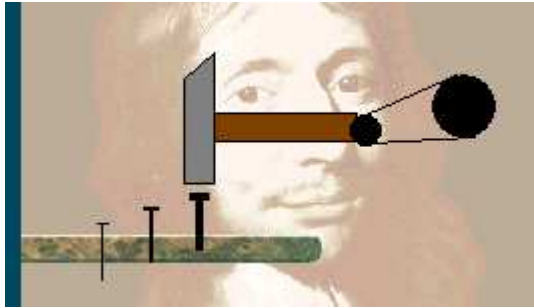


Abbildung 37: Die Kugel erfährt eine Radialkraft (oben). Die Radialkraft fehlt (unten). Sie bewegt sich tangential weiter.

Die Abbildung zeigt, dass diese Kraft zu einem Teil aufgebracht wird, um den Körper auf seiner Kreisbahn zu halten.

2.9 Kraft senkrecht auf eine Fläche (Druck)

Mit einem elektrischen Hammer wird eine gleiche Kraft \vec{F} auf drei verschieden dicke Nägel ausgeübt. Die Nägel werden verschieden tief ins Holz getrieben. Die Wirkung der Kraft hängt also von der Fläche der Nadelspitze ab. Um diesen Sachverhalt zu beschreiben, definiert man eine neue physikalische Größe, die man Druck p nennt. Das ist auch der Grund dafür, dass Nägel spitz sind, denn je geringer die Kontaktfläche, desto größer ist dann auch der Druck p .



Wir folgern also :

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

Und in physikalischen Symbolen:

$$p = \frac{F}{A} \quad [A] = \frac{[F] \text{ N}}{[A] \text{ m}^2}$$

Abbildung 38: Je geringer die Kontaktfläche, desto größer ist der Druck

Einheit für den Druck p : $\frac{1\text{N}}{\text{m}^2} = 1\text{Pa}$ (Pascal)

Pascal ist eine kleine Einheit. Schon der normale Luftdruck an der Erdoberfläche liegt in der Nähe von 10^5 Pa.

2.10 Federkraft (Das Hooksche Gesetz)

Zwei an der Wand befestigte Federn werden ausgedehnt. Das Experiment zeigt, dass die aufzuwendende Kraft F proportional zur Längenänderung $\Delta\ell$ ist.

$$F \propto \Delta\ell$$



Abbildung 39: Proportionalität zwischen Kraft \vec{F} und Längenänderung $\Delta\ell$.

Außerdem hängt F auch von der Steifheit der Feder ab (weich oder hart), die man mit Federkonstante D charakterisiert.

$$F = D \cdot \Delta \ell \quad (*)$$

D heißt Federkonstante.

Die Feder übt ebenfalls eine rücktreibende Kraft aus, die entgegengesetzt der angreifenden Kraft ist. Also kann man für $*$ auch schreiben $F_{\text{Feder}} = -D \cdot \Delta \ell$.

2.11 Gleichgewicht der Kräfte

Greifen *an einem Punkt* eines Körpers mehrere Kräfte an, so wird durch vektorielle Addition die resultierende Kraft \vec{F}_{Res} ermittelt. Wenn $\vec{F}_{\text{Res}} = \sum_i \vec{F}_i = 0$ ist, heben sich die Kräfte gegenseitig auf. Der Körper ist im statischen **Gleichgewicht**, also in Ruhe. Die Lehre vom statischen Gleichgewichten nennt man auch **Statik** (mehr dazu später).

Beispiel 1

Ein Körper ruht auf einem Tisch. Zwei Kräfte wirken auf den Körper ein. Gewichtskraft \vec{F}_g nach unten und eine sogenannte Normalkraft \vec{N} oder \vec{F}_N , die senkrecht zur Oberfläche nach oben zeigt (Normal = senkrecht zu).

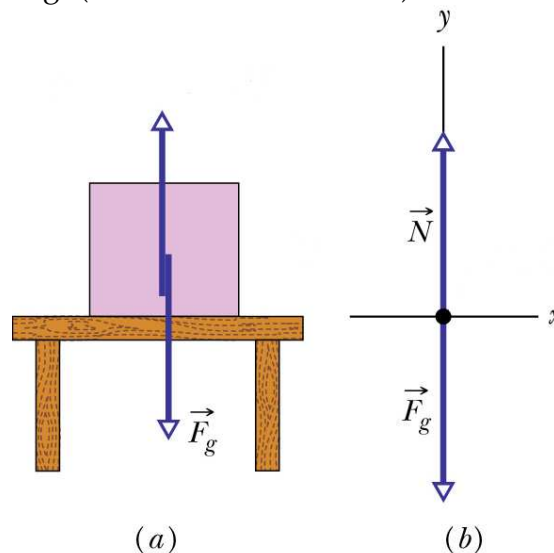


Abbildung 40: Der Körper bleibt in Ruhe, weil die Resultierende von \vec{F}_g und \vec{N} gleich Null ist.

Die Beträge von \vec{F}_g und \vec{F}_N sind gleich, so dass die Summe der Kräfte Null ist. Der Körper bleibt im Ruhezustand, er ist im Gleichgewicht. Wenn Sie auf einer Matratze liegen, drücken Sie mit Ihrem Gewicht \vec{F}_g nach unten. Die Matratze wird nach unten verformt und drückt Sie mit der Normalkraft \vec{N} nach oben.

Beispiel 2

Ein Körper hängt an zwei Seilen. Die Gewichtskraft \vec{G} zeigt nach unten. Da der Körper nicht herunterfällt, muss eine Gegenkraft \vec{F} nach oben ziehen, die den gleichen Betrag hat wie \vec{G} . Die Kraft wird von zwei Seilen aufgebracht. \vec{F} wird zerlegt in die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , die in Richtungen der zwei Seile wirken und durch Vektoraddition berechnet werden können.

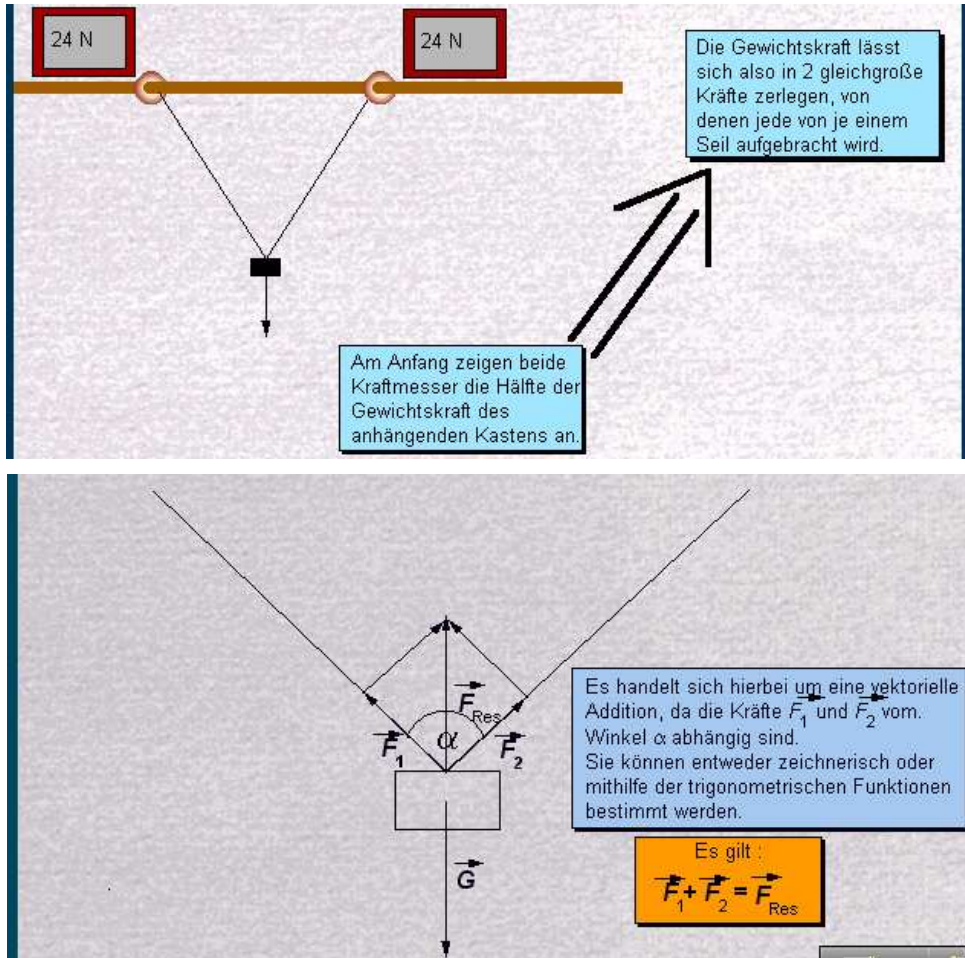


Abbildung 41: Die Gewichtskraft G lässt sich in zwei Komponenten zerlegen

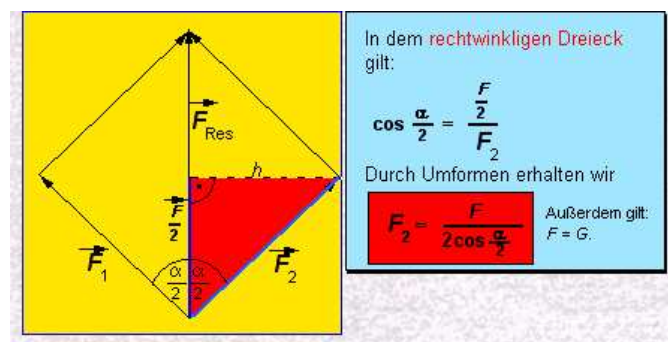


Abbildung 42: Bestimmung der Komponenten von \vec{F}

3. Arbeit, Energie, Impuls

3.1 Potenzielle Energie und Hubarbeit

In der Abbildung 43 sehen wir einen Lastenaufzug, der z. B. eine Last der Masse m in verschiedene Stockwerke transportiert. Der Elektromotor des Aufzugs übt eine Kraft \vec{F} auf den Schlitten aus, die mindestens so groß ist, wie die Gewichtskraft $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$. Wie viel **Energie** (in kWh Einheit der elektrischen Energie) muss der Elektromotor aufwenden, um die Last in verschiedene Stockwerke (Höhen) zu bringen? Abbildung 43a zeigt, dass die aufgebrauchte Energie linear mit der Masse m ansteigt (für vier verschiedene Massen) also gilt:

$$W = \text{Energie} \propto m \cdot g$$

Außerdem zeigt Abbildung 43b, dass die Energie linear mit der Höhe ansteigt.

$$W \propto h$$

also folgt

$$W = m \cdot g \cdot h$$

Energie, die der Elektromotor aufbringt, verrichtet eine **Hubarbeit** W_{Hub} , um die Last hochzuheben. Beim Heben der Last wird gegen die Gewichtskraft $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ Hubarbeit geleistet, die von der Last als Energie gespeichert wird. In diesem Falle bezeichnet man die Energie als **potenzielle Energie**. **Energie** und **Arbeit** sind mathematisch äquivalent. Daher benutzt man für beide Begriffe die gleiche Symbolschreibweise.

Energie: das gespeicherte Arbeitsvermögen

Arbeit: die eigentlich verrichtete Arbeit

Bei der Hubarbeit kann man also auch schreiben:

$$W_{Hub} = W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Es folgt, dass die Einheit der Energie und der Arbeit auch gleich sind:

[W] = Newtonmeter = (N·m). Sie wird auch Joule (J) genannt und ist gleich der Wattsekunde (W·s), die Einheit der elektrischen Energie.

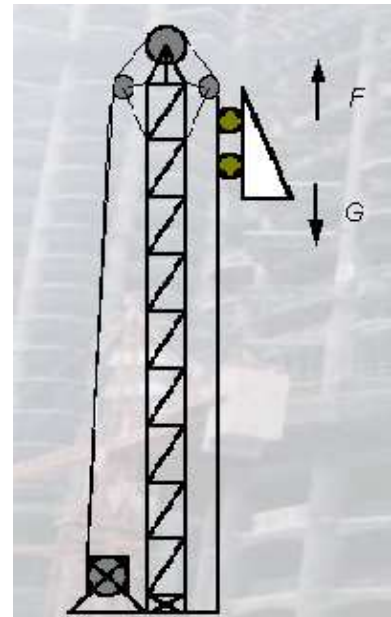


Abbildung 43: Die Kraft des Elektromotors F muss mindestens so groß sein, wie die Gewichtskraft G der Schlitten.

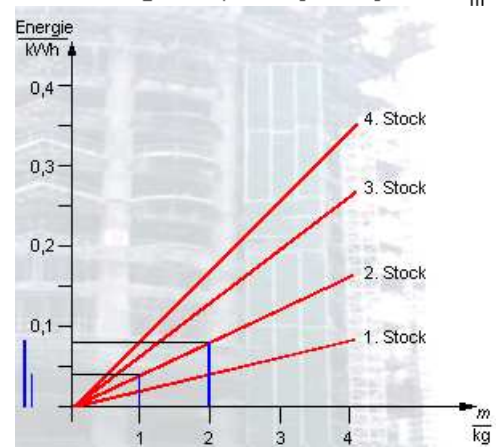
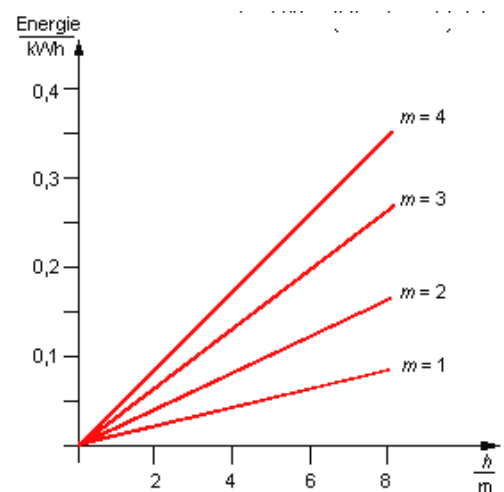


Abbildung 44a+b: Energie steigt linear mit der Masse m und der Höhe h

3.2 Arbeit und schiefe Ebene

In Abbildung 43 ist der Aufzug senkrecht nach oben gefahren. Man kann aber auch einen Schrägaufzug verwenden.

Muss hierbei weniger Arbeit aufgewendet werden? Wir nehmen an, dass die Bewegung auf der schiefen Ebene reibungslos verläuft. Der Wagen fährt bis in eine Höhe h (Abbildung 45). Er legt dabei einen Weg der Länge s zurück.

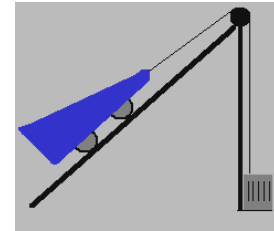


Abbildung 45 :Bewegung auf einer schiefen Ebene

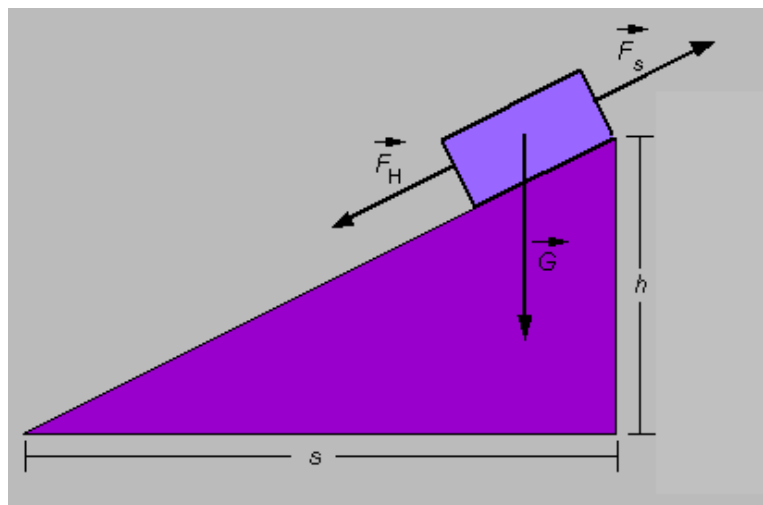


Abbildung 46: Die angreifenden Kräfte auf einen Körper der sich auf einer schiefen Ebene bewegt

Die Kraft \vec{F}_s wirkt entlang des Weges s . Die Hangabtriebskraft \vec{F}_H wirkt ihr entgegen. \vec{G} wird in zwei zueinander senkrecht stehende Vektoren zerlegt (Abbildung 46).

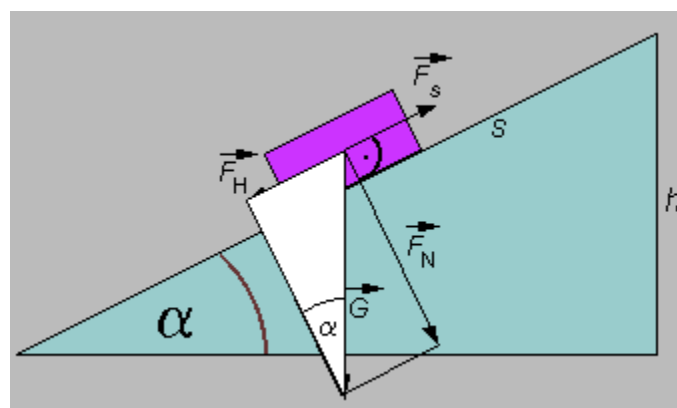


Abbildung 47: Bestimmung der geleisteten Arbeit auf einer schiefen Ebene

Das gebildete Kräfte-dreieck (mit den Seiten \vec{F}_N , \vec{F}_H und \vec{G}) und das Dreieck über das sich die Masse bewegt, sind ähnliche Dreiecke (Abbildung 46).

Es gilt:

$$\frac{F_H}{G} = \frac{h}{s} \quad \text{oder wenn } F_S = F_H$$

$$\frac{F_S}{G} = \frac{h}{s} \quad \text{oder } F_S \cdot s = G \cdot h$$

Im vorigen Abschnitt haben wir für die Hubarbeit $W_H = G \cdot h$ ermittelt. Jetzt können wir schreiben:

$$W_H = G \cdot h = F_S \cdot s$$

Mit einer schiefen Ebene spart man also keine Arbeit. Man muss weniger Kraft aufwenden ($F_S < G$) aber auch einen längeren Weg zurücklegen ($s > h$). Es sei noch erwähnt, dass W_H auch gleich die potenzielle Energie ist, die durch Heben gewonnen wird.

3.3 Allgemeine Definition der Arbeit

Bis jetzt haben wir die Hubarbeit untersucht, die gegen die Schwerkraft $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ verrichtet wird. Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall, bei dem \vec{F} nicht entlang des zurückgelegten Weges wirkt.

Beispiel: Ein einfacher Handkarren wird von einem Menschen nach rechts bewegt (Abbildung 47a).

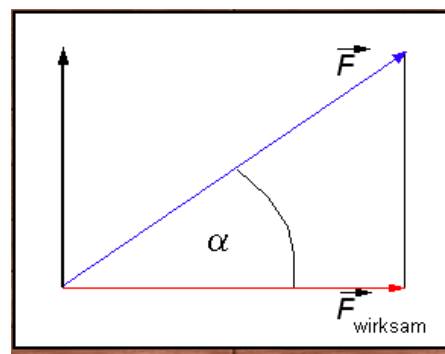
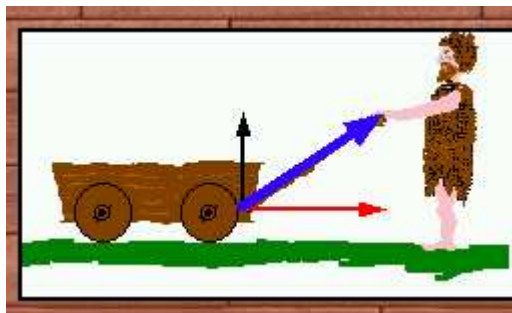


Abbildung 48a+b: Allgemeine Definition der Arbeit. Die Kraft F ist *nicht* entlang des Weges s

Nicht die ganze aufgewendete Kraft wirkt entlang des Weges. Ein Teil der Kraft wirkt nach oben und ist für die Bewegung bedeutungslos. \vec{F} wird in zwei Komponenten zerlegt. Für die Berechnung der Arbeit ist nur F_{wirksam} entlang des Weges interessant.

$$W = \text{Arbeit} = F_{\text{wirksam}} \cdot s$$

wobei \vec{s} der zurückgelegte Weg ist. Aus dem Dreieck der Abbildung 47b wird F_{wirksam} berechnet:

$$F_{\text{wirksam}} = F \cdot \cos \alpha$$

α ist der Winkel zwischen \vec{F} und \vec{s} . Es gilt also für die Arbeit:

$$\boxed{W = F \cdot s \cdot \cos\alpha} \quad (*)$$

Es gibt zwei Sonderfälle:

- | | | | |
|-------------------------------------|---------------------|------------------|-----------------|
| 1. \vec{F} parallel zu \vec{s} | $\alpha = 0$ | $\cos\alpha = 1$ | $W = F \cdot s$ |
| 2. \vec{F} senkrecht zu \vec{s} | $\alpha = 90^\circ$ | $\cos\alpha = 0$ | $W = 0$ |

Außerdem geht aus (*) hervor, dass ohne Zurücklegen eines Weges keine physikalische Arbeit geleistet wird ($s = 0 \Rightarrow W = 0$). (*) kann man auch als Skalarprodukt von \vec{F} und \vec{s} schreiben:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

\vec{F} und \vec{s} sind Vektoren, Arbeit ist aber eine skalare Größe.

3.4 Spannarbeit

Bei einer *konstanten*, entlang eines Weges s wirkenden Kraft \vec{F}_s lässt sich die Arbeit einfach als $W = F_s \cdot s_1$ schreiben, wobei s_1 die zurückgelegte Strecke ist. In einem Kraft-Weg-Diagramm entspricht die Arbeit dem Flächeninhalt des Rechtecks (Abb. 49). \vec{F}_s ist aber nicht immer konstant.

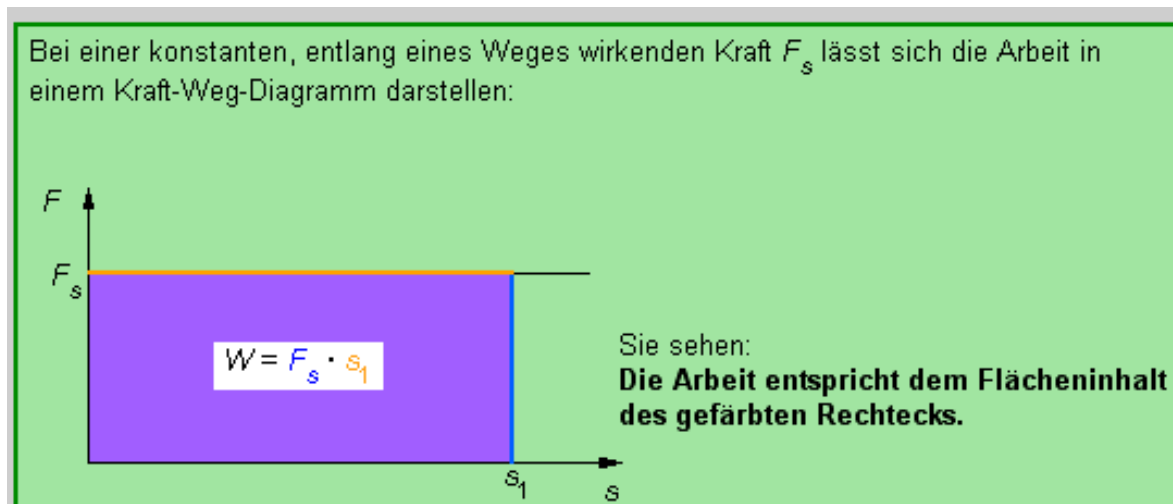


Abbildung 49: Grafische Darstellung der Arbeit in einem F,s -Diagramm

\vec{F}_s ist aber nicht immer konstant.

Beispiel:

Wenn wir versuchen eine Feder um die Länge $\Delta\ell$ (hier setzen wir $\Delta\ell = s$) auszudehnen, müssen wir nach dem Hookschen Gesetz (Abschnitt 2.4.6.) eine Kraft $F_s = D \cdot s$ aufwenden.

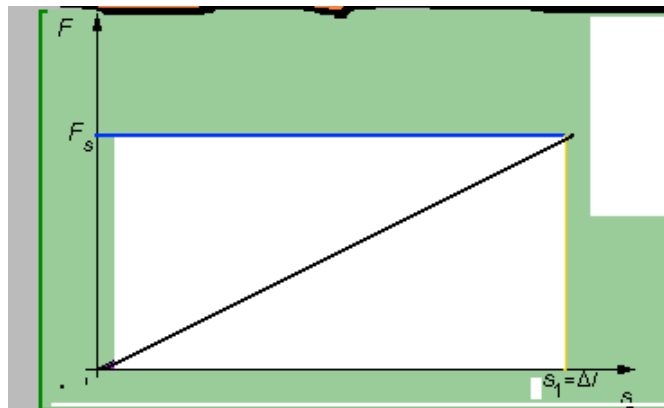
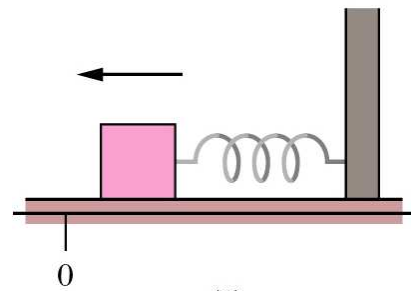


Abbildung 50: Die Kraft \vec{F}_s steigt linear mit der Wegstrecke s an.

\vec{F}_s ist hier nicht mehr konstant, sondern steigt linear mit s an. Wie oben, entspricht die Fläche unter dem Graphen (in diesem Fall eine steigende Gerade) der verrichteten Arbeit. Sie entspricht in diesem Fall der Fläche des Dreiecks:

Wie Sie gesehen haben, gilt für die Kraft, die man aufwenden muss, um eine Feder um die Länge Δl auszudehnen: $F_s = D \cdot \Delta l$
 Die Kraft ist nicht konstant, sondern abhängig von der Ausdehnungslänge Δl .
 Die Ausdehnungslänge Δl entspricht dem Weg s .

Gilt auch:
 Die Fläche unter dem Graphen entspricht der Arbeit W , wenn die Kraft F_s **nicht** konstant ist?
 Dann wäre $W = \frac{1}{2} \cdot F_s \cdot s_1$

Abbildung 51: Bestimmung der Spannarbeit

$$W = \frac{1}{2} \cdot F_s \cdot s_1,$$

und mit $F_s = D \cdot s_1$ folgt

$$W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s_1^2.$$

Die Fläche setzt sich zusammen aus der Summe aller infinitesimalen Rechtecke (oder der Summer infinitesimaler Arbeiten ΔW_i unter dem Graphen:

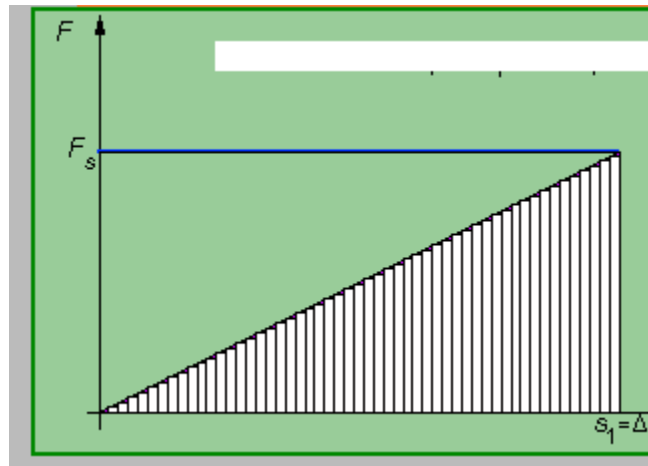


Abbildung 52: Die Summe der infinitesimalen Arbeiten ΔW_i ist die Gesamtarbeit W .

$$W = \sum_i \Delta W_i$$

im Grenzfall unter Beachtung von $F(s) = D \cdot s$ gilt

$$W = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_i \Delta W_i = \int_0^{s_1} F(s) \cdot ds = D \cdot \int_0^{s_1} s \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s_1^2,$$

wie wir grafisch ermittelt haben. Beim Zusammendrücken einer Feder wird diese Arbeit als Spannenergie in der Feder gespeichert.

3.5 Kinetische Energie

Wenn ein Zug aus dem Stand heraus gleichmäßig beschleunigt wird, wirkt die Kraft

$$F = m \cdot a \quad (*)$$

entlang des Weges. Da es sich um gleichmäßige Beschleunigung handelt, gilt für die Arbeit die aufgewendet werden muss um die Geschwindigkeit des Zuges zu erhöhen (F ist konstant)

$$W = F \cdot s$$

(*) einsetzen folgt
$$W = m \cdot a \cdot s \quad (**)$$

Für die Strecke s gilt das Weg-Zeit-Gesetz $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$.

Für a setzen wir in $v = a \cdot t$, $a = \frac{v}{t}$ ein, also folgt $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{a}$ und durch Einsetzen in (**)

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Die Arbeit, die nötig ist, um einen Körper der Masse m auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, nennt man **Beschleunigungsarbeit**.

So wie **Hubarbeit** als potenzielle Energie gespeichert wird, kann auch die **Beschleunigungsarbeit** als kinetische Energie gespeichert werden. Man nennt die Energie, die ein Körper nach verrichteter Beschleunigungsarbeit hat, **kinetische Energie**:

$$W = \text{Beschleunigungsarbeit} = \text{kinetische Energie} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

3.6 Energieerhaltung und Energieumwandlung

Ein Skifahrer befindet sich auf der Höhe h , um diese Höhe zu erreichen, musste er die Hubarbeit $W = m \cdot g \cdot h$ verrichten. Also besitzt er vor seiner Talfahrt die potenzielle Energie von ebenfalls $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$.

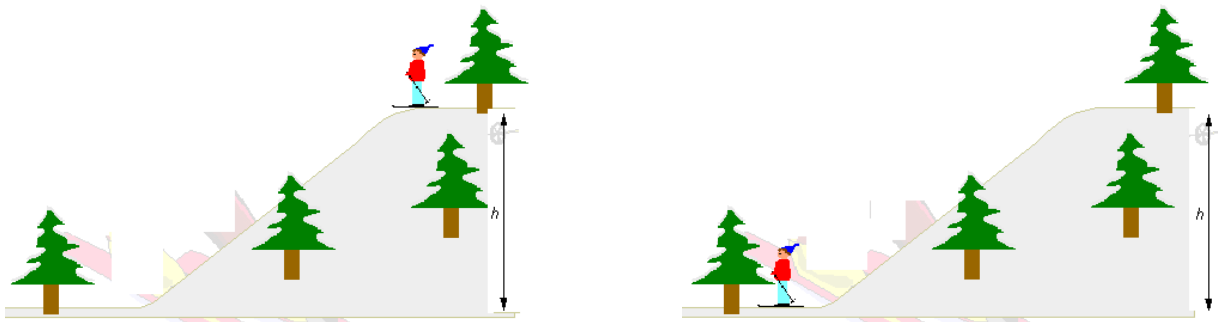
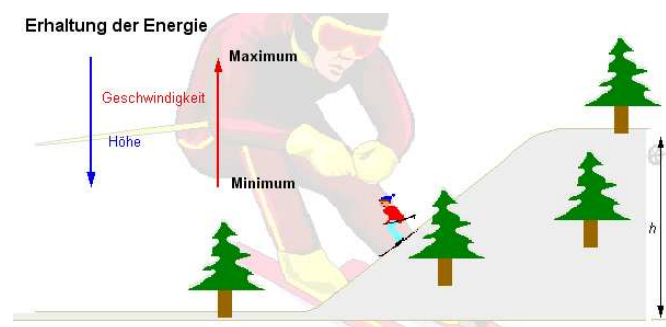


Abbildung 53: Umwandlung der Hubarbeit in kinetische Energie

Während der Fahrt verliert er an *Höhe*, also sinkt seine potenzielle Energie. Im gleichen Maße in dem er die Höhe h verliert, gewinnt er an Geschwindigkeit v ; dadurch erhöht sich seine kinetische Energie $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.



Am Ende der Talfahrt, wo seine Höhe $h=0$ ist, hat er nur noch kinetische Energie. Während der Fahrt wird W_{pot} in W_{kin} umgewandelt. Die Gesamtenergie bleibt aber immer erhalten:

$$W_{ges} = W_{pot} + W_{kin} = \text{konstant}$$

Beispiel:

Masse des Skifahrers $m = 75 \text{ kg}$, Hang der Höhe $h = 10 \text{ m}$. Er erreicht eine Endgeschwindigkeit von $v = 14 \text{ m/s}$.

$$W_{\text{pot,oben}} = m \cdot g \cdot h = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 73.575 \text{ J}$$

$$W_{\text{kin,unten}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 75 \text{ kg} \cdot \left(14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 73.500 \text{ J}$$

Die potenzielle Energie wurde fast vollständig in kinetische umgewandelt. Der kleine Verlust resultiert aus der Reibungskraft. Daraus ergibt sich er **Energieerhaltungssatz** der Mechanik:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie konstant.

Beispiel:

Ein Fadenpendel besteht aus einem Körper der Masse m , der an einem Faden der Länge L aufgehängt ist (Abb. 54). Der Körper wird seitlich aus seiner Ruhelage um den Winkel θ ausgelenkt und damit seine potenzielle Energie erhöht. Auf den Körper wirkt die Gravitationskraft \vec{F}_g und die Zugkraft \vec{T} zum Faden.

Die tangentielle Komponente $F_g \cdot \sin \theta$ bildet eine rücktreibende Kraft, die das Pendel in seine Ruhelage in die Mitte zu bringen versucht. Im Umkehrpunkt hat die Energie $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ ihr Maximum, im Ruhepunkt hat sich W_{pot} vollständig in die kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ umgewandelt. Durch periodische Schwingungen des Pendels wird eine ständige Umwandlung der kinetischen Energie in potentielle und umgekehrt stattfinden. Die Geschwindigkeit v in der Mitte (Ruhelage) lässt sich berechnen:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

h = Höhendifferenz zwischen Ruhelage und Umkehrpunkt.

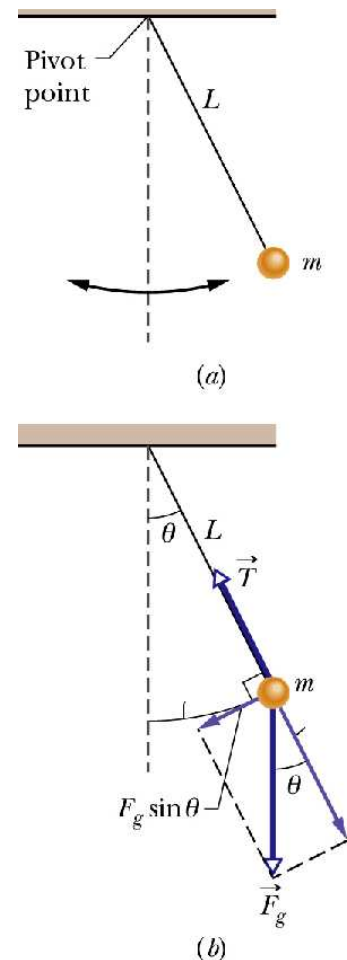


Abbildung 54: Umwandlung der potenziellen und kinetischen Energie beim Fadenpendel

3.7 Energieerhaltungssatz und Spannenergie

Die Erfahrung zeigt, dass alle Energiearten sich ineinander umwandeln und die Gesamtenergie dabei konstant bleibt.

Beispiel:

In einem Gedankenversuch nehmen wir an, dass der Behälter (Abbildung 55) ein abgeschlossenes, reibungsfreies System darstellt. Wir lassen die Kugel nach unten auf die Feder fallen.

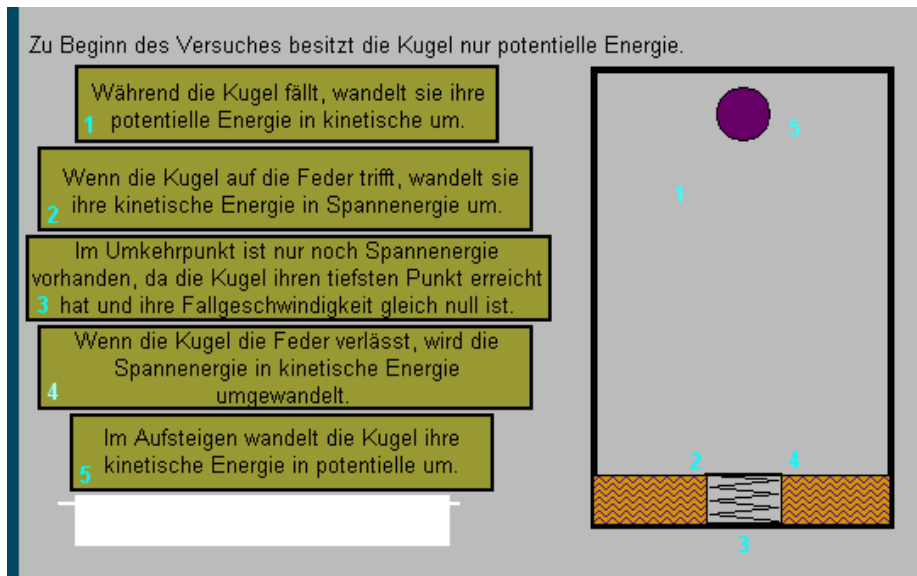


Abbildung 55: Umwandlung der drei Energiearten: potenzielle, kinetische und Spannenergie

Die Kugel wird von der Feder wieder nach oben geworfen. Das bedeutet, dass die kinetische Energie der Kugel als Spannenergie in der Feder gespeichert wurde, die wiederum Spannarbeit leistet, um die Kugel nach oben zu bringen. Die Kugel gewinnt wieder potenzielle Energie und wird oben ihre Anfangsenergie erreichen. Die einzelnen Schritte der Energieumwandlung:

1. Zu Beginn besitzt die Kugel nur potenzielle Energie W_{pot} .
2. Wenn die Kugel auf die Feder trifft, wandelt sie ihre kinetische Energie in Spannenergie um.
3. Wenn die Kugel die Feder verlässt, wird die Spannenergie in kinetische Energie umgewandelt.
4. Im Aufsteigen wandelt die Kugel Ihre kinetisch Energie in potenzielle Energie.

Es werden also drei Energiearten, $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$, $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ und Spannenergie der Feder $W_{spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$ ineinander umgewandelt.

Die Tatsache, dass die Kugel ihre Anfangshöhe erreicht hat zeigt, dass die Gesamtenergie

$$W_{ges} = W_{pot} + W_{kin} + W_{spann}$$

erhalten bleibt.

3.8 Impuls und Impulserhaltung

In Abbildung 56 sind zwei Waagen verschiedener Masse m_1 und m_2 durch eine zusammengedrückte Spiralfeder verbunden und stehen auf einer reibungsfreien Bahn. Das System ist also zur Zeit $t=0$ in Ruhe ($v_1=0$ und $v_2=0$). Die Feder drückt auf beide Wagen mit betragsgleichen, aber entgegengesetzten Kräften:

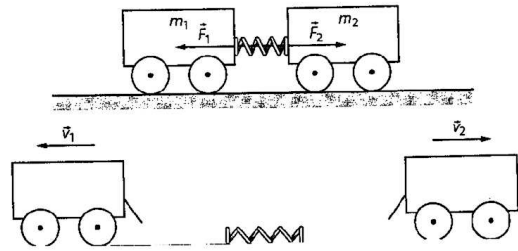


Abbildung 56: Nach Trennung verhalten sich die Geschwindigkeiten der Waagen v_1 und v_2 umgekehrt wie die Massen m_1 und m_2

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Brennt man den Verbindungsfaden mit einer Flamme durch, so fahren die Wagen auseinander. Die Endgeschwindigkeiten (nach Aufhören der Federkraft) stehen im Verhältnis:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{oder} \quad m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \quad \text{oder} \quad m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0 \quad (*)$$

Wenn man das Produkt $m_1 \cdot \vec{v}_1$ als eine neue physikalische Größe **Impuls** \vec{p} definiert, gilt für unser System, dass die Summe der Impulse vor und nach der Trennung der Wagen gleich sind (in diesem Fall gleich Null).

Impuls des Systems vor der Trennung: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0$ da $v_1 = v_2 = 0$

Impuls des Systems nach der Trennung: $m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0$ siehe *

Allgemein definiert man dieses Ergebnis als **Impulserhaltungssatz**:

Wirkt auf ein System keine äußere Kraft, dann bleibt der Gesamtimpuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ erhalten ($\vec{p} = \text{konstant}$).

Wirkt auf ein System eine äußere Kraft \vec{F} , dann wird der Impuls \vec{p} zeitlich verändert:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Das ist eine weitere Formulierung des zweiten Newtonschen Gesetzes.

Die Kraft \vec{F} ist die zeitliche Änderung des Impulses.

Beispiel:

Elastischer zentraler Stoß

Wir betrachten zwei Kugeln, die *zentral* aufeinander stoßen. Wenn es beim Stoß zu keiner Energieumwandlung kommt (z. B. kinetische Energie in Verformungsenergie oder Reibung) nennt man den Stoß *elastisch*.

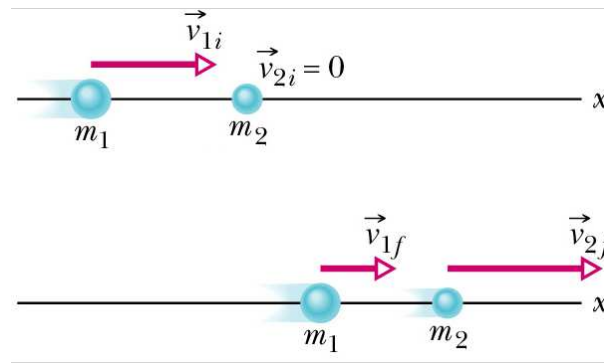


Abbildung 57: Elastischer zentraler Stoß

Der Index *i* steht in der Abbildung 57 für den Wert *v* vor dem Stoß und *f* für *v* nach dem Stoß.

Allgemein besagt der **Impulserhaltungssatz**, dass der Gesamtimpuls \vec{p}_i der beiden Kugeln vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß ist.

Bewegen sich die Kugeln längs einer Geraden (zentraler Stoß), so können wir mit Geschwindigkeitsbeträgen rechnen:

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f}$$

Wenn wir zusätzlich den **Energieerhaltungssatz** betrachten, haben wir:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2i}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2f}^2$$

Durch Umformen der beiden Gleichungen erhalten wir für die Geschwindigkeiten v_{1f} und v_{2f} nach dem Stoß:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \tag{*}$$

$$v_{2f} = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i}$$

Wir betrachten jetzt drei Spezialfälle:

1. Sei $m_1 = m_2$, dann ist nach (*) $v_{1f} = 0$, $v_{2f} = v_1$. Diese Situation strebt ein Billardspieler an. Nach dem zentralen Zusammenstoß zweier Kugeln gleicher Masse bleibt die ursprüngliche Kugel 1 ruhend zurück, während sich die ursprünglich ruhende Kugel 2 mit der Geschwindigkeit von Kugel 1 vor dem Stoß weiterbewegt.
2. Sei $m_1 = m_2$ und $v_{1i} = v_{2i}$, d. h. zwei gleich schwere Kugeln bewegen sich gleich schnell aufeinander zu. Nach dem Stoß sind dann die Geschwindigkeiten gerade vertauscht: $v_{1f} = v_{2i}$ und $v_{2f} = v_{1i}$.



Abbildung 58: Nach dem Stoß werden die Geschwindigkeiten gerade vertauscht

3. Ist m_2 viel größer als m_1 und $v_{2i} = 0$, dann folgt aus (*), dass der durch m_2 aufgenommene Impuls $2m_1v_{1i}$ ist, woraus folgt: $v_{1f} = -v_{1i}$ und $v_{2f} = 0$. Dieser Fall liegt vor, bei der elastischen Reflexion eines Balles an einer Wand. Der Ball prallt auf dem gleichen Weg und mit nahezu derselben Geschwindigkeit von der Wand ab.

4. Drehmoment, Gleichgewicht, Rotation

4.1 Starre Körper

Bis jetzt haben wir die Körper als punktförmig mit der Masse m betrachtet und die Bewegungsformen des Massenpunktes untersucht. Bei einem ausgedehnten Körper können wir aber die gesamte Masse an einem Punkt konzentriert betrachten. Diesen Punkt nennt man **Massenmittelpunkt** (speziell: Schwerpunkt). Alle auf den Körper einwirkenden Kräfte greifen an diesem Punkt an. Außerdem wird jeder Körper unter dem Einfluss von äußeren Kräften *deformiert*. Es kommt zu Formänderungen. Solange wir diesen Formänderungen bei kleinen Kräften noch vernachlässigen, sprechen wir von einem *starren* Körper. Bei der Bewegung eines starren Körpers bleiben die Abstände zwischen zwei beliebigen Massenpunkten im Körper unverändert.

4.2 Schwerpunkt

Bei Angreifen einer Gewichtskraft am Körper wird der **Massenmittelpunkt** auch **Schwerpunkt** genannt.

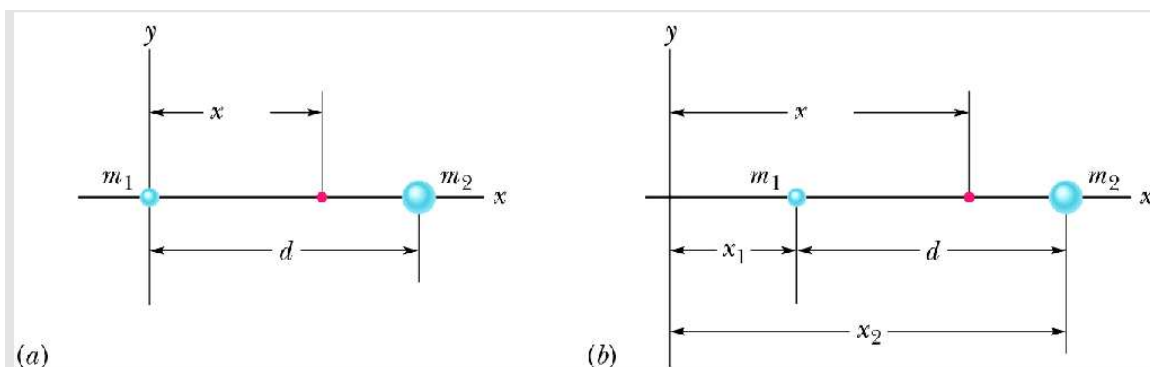


Abbildung 59: Schwerpunkt eines Systems das aus zwei Teilchen besteht, die starr miteinander verbunden sind

Der Schwerpunkt eines starren Körpers oder ein System von mehreren Teilchen ist derjenige Punkt, der sich so bewegt, als ob die gesamte Masse dort konzentriert wäre und alle äußeren Kräfte dort angreifen.

Als Beispiel betrachten wir zwei Massen m_1 und m_2 , die miteinander starr verbunden sind und einen Abstand d voneinander haben (Abb. 59).

Der Ursprung des Koordinatensystems wird hier willkürlich auf das Teilchen mit der Masse m_1 gelegt. Als Schwerpunkt des Zweiteilchen-Systems wird definiert

$$x_S = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d \quad (*)$$

x_S ist x -Koordinate des Schwerpunktes.

Wir betrachten jetzt mehrere Spezialfälle:

1. $m_2 = 0$ In diesem Fall enthält das System nur ein Teilchen, m_1 und Schwerpunkt liegt am Ort dieses Teilchens, d. h. $x_S = 0$ (Nullpunkt ist an den Ort von m_1 gelegt).
2. $m_1 = 0$ Der Schwerpunkt ist nach (*) gleich $x_S = d$.
3. $m_1 = m_2$ Der Schwerpunkt liegt exakt in der Mitte zwischen den Teilchen $x_S = \frac{d}{2}$.

Wenn ein Körper aus n Teilchen besteht, gilt für die x -Koordinate allgemein:

$$x_S = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i .$$

$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ist die Gesamtmasse der Teilchen.

Beispiel 1: Bewegung des Schwerpunktes

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Schwerpunkt eines nach oben geworfenen Schlägers. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel, als ob die Schwerkraft nur dort angreift. Alle anderen Punkte des Schlägers beschreiben kompliziertere Bahnkurven.

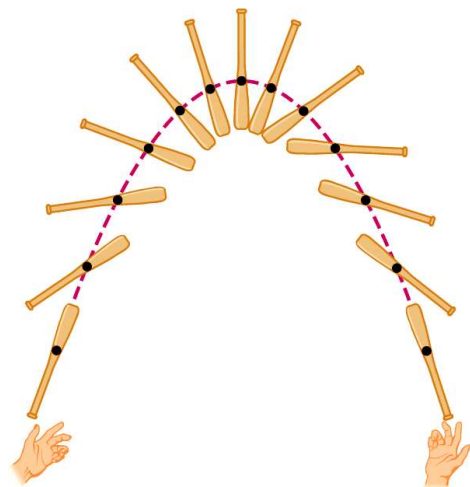


Abbildung 60: Der Schwerpunkt des Schlägers beschreibt eine Parabel

Beispiel 2: Der Schwerpunkt eines Körpers (zum Beispiel der eines Hufeisens) kann auch außerhalb des Körpers liegen. Der Mensch kann durch Körperbewegungen seinen Schwerpunkt verlagern, auch nach außen. Ein Hochspringer versucht seinen Schwerpunkt nach unten zu verlagern, damit er weniger Hubarbeit leistet (Abb. 61).



Abbildung 61: Ein Hochspringer verlegt seinen Schwerpunkt nach unten, damit er weniger Hubarbeit leistet (nach Harten).

Beispiel 3: Man kann den Schwerpunkt seines Körpers experimentell leicht bestimmen (Abb. 62). Man hängt den Körper nacheinander an zwei Aufhängepunkten und zieht von jedem Aufhängepunkt eine Gerade senkrecht nach unten. Der Schnittpunkt der Geraden, die direkt unterhalb des Aufhängepunktes liegt, ist der Schwerpunkt des Körpers.

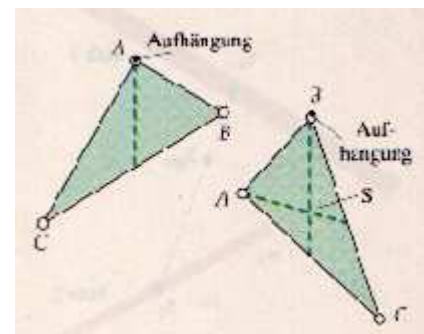


Abbildung 62: Bestimmung des Schwerpunktes eines Dreiecks

4.3 Drehmoment

Bis jetzt haben wir die Translationsbewegung eines Körpers behandelt. Dabei wird der starre Körper parallel zu sich selbst verschoben und die Bewegungsform wird durch die Kraft \vec{F} beschrieben. Zur Beschreibung der Rotationsbewegung oder Drehbewegung wird eine neue physikalische Größe definiert, die man **Drehmoment** \vec{M} nennt. Wir denken uns einen beliebigen starren Körper z.B. eine Scheibe mit fest gelagerten Drehachsen (Abb. 63) an einem Punkt der Scheibe greife eine Kraft \vec{F} an.

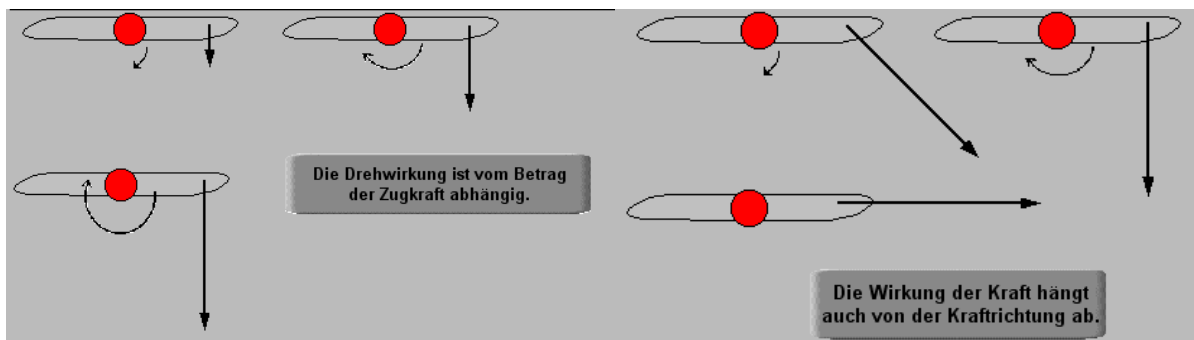


Abbildung 63: Die Drehwirkung hängt sowohl vom Betrag der angreifenden Kraft F als auch von deren Richtung ab.

Die Drehwirkung hängt vom Betrag der Zugkraft ab. Sie hängt auch von der Krafrichtung ab. Ein Experiment wird zeigen, dass die Drehwirkung auch abhängig von der Entfernung r des Angriffspunktes A zur Drehachse ist. (Abb. 64).

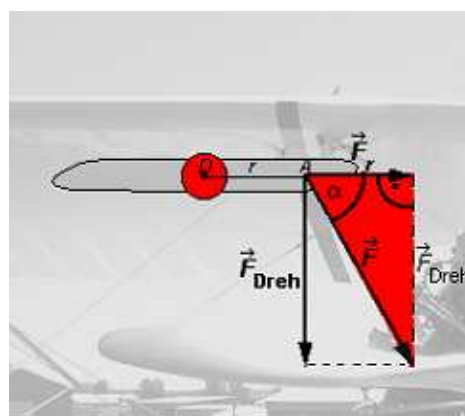


Abbildung 64: Zerlegung der angreifenden Kraft in zwei Komponenten \vec{F}_r und \vec{F}_{Dreh}

Man zerlegt die angreifende Kraft \vec{F} in eine Komponente \vec{F}_r , die in die Richtung r weist und in eine Komponente \vec{F}_{Dreh} , die senkrecht zu r steht und den wirksamen Teil der Kraft bei der Drehung darstellt. In dem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$F_{Dreh} = F \cdot \sin \alpha .$$

Da die Drehwirkung aber noch zusätzlich zum Abstand r proportional ist, wird sie durch das Produkt von F_{Dreh} mit r beschrieben.

Dieses Produkt nennt man das Drehmoment M

$$M = F \cdot \sin \alpha \cdot r \quad (*)$$

Für die Einheit von M gilt:

$$[M] = [F] \cdot [r] = \text{N} \cdot \text{m} .$$

Wenn man die physikalische Größen \vec{r} und \vec{F} vektoriell betrachtet, dann ist das Drehmoment \vec{M} auch ein Vektor und steht senkrecht auf \vec{r} und \vec{F} . Mathematisch kann man dann (*) auch als Vektorprodukt zu \vec{r} und \vec{F} darstellen.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Die Richtung von \vec{M} gibt den Drehsinn der Rechtsschraubenregel an.

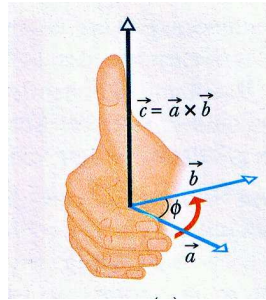


Abbildung 65: Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{b} gibt \vec{c} . \vec{c} entspricht Drehmoment \vec{M} , \vec{a} entspricht \vec{r} und \vec{b} entspricht \vec{F} . φ entspricht α im Text.

Wenn \vec{r} und \vec{F} senkrecht aufeinander stehen, dann ist $\alpha=90^\circ$ und $\sin\alpha = 1$, dann kann man (*) vereinfachen

$$M = F \cdot r$$

oder

Drehmoment = Kraft mal senkrechter Abstand zur Drehachse

r nennt man in diesem Fall den Kraftarm.

4.4 Kräftepaar

Ein System aus zwei Parallelen, den Betrag nach gleichgesetzt aber entgegen gesetzt gerichteten Kräften, deren Angriffspunkt *nicht* zusammenfallen, heißt ein **Kräftepaar** (Abb. 66).

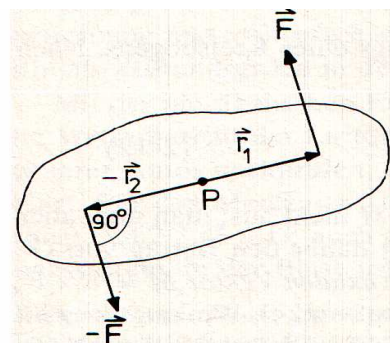


Abbildung 66: Zwei Kräfte, deren Angriffspunkt nicht zusammenfallen, bilden ein Kräftepaar.

\vec{F} und $-\vec{F}$ verursachen auch eine Drehung des Körpers. Der Körper dreht sich dann um eine auf der Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte liegende Achse P.

Nach der Abbildung 66 verursachen \vec{F} und $-\vec{F}$ zwei Drehmomente \vec{M}_1 und \vec{M}_2 .

Die Summe beider ergibt das resultierende Moment, die eine Drehung oder eine Rotation verursacht.

$$M = M_1 + M_2 = r_1 \cdot F + (-r_2) \cdot (-F) = (r_1 + r_2) \cdot F = r \cdot F$$

4.5 Hebel

Eine, um eine feste Achse drehbare Stange, an der z.B. zwei Kräfte angreifen wird ein **Hebel** genannt. Liegt die Achse zwischen den beiden Angriffspunkten der Kräfte, so ist der Hebel *zweiarmig*, liegt sie außerhalb beider Angriffspunkte, so ist er *einarmig*. Abbildung 67 zeigt einen zweiarmigen und einen einarmigen Hebel um die Drehachse D.

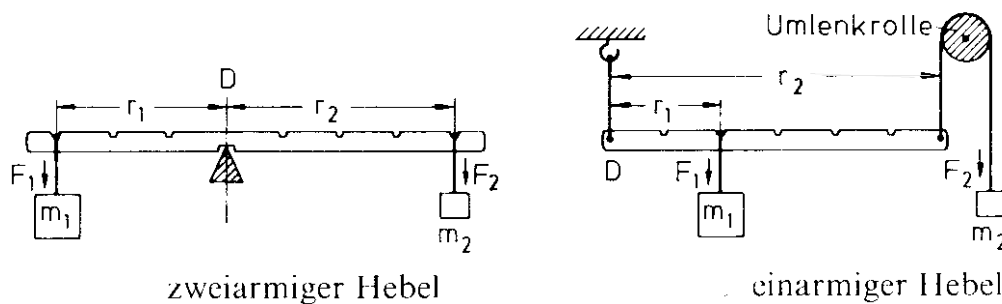


Abbildung 67: Beim zweiarmigen Hebel liegt die Achse zwischen den beiden Angriffspunkten, beim einarmigen Hebel liegt sie außerhalb der Angriffspunkte.

Nach (*) gilt für das Drehmoment $M = F \cdot \sin\alpha \cdot r$. In diesem Fall ist $\alpha = 90^\circ$ und $\sin\alpha = 1$.

Also \vec{F}_1 und \vec{F}_2 verursachen Drehmomente von den Beträgen:

$$M_1 = r_1 \cdot F_1$$

$$M_2 = r_2 \cdot F_2$$

Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der an ihm wirkenden Drehmomente gleich null ist. Also $M_1 = M_2$. Dann gilt das einfache **Hebelgesetz**:

$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$$

oder

Kraftarm mal Kraft = Lastarm mal Last

Beispiel: Abbildung 68 zeigt einen zweiarmigen Hebel, der im Gleichgewicht ist.

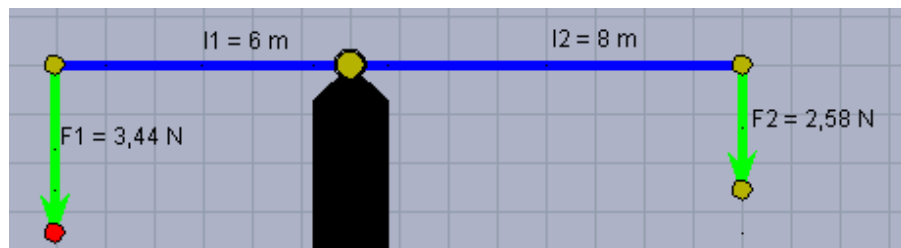


Abbildung 68: Dieser zweiarmige Hebel ist im Gleichgewicht oder das resultierende Drehmoment ist gleich Null.

Der menschliche Körper besteht aus einer Vielzahl von Hebeln an denen Kräfte angreifen und Drehmomente verursachen. Als Beispiele ist der Unterarm eines Menschen ein einarmiger Hebel (Abb. 69).

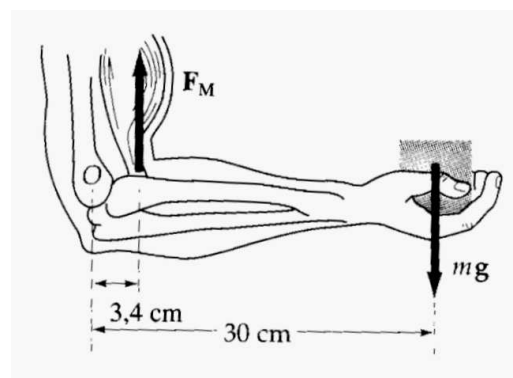


Abbildung 69: Der Unterarm eines Menschen stellt einen einarmigen Hebel dar.

Beispiel:

Ein Körper mit der Gewichtskraft $m \cdot g = 60\text{N}$ wird in der Hand gehalten. Man nimmt an, dass der Unterarm mit dem Oberarm einen Winkel von 90° bildet. Der Bizepsmuskel übt eine Kraft F_M nach oben aus, um das Gewichtsstück zu halten. Wie groß muss F_M sein? Der Abstand des Gewichtsstückes zum Drehpunkt O ist 30cm. Der Abstand der Muskeln zum Drehpunkt O ist aber 3,4cm. Also der Bizeps „sitzt am kürzeren“ Hebelarm und muss eine größere Kraft aufbringen. Wenn wir das Gewicht als Last bezeichnen und Muskelkraft als Kraft, dann gilt das Hebelgesetz:

Drehmoment verursacht durch Last = Drehmoment verursacht durch Muskelkraft oder

$$\text{Kraftarm} \cdot \text{Kraft} = \text{Lastarm} \cdot \text{Last}$$

oder

$$F_M \cdot 3,4\text{cm} = 60\text{N} \cdot 30\text{cm}$$
$$F_M = 529\text{N}$$

Die Kraft, die der Muskel ausüben muss, ist also viel größer als die Gewichtskraft von 60N.

4.6 Statisches Gleichgewicht

Wenn sich ein Körper in Ruhe befindet und in diesem Zustand bleibt, dann befindet er sich im **statischen Gleichgewicht**. Wenn die Summe alle *angreifenden Kräfte* \vec{F}_i auf den Körper Null ist, dann erfährt der Körper keine Beschleunigung, und wenn seine Geschwindigkeit am Anfang null war, bleibt er in Ruhe. Das ist eine notwendige Bedingung für einen Gleichgewichtszustand. Allerdings kann der Massenmittelpunkt eines Körpers in Ruhe sein und sich der Körper doch bewegen: Er kann rotieren (Beispiel: Kräftepaar). Daher gibt es eine zweite, notwendige Bedingung für den Gleichgewichtszustand eines Körpers: Die Summe aller *äußeren Drehmomente* \vec{M}_i muss auch null sein. Zusammengefasst:

Ein starrer Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die resultierende äußere Kraft, die auf den Körper wirkt, muss null sein.

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

2. Das resultierende äußere Drehmoment, dass auf den Körper wirkt, muss ebenfalls null sein.

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

4.7 Gleichgewichtsarten

Man unterscheidet drei Arten von Gleichgewicht: stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht. Stabiles Gleichgewicht liegt vor, wenn die Drehmoment oder die Kräfte, die nach einer kleinen Verschiebung des Körpers auf ihn wirken, ihn wieder in die Ausgangslage zurückbringen (Abb. 70).

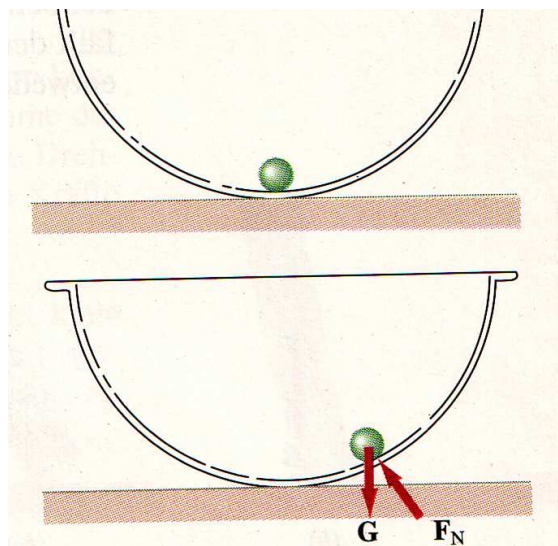


Abbildung 70: Der Ball befindet sich in stabiler Gleichgewichtslage.

Eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage erfordert Energiezufuhr.

Labiles Gleichgewicht liegt vor, wenn Drehmomente oder Kräfte, die nach einer Verschiebung auf ihn wirken, den Körper weiter von seiner Ausgangslage entfernen (Abb. 71). In diesem Fall wird *Energie* abgegeben.

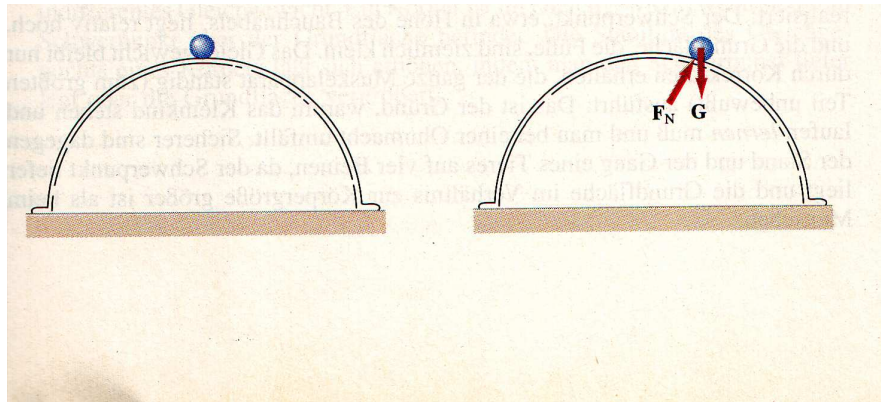


Abbildung 71: Der Ball befindet sich in labiler Gleichgewichtslage.

Ein Körper befindet sich im **indifferenten Gleichgewicht**, wenn bei einer Verschiebung keine rücktreibende Kraft oder kein Drehmoment auftritt und die *Energie* des Systems unverändert bleibt (Abb. 72).

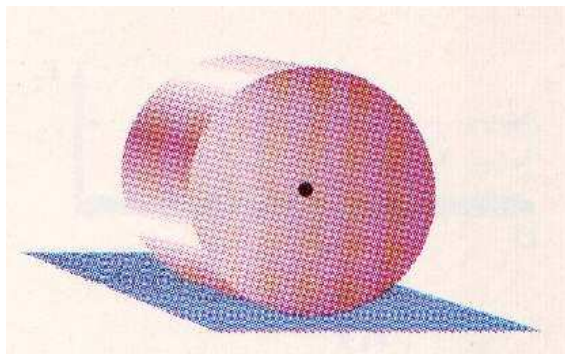


Abbildung 72: Der Körper befindet sich in indifferenter Gleichgewichtslage.

Ein aufgehängter Stab (Abb. 73) ist im **stabilen Gleichgewicht**, wenn sein Schwerpunkt unterhalb des Drehpunktes liegt. Die Stabilität des Gleichgewichtes eines Körpers lässt sich erhöhen, indem man den Schwerpunkt tiefer legt.

Die Verschiebung eines Körpers aus seiner **stabilen Gleichgewichtslage** erfordert *Energie* (Arbeit).

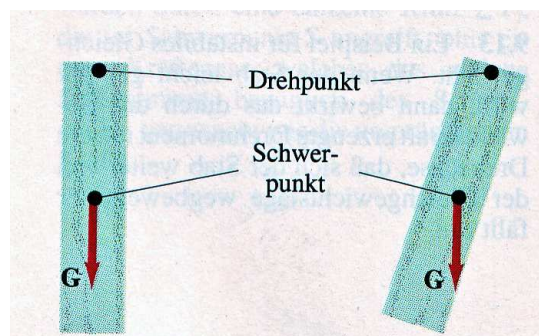


Abbildung 73: Der Stab ist so aufgehängt, dass sein Schwerpunkt unterhalb des Drehpunktes ist. Das Gleichgewicht ist also stabil.

4.8 Rotation

Bei der Beschreibung der Drehbewegung eines Massenpunktes (1.3 und 2.8) haben wir den Begriff **Winkelgeschwindigkeit** ω und **Bahngeschwindigkeit** v eingeführt, mit $v = \omega \cdot r$, wobei r der Abstand von der Drehachse (oder dem Drehpunkt) ist.

Im Falle der Rotation eines starren Körpers um eine Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω (z. B. eine Scheibe, Abb. 74) haben verschiedene Punkte der Scheibe zwar dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω aber verschiedene Bahngeschwindigkeiten $v_i = \omega \cdot r_i$.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant ist, können wir analog zur Translationsbewegung die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit als Winkelbeschleunigung α definieren.

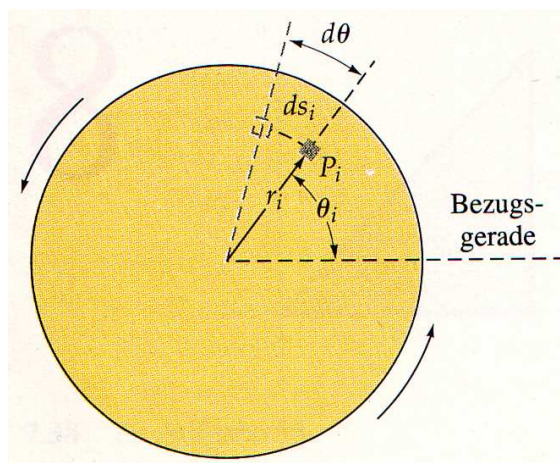


Abbildung 74: Bei einer rotierenden Scheibe ist die Winkelgeschwindigkeit ω gleich, aber die Bahngeschwindigkeit v hängt vom Abstand r_i zur Drehachse ab. θ im Bild entspricht φ im Text.

$$\alpha = \text{Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Änderung der Winkelgeschwindigkeit}}{\text{Änderung der Zeit}}$$

oder

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Wenn die Winkelgeschwindigkeit α nicht konstant ist, gilt allgemein

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ihre Einheit ist

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{1}{s^2} = s^{-2}$$

Analog zur Translationsbewegung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ($s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$) gilt für den überstrichenen Winkel in der Zeitspanne t :

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$

(Hier haben wir $a =$ Bahnbeschleunigung durch $\alpha =$ Winkelbeschleunigung und $s =$ Strecke durch $\varphi =$ Winkel ersetzt). Analog gilt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \alpha \cdot t$$

($v = a \cdot t$; ω statt v und α statt a)

Wir betrachten jetzt die Drehung eines Reifenapparates (Abb. 75).

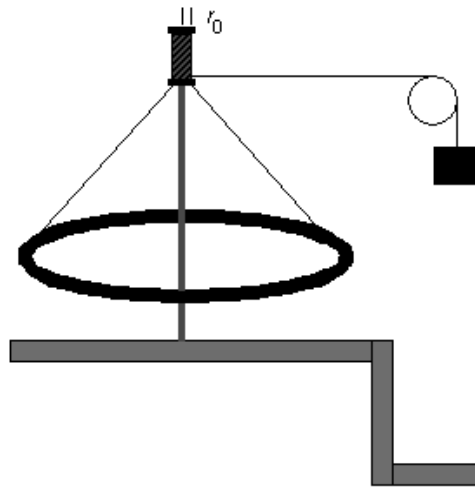


Abbildung 75: Über ein Seil erzeugt die Gewichtskraft eines Massenstückes ein Drehmoment $F = m \cdot r_0$ ($\alpha = 90^\circ$)

Über ein Seil und eine Rolle erzeugt ein Massenstück mit der Gewichtskraft $\vec{F} = \vec{F}_G$ ein Drehmoment \vec{M} . Für Beträge der Vektoren \vec{F} und \vec{r}_0 gilt

$$M = F \cdot r_0 \cdot \sin \alpha$$

F greift in einer Entfernung r_0 von der Drehachse an und der eingeschlossene Winkel ist 90° . Daher ist der Sinus dieses Winkels gleich 1. Wenn wir die Rotation des Reifenapparates mit unterschiedlichen Gewichtsstücken beobachten und dabei die Winkelbeschleunigung α messen, stellen wir fest, dass α (nicht verwechseln mit dem Winkel α) proportional zu dem Drehmoment M ist.

$$\alpha \propto M$$

Bei Experimenten mit verschiedenen Körpern und unterschiedlichen Gewichtsstücken kann man die Proportionalkonstante C bestimmen.

$$\alpha = C \cdot M \quad (*)$$

$$C = \frac{1}{m \cdot r_0^2}$$

Wir nennen das Produkt aus der Masse und dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse das **Trägheitsmoment I** :

$$m \cdot r_0^2 = I$$

Durch Einsetzen und Umformen von (*) erhält man

$$M = I \cdot \alpha$$

Drehmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung

M und I beziehen sich beide auf die Drehachse.

Das ist das **Grundgesetz der Rotationsbewegungen**.

Bei dem Reifenapparat haben alle Massenteilchen annähernd den gleichen Abstand zur Drehachse. Wenn man aber die Drehung einer Vollscheibe betrachtet, gilt das nicht mehr (Abb. 76).

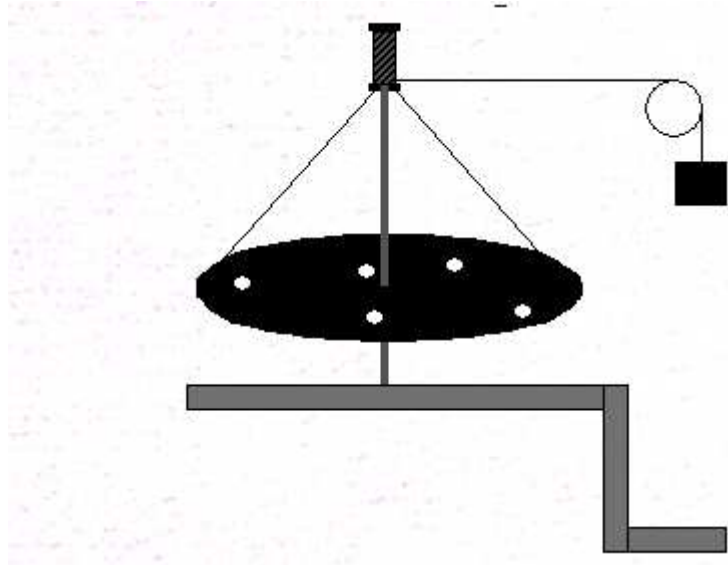


Abbildung 76: Bei Drehung einer Vollscheibe sind Abstände der Massenteilchen von der Drehachse unterschiedlich.

Zum Beispiel haben die fünf markierten Punkte einen unterschiedlichen Abstand zu der Drehachse. Man müsste also theoretisch das Trägheitsmoment eines jeden einzelnen Massepunktes mit dem entsprechenden Abstand zur Drehachse berechnen und dann aufsummieren.

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

Bei unendlich vielen Punkten ist diese Rechnung mit Hilfe der Integralrechnung möglich.

$$I = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot dm \quad (*)$$

I ist im Falle eines ausgedehnten starren Körpers ein Maß für die Verteilung der Masse des Körpers um eine bestimmte Drehachse. Das Trägheitsmoment eines Körpers ändert sich also mit der Lage der Drehachse im Körper. Für das Trägheitsmoment einer **Vollscheibe** relativ zur Drehachse durch den Schwerpunkt gilt:

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

Das Trägheitsmoment einer **Vollkugel** relativ zur Schwerpunktsachse beträgt:

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

Diese Formel gewinnt man durch Integration von (*) für die jeweilige geometrische Figur (z.B. Scheibe oder Kugel).

4.9 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Bei der Translationsbewegung gilt: Eine Kraft \vec{F} verursacht eine Bahnbeschleunigung \vec{a} .

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Bei der Rotationsbewegung gilt analog: ein Drehmoment \vec{M} verursacht eine Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$.

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \quad (*)$$

I ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse (siehe 4.8).

Wie wir festgestellt haben, besteht zwischen der Translationsbewegung und der Rotationsbewegung eine weitgehend formale Analogie. Wir können die Gleichung der Rotation aus der Gleichung der Translation herleiten, wenn wir nur die Strecke s , die Kraft F , Masse m usw. durch die entsprechenden Größen Winkel φ , Drehmoment M , Trägheitsmoment I , usw. ersetzen. In der folgenden Tabelle sind die Größen und Gleichungen der beiden Bewegungsarten verglichen worden:

Translations-Größe		Rotations-Größe	
Ort	\vec{s}	Winkel	φ
Zeit	t	Zeit	t
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Masse	m	Trägheitsmoment	$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment	$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$
Kinetische Energie	$W_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	Rotationsenergie	$W_{Rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

Tabelle 1: Gegenüberstellung translatorischer und rotatorischer Größen

5. Deformierbare feste Körper

Die Erscheinungsformen der Materie lassen sich in drei Zuständen, sogenannte **Aggregatzustände**, einteilen: *feste*, *flüssige* und *gasförmige* Zustände. Die Stärke der Bindungskräfte zwischen den Materieteichen oder zwischenmolekulare Kräfte nimmt in dieser Reihenfolge ab: fest, flüssig, gasförmig. Alle Bausteine der Materie, Moleküle und Ionen führen eine thermische Bewegung aus, die von der Temperatur des Körpers abhängt. Bei den Gasen bewegen sie sich aufgrund der schwachen zwischenmolekularen Kräfte ungeordnet in allen Richtungen. Die Atome der Festkörper besitzen Gleichgewichtslagen im Atomverbund, dem sogenannten Gitter, um die sie Schwingungen ausführen. Die Flüssigkeiten nehmen eine Zwischenstellung ein. Sie können sich über größere Abstände gegeneinander verschieben. Makroskopisch betrachtet haben die festen Körper eine bestimmte *Form* und ein bestimmtes *Volumen*. Sie sind **form- und volumenstabil**.

Eine Flüssigkeit hat keine bestimmt Form aber passt sich dem Gefäß an, in das sie eingefüllt wird. Sie ist *nicht formstabil, aber volumenstabil*.

Gase zeichnen sich dadurch aus, dass sie jeden ihnen zur Verfügung stehenden Raum ausfüllen, also Gestalt und Volumen ändern. Sie sind also weder **form-** noch **volumenstabil**.

5.1 Festkörper

Bei vielen festen Stoffen sind die Atome oder Ionen in einer geometrischen Struktur, genannt Kristallgitter, angeordnet. In einem solchen Gitter wiederholt sich die gleiche Anordnung von Atomen, wenn wir in einer bestimmten Richtung fortschreiten. Die Abbildung 77 zeigt das Beispiel eines kubischen Gitters. Die Bindungskräfte oder intermolekularen Kräfte werden als Feder dargestellt.

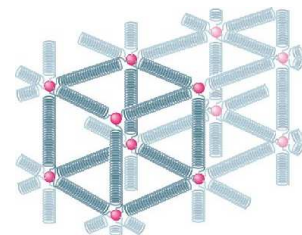


Abbildung 77: Die Anordnung eines kubischen Gitters. Die Bindungskräfte sind symbolisch durch Federn dargestellt.

Abbildung 78 zeigt Gitterstruktur CsCl. Die Cs^+ -Ionen bilden die Ecken eines Würfels und Cl^- sitzt im Zentrum des Würfels. Die Kantenlänge des Würfels beträgt 0,40nm. Die Bindungskräfte sind elektrische Anziehungskräfte zwischen Cs^+ und Cl^- -Ionen.

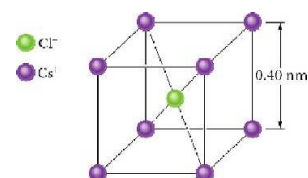


Abbildung 78: Die Gitterstruktur von CsCl.

Die thermische Bewegung der Ionen ist soweit eingeschränkt, dass jedes Ion nur Schwingungen um seine Gleichgewichtslage ausführen kann. Ein fester Körper ist allgemein kein **starrer** Körper. Bei starren Körpern wird angenommen, dass die Abstände der Massenpunkte (Atome) konstant sind.

Es kann unter dem Einfluss äußerer Kräfte dieser Abstand verändert werden und infolgedessen kann es zu Form- oder Volumenveränderungen des Körpers kommen.

Nimmt der Körper nach dem Verschwinden der äußeren Kraft unter den Einfluss der intermolekularen rücktreibenden Kräfte wieder seine ursprüngliche Form an, so sagt man, der Körper sei **elastisch**. Wenn die Formänderung nach dem Verschwinden der äußeren Kraft erhalten bleibt und sich nicht zurückbildet, sagt man der Körper sei **plastisch**. Dazwischen gibt es eine sogenannte Fließgrenze, an der ein elastischer Zustand in den plastischen Zustand übergeht.

5.2 Einseitige Dehnung, (Hooksches Gesetz)

Für kleine Verformungen elastischer Körper gilt das **Hooksche Gesetz**. (Abschnitt 2.10)

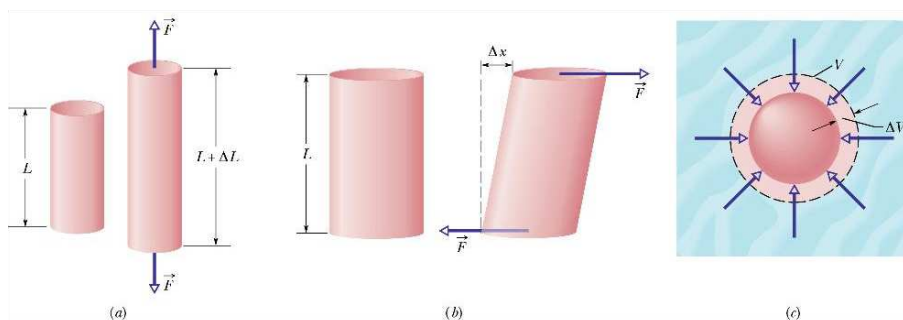


Abbildung 79: Einseitige Dehnung, Scherung und allseitige Dehnung

Abbildung 79, links (a) zeigt einen Metallstab, der einer Zugkraft F nach oben und unten ausgesetzt ist. Der Versuch zeigt, dass die Längenänderung ΔL proportional zur Stablänge L ist.

$$\Delta L \propto L$$

Das Verhältnis der Kraft F zur Querschnittsfläche A heißt **Spannung**

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

und wird mit σ (Sigma) bezeichnet. Das Verhältnis $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ wird **relative Längenänderung** oder **Dehnung** genannt und mit ε (Epsilon) bezeichnet.

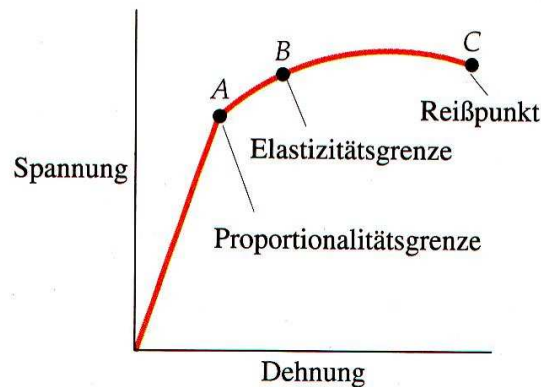


Abbildung 80: Bis zur Proportionalitätsgrenze hängt die Dehnung linear von der Spannung ab (Hooksches Gesetz).

Abbildung 80 zeigt den Zusammenhang von Spannung und Dehnung. Bis zu einem bestimmten Punkt A, der Proportionalitätsgrenze, hängt die Dehnung ε linear von der Spannung σ ab.

In diesem Bereich gilt das Hooksche Gesetz

$$\varepsilon \propto \sigma$$

Dehnung proportional zur Spannung

oder

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$

E heißt **Elastizitätsmodul** und ist ein Maß für die Festigkeit verschiedener Materialien. Die Einheit von E ist N/m^2 und ist für Stahl 200GN/m^2 , Blei 16GN/m^2 und Knochen 9GN/m^2 .

Bei der Abbildung 80 sieht man auch, dass bei größerer Dehnung die Spannung nicht mehr linear wachsen wird. Alle Verformungen bilden sich jedoch zurück, solange man unter der Elastizitätsgrenze bleibt. Bei weiterer Dehnung beginnt der Stab zu fließen und kehrt nach Entlastung nicht mehr zur Ausgangslage zurück.

Das ist jetzt eine **plastische Dehnung**. Bei höherer Dehnung erreicht der Stab einen Reißpunkt C, bei dem der Stab reißt. Diesen Punkt nennt man auch die Bruchgrenze.

5.3 Scherung und Torsion

Abbildung 79 (S. 59) zeigt einen zylinderförmigen Körper unter dem Einfluss einer Kraft F parallel zur Oberfläche. Die obere Fläche wird parallel zu sich selbst verschoben und die Seitenflächen erfahren eine Dehnung um den Winkel α . Bei kleinerer Verformung gilt:

$$\boxed{\frac{F}{A} = G \cdot \frac{\Delta x}{L}}$$

F/A ist die Schubspannung, L die Länge, Δx die seitliche Dehnung. G bezeichnet man als Schubmodul oder als Torsionsmodul. G ist ein Maß für die Formelastizität eines Körpers.

6. Ruhende Flüssigkeiten

Die Flüssigkeiten unterscheiden sich von den Festkörpern dadurch, dass ihre Moleküle nicht mehr an Gleichgewichtslagen gebunden und gegeneinander leicht verschiebbar sind. Deshalb nehmen sie die Form eines Gefäßes an. Bei Gasen ist die Beweglichkeit der Moleküle infolge der thermischen Bewegung viel größer. Sie haben das Bestreben, jeden Ihnen gebotenen Raum auszufüllen. Flüssigkeiten und Gase können fließen. Häufig werden für sie die Bezeichnung **Fluid** verwendet. Außerdem besitzen sie im Gegensatz zu den Festkörpern eine viel größere Kompressibilität, die durch eine elastische Größe K , das **Kompressionsmodul**, beschrieben wird.

Wird auf eine Flüssigkeit oder ein Gas ein Druck ausgeübt, so ist die Druckzunahme mit einer relativen Volumenabnahme $\Delta V/V$ proportional.

$$\Delta p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Abbildung 97 (Seite 59) zeigt das Volumen einer Flüssigkeit, die einem allseitigem Druck unterworfen ist und um einen Betrag ΔV schrumpft. Das negative Vorzeichen deutet darauf hin, dass eine Erhöhung des Druckes eine Verringerung des Volumens bewirkt.

Greift an einer Fläche A senkrecht zur ihr, nach innen gerichtet eine Kraft F an, so nennt man das Verhältnis von Kraft und Fläche den **Druck** p (Abschnitt 2.9).

$$p = \frac{F}{A}$$

Bei Flüssigkeiten und Gase hat der **Druck** p ähnliche Bedeutung wie **Kraft** F bei den Festkörpern.

6.1 Stempeldruck

Abbildung 81 zeigt ein Gefäß mit der Fläche A , das mit einer Flüssigkeit gefüllt ist.

Wirkt nun die Kraft F senkrecht zur Fläche A , so wird durch den Stempel auf die Flüssigkeit ein Druck ausgeübt. Es herrscht überall im Inneren ein sog. hydrostatischer Druck $p = F/A$. Diesen Druck, der allseitig gleich ist, nennt man auch **Stempeldruck**.

Bei dieser Betrachtung haben wir die Schwerkraft vernachlässigt.

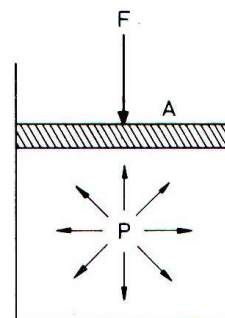


Abbildung 81: Stempeldruck ist allseitig gleich

Eine Anwendung des allseitigen hydrostatischen Druckes ist die hydraulische Presse (Abb. 82).

Zwei mit Flüssigkeit gefüllte Zylinder verschiedener Querschnittsfläche A_1 und A_2 werden verbunden. Auf Kolben 1 mit der Fläche A_1 wird eine F_1 ausgeübt.

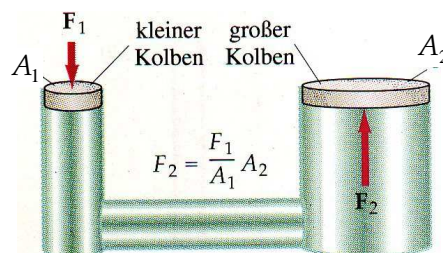


Abbildung 82: Hydraulische Presse

Ruhende Flüssigkeiten

Damit wird in der Flüssigkeit der Druck $p = \frac{F_1}{A_1}$ erzeugt.

Dieser Druck übt auf den Kolben 2 wegen der größeren Fläche eine größere Kraft aus.

$$F_2 = p \cdot A_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Die angreifenden Kräfte F_1 und F_2 verhalten sich wie die Querschnitte A_1 und A_2 .

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Man kann also hydraulische Presse zum Heben schwerer Lasten bestens verwenden. Damit wird die Arbeit erleichtert, weil die ausgeübte Kraft F relativ klein ist, aber Energie lässt sich so nicht gewinnen. Wird der Kolben 1 um die Wegstrecke s_1 verschoben, so wird der Kolben 2 um s_2 bewegt. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$W = F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Daraus folgt:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{F_1}{F_2}$$

W ist die geleistete Arbeit durch die Kolben 1 und 2.

Die Wege s_1 und s_2 verhalten sich also umgekehrt wie F_1 und F_2 . Was der große Kolben an Kraft gewinnt, verliert er an Schubweg ($F_2 > F_1$ aber $s_2 < s_1$).

Die geleistete Arbeit $W = F \cdot s$ kann auch als sogenannte **Volumenarbeit** umgeschrieben werden:

$$W = F \cdot s = p \cdot A \cdot s = p \cdot V$$

oder allgemein: Wenn in einem Rohr das Flüssigkeitsvolumen ΔV unter der Wirkung des Druckes p transportiert wird, so ist dazu die **Volumenarbeit**

$$W = p \cdot \Delta V$$

erforderlich.

Für Arbeit gilt allgemein:

Arbeit = Kraft mal Weg.

Bei Flüssigkeiten:

Arbeit = Druck mal Volumen

Wir nehmen hier vereinfachend an, dass Kraft und Weg gleiche Richtung haben.

6.2 Schweredruck

Wir betrachten jetzt den vom eigenen Gewicht der Flüssigkeit herrührenden Druck, den sogenannten **Schweredruck**.

Abbildung 83 zeigt eine Wassersäule mit der Höhe h und der Grundfläche A . Infolge der Schwerkraft ist der Druck von der Grundfläche der Säule größer als der Druck an der Oberseite der Säule.

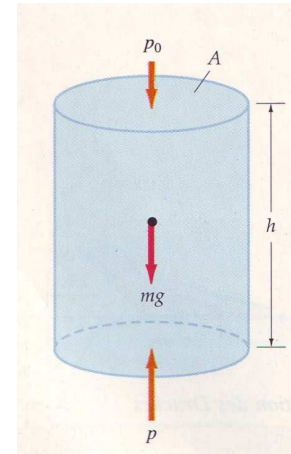


Abbildung 83: Der Schweredruck p steigt proportional mit der Tiefe h .

Für die Masse der Flüssigkeitssäule gilt:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$$

und für ihre Gewichtskraft:

$$F_G = m \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$$

ρ sei die Dichte der Flüssigkeit.

p_0 sei der Druck an der oberen Fläche (zum Beispiel Luftdruck), p sei der Druck am Fuße der Säule, dann ist die aus diesen Bruchdifferenz resultierende nach oben gerichtete Kraft $p \cdot A - p_0 \cdot A$. Das ist aber gleich der nach unten wirkenden Gewichtskraft der Säule, da die Flüssigkeit im Gleichgewicht ist.

$$p \cdot A - p_0 \cdot A = h \cdot \rho \cdot g \cdot A$$

oder

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

$h \cdot \rho \cdot g$ nennt man **Schweredruck** der Flüssigkeit.

Die Formel zeigt, dass der Druck p mit der Tiefe h linear zunimmt. Außerdem hängt zum Beispiel der Bodendruck einer Flüssigkeit nicht von der Form des Gefäßes ab. Der Druck p hängt nur von der senkrechten Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Boden ab. Diese als **hydrostatisches Paradoxon** bezeichnete Erscheinung folgt unmittelbar aus der Proportionalität zwischen p und h , wobei die Querschnittsgestalt nicht vorkommt.

In den sogenannten kommunizierenden Röhren (Abb. 84) steht die Flüssigkeit überall gleich hoch. Denn am Ort der tiefsten Stelle des Verbindungsrohres herrscht ein Gleichgewicht der Kräfte $F_1 = F_2$ oder

$$p_1 \cdot A_1 = p_2 \cdot A_2$$

$$h_1 \cdot \rho \cdot g \cdot A = h_2 \cdot \rho \cdot g \cdot A$$

Diese Gleichung ist dann erfüllt, wenn $h_1 = h_2$.

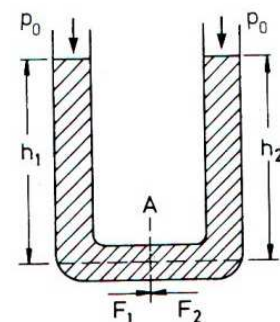


Abbildung 84: Kommunizierende Röhren

6.3 Auftrieb

Wir betrachten einen in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} eingetauchten Würfel mit der Kantenlänge a . Gegen die untere Fläche wirkt die Kraft

$$F_2 = p_2 \cdot a^2 = h_2 \cdot \rho_{Fl} \cdot g \cdot a^2$$

Ebenso wirkt in der Tiefe h_1 von oben auf den Würfel die Kraft

$$F_1 = p_1 \cdot a^2 = h_1 \cdot \rho_{Fl} \cdot g \cdot a^2$$

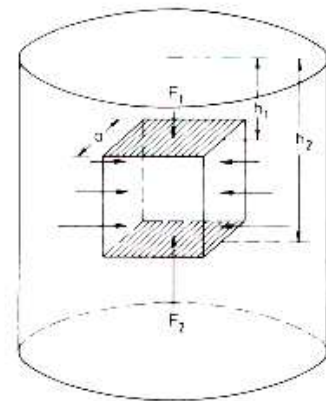


Abbildung 85: Berechnung des Auftriebs eines eingetauchten Würfels

Die Kräfte auf die Seitenflächen kompensieren sich. Die resultierende Kraft

$$A = F_2 - F_1 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \cdot a^2 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot a^3$$

oder allgemein:

$$A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g \quad (*)$$

V_K ist das Volumen des Körpers. Die Kraft A nennt man **Auftrieb**. Der Auftrieb kommt dadurch zustande, weil der Schweredruck an der Bodenfläche größer als an der Oberfläche ist. Durch den Auftrieb erfährt der Körper einen Gewichtsverlust. Dieser Sachverhalt wird auch das **Archimedische Prinzip** genannt. Aus (*) folgt, dass der Auftrieb gleich dem Gewicht der durch den Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge ist. Vom Betrag der Auftriebskraft hängt ab, ob ein Körper in einer Flüssigkeit schwimmt, schwebt oder sinkt. Man kann sich durch Anwendung der Gleichung (*) überzeugen, dass wenn Dichte ρ_K des Körpers größer ist als ρ_{Fl} , dann sinkt der Körper. $\rho_K = \rho_{Fl}$ bedeutet eine Schwebung und in dem Falle $\rho_K < \rho_{Fl}$ schwimmt der Körper; er taucht gerade so tief ein, dass die verdrängte Flüssigkeit ebenso viel wiegt wie er selber.

Die Tauchtiefe eines sogenannten Aerometers (Abb. 86) misst die Dichte der Flüssigkeit, in der es schwimmt. Es taucht umso tiefer ein, je geringer die Dichte der Flüssigkeit ist. Nach diesem Prinzip arbeitet auch die **Mohrsche Waage** zur Bestimmung der Dichte der Flüssigkeiten. (Abb. 87).

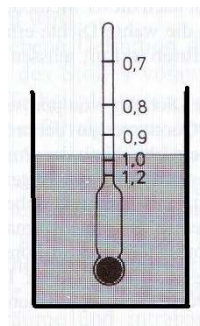


Abbildung 86: Aerometer

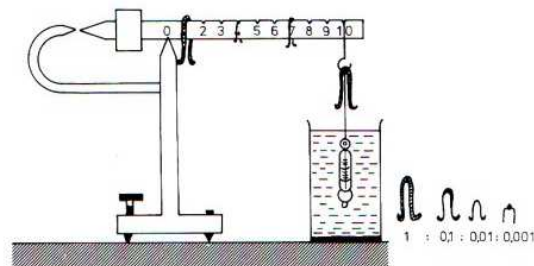


Abbildung 87: Mohrsche Waage

6.4 Manometer

Zur Druckmessung bei Gasen wird oft das sogenannte Flüssigkeitsmanometer verwendet. Ein U-förmiges Rohr wird mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ , z. B. Quecksilber gefüllt und an einem Schenkel ein Gefäß angeschlossen, innerhalb dessen der Druck p gemessen werden soll. Über dem anderen Schenkel herrscht der Luftdruck p_{Luft} (Abb. 88).

Die Höhendifferenz h ist proportional zur Druckdifferenz

$$\Delta p = p - p_{Luft} \quad \text{also} \quad \Delta p = h \cdot \rho \cdot g$$

Bei bekanntem Luftdruck im Außenraum folgt für den zu messenden Druck p

$$p = p_{Luft} + h \cdot \rho \cdot g$$

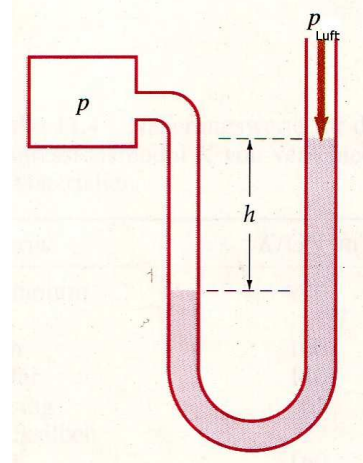


Abbildung 88: Flüssigkeitsmanometer zur Messung des Flüssigkeitsdruckes p

Zur Messung des Luftdrucks benutzt man ein geschlossenes Flüssigkeitsmonometer (Abb. 89).

Das obere Ende des rechten Schenkels ist abgeschlossen und evakuiert, so dass der Druck dort Null ist. Der gemessene Luftdruck im linken Schenkel ist proportional zum Höhenunterschied h und gleich

$$p_{Luft} = h \cdot \rho \cdot g$$

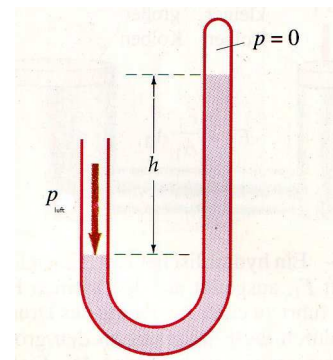


Abbildung 89: $h \cdot \rho \cdot g$ ist der Schweredruck der Flüssigkeitssäule

Zur Blutdruckmessung werden Membran-Monometer verwendet (Abb. 90). Eine Membran wird durch Einwirkung des Druckes verformt. Die Verformung der Membran wird über ein Zahnrad auf einen Zeiger übertragen und nach richtiger Eichung der Druck p gemessen.

Membranmanometer

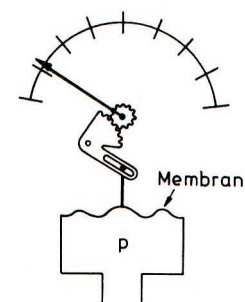


Abbildung 90: Membranmanometer

7. Ruhende Gase

Die Moleküle der Gase sind infolge der thermischen Bewegung viel beweglicher als die Flüssigkeiten. Ein Körper mit dem Volumen V erfährt in den Gasen auch, wie bei einer Flüssigkeit einen Auftrieb.

$$A = \rho_{\text{Gas}} \cdot V_K \cdot g$$

Wegen der geringeren Dichte der Gase ist aber der Auftrieb viel kleiner als bei den Flüssigkeiten und oft vernachlässigbar.

Die Gase lassen sich leicht komprimieren. Das führt dazu, dass der Schweredruck nicht mehr linear sondern exponential höhenabhängig ist.

Der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe h exponentiell nach der Gleichung

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{8000}}$$

ab.

p_0 Luftdruck in Meereshöhe, h Höhe in Meter.

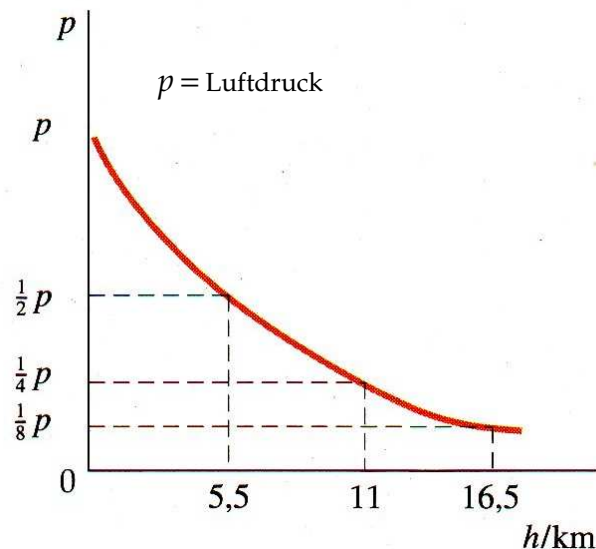


Abbildung 91: Der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe exponentiell ab.

Zum Beispiel beträgt der Luftdruck in 11.000m (typische Flughöhe) ein Viertel des Luftdrucks an der Erdoberfläche.

8. Grenzflächeneffekte

8.1 Oberflächenspannung

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit herrschen Anziehungskräfte, die man als **Kohäsionskräfte** bezeichnet. Die Kräfte zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit und denen des Gefäßes, zum Beispiel den Kapillaren, nennt man **Adhäsionskräfte**. Innerhalb einer Flüssigkeit (z.B. Wasser) ist jedes Molekül von vielen anderen Molekülen umgeben (Abb. 92).

Die zwischen den Molekülen wirkenden Anziehungskräfte wirken gleichmäßig nach allen Seiten und heben sich daher in ihrer Wirkung gegenseitig auf. An der Oberfläche der Flüssigkeit, also an der *Grenzfläche* zwischen Flüssigkeit und Luft, fehlen nach oben hin die Flüssigkeitsmoleküle und damit auch die entsprechenden Anziehungskräfte. Nach unten hin sind jedoch Moleküle vorhanden, die die an der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Moleküle anziehen. Deshalb wirkt auf ein Oberflächenmolekül eine resultierende Kraft F , die ins Innere der Flüssigkeit gerichtet ist. Die Summe dieser Kräfte tritt als **Oberflächenspannung** in Erscheinung. Die Oberfläche einer Flüssigkeit verhält sich wie eine dünne, gespannte Haut.

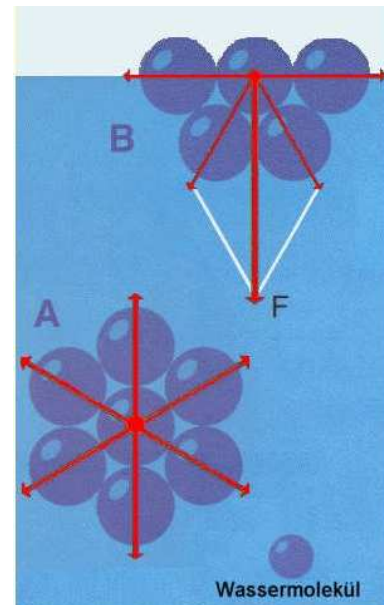


Abbildung 92: Kräfterdiagramm zur Oberflächenspannung

Will man die Oberfläche vergrößern, so muss man Moleküle aus dem Flüssigkeitsinneren an die Oberfläche bringen. Dazu muss Arbeit gegen F , entlang des Weges durch die Oberflächenschicht verrichtet werden und die potentielle Energie des Moleküls nimmt dabei zu.

Man definiert dann als **Oberflächenspannung** σ (Sigma) folgenden Quotienten:

$$\sigma = \frac{\text{Zuwachs an Energie}}{\text{Oberflächenzunahme}} = \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad (*)$$

Die Einheit von σ lautet: J/m^2 oder N/m .

Als Beispiel betrachten wir einen u-förmig gebogenen Draht, an dem ein verschiebbarer Bügel angebracht ist (Abb. 93).

Zwischen Draht und Bügel befindet sich eine Seifenlamelle. Zur Verschiebung des Bügels ist eine Kraft F erforderlich, womit die Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta a$ verrichtet wird.

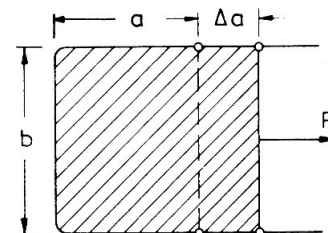


Abbildung 93: Berechnung der Oberflächenspannung bei der Verschiebung des Bügels bei einer Seifenlamelle

Man erhält aus (*) für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \cdot \Delta a}{2 \cdot \Delta a \cdot b} = \frac{F}{2b}$$

Der Faktor 2 rührt daher, dass die zusätzlich entstandene Flüssigkeitshaut an der Oberfläche zwei Seiten hat, nämlich nach außen und nach innen.

Zur Messung der Oberflächenspannung σ wird ein Ring an einer Federwaage aufgehängt (Abb. 94) und in die Flüssigkeit eingetaucht. Zieht man ihn nun nach oben, so zieht er einen zylinderförmigen Flüssigkeitsfilm hinter sich her. Die Federwaage zeigt zusätzlich zur Gewichtskraft eine Kraft F_σ die von der Oberflächenspannung herrührt.

$$F = F_G + F_\sigma.$$

Aus F_σ kann man dann die Oberflächenspannung σ der untersuchten Flüssigkeit nach der folgenden Gleichung ausrechnen (ohne Herleitung).

$$F_\sigma = 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot d$$

d ist der Durchmesser des Ringes.

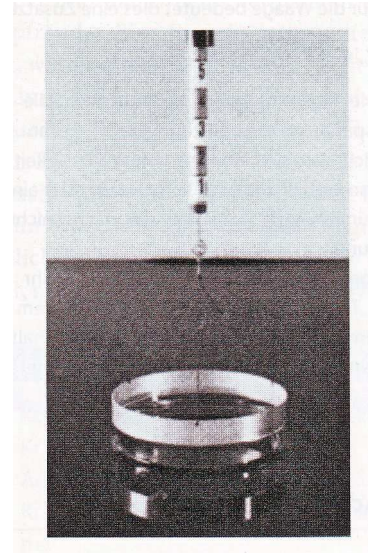


Abbildung 94: Messung der Oberflächenspannung (nach Harten)

Ein System befindet sich im stabilen Gleichgewicht, wenn seine potentielle Energie ein Minimum besitzt. Aus diesem Grund nehmen Tropfen und Seifenblasen eine Kugelgestalt an. Denn von allen geometrischen Figuren mit gleichem Volumen besitzt *die Kugel* die kleinste Oberfläche, also auch die minimale potentielle Energie, die von der Oberflächenspannung hervorgerufen wird.

In einem Tropfen vom Radius r erzeugt die Oberflächenspannung einen Binnendruck

$$p = 2 \cdot \frac{\sigma}{r}$$

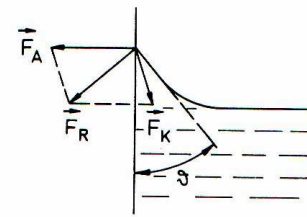
8.2. Kapillarität

Wir betrachten die Oberfläche einer Flüssigkeit in einem engen Gefäß, zum Beispiel Kapillargefäß. Es sind zwei Kräftearten wirksam, die Kohäsionskraft \vec{F}_K zwischen einzelnen Flüssigkeitsmolekülen und Adhäsionskraft \vec{F}_A zwischen der Glaswand und den Flüssigkeitsmolekülen (Abb. 95). Die Flüssigkeitsoberfläche ist immer senkrecht zur resultierenden Kraft: $\vec{F}_R = \vec{F}_K + \vec{F}_A$.

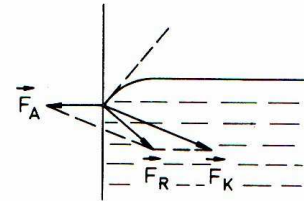
Grenzflächeneffekte

Es gibt zwei Fälle:

$F_A > F_K$, dann zeigt F_R in Richtung der Kapillare. Die Flüssigkeit wird an der Kapillarwand hochgezogen. Die Flüssigkeitsoberfläche bildet eine konkav gekrümmte Oberfläche. Es handelt sich um ein *benetzendes System*. Ein Beispiel ist Glas und Wasser. Wenn die Kohäsionskräfte F_K größer sind als die Adhäsionskräfte $F_K > F_A$, dann zeigt die resultierende Kraft F_R in die Richtung der Flüssigkeit.



Benetztes System



Nicht benetztes System

Abbildung 95: Kapillarwirkung

Die Flüssigkeit wird in Wandnähe herabgedrückt und die Oberfläche ist konvex gekrümmt (Abb. 96). Ein Beispiel ist Quecksilber in einem Glasrohr. Es handelt sich in diesem Fall um ein *nicht benetzendes System*.

In einem engen Rohr, sog. Kapillare, wird die Erscheinung der Anhebung und Depression der Oberfläche besonders deutlich. Die Kapillarität hängt eng mit Adhäsions- und Kohäsionskräften und der Oberflächenspannung zusammen. Aus der Steighöhe der Flüssigkeit in einer Kapillare kann man auch die Oberflächenspannung bestimmen. Im speziellen Fall einer vollkommen benetzenden Flüssigkeit z.B. Wasser-Glaskapillare gilt für die Steighöhe:

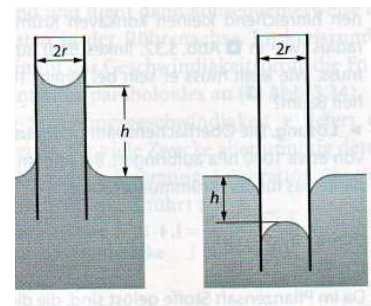


Abbildung 96: Benetzte und nicht benetzte Kapillare

$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{r \cdot \rho_{Fl} \cdot g}$$

Bei gleicher Oberflächenspannung σ ist die Steighöhe umso größer je kleiner der Radius der Kapillare ist.

9. Strömungen der Flüssigkeiten und Gase

Bei der Untersuchung von Strömungen bewegter Flüssigkeiten und Gase (Fluide) nehmen wir zuerst an, dass die Strömung gleichmäßig oder laminar verläuft. Dabei wird die Bahn einzelner Teilchen durch sogenannte **Stromlinien** gekennzeichnet. Die Abbildung 97 zeigt die Stromlinie einer **laminaren** Strömung um ein Hindernis.



Abbildung 97: Die Stromlinien einer laminaren Strömung um ein Hindernis (nach Pohl)

Die Abbildung 98 zeigt die Stromfäden einer laminaren und turbulenten Strömung. Rechts eine laminare Strömung, links eine turbulente Strömung. Die Voraussetzung für eine laminare Strömung ist, dass sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen (oder Gasteilchen) in einem gegebenen Punkt nicht ändert. Die zweite Annahme ist, dass eine ideale inkompressible Flüssigkeit vorliegt. Die dritte Annahme ist, dass das Fluid nicht viskos ist. Die inneren Reibungskräfte zwischen den Fluidteilchen werden vernachlässigt.

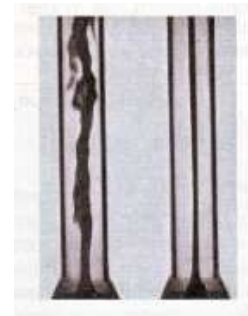


Abbildung 98: Stromfäden eines Fluids (nach Pohl)

Die Viskosität (oder Zähigkeit eines Fluids) ist ein Maß dafür, welchen Widerstand das Fluid gegen das Fließen aufbringt.

Honig fließt schwerfälliger als Wasser und ist keine ideale Flüssigkeit.

9.1 Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten jetzt die Strömung einer laminaren, nicht viskosen und inkompressiblen Flüssigkeit (oder Gas). Abbildung 99 zeigt eine Flüssigkeit, die in einer Röhre mit unterschiedlichem Querschnitt fließt. Der dunkle Bereich auf der linken Seite ist das Flüssigkeitsvolumen, das so an der Fläche A_1 in einem bestimmten Zeitintervall Δt in die Röhre hinein fließt.

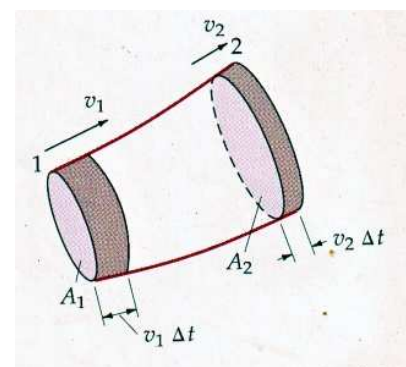


Abbildung 99: Strömung einer nicht-viskosen Flüssigkeit in einem Rohr verschiedenen Querschnitts A_1 und A_2 .

Die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit an der Stelle sei v_1 , dann fließt in der Zeit Δt das Volumen ΔV mit

$$\Delta V = A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

in die Röhre hinein. Es muss das gleiche Volumen an der Fläche A_2 auf der rechten Seite der Röhre heraus fließen (markiertes Volumen).

$$\Delta V = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

Damit diese beiden Volumina gleich sind, gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

oder

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Aus der Gleichung geht hervor, dass bei *kleinen* Rohrquerschnitten die **Strömungsgeschwindigkeit** größer ist als bei den *großen*.

Anwendungsbeispiel:

Blut fließt von einer großen Arterie mit 0,3cm Radius, in der die Strömungsgeschwindigkeit 10cm/s beträgt, in einen Bereich, in dem der Radius (aufgrund von Ablagerungen durch Arteriosklerose) nur noch 0,2cm beträgt. Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes im engen Bereich? Durch Einsetzen von

$$v_1 = 10 \text{ cm/s}, \quad A_1 = \pi \cdot (0,3 \text{ cm})^2 \quad \text{und} \\ v_2 = ?, \quad A_2 = \pi \cdot (0,2 \text{ cm})^2$$

aus der Kontinuitätsgleichung $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$ folgt:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 = 22,5 \text{ cm/s} = 0,225 \text{ m/s}.$$

9.2 Bernoulli-Gleichung

Bei einer Änderung des Strömungsquerschnittes ändert sich nicht nur die Geschwindigkeit von der strömenden Flüssigkeit sondern auch der Druck im strömenden Medium (Abb. 98). Wir betrachten eine Strömung in einem Rohr mit unterschiedlichen Querschnittflächen A_1 und A_2 . Bei der Verengung des Querschnitts von A_1 auf A_2 wird die Geschwindigkeit einer Fluidmenge mit der Masse m von v_1 auf v_2 erhöht.

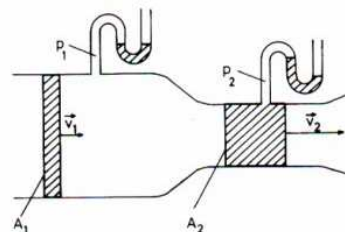


Abbildung 100: Bei einer Querschnittsverengung nimmt die Geschwindigkeit v zu und der statische Druck p ab.

Das führt zur Änderung der **kinetischen Energie**

$$\Delta W_{kin} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Strömung der Flüssigkeiten und Gase

Dazu muss eine Beschleunigungsarbeit geleistet werden. In diesem Fall Volumenarbeit $p \cdot V$ (siehe Abschnitt 6.1), diese führt zur Abnahme der **potentiellen Energie** $\Delta W_{\text{pot}} = (p_1 - p_2) \cdot V$, wobei p_1 der Druck bei der Geschwindigkeit v_1 , und p_2 der Druck bei der Geschwindigkeit v_2 ist. Der Energieerhaltungssatz verlangt, dass

$$\Delta W_{\text{kin}} = \Delta W_{\text{pot}}$$
$$\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2) \cdot V$$

oder nach Umstellung:

$$p_1 \cdot V_1 + \frac{m}{2} \cdot v_1^2 = p_2 \cdot V_2 + \frac{m}{2} \cdot v_2^2.$$

Dieser **Energiesatz** wird in diesem Fall **Bernoulli-Gleichung** genannt und gilt allgemein:

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 + p \cdot V = \text{const.}$$

oder nach Division durch das Volumen V

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + p = \text{const.}$$

Die Größe $\frac{1}{2} \rho \cdot v^2$ hat die Dimension eines Druckes und heißt **Staudruck**, p ist der **statische Druck**. Die Summe stellt also den Gesamtdruck dar. Aus der Bernoulli-Gleichung folgt, dass in einem Gebiet *größerer* Strömungsgeschwindigkeit der Druck stets *kleiner* ist als in Gebieten geringerer Geschwindigkeiten. Abbildung 100 zeigt: $v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$, oder in der Querschnittsverengung nimmt der statische Druck p ab.

9.3 Viskosität

Bis jetzt haben wir Strömung *idealer* Flüssigkeiten und Gase (Fluide) betrachtet. Die *realen* Fluide sind aber viskos. Man kann die inneren Reibungskräfte zwischen den Molekülen nicht vernachlässigen. Honig fließt schwerfälliger als Wasser. Die **innere Reibung** zwischen den Molekülen und Gasen wird durch eine neue physikalische Größe definiert, der **Viskosität** oder **Zähigkeit**. Abbildung 101 zeigt zwei Platten mit der Fläche A , zwischen denen sich eine viskose Flüssigkeit befindet. Die obere Platte werde von einer Kraft F parallel zur unteren ortsfesten Platte gezogen. Durch innere Reibung überträgt sich diese Bewegung auf die unteren Schichten. Liegt eine laminare Strömung vor, dann ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten nahe der oberen Platte gleich v , nahe der unteren Platte gleich null. Dazwischen ist die Änderung von v linear. Die Kraft F , die man benötigt, um die obere Platte zu bewegen, ist direkt proportional zu v und zur Fläche A und umgekehrt proportional zum Abstand z zwischen den Platten.

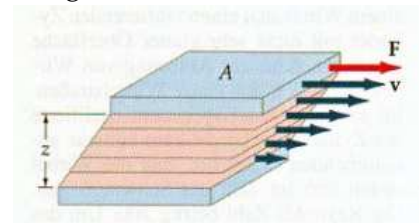


Abbildung 101: Zur Definition der Viskosität

$$F \propto \frac{v \cdot A}{z}$$

oder

$$F = \eta \cdot \frac{v \cdot A}{z}$$

Die Proportionalitätskonstante η (Eta) nennt man die Viskosität. η besitzt die Einheit Pascalsekunde.

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s}$$

Frühere Einheit für η : 1 Poise (P), $1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

9.4 Stokes'sche Gesetz

Fällt eine Kugel in eine viskose Flüssigkeit, so erfährt sie durch innere Reibung der Flüssigkeit eine **Reibungskraft** F_R entgegen der Bewegungsrichtung nach oben (Abb. 102). Bei einer laminaren Strömung mit kleiner Sinkgeschwindigkeit v ist gemäß dem Stokes'schen Gesetz die Reibungskraft F_R gleich

$$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot r$$

Dabei bedeuten r Radius der Kugel, v Geschwindigkeit, η Viskosität der Flüssigkeit. Die Kugel erfährt insgesamt drei Kräfte:

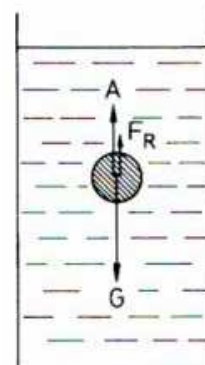


Abbildung 102: Eine Kugel erfährt drei Kräfte, Gewichtskraft, Auftrieb und Reibungskraft

1. Die Gewichtskraft $G = m \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$ nach unten
2. Der Auftrieb $A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$ nach oben
3. Die Reibungskraft $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot r$ nach oben

Nach dem Loslassen wird die Kugel durch die Gewichtskraft G zunächst beschleunigt. Bei ansteigender Geschwindigkeit v nimmt jedoch die Reibungskraft F_R proportional der Geschwindigkeit v zu, so dass die Kugel im Gleichgewicht mit konstanter Geschwindigkeit v_0 sinkt. Es gilt:

$$F_R = G - A$$

Durch Einsetzen kann man die Sinkgeschwindigkeit bestimmen:

$$\boxed{v_0 = g \cdot \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{\eta} \cdot \frac{2r^2}{9}} \quad (*)$$

Die Sink- oder Sedimentationsgeschwindigkeit v ist proportional zu r^2 . Bei der Blut-senkung spielt dies eine große Rolle, denn hier bestimmt man die Sedimentationsgeschwindigkeit der im Blutplasma suspendierten Erythrozyten. Liegen Entzündungen

im Körper vor, klumpen die Erythrozyten zusammen und haben so einen größeren Radius, es erhöht sich die Senkungsgeschwindigkeit ($v \propto r^2$). Die Gleichung (*) eignet sich auch bei bekanntem r, ρ_{Fl} und ρ_{K} zur Bestimmung der Viskosität η der Flüssigkeit. In diesem Fall nennt man den Messapparat *Kugelfallviskosimeter*.

9.5 Hagen-Poiseuille Gesetz

Wir behandeln jetzt die Strömung eines laminaren, viskosen Fluids in einem zylindrischen Rohr (Abb. 103). Zur Aufrechterhaltung der Strömung muss eine der Reibung entgegengesetzte Kraft aufgewendet werden, wie etwa durch eine Druckdifferenz $p_2 - p_1 = \Delta p$. Das *Geschwindigkeitsprofil* eines laminar strömenden viskosen Fluids in einem zylindrischen Rohr ist ein *parabolisches Geschwindigkeitsfeld*.

Man definiert das in der Zeit t fließende Fluidvolumen V als **Volumenstromstärke** I :

$$I = \frac{V}{t} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}$$

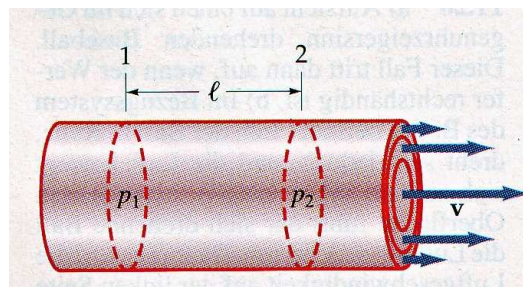


Abbildung 103: Zur Aufrechterhaltung der Strömung muss eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ vorhanden sein.

Im Falle eines Rohres mit der Länge l und einer kreisförmigen Querschnittsfläche vom Radius r gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille:

$$I = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}$$

Die Volumenstromstärke ist danach direkt proportional zur Druckdifferenz Δp , umgekehrt proportional zur Viskosität η und wächst mit der vierten Potenz des Rohrradius. Bei gleicher Druckdifferenz und einer Verdoppelung des Rohrradius steigt beispielsweise die Volumenstromstärke auf das 16fache.

Der **Strömungswiderstand** R ist infolge der Viskosität in einem zähen Fluid abhängig von den Reibungskräften innerhalb des Fluids und wird definiert als:

$$R = \frac{\Delta p}{I} = \frac{\text{Druckgefälle}}{\text{Volumenstromstärke}} \quad (*)$$

Als **Newtonsche Flüssigkeiten** bezeichnet man diejenigen, bei denen R konstant ist und die Volumenstromstärke I proportional zum Druckgefälle steigt.

Strömung der Flüssigkeiten und Gase

Die Gleichung (*) ist analog zum *Ohmschen Gesetz* der Elektrizität. Volumenstromstärke I ist analog zum elektrischen Strom und Δp ist analog zur elektrischen Spannung. Ähnlich zur Elektrizität kann man die Strömung einer Flüssigkeit in einem verzweigten Rohrsystem durch das **Kirchhoff'sche Gesetz** beschreiben.

1. Kirchhoff'sche Gesetz:
Verzweigt sich eine Strömung, so ist die einfließende und ausfließende Strömungsmenge gleich.
2. Kirchhoff'sche Gesetz:
Wenn zwei Verzweigungspunkte durch parallel geschaltete Rohre miteinander verbunden sind, so ist die Druckdifferenz Δp an allen Stromverzweigen gleich.

Aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgt:

Sind mehrere Kapillare *hintereinander* geschaltet, so addieren sich ihre Strömungswiderstände:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Bei der *Parallelschaltung* von Kapillaren gilt:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Es gibt aber auch Strömungen, die keinen linearen Zusammenhang zwischen Volumenstärke I und Druckdifferenz Δp aufzeigen; hier ist das Gesetz von Hagen-Poiseuille *bedingt* gültig. Blut ist beispielsweise eine nicht-newtonsche Flüssigkeit.

Abbildung 104 zeigt zum einen eine newtonsche Flüssigkeit mit linearer Abhängigkeit zwischen Δp und I und zwei weitere Beispiele einer nicht-newtonschen Flüssigkeit. Es handelt sich hier um Blutströmung in den Gefäßen des Lungenkreislaufes (L) bzw. Nierenkreislaufes (N).

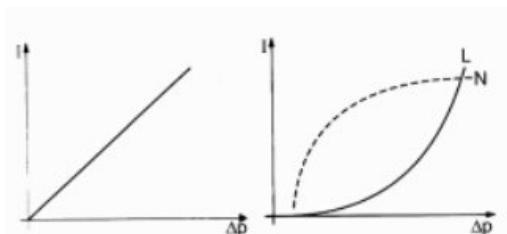


Abbildung 104: Newtonsche und nicht-newtonsche Flüssigkeit (nach Harten)

In beiden Fällen besteht kein linearer Zusammenhang zwischen Volumenstromstärke I und dem Druckgefälle Δp .

Wir haben bis jetzt nur die laminare Strömung (siehe 9.1) betrachtet. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eine gewisse Grenze überschreitet, geht die laminare in eine turbulente Strömung über (Abb. 98, S. 71). Diese Grenzgeschwindigkeit hängt von der Viskosität η , der Dichte ρ , der Flüssigkeit sowie dem Radius des Gefäßes, ab.

Strömung der Flüssigkeiten und Gase

Zu Charakterisierung der Strömung definieren wir eine Größe, die sogenannte **Reynolds-Zahl** R_e . Bei einer viskosen Strömung wird Beschleunigungsarbeit gegen Reibungskräfte verrichtet.

Das Verhältnis der

$$\eta_e = \frac{\text{Beschleunigungsarbeit}}{\text{Reibungsarbeit}}$$

wird Reynolds-Zahl R_e genannt.

η_e ist eine dimensionslose Zahl und gleich:

$$R_e = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

ρ = Dichte von Flüssigkeiten

v = mittlere Geschwindigkeit

l = charakteristische Länge (bei einer Röhre gleich dem Radius r)

η = Viskosität

Erfahrungsgemäß geht die laminare Strömung in eine turbulente Strömung über, wenn R_e einen kritischen Grenzwert von etwa 1100 überschreitet.

10. Wärmelehre

10.1 Wärme und Temperatur

Wärme ist verknüpft mit der ungeordneten molekularen Bewegung eines Stoffes. Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle. Zur Bestimmung der Temperatur ist nicht immer Verlass auf unsere Temperaturempfindung oder Wärmewahrnehmung. Zum Beispiel erscheint uns die Temperatur bei der Berührung eines Metallstückes geringer als die eines Holzstückes zu sein, obwohl beide dieselbe Temperatur aufweisen. Die Wärmeenergie unserer Hand wird von Metall viel schneller entzogen als von Holz. Daher versucht man, die Temperatur als Basisgröße und unabhängig von unserem subjektiven Empfinden zu definieren. Danach ist die Einheit der Temperatur eine Basiseinheit und wird Kelvin genannt.

Bringt man zwei Körper, die anfangs verschiedene Temperaturen besitzen in Berührung, so nehmen sie nach einiger Zeit eine einheitliche Temperatur an. Der wärmere Körper kühlt sich ab (Wärmeabgabe) und der kältere Körper erwärmt sich (Wärmeaufnahme). Beide Körper sind dann im *thermischen Gleichgewicht*. Befinden sich zwei Körper A und B im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten Körper C, so stehen sie auch untereinander im Gleichgewicht (Abb. 105).

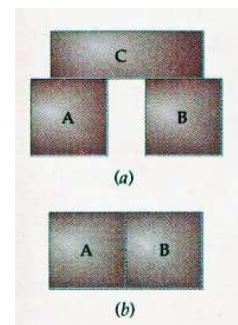


Abbildung 105: Thermisches Gleichgewicht zwischen Körper A und B

10.2 Temperaturmessung

Viele Eigenschaften der meisten Substanzen ändern sich bei Änderung der Temperatur und können zu deren Messung herangezogen werden. Zum Beispiel **thermische Ausdehnung** einer Flüssigkeit, **Widerstand** eines Metalldrahtes oder **Druck** eines Gases.

a) Celsius-Skala

Mit steigender Temperatur nimmt das Volumen der Flüssigkeiten und Gase zu. Die Volumenausdehnung einer Quecksilbersäule in einer Kapillare wird meistens zur Temperaturmessung herangezogen. Die Fixpunkte der Celsius-Skala sind:

- Gefrierpunkt des Wassers 0°C (Null Grad Celsius)
- Siedepunkt des Wassers 100°C .

(Bei normalem Luftdruck $p_n = 1013\text{hPa}$)

Der Bereich dazwischen wird in 100 gleich große Teile geteilt, jedes Teil entspricht einem Grad Celsius (Abb. 106).

b) Kelvin-Skala

Bei der Kelvin-Skala nimmt man auch zwei Fixpunkte:

Tripelpunkt des Wassers: Flüssiges Wasser, festes Eis und Wasserdampf können nur bei einem bestimmten Druck und Temperatur *gleichzeitig* existieren, dem Tripelpunkt des Wassers. Wir ordnen diesem Punkt bei Normaldruck eine Temperatur von $T = 273,16 \text{ K}$ zu (großes T steht für Kelvin-Skala).

Zweiter Fixpunkt ist der absolute Nullpunkt $T = 0 \text{ K}$.

Nach internationaler Übereinkunft entspricht einem Grad Kelvin dem $1/273,16$ ten Teil der Differenz vom absoluten Nullpunkt und Tripelpunkttemperatur des Wassers. Die Kelvin-Skala nennt man auch thermodynamische Temperaturskala.

Kelvin-Skala und Celsius-Skala haben die gleichen Teilungen, nur die Fixpunkte sind unterschiedlich.

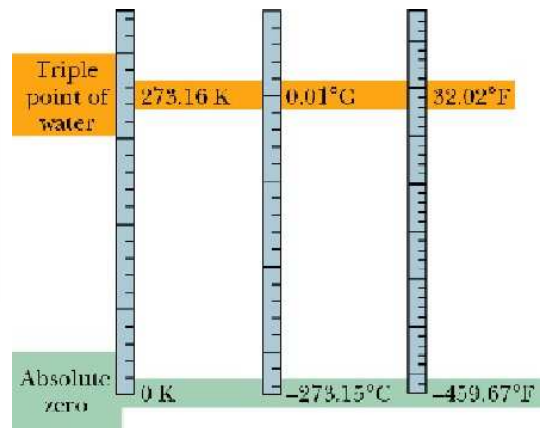


Abbildung 106: Kelvinskala, Celsiusskala und Faradayskala

Der Tripelpunkt des Wassers liegt unter Normaldruck bei $273,16 \text{ K}$. Also liegt er um $0,01 \text{ K}$ höher als der Schmelzpunkt von Eis ($273,15 \text{ K}$). Die Messzahl der Kelvin-Skala ist also um $273,15$ größer als die des Celsius-Skala:

$$T_K = T_C + 273,15$$

Die **Temperaturdifferenzen** sind aber bei Kelvin- und Celsiusskala gleich.

Der absolute Nullpunkt 0K entspricht $-273,15^\circ \text{ C}$.

In angelsächsischen Ländern verwendet man die *Fahrenheit-Skala*. Die Umrechnung lautet $T_F = 1,8T_C + 32^\circ\text{C}$. Bei der Fahrenheitskala versucht man negative Vorzeichen zu vermeiden. 100°F entspricht ungefähr der Körpertemperatur der Menschen.

10.3 Thermische Ausdehnung

Mit steigender Temperatur nehmen die Abmessungen fester und flüssiger Körper zu. Bei Gasen wächst neben dem Volumen auch der Druck.

a) **Längenausdehnung**

Erhöht sich die Temperatur eines Metallstabes der Länge l_0 um einen Betrag Δt , so nimmt seine Länge um den Betrag Δl zu:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t$$

Die Konstante α nennt man **linearer Ausdehnungskoeffizient**.

b) Volumenausdehnung

Mit der Längenausdehnung nimmt auch das Volumen des Körpers zu:

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta t$$

l_0 und V_0 sind Anfangslänge und Anfangsvolumen vor der Erwärmung.

Die Konstante β wird **Volumenausdehnungskoeffizient** genannt. Es gilt:

$$\beta = 3 \cdot \alpha$$

Anwendung 1: **Thermometer**

Ein Bimetallstreifen besteht aus zwei Metallen mit unterschiedlichem linearen Ausdehnungskoeffizienten α die zusammengeschweißt sind. Bimetallstreifen verbiegen sich bei Erwärmung zur einen, bei Abkühlung zur anderen Seite hin (Abb. 107). Wird das eine Ende des Streifens fest gelagert und das andere Ende mit einem Zeiger verbunden, kann er als Thermometer verwendet werden.

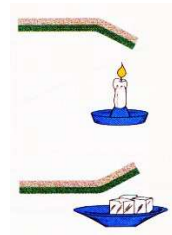


Abbildung 107: Bimetallstreifen als Thermometer

Anwendung 2: **automatische Temperaturregelung**

Ein Bimetallstreifen kann auch durch Verbiegen bei einer bestimmten Temperatur einen elektrischen Kontakt öffnen oder schließen (Abb. 108).

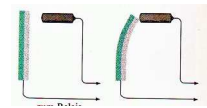


Abbildung 108: Bimetallstreifen als Thermostat

Anwendung 3: **Flüssigkeitsthermometer**

Zur Temperaturmessung nutzt man die Volumenausdehnung einer Flüssigkeit. Bei Quecksilber markiert man die Höhe des Hg-Säule beim Eis und beim Siedepunkt des Wasser und teilt die Strecke in 100 gleich große Teile (bei Normaldruck). Da Quecksilber bei $-38,87^\circ$ fest wird, verwendet man bei tieferen Temperaturen Methanol (bis -100° C).

Anwendung 4: **Fieberthermometer**

Bei dem Fieberthermometer (Hg-Thermometer) muss die Säulenlänge auch beim Abkühlen erhalten bleiben, damit man genau ablesen kann. Daher ist die Kapillare vom unteren Ende her stark verengt. Die Flüssigkeitssäule reißt ab (Abb. 109).

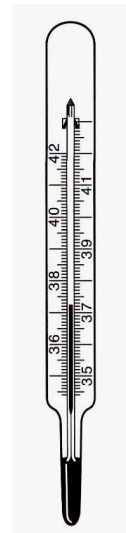


Abbildung 109: Beim Fieberthermometer ist die Kapillare im unteren Ende stark verengt

10.4 Zustandsgleichung der idealen Gase

Die thermische Bewegung sorgt dafür, dass sich die Moleküle eines Gases aufgrund der Zusammenstöße mit den Nachbarmolekülen auf einem Zickzackkurs bewegen. Zur Beschreibung des Zustandes der Gase werden wir zuerst die **makroskopisch** Größen wie **Druck** p , **Temperatur** T und **Volumen** V heranziehen, um später den Zusammenhang dieser Größen mit der eigentlichen Molekularbewegung zu untersuchen. Zuerst behandeln wir den Zustand des Gases in idealisierter Form als sogenannte ideale Gas. Ideale Gase werden hauptsächlich durch zwei Merkmale charakterisiert:

1. Die **Abstände** zwischen den Molekülen sind viel größer als ihre Durchmesser, so dass man das Eigenvolumen des Gases nicht berücksichtigt.
2. Die **intermolekularen Kräfte** werden – außer beim Zusammenstoß – vernachlässigt.

Wasserstoff H und Helium He verhalten sich im Normalzustand wie ideale Gase. Alle Gase nähern sich dem idealen Zustand bei genügend kleiner Dichte und höherer Temperatur an. Der makroskopische Zustand einer Gasmenge wird durch drei Zustandsgrößen festgelegt:

- Temperatur T ist abhängig von der kinetischen Energie der Moleküle
- Druck p ist abhängig von der Gasdichte (Anzahl der Moleküle) und ihren Geschwindigkeiten
- Volumen V

a) Isotherme Zustandsänderung (Volumenabnahme)

Komprimiert man ein Gas bei *konstanter Temperatur*, d.h. in einem isothermen Zustand, so steigt der Druck p . Beim Expandieren (Volumenzunahme) sinkt der Druck. Es gilt das Gesetz von **Boyle-Moriotte** (Abb. 110):

$$p \cdot V = \text{konst.}$$

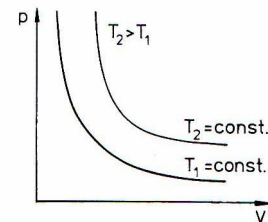


Abbildung 110: Bei isotherme Zustandsänderung wird die Temperatur konstant gehalten

b) Isobare Zustandsänderung

Bei isobaren Zustandänderungen wird der Druck p konstant gehalten (Abb. 111). Hier gilt das 1. Gay-Lussacsche Gesetz

$$V = V_0(1 + \gamma \cdot t)$$

V_0 : Volumen bei 0°

γ : Volumenausdehnungskoeffizient idealer Gase $= 1/273,15 \cdot \text{K}^{-1}$

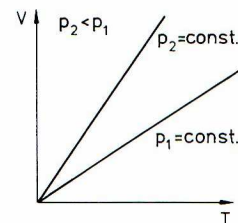


Abbildung 111: Bei isobarer Zustandsänderung wird der Druck konstant gehalten

c) **Isochore Zustandsänderung**

Bei der isochoren Zustandsänderung wird Volumen V konstant gehalten (Abb. 112). Dann ist der Druck p proportional zur Temperatur T .

Es gilt das 2. Gay-Lussacsche Gesetz

$$p = p_0(1 + \beta \cdot t) \quad \text{oder} \quad p = p_0 \frac{T}{\beta}$$

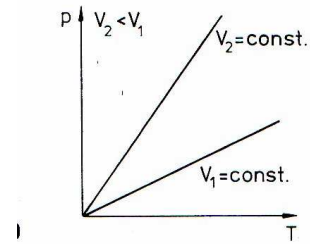


Abbildung 112: Bei isochorer Zustandsänderung wird das Volumen V konstant gehalten.

p_0 = Druck bei 0°C

$\beta = \gamma = 1/273,15 \cdot \text{K}^{-1}$.

d) **Allgemeine Zustandsänderung**

Wenn p , v und T veränderbar sind, gilt die allgemeine Zustandsgleichung der idealen Gase:

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R$$

n = die in Mol gemessene Stoffmenge

$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (universelle Gaskonstante)

Da $\frac{p \cdot V}{T}$ für eine bestimmte Gasmenge n eine Konstante darstellt, gilt für zwei Gaszustände:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

Anwendungsbeispiel 1:

Der lineare Zusammenhang zwischen Druck p und Temperatur T bei konstantem Volumen (isochore Zustandsänderung) eignet sich zur Messung der Temperatur (Abb. 113). Eine Gasmenge befindet sich in einem Behälter B1. Die Kapillare B2 und B3 sind mit einem beweglichen Schlauch verbunden. Damit wird das durch Anheben oder Absenken des Gefäßes B3 das Gasvolumen in B1 konstant gehalten. Der Druck des Gases p wird mittels eines Flüssigkeitsmonometers durch die Höhendifferenz h angezeigt. Man misst den Druck p bei zwei verschiedenen Temperaturen zum Beispiel 0° und 100° . Da eine Linearität zwischen p und T besteht, wird der Graph zu tieferen Temperaturen hin extrapoliert, er schneidet die Abszisse bei $-273,15^\circ\text{C}$. Dort liegt der absolute Nullpunkt (0° Kelvin).

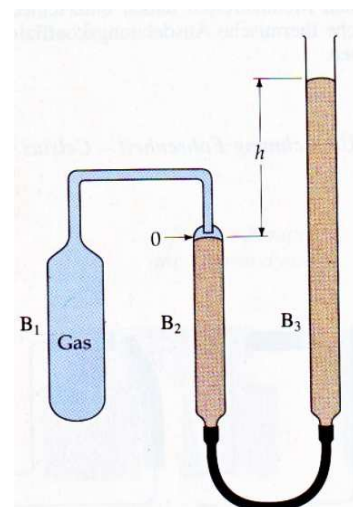


Abbildung 113: Gasthermometer

Anwendungsbeispiel 2:

Bei gemischten idealen Gasen ist der Partialdruck p_i des i -ten Komponente des Gasgemisches gegeben durch

$$p_i = n_i \frac{R \cdot T}{V}.$$

n_i = Stoffmenge

Nun besagt das **Dalton'sche Gesetz**, dass der Gesamtdruck eines gemischten idealen Gases gleich der Summe aller Partialdrücke p_i ist.

$$p_{ges} = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \sum_{i=1}^n p_i$$

10.5 Wärmeenergie und Molekularbewegung

Die Atome und Moleküle eines Körpers sind ständig in Bewegung, jedoch gibt es Unterschiede bei festen, flüssigen und gasförmigen Körpern.

- Bei festen Körpern führen die Moleküle Schwingungen um ihre festen Gleichgewichtslagen aus.
- Bei flüssigen Körpern bewegen sich die Moleküle fortschreitend auf unregelmäßigen Bahnen. Diese Brown'sche Bewegung kann man sogar unter dem Mikroskop bei langen Molekularketten einer Flüssigkeit beobachten.
- Die Beweglichkeit der Gasmoleküle ist viel größer. Sie bewegen sich frei auf geraden Bahnen, stoßen elastisch mit anderen Molekülen und der Wand zusammen, so dass Zickzackbahnen entstehen. Der mittlere geradlinige Weg zwischen zwei Zusammenstößen wird **mittlere freie Weglänge** genannt. Sie beträgt bei Luft unter Normalbedingungen 0,1 nm.

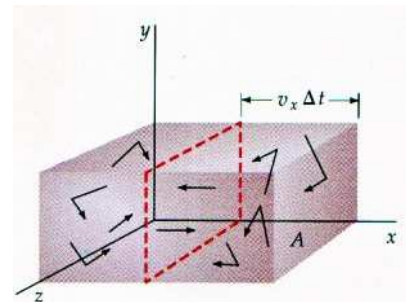


Abbildung 114: Die Gasmoleküle prallen auf die Wände des Gasbehälters und werden reflektiert.

Die kinetische Gastheorie beschreibt den Zusammenhang zwischen der makroskopischen Zustandsgröße Druck p und der Temperatur T mit den Bewegungsgrößen der Gasmoleküle (Geschwindigkeit v und Energie W).

Die Gasmoleküle prallen auf die Wände des Gasbehälters (Abb. 114) und werden reflektiert. Dabei wird auf der Wand eine Kraft ausgeübt und ein Impuls übertragen. Der Druck p eines Gases rührt von den Stößen seiner Moleküle auf die Behälterwand her. N Gasteilchen mit der Masse m und mittlerer Geschwindigkeit v befinden sich in einem quaderförmigen Behälter mit dem Volumen V . Wir werden zuerst die Bewegung der Moleküle in x -Richtung nach links v_x betrachten; da die Bewegung isotrop ist, lässt sich dieselbe Überlegung bei v_y und v_z machen. Die Anzahl der Moleküle, die im Zeitintervall Δt von links auf die rechte Wand mit der Fläche A treffen, sind gleich

der Anzahl der Moleküle, die höchstens den Abstand $v_x \cdot \Delta t$ von dieser Wand haben und sich nach links bewegen. Das ist gleich der Anzahldichte N/V multipliziert mit dem Volumen $v_x \cdot \Delta t \cdot A$ und mal $\frac{1}{2}$, denn im Mittel bewegen sich die Hälfte der Moleküle nach rechts, die andere Hälfte nach links. Wenn wir die zeitliche Impulsänderung dieses Moleküls nach dem Zusammenstoß mit der Wand betrachten, können wir die Kraft, die die Moleküle auf die diese ausüben und schließlich den Druck p berechnen. Es gilt für den Druck:

$$p = \frac{1}{3} N \frac{m}{V} v^2 \quad \text{oder} \quad p = \frac{1}{3} N \cdot \rho \cdot v^2.$$

v = mittlere Geschwindigkeit der Moleküle

Der Druck eines Gases ist also proportional zur Dichte m/V und dem mittleren Quadrat der Geschwindigkeit der Moleküle v^2 .

Im Abschnitt 10.4 haben wir die Zustandsgleichung des idealen Gases kennengelernt ($pV=nRT$). Wenn wir die beiden Gleichungen gleichsetzen, erhalten wir

$$\frac{N \cdot m \cdot v^2}{3} = n \cdot R \cdot T \quad \text{oder}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{3n \cdot R}{2N} \cdot T \quad (*)$$

Die Gleichung besagt, dass die **mittlere kinetische Energie** $mv^2/2$ der Gasmoleküle proportional zur **absoluten Temperatur** T des Gases ist.

Wenn wir die Anzahl der Moleküle N durch die Stoffmenge n dividieren, so erhalten wir $N/n=N_A$, wobei N_A die Avogadro-Konstante (die Anzahl der Moleküle pro Mol) ist.

Wir setzen in (*) $\frac{n}{N} \cdot R = k$ ein. Die Konstante k ist die Boltzmannkonstante und hat den Wert:

$$k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Jetzt können wir (*) in vereinfachter Form schreiben:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2} k \cdot T. \quad (**)$$

(**) bezieht sich auf die mittlere kinetische Energie des einzelnen Moleküls, und zwar nur für die Translationsbewegung, die in drei Richtungen erfolgt.

Die Translationsbewegung der Gasteilchen erfolgt in drei Richtungen (man sagt auch, die Gasteilchen haben drei Freiheitsgrade). Pro Freiheitsgrad gilt:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{1}{2} k \cdot T .$$

Das gilt nur für einatomige Gase. Für mehratomige Gase muss man auch die Rotationsenergie berücksichtigen (Abb. 115). Das Hantel-Modell eines zweiatomigen Moleküls z.B. N₂ oder H₂ zeigt, dass zu den drei Freiheitsgraden der Translation weitere zwei Freiheitsgrade des Rotation hinzu kommen.

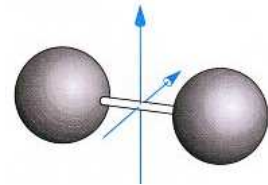


Abbildung 115: Hantelmodell eines zweiatomigen Gasmoleküls

Daraus folgt, dass die gesamte mittlere kinetische Energie eines **zweiatomigen Moleküls** bei einer Temperatur T beträgt

$$W_{kin} = \frac{5}{2} k \cdot T .$$

Zusammengefasst:

- a) Der Druck p eines Gases ist proportional zur mittleren quadratischen Geschwindigkeit der Gasmoleküle v^2

$$p \propto v^2$$

- b) Die Temperatur eines Gases ist proportional zur mittleren kinetischen Energie der Gasmoleküle

$$T \propto \frac{m}{2} v^2$$

- c) Die mittlere kinetische Energie eines einzelnen Moleküls pro Freiheitsgrad beträgt:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} k \cdot T$$

- d) Die mittlere kinetische Energie eines Mols beträgt

$$W_{mol} = \frac{1}{2} R \cdot T$$

k = Boltzmannkonstante

R = Gaskonstante ($R = n \cdot k$).

Bis jetzt haben wir vereinfacht von einer mittleren Geschwindigkeit der Gasmoleküle v gesprochen. Die Moleküle ändern aber nach dem Zusammenstoß mit anderen Molekülen ihre Geschwindigkeiten. Es gibt eine Geschwindigkeitsverteilung (Maxwellsche Verteilung), die angibt, welche Bruchteile der Moleküle dN Geschwindigkeiten innerhalb eines Intervalls zwischen v und $v+dv$ besitzen.

$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

N = Gesamtzahl der Moleküle.

$f(v)$ ist eine von der Temperatur T abhängige Funktion (Abb. 116), die mit der Methode der Statistik ermittelt wird. Ihr Maximum, d.h. die wahrscheinlichste Geschwindigkeit liegt bei

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k \cdot T}{m}}$$

m = Molekülmasse

k = Boltzmannkonstante

und verschiebt sich mit höherer Temperatur T nach rechts. Die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ist etwas größer als die maximale Geschwindigkeit v_{\max} . Die farbige Fläche ist gleich dem Anteil des Moleküls, dessen Geschwindigkeit im engen Intervall dv bei der Geschwindigkeit v liegt.

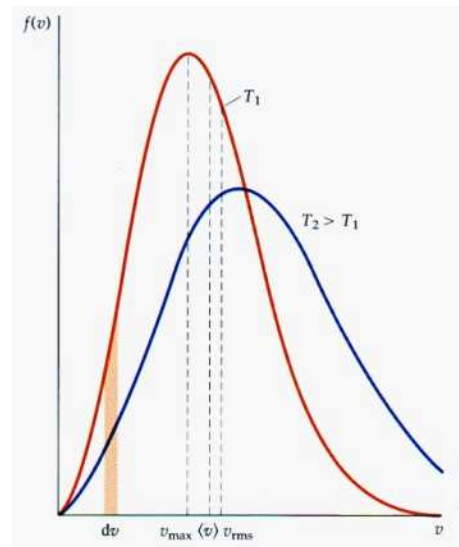


Abbildung 116: Die Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle hängt von der Temperatur T ab.

Außerdem ist zu beachten, dass es auch Moleküle gibt, deren Geschwindigkeiten ein Vielfaches von v_{\max} beträgt.

10.6. Wärmemenge (Kalorimetrie)

Um die Temperatur einer Substanz zu erhöhen, wird ihr Wärmeenergie zugeführt. Die Erfahrung zeigt, dass die zugeführte Wärmemenge Q proportional zur Temperaturänderung Δt und der Masse des Körpers ist.

$$Q \propto m \cdot \Delta t$$

Darüber hinaus ist die Wärmemenge proportional zu einer Materialkonstante c , die man **spezifische Wärmekapazität** nennt und so gilt:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

Die Einheit von c ist $J/(kg \cdot K)$.

$$c = \frac{\text{Wärmemenge (Wärmeenergie)}}{\text{Masse} \cdot \text{Temperaturänderung}}$$

Das Produkt aus Masse m und c nennt man Wärmekapazität und wird mit $C = m \cdot c$ bezeichnet; die Einheit ist gleich J/kg . 2kg Wasser hat bei gleicher Temperatur doppelt so viel **Wärmekapazität** wie 1kg Wasser und zu seiner Temperaturänderung muss pro Kelvin doppelt so viel Wärmemenge zugeführt werden.

Bezieht man C auf die Stoffmenge n , so erhält man die **molare Wärmekapazität**

$$C_{\text{mol}} = \frac{C}{n}$$

mit der Einheit $J/(\text{mol} \cdot K)$.

Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität eines Körpers verwendet man ein Kalorimeter. Es wird ein doppelwandiges Gefäß mit guter Wärmeisolierung (Dewargefäß) mit einer bestimmten Menge m_w Wasser gefüllt.

Die zugeführte Wärmeenergie Q wird durch Messung der elektrischen Arbeit eines Tauchsieders (Abb. 117) bestimmt. $W = U \cdot I \cdot \Delta t$ (Δt ist die Zeitspanne der Wassererwärmung von T_1 auf T_2). Die Erhöhung der Temperatur von T_1 auf T_2 wird gemessen. Es gilt $Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$. Beim Gleichsetzen von elektrischer Energie und Wärmeenergie kann die spezifische Wärmekapazität c_w des Wassers oder anderer Flüssigkeiten gemessen werden. Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität eines Körpers, z.B. eines Metalls, verwendet man das *Mischungskalorimeter*.

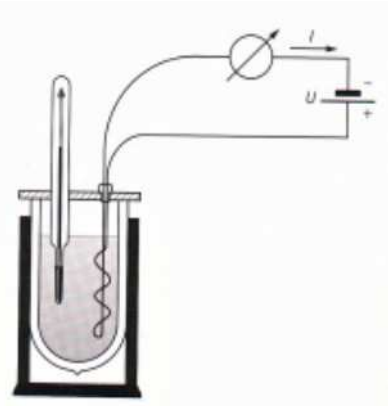


Abbildung 117: Kalorimeter zur Bestimmung der spezifischen Wärme eines Körpers (nach Harten)

Man bringt ein Stück des Metalls mit der Masse m_M , das auf T_2 erhitzt worden ist in das Wasser des Kalorimeters mit der Masse m_w und der Temperatur T_1 . Das Metall gibt Wärmeenergie an das Wasser ab. Die Endtemperatur des abgekühlten Wassers sei T_3 .

Die abgegebene Wärmemenge durch das Metall: $Q_1 = m_M \cdot c_M \cdot (T_3 - T_2)$ (*)

Die aufgenommene Wärmemenge durch das Wasser: $Q_2 = m_w \cdot c_w \cdot (T_2 - T_1)$ (**)

Die Wärmekapazität des Kalorimeters (Gefäß + Thermometer + Rührer) muss noch bei (**) als Korrektur berücksichtigt werden. Durch Gleichsetzung von (*) durch (**) stellt man fest, dass alle Größen außer c_M bestimmt sind und man kann die spezifische Wärme des Metalls c_M errechnen.

10.7 Hauptsätze der Wärmelehre

Um die zwei Hauptsätze der Wärmelehre zu formulieren betrachten wir im Folgenden die **innere Energie** U eines Systems und die Beziehung von Wärme und geleisteter Arbeit am Beispiel eines idealen Gases (als System). Im Teilabschnitt „c“ wird der erste Hauptsatz der Wärmelehre und im Teilabschnitt „d“ der zweite Hauptsatz der Wärmelehre formuliert.

a) Innere Energie

Zuerst werden wir am Beispiel eines idealen Gases die **Innere Energie** U eines Systems definieren. Ein Körper besitzt immer eine Energie, die sich aus den molekularen Bewegungen der Teilchen, deren Wechselwirkungen, der Bindungsenergie sowie anderen Energiearten zusammensetzt. Bei einem *idealen einatomigen Gase* werden die intermolekularen Kräfte vernachlässigt.

Die Innere Energie U besteht also hauptsächlich aus der mittleren kinetischen Energie der einzelnen Atome. Nach Abschnitt 10.5 ist diese Energie für ein einatomiges Molekül gleich

$$U = \frac{3}{2}kT$$

und für einen Körper mit n Mol

$$U_{Mol} = \frac{3}{2}nRT .$$

Die Innere Energie eines idealen Gases ist also *nur* eine Funktion der Temperatur T .

b) Wärme und Arbeit

Ein Gas mit Druck p befindet sich in einem zylindrischen Behälter mit einem beweglichen Kolben auf dem Bleigewichte liegen (Abb. 118). Wir entfernen einige Bleigewichte von dem Kolben, so dass dieser mit der Kraft F um ds nach oben gedrückt wird. Die vom Gas geleistete Arbeit ist: $dW = F \cdot ds = p(A \cdot ds) = p \cdot dV$ oder für die gesamte Arbeit gilt

$$W = \int dW = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV .$$

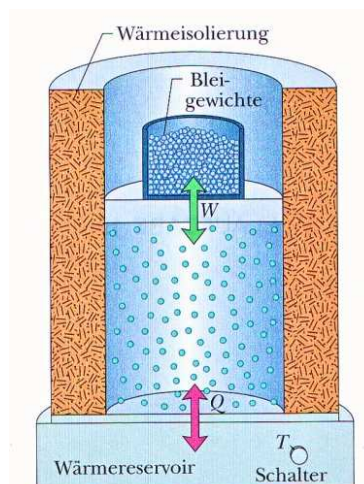


Abbildung 118: Bei der Expansion eines Gases wird Volumenarbeit geleistet.

Den Zuwachs an Gasvolumen (Expansion) von $V_1 \rightarrow V_2$ kann man auch erreichen, indem man ihm Wärme zuführt. Dadurch kommt es zum Anstieg der Gastemperatur. Eine Temperaturzunahme erhöht die kinetische Energie des Gasteilchen und die ausgeübte Kraft des Gases auf den Kolben, so dass sich dieser hebt. Es wird also durch Wärmeenergie Q auch Arbeit geleistet.

Wenn wir zusätzliche Bleigewichte auf dem Kolben anbringen kommt es zu einer **Volumenabnahme** dV (Kompression) und dann leistet das Gas **negative Arbeit**

$$-p \cdot dV .$$

c) Nachdem wir die Innere Energie U und Volumenarbeit $W = p \cdot dv$ definiert haben, lässt sich der **Erste Hauptsatz der Wärmelehre** so formulieren:

Die dem System (Körper) zugeführte **Wärmeenergie** Q ist die Differenz der Änderung seiner Inneren Energie und die von ihm verrichtete Arbeit W

$$Q = \Delta U - W$$

oder genauer:

$$dQ = dU - dW$$

Dabei ist dU das Differenzial der inneren Energie U als Zustandsfunktion, aber dQ und dW symbolisieren infinitesimale Änderung von Q und W .

Das ist eine Verallgemeinerung des Energieerhaltungssatzes unter Einbeziehung der Wärme als einer neuen Energieart. Wird dem System Wärme zugeführt, so kann seine Innere Energie erhöht werden, das System kann Arbeit verrichten oder es kann beides geschehen.

d) Wir betrachten jetzt zwei Beispiele

1. Isotherme Expansion

Bei der Abbildung 119 sorgen wir dafür, dass bei der Expansion des Gases die Temperatur konstant bleibt, indem wir aus dem Wärmereservoir Wärme zuführen. Dann haben wir die **isotherme** Zustandskurve der idealen Gase.

Um das Gas von V_1 längs einer Isothermen auf V_2 auszudehnen, muss ihm die Wärmemenge Q zugeführt werden ($T = \text{konstant} = 310\text{K}$). Die Temperatur T ist konstant und die Änderung der Inneren Energie ΔU ist also gleich Null $\Delta U = 0$. Dann haben wir nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre $Q = -W = -p \cdot dV$

Es wird also bei der isothermen Expansion *nur* Arbeit geleistet. Die getönte Fläche unter den Kurven zeigt die geleistete Arbeit.

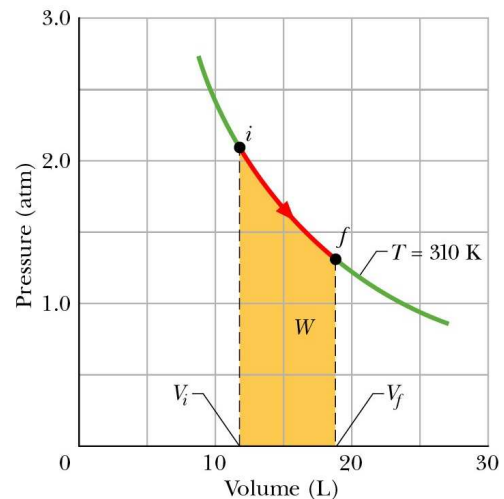


Abbildung 119: Bei einer isothermen Expansion wird Arbeit W geleistet. V_i und V_f im Bild entsprechen V_1 und V_2 im Text

Aus der Zustandsgleichung für das ideale Gas ($pV = nRT$) folgt für die zugeführte Wärmemenge:

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Beispiel: Ein Mol O_2 dehnt sich bei konstanter Temperatur $T = 310\text{K}$ von einem Anfangsvolumen $V_1 = 12\ell$ auf ein Endvolumen $V_2 = 19\ell$ aus. Welche Arbeit wird von dem Gas bei dieser Ausdehnung geleistet und welche Wärmemenge Q muss zugeführt werden?

Für die Arbeit gilt: $W = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 1 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 310 \text{ K} \cdot \ln \frac{19\ell}{12\ell} = 1180 \text{ J}$

Nach dem ersten Hauptsatz muss die gleiche Wärmemenge Q auch zugeführt werden, da die Temperatur T und auch die innere Energie konstant bleibt.

Bei der *isothermen Kompression* (Volumenabnahme) muss die gleiche Wärmemenge abgeführt werden.

2. Adiabatische Expansion oder Kompression

Ein thermischer Prozess heißt adiabatisch, wenn die von der Umgebung abgegebene oder von ihr aufgenommene Wärmemenge $Q=0$ ist. Es kommt also zu keinem Wärmeaustausch mit der Umgebung. In diesem Fall gilt $Q=0$ oder nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre $\Delta U = W = -p \cdot dV$

Bei einer adiabatischen Expansion oder Kompression wird die Innere Energie des Gassystems und damit seine Temperatur T geändert. Bei der Expansion kommt es zu einer Abkühlung, bei der Kompression zu einer Erwärmung und es wird Arbeit geleistet oder gewonnen. In Abbildung 120 ist ersichtlich, dass bei der isothermen Zustandänderung das Boyle-Mariottesche Gesetz gilt. Die adiabatische Zustandskurve ist aber steiler.

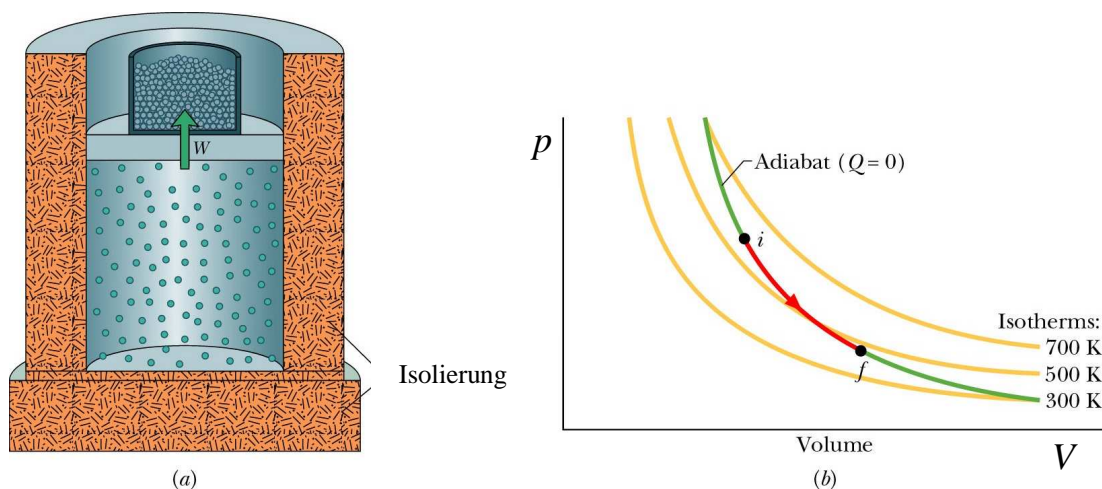


Abbildung 120: Isotherme und adiabatische Zustandskurven

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre besagt, dass die Wärmeenergie eine besondere Art der Energie ist. Man kann zum Beispiel die Wärmemenge nie vollständig in mechanische Arbeit umwandeln, während aber der umgekehrte Vorgang – die vollständige Umwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme – möglich ist. Es gibt keine Maschine, die einem Reservoir wie z.B. dem Meer Wärme entziehen und diese in mechanische Energie umwandeln kann, um das ein Schiff anzutreiben. Eine solche Maschine nennt man perpetuum mobile 2. Art. Eine Wärmekraftmaschine, die bei zugeführter Wärmeenergie mechanische Arbeit verrichtet hat deshalb immer einen Wirkungsgrad η , der kleiner als 1 ist: $\eta < 1$

$$\eta = \frac{dW}{dQ} = \frac{\text{abgegebene mechanische Arbeit } dW}{\text{zugeführte Wärmeenergie } dQ}$$

Bei einem bestimmten dQ gibt es also immer eine obere Grenze für die verrichtete Arbeit dW .

Es ist grundsätzlich nicht möglich, über den sogenannten **Carnot-Wirkungsgrad**

$$\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (*)$$

hinauszukommen. Es wird angenommen, dass die Wärmekraftmaschine aus dem Wärmebad mit der Temperatur T_1 die Wärmemenge entzieht und an ein Wärmebad mit der Temperatur T_2 abgibt. Der Wirkungsgrad η ist also um so größer, je größer die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ ist. Daher setzt man die Wärmekraftmaschine bei möglichst großen Temperaturdifferenzen ein.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Abbildung 121. Ein Gefäß wird durch eine Trennwand in zwei Kammern geteilt die mit verschiedenartigen Gasen gefüllt sind (z.B. rechts O_2 und links N_2). Entfernt man nun die Trennwand, diffundieren und durchmischen sich die Moleküle, bis sich die Konzentration der Gasmoleküle in beiden Hälften ausgeglichen hat. Der Anfangszustand wird aber nie mehr angenommen. Ein solcher Prozess heißt **irreversibler Prozess**.

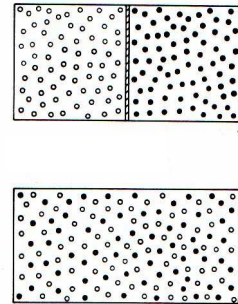


Abbildung 121: Diffusion der Gasmoleküle ist ein irreversibler Prozess

Dieses Beispiel zeigt, dass der Zustand der Ordnung (rechts O_2 , links N_2) von selbst in den *Zustand der Unordnung* übergeht. Der Ordnungszustand eines Systems wird mit einer neuen physikalischen Größe, genannt **Entropie** S beschrieben. Jedem Zustand eines Systems wird eine bestimmte Entropie S zugeordnet. Für eine irreversible Änderung von Zustand 1 zum Zustand 2 wird die *Entropieänderung* des Systems ΔS definiert:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

mit der Einheit $[S] = \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. dQ ist die zugeführte Wärmemenge und T die absolute Temperatur.

Für **irreversible Zustandsänderungen** können wir feststellen, dass beim Übergang von Zustand 1 zum Zustand 2 die Entropie immer zunimmt:

$$S_2 > S_1.$$

Der Zustand 1 der Ordnung besitzt eine kleinere Entropie S_1 als der Zustand der Unordnung S_2 .

Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre lässt sich auch wie folgt formulieren:

Alle Prozesse in einem abgeschlossenen System verlaufen in eine Richtung, so dass die Ordnung in Unordnung umgewandelt wird und die Entropie des Systems steigt.

10.8 Aggregatzustände

Die Materie kann grundsätzlich in drei Aggregatzustände, den *festen*, *flüssigen* und *gasförmigen* Zuständen auftreten. In einem Aggregatzustand kann die Materie aber auch in verschiedenen *Phasen* existieren. Kohlenstoff zum Beispiel tritt im festen Zustand in zwei verschiedenen Phasen auf, als Graphit und als Diamant, jeweils mit unterschiedlichen Kristallstrukturen. Grundsätzlich lässt sich eine Substanz unmittelbar von einer Phase in jede andere Phase überführen. Jede Umwandlung ist aber mit einer Energieumsetzung verbunden, das heißt entweder wird für die Umwandlung Energie benötigt (z. B. in Form von Wärme) oder sie wird gewonnen.

Im festen Zustand sind die Moleküle eines Körpers durch die intermolekularen Kräfte ziemlich stark miteinander verbunden. Bei Wärmezufuhr muss nicht unbedingt die Temperatur zunehmen. Es kann sein, dass die Wärmezufuhr die Anziehungskräfte der Moleküle überwindet und sich die Phase verändert. Der Körper schmilzt. Die benötigte Wärmeenergie Q pro Masse, die man bei einem vollständigen Übergang einer Probe in eine neue Phase unter konstantem Druck p benötigt, bezeichnet man als **spezifische Umwandlungswärme** q . Also gilt allgemein:

$$Q = m \cdot q$$

m = Masse des Körpers

q = spezifische Umwandlungswärme

Q = abgegebene oder aufgenommene Wärmemenge

Abbildung 122 zeigt die verschiedenen Übergänge und die zugehörigen Bezeichnungen. Zum Beispiel wird der Übergang von festem in flüssigen Zustand Schmelzen genannt. Zum Schmelzen muss Schmelzwärme zugeführt werden. Der unmittelbare Übergang vom festen in den gasförmigen Zustand wird Sublimieren genannt. Die Umwandlungswärmen sind Materialkonstante und bei konstantem Druck hängen sie von der betreffenden Substanz ab.

Die Schmelzwärme q_S des Wassers bei Normaldruck 1013 hPa beträgt 334 kJ/kg.



Abbildung 122: Der Übergang eines Körpers in einen Aggregatzustand ist mit einer Energieumwandlung verbunden.

Abbildung 123 oben zeigt die Abhängigkeit der Wärmemenge Q und Temperatur T einer Substanz, die die Phasenübergänge fest-flüssig und flüssig-gasförmig durchläuft. Bei einer bestimmten Temperatur T bleibt T konstant bis die vollständige Phasenumwandlung auftritt. Dabei muss die Umwandlungswärme Q zugeführt werden.

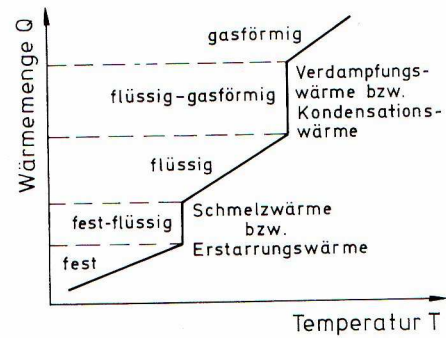


Abbildung 123 unten zeigt die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit. Hier wird auch ersichtlich, dass die Temperatur während der vollständigen Umwandlung konstant bleibt. Analog zur spezifischen Umwandlungswärme kann man die **molare Umwandlungswärme** q_m definieren. Die bei einer Phasenumwandlung aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge ist:

$$Q = n \cdot q_m$$

bb. 16.2

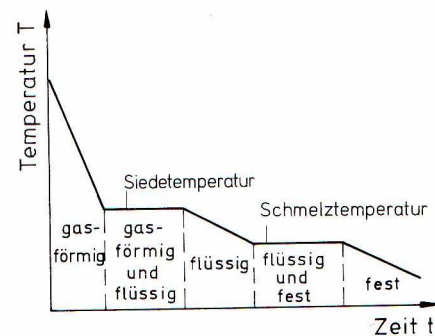


Abbildung 123: Die Temperatur bleibt bei einer vollständigen Phasenumwandlung konstant

n = Stoffmenge (Molzahl)

q_m = molare Umwandlungswärme

Die Einheit von q_m ist J/mol.

Als Beispiel betrachten wir die Umwandlung von Wasser unter Normaldruck. Einem Kilogramm Eis mit der Temperatur 0°C wird solange Wärme zugeführt, bis es vollständig verdampft ist. Welche Wärmemenge wird dabei benötigt?

Die spezifische Schmelzwärme von Eis beträgt 334 kJ/kg . Damit ist die vom Schmelzen des Eisblocks nötige Wärmemenge

$$Q_1 = q_s m = 1 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ/kg} = 334 \text{ kJ}$$

Zum Aufheizen des Wassers von 0°C auf 100°C (Siedepunkt) wird die Wärmemenge

$$Q_2 = m \cdot c \cdot \Delta t = 1 \text{ kg} \cdot 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 100 \text{ K} = 418 \text{ kJ}$$

erforderlich (siehe Kapitel 10.6) (c wird konstant angenommen)

Die spezifische Verdampfungswärme des Wassers bei Normaldruck ist 2260 kJ/kg (Tabellenwert).

Zum vollständigen Verdampfen von einem Kilogramm Wasser ist also die Wärmemenge Q_3

$$Q_3 = q_V \cdot m = 1\text{kg} \cdot 2260 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

erforderlich.

Die gesamte Wärmemenge, die nötig ist, um 1kg Eis von 0°C in Wasserdampf der Temperatur 100°C umzuwandeln ist also:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 334\text{kJ} + 418\text{kJ} + 2260\text{kJ} = 3012\text{kJ}$$

Bei 0° schmilzt das Eis und die Temperatur von dem Eis-Wasser Gemisch bleibt solange konstant bis alles geschmolzen ist. Dann wird die Temperatur des Wassers bis auf 100° erhöht und danach findet die vollständige Verdampfung statt.

10.9 Phasengleichgewicht-Phasendiagramm

Abhängig vom Druck und von der Temperatur kann eine Substanz gleichzeitig in zwei oder drei Phasen im Gleichgewicht erscheinen. Als erstes Beispiel betrachten wir eine Flüssigkeit in einem evakuierten Behälter, dessen Volumen sie nur teilweise ausfüllt. Die Flüssigkeit verdampft bei jeder Temperatur. Die energiereichen Moleküle überwinden die intermolekulare Anziehungskraft, verlassen die Flüssigkeit und gelangen in den Dampfraum oberhalb der Flüssigkeit. Die Verdampfung kommt zum Stillstand, bis ein *dynamisches Gleichgewicht* zwischen Flüssigkeit und Dampf entsteht. Im Gleichgewicht werden gleich viele Moleküle aus dem Dampfraum in die Flüssigkeit zurückfallen wie aus der Flüssigkeit verdampfen.

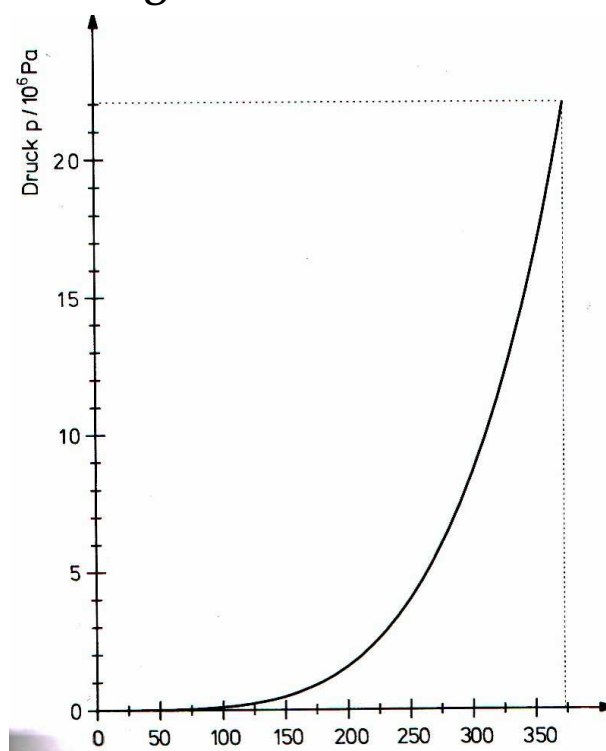


Abbildung 124: Dampfdruckkurve des Wassers in Abhängigkeit der Temperatur

Über der Flüssigkeit herrscht jetzt ein **Dampfdruck** oder **Sättigungsdampfdruck** p . p hängt von der Flüssigkeit und der Temperatur ab.

Abbildung 124 zeigt die Dampfdruckkurven von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur. Der Dampfdruck steigt sehr stark mit der Temperatur an. Also kann eine Flüssigkeit bei allen Temperaturen verdampfen, nicht nur beim **Siedepunkt**. Da die Flüssigkeiten beim Verdampfen ihre energiereichen Moleküle verlieren, kühlt diese sich ab. Zum Beispiel reguliert der menschliche Organismus seine Körpertemperatur, weil durch Verdunstung austretendem Schweißes dem Körper Wärmeenergie entzogen wird und eine Abkühlung bewirkt.

Der Siedepunkt ist die Temperatur, bei der der *Dampfdruck* einer Flüssigkeit gleich dem des *äußeren Druckes* ist. Beim Sieden werden im Inneren einer Flüssigkeit Dampfblasen gebildet. Der Siedepunkt hängt also vom äußeren Druck ab. Auf dem Montblanc, in 4810m Höhe, herrscht ein Luftdruck von 556hPa und hier siedet Wasser schon bei 84°C, während er bei normalem Luftdruck von 1013 hPa bei 100°C siedet.

Abbildung 125 zeigt das so genannte Phasendiagramm für Wasser. Das p,T -Diagramm bestimmt im welchem Phasenzustand (in diesem Fall Aggregatzustand) sich H_2O bei einem bestimmten Druck und einer bestimmten Temperatur befindet. Längs der Verdampfungskurve flüssig-gasförmig ist Wasser im Gleichgewicht, unterhalb der Kurve nur dampfförmig und oberhalb nur flüssig.

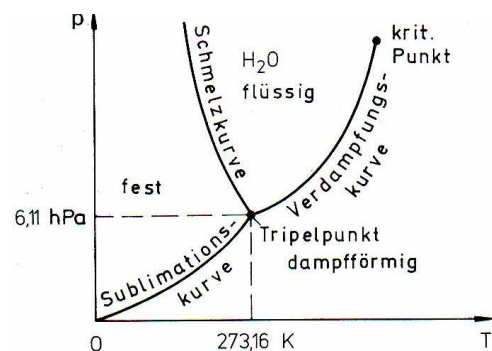


Abbildung 125: Phasendiagramm des Wassers

Die möglichen Phasenzustände der Schmelz- und Sublimationskurve kann man dem Diagramm entnehmen.

Im **Tripelpunkt** schneiden sich die drei Kurven, das heißt in diesem Punkt können alle drei Phasen im Gleichgewicht koexistieren. Der Tripelpunkt ist ein Fixpunkt der Kelvinskala.

Aus dem Diagramm ist direkt zu entnehmen, dass die Stoffe nicht in flüssiger Form existieren können, wenn der Druck kleiner als der Tripelpunkt ist. CO_2 mit dem Tripelpunkt bei $p = 5,18 \cdot 10^5$ Pa und $T = 216,6$ K kann bei Normaldruck (1013hPa) nie flüssig werden, unabhängig von der Temperatur.

10.10 Wärmetransport

Die Wärmeenergie kann auf drei Arten transportiert werden.

1. Wärmeleitung
2. Konvektion
3. Wärmestrahlung

Die **Wärmestrahlung** ist wie das Licht eine elektromagnetische Strahlung und kann sich auch in materiefreien Raum ausbreiten. Die **Wärmeleitung** erfolgt aber nur in Materie, während **Konvektion** eine reiner *Materietransport* ist.

10.11 Wärmeleitung

Werden zwei Körper verschiedener Temperaturen mit Hilfe eines wärmeleitenden Stabs in thermischen Kontakt gebracht, wird vom wärmeren zum kälteren Körper solange Wärmeenergie übertragen, bis ein Temperatenausgleich stattgefunden hat.

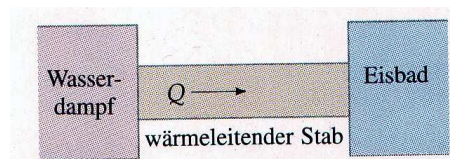


Abbildung 126: Temperatenausgleich durch einen wärmeleitenden Stab

Die Moleküle und Atome des heißen Körpers besitzen größere kinetische Energie. Durch Stöße mit dem jeweils benachbarten Atom wird die kinetische Energie durch den Stab geleitet, wobei jedes Atom an seinem Platz bleibt. Bei der Wärmeleitung findet also ein Energie- aber kein Materialtransport statt.

Besitzt ein Stab (Abb. 127) der Länge l und Querschnitt A verschiedene Temperaturen T_1 und T_2 , so werden die Temperaturen durch Fließen eines **Wärmestromes** Q/t ausgeglichen. Der Wärmestrom ist die transportierte Wärmemenge pro Zeit.

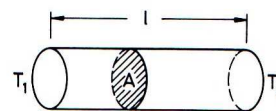


Abbildung 127: Wärmestrom wird durch Temperaturunterschied $T_2 - T_1$ verursacht.

Für den Wärmestrom gilt:

$$\frac{Q}{t} = \lambda \cdot \frac{A}{l} \cdot (T_1 - T_2)$$

A = Querschnitt des Stabes

l = Länge des Stabes

λ = Wärmeleitfähigkeit

λ nennt man die **Wärmeleitfähigkeit** und hängt vom Material ab. Metalle sind gute Wärmeleiter, Holz, Papier und Wolle sind schlechte Wärmeleiter.

Die Einheit von λ ist $W/m \cdot K$

Kupfer ist ein guter Wärmeleiter mit $\lambda = 401 W/m \cdot K$, während λ bei Holz $0,11 W/m \cdot K$ beträgt. Die Wärmeleitfähigkeit der Metalle λ ist ihren elektrischen Leitfähigkeiten annähernd proportional. Gase sind besonders schlechte Wärmeleiter, daher werden sie als Wärmeisolation zum Beispiel bei Doppelfenstern genutzt. Da die Wärmeleitung die Übertragung der kinetischen Energie von Atomen und Molekülen darstellt, ist sie im Vakuum nicht möglich.

10.12. Konvektion

Der Wärmetransport in Flüssigkeiten und Gasen erfolgt hauptsächlich durch **Konvektion**. Bei einer *freien* Konvektion werden die wärmsten Schichten der Flüssigkeiten und Gase ausgedehnt, so dass ihre Dichte gegenüber den kältesten Schichten abnimmt. Infolge des größeren Auftriebes steigen sie nach oben, die kältesten Schichten sinken nach unten. *Erzwungene* Konvektion wird durch äußere Kräfte zum Beispiel von Ventilatoren verursacht. Die Konvektion ist auf jeden Fall mit einem Materietransport verbunden.

10.13. Wärmestrahlung

Die Sonne strahlt Wärme aus und die Erde empfängt Wärmeenergie. Da im Vakuum zwischen Erde und Sonne fast keine Materie vorhanden ist, kann die Wärmeenergie weder durch Leitung noch durch Konvektion übertragen werden. Der Wärmetransport erfolgt hier durch Ausbreitung von **elektromagnetischer Strahlung**, die von der Sonne gesendet wird. Nicht nur Sonne, sondern alle Körper, die eine Temperatur besitzen senden Wärmestrahlung aus.

Das **Stefan Boltzmannsche Gesetz** besagt, dass die Strahlungsleistung eines Körpers P mit der 4. Potenz der thermodynamischen Temperatur T steigt:

$$P \propto T^4$$

Die Wärmestrahlung findet sowohl in Materie als auch im Vakuum statt.

Die abgestrahlte Strahlungsleistung pro Fläche wird Strahlungsintensität I genannt.

Eine Wärmequelle kann isotrop nach allen Seiten abstrahlen. Die Strahlungsleistung erfasst mit größerem Abstand r größere Kugelflächen. Die Kugelflächen wachsen aber proportional mit r^2 an.

Folglich nimmt die Strahlungsintensität mit r^2 ab.

$$I \propto \frac{1}{r^2}$$

Dieses **quadratische Abstandsgesetz** gilt für alle Strahlungsarten, z.B. Lichtstrahlung, radioaktive Strahlung und auch für die Ausbreitung der Schallwellen.

11. Diffusion und Osmose

11.1 Diffusion

In einem Gedankenversuch kann man ein Gefäß mit einer herausnehmbaren Trennwand in zwei Teile unterteilen (Abb. 128). Im oberen Teil des Gefäßes befinden sich zwei Molekülsorten verschiedener Gase z.B. Wasserstoff und Stickstoff. Nach Entfernung der Trennwand werden die Gasmoleküle durchmischt und breiten sich im gesamten Gefäß aus, bis die Konzentration ausgeglichen ist. Den Vorgang der Durchmischung bezeichnet man als **Diffusion**.

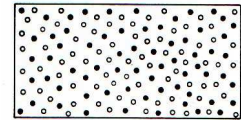
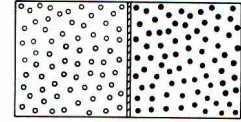


Abbildung 128: Nach dem Entfernen der Wand werden die Gasmoleküle durchmischt (Diffusion).

Die Gasmoleküle sind nicht an eine Gleichgewichtslage gebunden und sie stoßen durch ungeordnete thermische Bewegung zusammen, nehmen einen Zickzackkurs ein bis sie homogen vermischt sind. Es ist allein diese ungeordnete thermische Bewegung, die die Diffusion verursacht und die Konzentrationsunterschiede abbaut, nicht etwa die Anziehungskraft der Moleküle.

Es gibt immer dann eine **Diffusion**, wenn ein Konzentrationsgefälle vorliegt oder mathematisch ausgedrückt ein Konzentrationsgradient dc/dx . c ist die Konzentration und dc/dx ist das Konzentrationsgefälle längs eines Weges x .

Das 1. **Ficksche Gesetz** besagt, dass der **Massenfluss** dm/dt durch die Querschnittsfläche A proportional zum Konzentrationsunterschied ist:

$$\frac{dm}{dt} = -D \cdot A \cdot \frac{dc}{dx}$$

D ist der **Diffusionskoeffizient** und bestimmt die Geschwindigkeit des Diffusionsvorganges. Er steigt mit zunehmender Temperatur an. Außerdem hängt D von der Größe der Moleküle ab. Die kleineren Wasserstoffmoleküle diffundieren schneller als die größeren Luftmoleküle. Diese Tatsache lässt sich durch folgenden Versuch demonstrieren.

Ein poröser Tonzylinder trennt Raum I unter der Glocke, die mit Wasserstoff gefüllt ist von Raum II. Im inneren Zylinder II befindet sich Luft. H_2 diffundiert schneller in den Zylinder hinein als Luft aus ihm heraus. Das angeschlossene Manometer zeigt durch den Höhenunterschied Δh einen Überdruck von Δp . Vor dem Einleiten von H_2 in Raum I war Δp gleich Null.

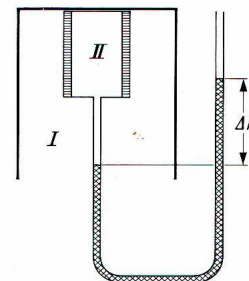


Abbildung 129: Diffusion von Wasserstoffmolekülen erfolgt schneller als von Luftmolekülen.

Bei den Flüssigkeiten findet auch eine Diffusion statt. Die Geschwindigkeit ist aber geringer als bei Gasen.

Die thermische Bewegung der Flüssigkeiten und ihrer Diffusion kann man am besten durch die **Brownsche Bewegung** veranschaulichen. Füllen wir einen Eimer mit Wasser, dem etwas Tinte zu gemischt ist und schichten wir darüber vorsichtig reines Wasser, so diffundiert die Tinte nach oben, obwohl sie schwerer als Wasser ist. Freiatome diffundieren von außen über Fehlstellen in der Gitterstruktur in Kristalle hinein. Diffusion ist für den Stoffaustausch der lebenden Organismen von großer Bedeutung. Durch die Zellwände diffundieren Stoffe in das Innere hinein und aus ihnen heraus. Durch die Wände der Lungen diffundiert Sauerstoff in die Blutbahn hinein und in umgekehrter Richtung das gebildete Kohlendioxid wieder heraus.

11.2 Osmose

Osmose ist eine spezielle Art der Diffusion von Flüssigkeitsmolekülen, die durch eine semipermeable (halbdurchlässige) Trennwand erfolgt. Eine solche Trennwand ist z.B. eine Membran, die in einer Zuckerlösung die kleinen Wassermoleküle durchlässt, aber die großen Zuckermoleküle nicht. Es gibt also einen Konzentrationsunterschied zwischen der rechten und linken Seite der Membran.

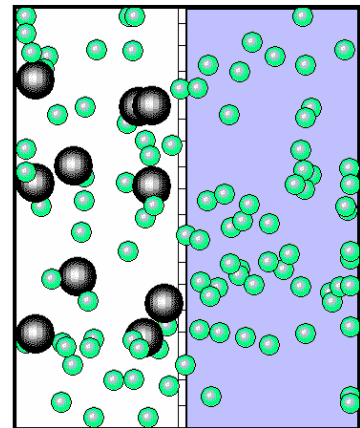


Abbildung 130: Diffusion von Flüssigkeitsmolekülen durch eine halbdurchlässige Trennwand.

Der Transport des Wassers durch die Trennwand dauert solange an, bis der erhöhte hydrostatische Druck ($\rho \cdot g \cdot \Delta h$) auf der rechten Seite ein weiteres Eindringen des Wassers verhindert. Die so entstandene Druckdifferenz Δp zwischen beiden Seiten der Membran nennt man den **osmotischen Druck** (Abb. 131). Dieser Sachverhalt gilt für alle Lösungen und Lösungsmittel (In unserem Beispiel war als Lösung Zuckerlösung und als Lösungsmittel Wasser).



Abbildung 131 Transport der Flüssigkeit durch die Membran dauert so lang bis der Schweredruck auf der rechten Seite ein weiteres Eindringen verhindert.

Der osmotische Druck einer Lösung der Dichte ρ berechnet sich aus der Steighöhe Δh zu $p_{os} = \rho \cdot g \cdot \Delta h$.

Mit einer geeigneten Eichung kann man die Einrichtung der Abbildung 132, die man **Pfeffersche Zelle** nennt, zur direkten Messung des osmotischen Druckes verwenden.

Zur quantitativen Berechnung des osmotischen Drucks benutzt man die **Van't-Hoff-Gleichung**:

$$p_{os} = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$$

n = Stoffmenge des im Volumen V gelösten Stoffes (z.B. Zucker)
 R = Gaskonstante

Das Gesetz von Van't-Hoff sagt aus, dass der osmotische Druck p_{os} ebenso groß ist, wie der Druck, den die gelösten Teilchen als ideales Gas ausüben würden. Das ist eine Analogie zum Gasgesetz und erinnert daran, dass die Ursache der Entstehung der osmotischen Drucks die thermische Molekularbewegung ist. Wesentlich bei dieser Gleichung ist, dass die Anzahl der Moleküle (Zuckermoleküle) bei p_{os} eine Rolle spielt und *nicht* die chemische Natur der gelösten Stoffe (wie bei idealen Gasen).

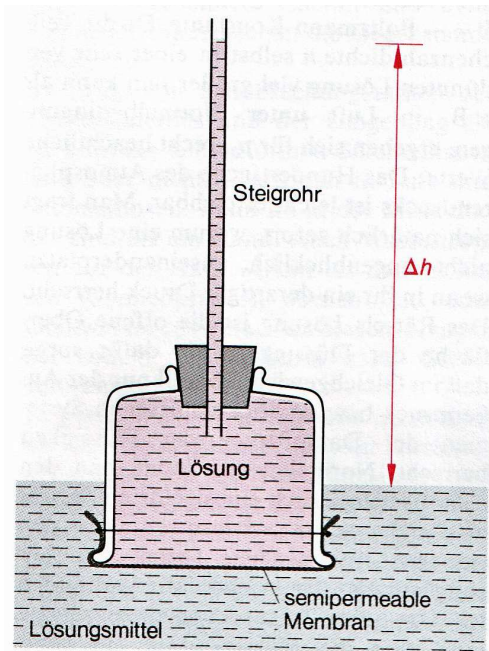


Abbildung 132 Pfeffersche Zelle zur direkten Messung des osmotischen Drucks

Beispiel: Kochsalzlösung als Blutersatz.

12. Schwingung

Einen **zeitlich** periodisch sich wiederholenden Vorgang bezeichnet man als **Schwingung**. Im Alltag begegnet man vielen Arten von Schwingungen. Eine Pendeluhr schwingt, Hörschall kommt durch schwingende Luftmoleküle zustande, die Saite einer Gitarre schwingt. Ein schwingungsfähiges System bezeichnet man als einen **Oszillator** oder **Resonator**. Im Folgenden betrachten wir nur die mechanischen Schwingungen.

12.1 Federpendel

Eine häufige Schwingungsform ist die **harmonische Schwingung**, die sich mathematisch durch eine **Sinus-** oder **Kosinusfunktion** darstellen lässt. Als Beispiel betrachten wir ein Federpendel (Abb. 133).

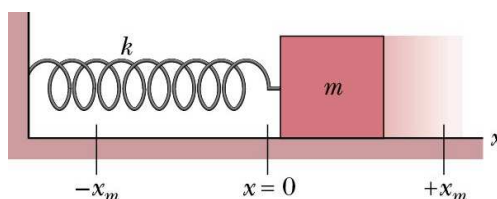


Abbildung 133: Federpendel auf einer reibungsfreien Unterlage

Eine an einer Feder befestigte Masse m gleitet reibungsfrei auf einer Unterlage. Im $x=0$ ist das System in Ruhe. Es herrscht Gleichgewicht. Wird die Masse um den Betrag x aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so erfährt sie nach dem Hookeschen Gesetz (Abschnitt 5.2) durch die Feder eine rücktreibende Kraft.:

$$F = -D \cdot x$$

Lässt man nun beim ausgelenkten Federpendel die Masse m los, so wird sie durch die rücktreibende Kraft in Richtung zur Ruhelage $x=0$ hin beschleunigt (Abb. 134). Beim Durchgang durch die Ruhelage hat die Masse soviel kinetische Energie, so dass sich die Masse über die Ruhelage hinaus weiter bewegt und die Feder wird gestaucht. Die kinetische Energie, die in Ruhelage maximal ist, nimmt dann ständig ab und bei größter Auslenkung $x = x_m$ ist sie gleich Null. Jetzt kehrt die Masse wieder zu ihrer Ruhelage zurück. Nach der Umkehr der Bewegung wiederholt sich der Vorgang, so dass ein periodischer Vorgang, also eine Schwingung entsteht. Bei dem Schwingungsvorgang wird die kinetische Energie und die Spannungsenergie der Feder ständig ineinander umgewandelt.

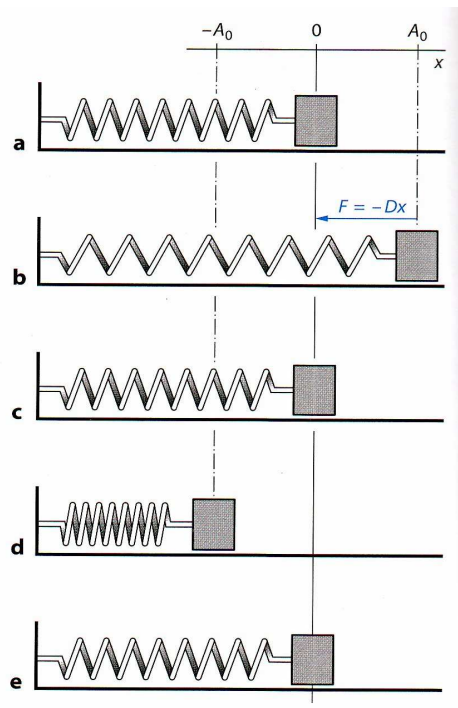


Abbildung 134: Die Masse m schwingt zwischen der maximalen Auslenkung A_0 und $-A_0$ (A_0 im Bild entspricht x_m im Text).

Schwingung

In der Gleichgewichtslage $x=0$ ist die kinetische Energie maximal, die Spannenergie der Feder aber gleich Null, während im umgekehrten Punkt (maximale Auslenkung) die kinetische Energie Null und die Spannenergie maximal ist. Wählt man die Zeit so, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t=0$ bei $x=x_m$ befindet und trägt man die momentane Auslenkung gegen die Zeit t auf, so erhält man eine Sinuskurve (Abb. 135)

$$\boxed{x = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)} \quad (*)$$

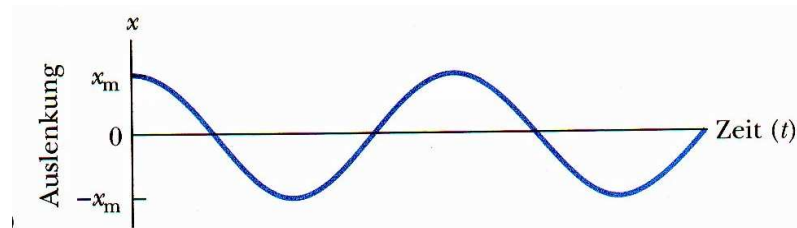


Abbildung 135: Eine harmonische Schwingung lässt sich durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion darstellen.

Dabei ist $\omega = 2\pi \cdot f$ die Kreisfrequenz und T die Schwingungsdauer oder Periode. Die Phasenkonstante φ der Schwingung hängt von der Auslenkung zur Zeit $t=0$ ab.

Man kann die Schwingung eines Federpendels und allgemein alle so genannten **harmonischen Schwingungen** mathematisch durch eine Sinusfunktion darstellen. Jetzt wollen wir die wichtigen Merkmale einer Schwingung aus der Gleichung zusammenfassen. Nach (*) wird eine Schwingung durch drei Merkmale gekennzeichnet:

- **Amplitude** x_m
- **Frequenz** f oder **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi \cdot f$
- **Phasenkonstante** φ

Die Größe x_m bezeichnet man als **Amplitude** der Schwingung, sie ist die maximale Auslenkung. Eine wichtige Eigenschaft einer Schwingung ist ihre Frequenz f , d.h. die Anzahl der pro Sekunde ausgeführten Schwingungen. Die Einheit der Frequenz ist s^{-1} oder Herz (Hz). Mit der Frequenz verknüpft ist die **Periode** oder **Schwingungsdauer** T der Schwingung. Darunter versteht man die Zeitdauer einer *vollständigen* Schwingung

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$

Oft fügt man zur Frequenz den Zahlenfaktor 2π hinzu und erhält so die **Kreisfrequenz**

$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot f}$$

Die **Phasenkonstante** φ hängt von der Lage der Schwingung zur Zeit $t=0$ ab und hat keinen Einfluss auf den Ablauf der Schwingung.

Abbildung 136 zeigt die mathematische Darstellung zu verschiedenen harmonischen Schwingungen, zum Beispiel zu Schwingungen eines Federpendels. Das obere Bild zeigt die grafische Darstellung der Funktion (*) mit $\varphi = \pi/2$.

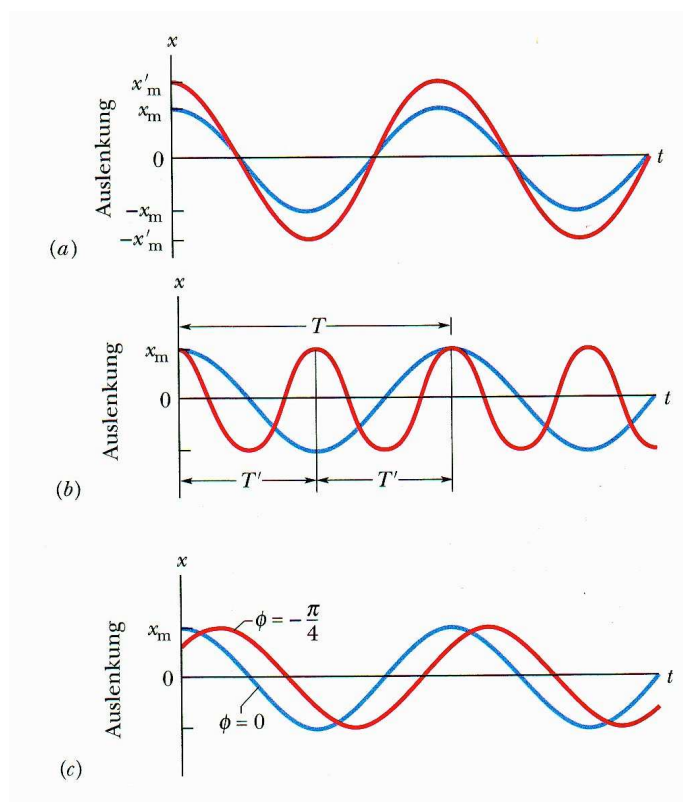


Abbildung 136: Zwei Schwingungen a) verschiedener Amplituden x_m
b) verschiedener Schwingungsdauern T c) verschiedener Phasen φ

Die rote Kurve unterscheidet sich von der blauen Kurve *nur* in ihrer Amplitude. Bei dem mittleren Bild unterscheidet sich die rote Kurve von der blauen Kurve *nur* in der Periode, also der Schwingungsdauer T . Bei c unterscheidet sich die rote Kurve von der blauen Kurve nur hinsichtlich der Phasenkonstanten φ . Der Phasenunterschied zwischen den beiden Kurven beträgt $\varphi = \pi/4$.

12.2 Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung

Wir betrachten als Beispiel wieder die Schwingungen des Federpendels in Abbildung 133. Auf die reibungsfrei gleitende Masse m wirkt die rücktreibende Kraft F , die antiparallel zur Auslenkung gerichtet ist. Für die Kraft gilt nach dem **Hookeschen Gesetz**

$$f = -D \cdot x. \quad (\text{I})$$

Nach dem zweiten **Newtonschen Gesetz** gilt für F außerdem

$$F = m \cdot a \quad (\text{II})$$

Die Beschleunigung a ist nach Abschnitt 1.4 die zweite Ableitung von x nach der Zeit.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Nach Gleichsetzung von I und II und Einsetzen von a folgt:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0 \quad (*)$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen **Oszillators**, der eine harmonische Schwingung ausführt. Das ist eine sogenannte **Differenzialgleichung**, eine Gleichung, in welcher neben einem unabhängigen $x(t)$ auch dessen Differentialquotient (hier der zweite Differentialquotient d^2x/dt^2) auftritt. Die Lösung dieser Gleichung ist eine Sinusfunktion:

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Durch Ableiten und Einsetzen in (*) kann man sich davon überzeugen.

ω berechnet sich dann wie folgt:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

oder

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Man sieht, dass die **Schwingungsdauer** des Federpendels von der Masse m und der **Federkonstanten** D abhängt. Das sind die spezifischen Größen einer Feder als schwingungsfähiges System oder eines Oszillators. Man bezeichnet die zugehörige Frequenz f als **Eigenfrequenz**, da das System mit dieser Frequenz schwingt, nachdem es einmalig aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde.

Man startet die Bewegung mit einer mehr oder weniger starken Auslenkung x . Die Schwingungsdauer T sucht sich das Pendel aber selbst. Das gilt, solange keine äußeren Kräfte einwirken und keine Reibung vorhanden ist, also für eine **freie, ungedämpfte Schwingung**.

12.3 Kreisbewegung und harmonische Schwingung

Die Abbildung 137 zeigt die Bewegung eines Teilchens, das sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (Abschnitt 1.3) auf einer Kreisbahn bewegt. Es schließt mit der x -Achse den Winkel $\varphi = \omega \cdot t$ ein.

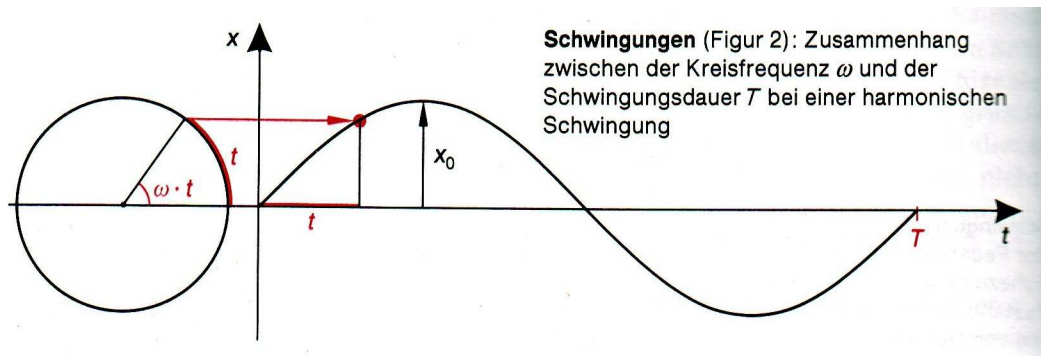


Abbildung 137: Analogie zwischen einer Kreisbewegung und einer harmonischen Schwingung

Aus der Abbildung sieht man, dass die Projektion der Bahn des Teilchens auf dem Kreis mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf die Koordinatenachse einer harmonischen Schwingung darstellt, mit der Gleichung:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

x_0 = Radius des Kreises = Amplitude

$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$ Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz

T ist Umlaufdauer der Kreisbewegung und gleichzeitig die Schwingdauer der Schwingung.

12.4 Fadenpendel

Eine Kugel der Masse m , die an einem Faden der Länge l hängt, bezeichnet man als Fadenpendel (Abb. 134). Auf die Kugel wirkt die Gewichtskraft $m \cdot g$ nach unten. Die Gewichtskraft kann in zwei zueinander senkrechte Komponente zerlegt werden. Die Komponente $m \cdot g \cdot \cos\varphi$ wirkt entlang des Fadens und wird mit \vec{Z} Zugkraft des Fadens kompensiert und ist für unsere Betrachtung jedoch nicht wichtig. Senkrecht dazu wirkt die rücktreibende Kraft $m \cdot g \cdot \sin\varphi$, die die Kugel zur Gleichgewichtslage zurücktreibt.

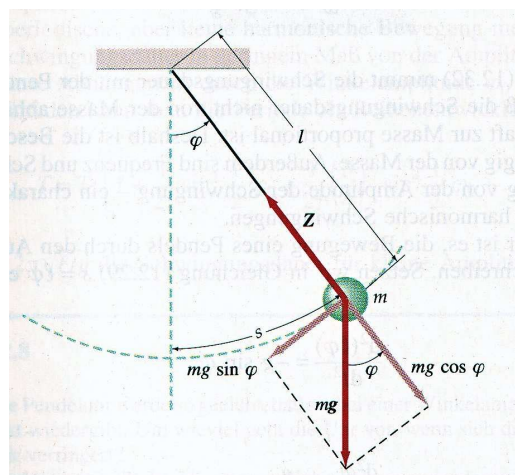


Abbildung 138: Bei einem Fadenpendel wird die Gewichtskraft in zwei Komponenten zerlegt

Schwingung

Sei s die Bogenlänge, so ist

$$s = l \cdot \varphi$$

Die rücktreibende Kraft beträgt $F = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$, oder für kleine φ :

$$F = -m \cdot g \cdot \varphi \quad \sin \varphi \approx \varphi \quad (*)$$

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (**)$$

Die Gleichsetzung von (*) und (**) ergibt:

$$-m \cdot g \cdot \varphi = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{oder mit } \varphi = \frac{s}{l}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g}{l} \cdot s$$

Analog zur Differentialgleichung beim Federpendel ist die Lösung dieser Gleichung auch eine Sinusfunktion mit Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Daraus folgt, dass die Schwingungsdauer des Fadenpendels am gleichen Ort

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

nur von der Länge des Fadens abhängt. Man beachte, dass die Schwingungsdauer *nicht* von der Masse abhängt. Bei größeren Massen wird zwar die Trägheit der Kugel größer, es steigt aber auch die rücktreibende Kraft $m \cdot g \cdot \sin \varphi$, so dass die Masse keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer T und Frequenz f hat. Die obige Betrachtung gilt nur bei kleinem Auslenkungswinkel φ , denn nur bei kleinen Auslenkungen kann man $\sin \varphi$ und φ gleichsetzen. Deshalb führt das Fadenpendel nur bei kleiner Auslenkung eine **harmonische Schwingung** aus.

12.5 Energiebilanz der harmonischen Schwingung

Bei einer Schwingung wandeln sich Schwingungen verschiedener Energieformen ineinander um. Als ein einfaches Beispiel betrachten wir das Federpendel (Abb. 133). Nach Abschnitt 12.1 hat eine gestauchte oder ausgedehnte Feder eine Spannenergie, die wir jetzt potentielle Energie nennen von:

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

D = Federkonstante,

x = Auslenkung aus der Ruhelage

Die kinetische Energie des an der Feder befestigten Massenpunktes beträgt:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Die Gesamtenergie von

$$W_{ges} = W_{pot} + W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

bleibt im Laufe der Schwingung konstant.

In der Gleichgewichtslage ist $x=0$ und die potentielle Energie des Systems ist auch gleich Null. Die Gesamtenergie besteht nur noch aus kinetischer Energie, woraus folgt, dass die Geschwindigkeit maximal ist. Bewegt sich die Masse über die Gleichgewichtslage hinaus, so nimmt die kinetische Energie ab. Bei maximaler Auslenkung, im Umkehrpunkt, ist die potentielle Energie maximal und die kinetische Energie gleich Null. Es findet also ständig eine Umwandlung der kinetischen Energie in potentielle Energie und umgekehrt statt. Die gleiche Überlegung gilt auch bei der Schwingung eines Fadenpendels (Abb. 139).

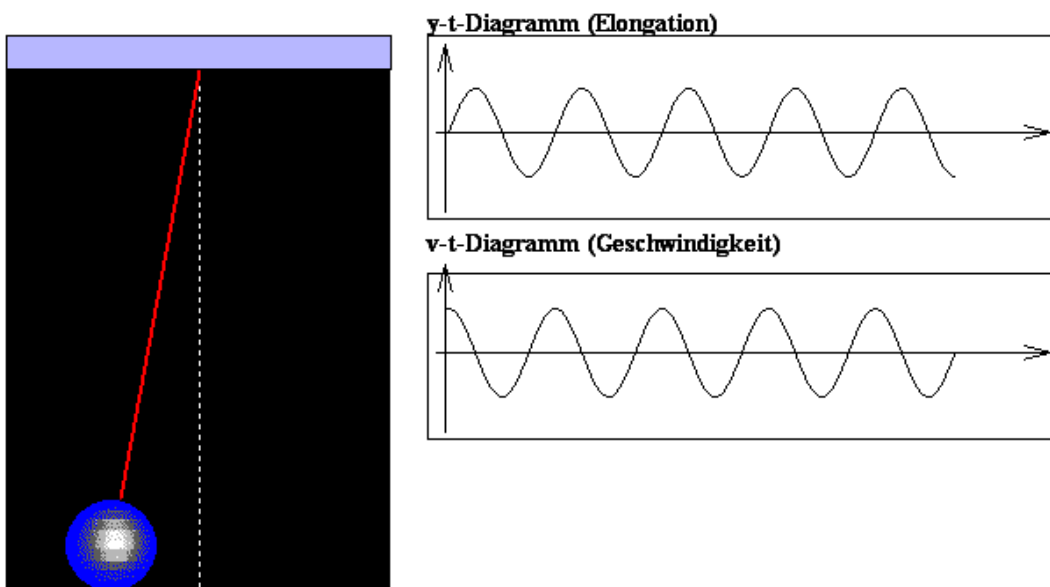


Abbildung 139: Orts-Zeit-Diagramm und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer harmonischen Schwingung

Schwingung

Abbildung 139 zeigt eine Sinusförmige Schwingung. Wie man sieht, besteht zwischen Orts- und Geschwindigkeitskurve ein Phasenunterschied von $\pi / 2$ (90°). Das heißt, bei $x=0$ ist die Geschwindigkeit maximal und bei maximaler Auslenkung x ist die Geschwindigkeit gleich Null.

Bei einem Fadenpendel beträgt die potentielle Energie

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

wobei h = Höhenunterschied zwischen der Gleichgewichtslage und dem Umkehrpunkt ist und entsprechend beträgt die kinetische Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Die gesamte Schwingungsenergie ist also

$$W_{ges} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2. \quad (*)$$

Es gibt zwei Extremfälle.

- 1) In der **Gleichgewichtslage** ist $h = 0$ folgt $W_{pot} = m \cdot g \cdot h = 0$.

Nach (*) besteht also die Gesamtenergie W_{ges} nur noch aus kinetischer Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Die kinetische Energie und Geschwindigkeit sind maximal.

- 2) Im **Umkehrpunkt** ist die Geschwindigkeit v und also die kinetische Energie gleich Null. Der Höhenunterschied h ist aber maximal, daraus folgt, dass die potentielle Energie $m \cdot g \cdot h$ maximal ist und nach (*) besteht die Gesamtenergie W_{ges} nur noch aus potentieller Energie

$$W_{ges} = m \cdot g \cdot h$$

Zwischen den beiden Extremfällen gibt es beide Energiearten und eine ständige Umwandlung der potentiellen und kinetischen Energie ineinander.

12.6 Gedämpfte Schwingung

Bis jetzt haben wir bei Schwingungsvorgängen die **Reibungskraft** nicht berücksichtigt. Bei physikalischen Schwingungen tritt meistens in irgendeiner Form Reibung auf und der Schwingung wird dadurch Energie entzogen. Das Schwingungssystem, zum Beispiel Feder- oder Fadenpendel, kommt durch diese Reibung nach einiger Zeit zur Ruhe. Weil die Schwingungsenergie mit der Zeit verringert wird und entsprechend

Schwingung

die Amplitude sinkt, spricht man von einer **gedämpften Schwingung**. Abbildung 140 zeigt eine gedämpfte Schwingung am Beispiel eines Federpendels. Die Schwingung wird durch die Reibung eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Kolbens gedämpft.

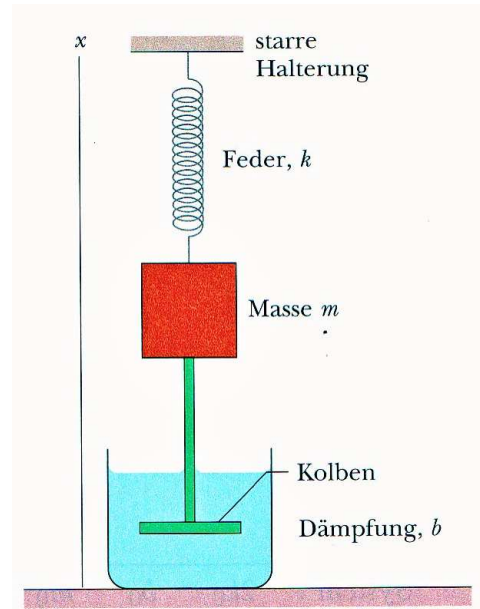


Abbildung 140: Gedämpfte Schwingung eines Federpendels

Abbildung 141 zeigt einen Idealfall einer gedämpften Schwingung.

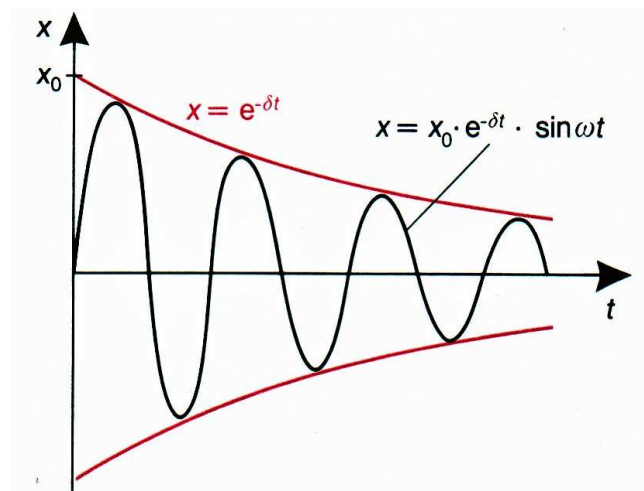


Abbildung 141: Zeitliche Abhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung

Die Amplitude der Schwingung klingt *exponentiell* mit der **Dämpfungskonstanten** δ ab:

$$x_0(t) = x \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Demnach kann man die Schwingungsgleichung einer gedämpften Schwingung wie folgt schreiben:

$$x(t) = x \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Aus der Gleichung folgt: zwei aufeinander folgende Amplituden stehen immer im gleichen Zahlenverhältnis. Die Frequenz ω der gedämpften Schwingung hängt vom Dämpfungsfaktor δ ab, wobei ω_0 die Frequenz der ungedämpften Schwingung bedeutet:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Mit wachsendem Dämpfungsfaktor δ kommt das Pendel schneller zum Stillstand. Wenn es schließlich ohne Schwingung auf schnellstem Weg zur Ruhe kommt, ist der *aperiodische Grenzfall* oder Kriechfall erreicht. Das System schwingt nicht mehr, sondern kriecht langsam zur Ruhelage zurück (Abb. 142). Dieser Fall findet Anwendung beim Bau eines Zeigerinstrumentes.

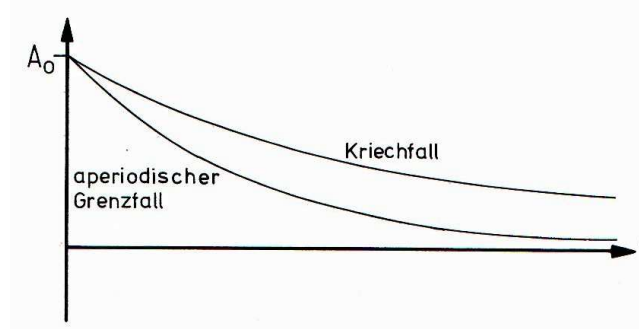


Abbildung 142: Bei einer starken Dämpfung schwingt das System nicht mehr, sondern kriecht langsam zur Ruhelage zurück

12.7 Erzwungene Schwingung und Resonanz

Eine gedämpfte Schwingung wird nach ständiger Energieabgabe ihre Amplitude verringern und irgendwann zur Ruhe kommen. Als Beispiel dient das gedämpfte Federpendel in Abbildung 143. Damit sie weiterhin schwingt, muss ihr von außen Energie zugeführt werden. Zum Beispiel kann man diese Energie durch eine äußere periodische Kraft der Frequenz f_a zuführen. Eine derartige Schwingung nennt man **erzwungene Schwingung**, das schwingungsfähige System **Resonator**, die äußere periodische Kraft **Erreger**.

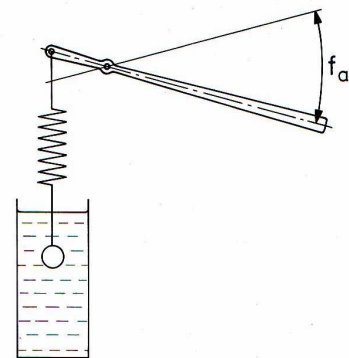


Abbildung 143: Ein gedämpftes Federpendel wird durch äußere periodische Kraft f_a zu einer erzwungenen Schwingung angeregt

Die **Resonanzkurve** (Abb. 144) zeigt die Abhängigkeit der Amplitude der erzwungenen Schwingung von der Frequenz f_a bzw. Kreisfrequenz ω der periodischen äußeren Kraft. Die Kurve ist für zwei verschiedene Dämpfungsfaktoren dargestellt.

Es gibt drei Extrembereiche:

1. Bei *kleinen* Frequenzen folgt das schwingungsfähige System, das man **Resonator** nennt der äußeren periodischen Kraft (Erreger). Resonator und Erreger schwingen in **Phase**. Der Phasenunterschied ist $\varphi = 0$.
2. Wenn **Eigenfrequenz** f_0 des Resonators gleich der Erregerfrequenz f_a ist ($f_0 = f_a$ oder $\omega = \omega_r$ wie im Bild), hat die Schwingung ihre größte Amplitude. Diese Erscheinung nennt man **Resonanz**.

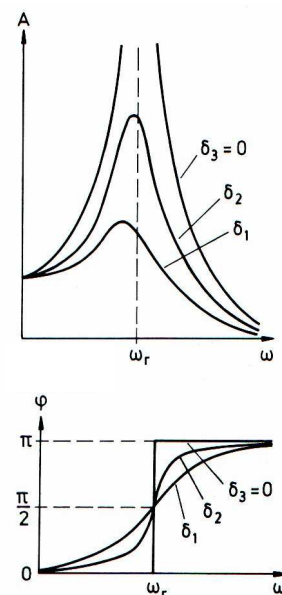


Abbildung 144: Oben: Abhängigkeit der Amplitude der erzwungenen Schwingung von der Frequenz des Erregers.
Unten: Abhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator von der Frequenz des Erregers

Die Eigenfrequenz wird deshalb auch **Resonanzfrequenz** genannt.
Zum Beispiel ist die Resonanzfrequenz von einem Federpendel gleich

$$f_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Im Resonanzfall ist der Phasenunterschied φ zwischen dem Resonator und Erreger gleich $\pi/2$, das heißt der Erreger eilt der erzwungenen Schwingung um eine viertel Periode voraus.

3. Bei *größeren* Erregerfrequenzen sind Erreger und Resonator in der Gegenphase ($\varphi = \pi$) und die Amplitude geht gegen Null.

Bei der Abbildung 144 zeigt die untere Kurve die Abhängigkeit der Phasenverschiebung der Erreger und Resonator von der Frequenz des Erregers.

Bei einem ungedämpften System ($\delta = 0$) steigt die Amplitude ins Unendliche an, wenn der Resonanzfall auftritt ($f_0 = f_a$). Ein solcher Fall kann zur **Resonanzkatastrophe** führen. (Abb. 144, oben $\delta_3 = 0$)

12.8 Überlagerung von Schwingungen

Wie wir bereits erwähnt haben, ist eine harmonische Schwingung ein einfacher periodischer Vorgang, der mathematisch durch eine Sinusschwingung dargestellt werden kann. In der Wirklichkeit kommen aber oft komplizierte periodische Vorgänge vor, die durch Überlagerung von mehreren Sinusschwingungen darstellbar sind. Dazu zeichnet man in einem Amplitude-Zeit-Diagramm die zu überlagernden Sinusschwingungen auf und zählt zu jedem Zeitpunkt t (x -Achse ist die Zeitachse) die Amplituden zusammen. Wie die resultierende Schwingung aussieht hängt von den Amplituden, der Schwingungsdauer und Phasen der Einzelschwingungen ab. Die Abbildung 145 ist ein Beispiel der Überlagerung von vier harmonischen Schwingungen mit unterschiedlichen Amplituden, Schwingungsdauer und Phasen. Die *resultierende* Schwingung ist eine **periodische**, aber keine **harmonische Schwingung**.

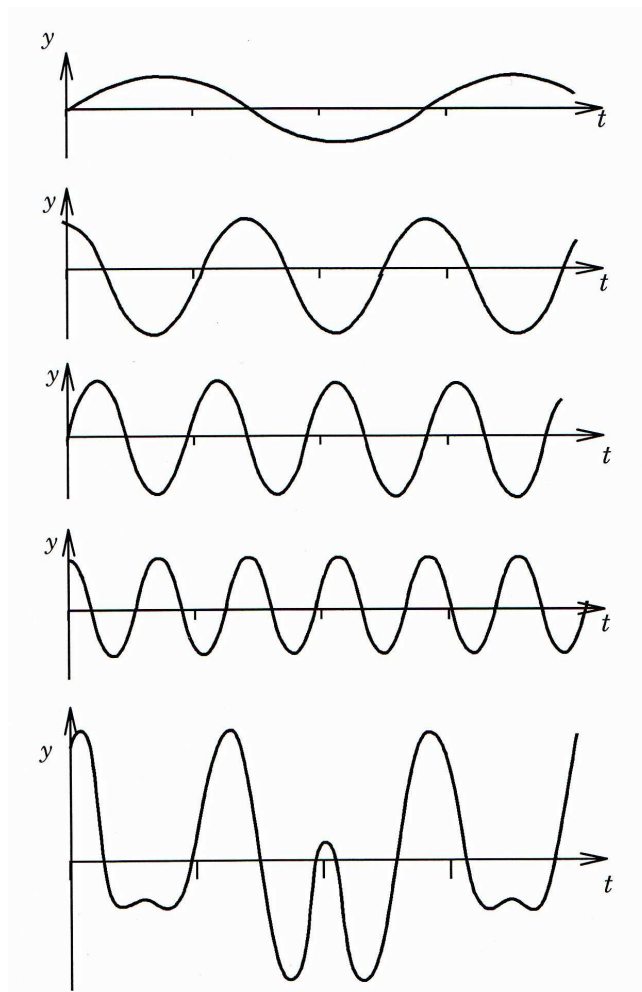


Abbildung 145: Überlagerung von vier harmonischen Schwingungen. Die resultierende Schwingung ist aber keine harmonische Schwingung

Wir betrachten drei einfache Fälle der Überlagerung von zwei Schwingungen.

1. Überlagerung oder Interferenz von zwei Schwingungen gleicher Amplitude und Frequenz mit Phasenunterschied Null.

$\varphi = 0$ bedeutet, dass beide Schwingungen in **Phase** schwingen. Die resultierende Schwingung hat doppelte Amplitude. Man spricht hier von **konstruktiver Interferenz** (Abb. 146a).

2. Wenn der Phasenunterschied der beiden Schwingungen $\varphi = \pi = 180^\circ$ ist, löschen sich beide Schwingungen gegenseitig aus (Abb. 146b). Hier spricht man von **destruktiver Interferenz**.

Jeder andere Phasenwinkel führt zu einem Ergebnis zwischen diesen beiden Grenzfällen.

3. In dem Fall, dass zwei Schwingungen *gleiche* Amplitude aber nur *wenig verschiedene* Frequenz besitzen, kommt es zu einer langsam wachsenden Phasendifferenz. Man erhält daher als resultierende eine Schwingung mit regelmäßig schwankender Amplitude, eine sogenannte **Schwebung** (Abb. 147).

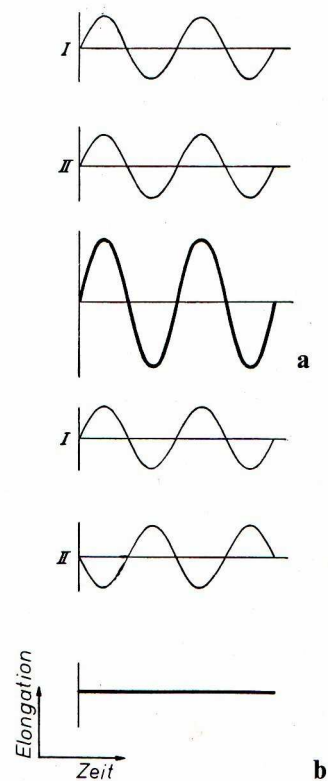


Abbildung 146: Überlagerung von zwei Schwingungen.
a) Konstruktive Interferenz
b) Destruktive Interferenz

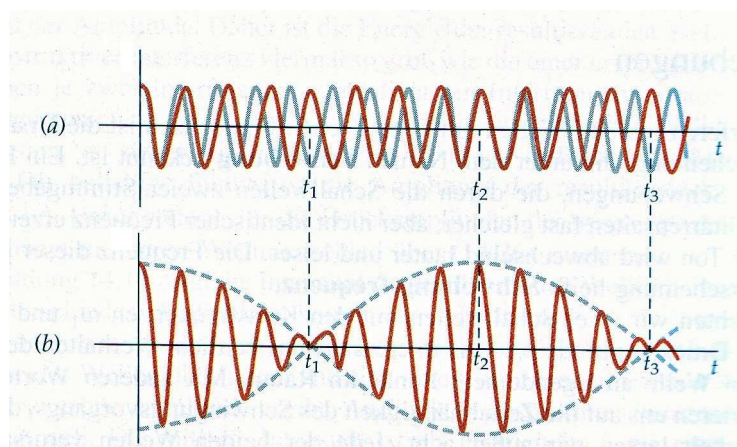


Abbildung 147: Überlagerung von zwei Schwingung gleicher Amplitude, aber nur wenig verschiedener Frequenz führt zu einer Schwebung

Schwingung

Ein medizinisches Beispiel für einen periodischen Vorgang, der sich als Überlagerung von harmonischen Schwingung darstellen lässt, ist die Herzaktivität. Das Herz arbeitet periodisch mit etwa 72 Schlägen pro Minute (Frequenz $f=1,2$ Hz). Dabei wird eine elektrische Spannung erzeugt, die im Elektrokardiogramm (EKG) registriert werden kann. Abbildung 148 zeigt das EKG eines gesunden Menschen.

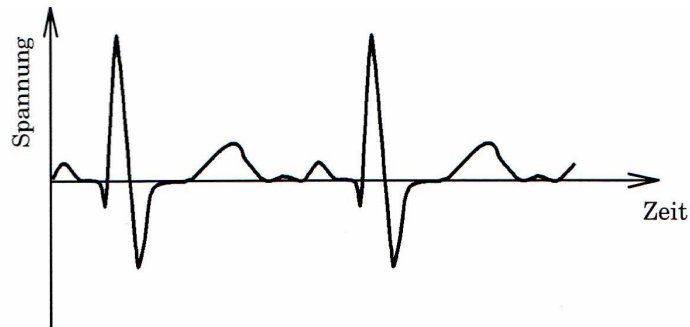


Abbildung 148: Elektrokardiogramm (EKG) eines gesunden Menschen

Die Fourier-Theorie besagt, dass sich jeder beliebige periodische Schwingungsvorgang auch als Überlagerung einer Reihe von harmonischen Schwingungen (Sinusschwingungen) darstellen lässt (Fourier Analyse). Es gibt bei der Überlagerung eine Grundfrequenz f_0 als Frequenz der Grundschwingung.

Die Frequenzen aller anderen Schwingungen sind **ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz** ($f_0, 2f_0, 3f_0, \dots, nf_0$).

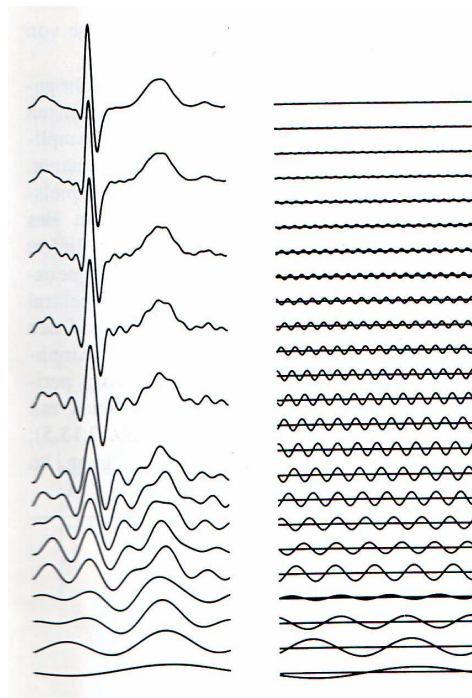


Abbildung 149: Nach Fourier-Theorie kann jeder periodische Vorgang als Überlagerung von harmonischen Schwingungen dargestellt werden.

Diese Schwingungen nennt man auch Oberschwingungen. Abbildung 149 zeigt die Fourier-Analyse oder Fourier-Zerlegung im EKG Diagramm mit einer Grundfrequenz f_0 und zahlreichen Oberschwingungen $n \cdot f_0$.

13 Wellen

13.1 Ausbreitung einer Welle

Wird in einem System, das aus einer Kette von elastisch miteinander verbundenen Massen M besteht, an einer Stelle (zum Beispiel am Anfang der Kette) eine Schwingung ausgeführt, so breitet sich diese räumlich aus. Die sich räumlich ausbreitende Schwingung nennen wir eine **Welle**. Eine Welle transportiert Energie aber keine Materie (Abb. 150). Dabei gibt es zwei Grenzfälle: Entweder erfolgt die Schwingung der Masse M *quer* zur Richtung der Kette, also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung oder *in* Richtung der Kette.

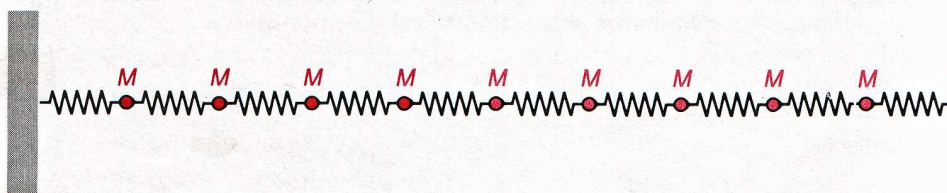


Abbildung 150: Eine Kette von elastisch miteinander verbundenen Massen M

Im ersten Fall bezeichnet man die Welle als **transversal**, im zweiten Fall, bei der die Massen M in Ausbreitungsrichtung schwingen, nennt man die Welle **longitudinal**. In beiden Fällen entsteht bei einer periodischen Ausbreitung nicht nur eine *zeitliche*, sondern auch eine *räumliche* Periodizität. Man findet den selben Schwingungszustand nicht nur wie bei jeder Schwingung in regelmäßigen *zeitlichen* Abständen T (Schwingungsdauer) am gleichen Ort wieder vor, sondern auch zur gleichen Zeit in regelmäßigen *räumlichen* Abständen λ (Abb. 151).

Die Größe λ heißt **Wellenlänge**. Wie bei der Abbildung 151 erkennbar ist, entspricht die Wellenlänge λ derjenigen Strecke, die die Welle während einer **Schwingungsdauer** T zurücklegt.

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** einer Welle hängt von dem „Medium“ ab, in dem die Welle fortschreitet. Wie aus Abbildung 147 hervorgeht, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle

$$c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{\lambda}{T},$$

da die Welle während einer Schwingungsdauer T um eine Strecke λ fortschreitet.

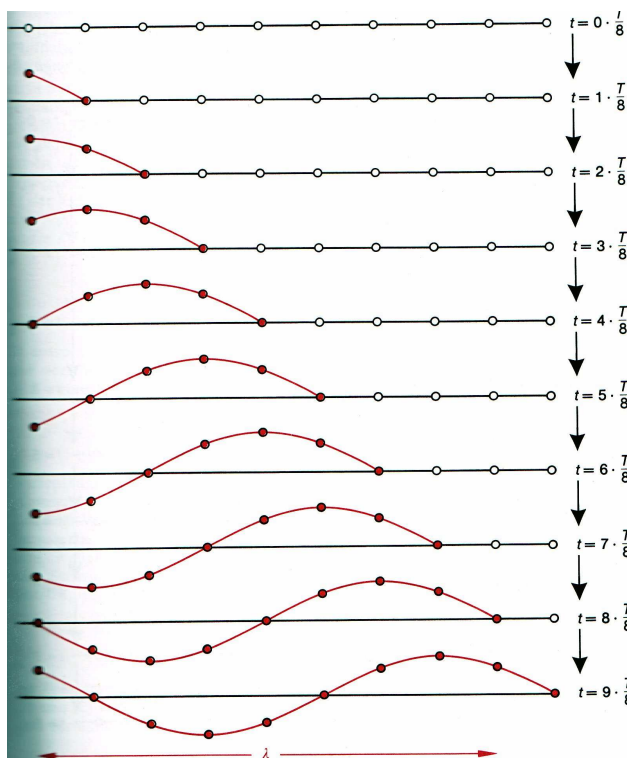


Abbildung 151: Während einer Schwingungsdauer T schreitet die Welle um Wellenlänge λ fort.

Der Kehrwert der Schwingungsdauer T ist die Frequenz. Hieraus folgt:

$$c = \lambda \cdot f$$

Die Abbildung 152 zeigt die Momentaufnahme ($t=0$) einer **longitudinalen** und **transversalen** Welle.



Abbildung 152: Momentaufnahme einer longitudinalen und transversalen Welle

Das System entsteht aus mit Federn verbundenen Massen. Die **Wellengleichung** beschreibt mathematisch die zeitliche und örtliche Periodizität einer harmonischen Welle.

$$A(x, t) = A_0 \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

A = Auslenkung

A_0 = Amplitude der Welle

λ = Wellenlänge

T = Schwingungsdauer

Betrachtet man die Wellengleichung am Ort x als konstant, so bekommt man die Zeitabhängigkeit einer Welle an einem *festen Ort*, die durch die Schwingungsdauer T charakterisiert ist. Betrachtet man aber die Zeit als konstant (Momentaufnahme), so bekommt man die Ortsabhängigkeit der Welle, die durch Wellenlänge λ charakterisiert wird (Abb. 153).

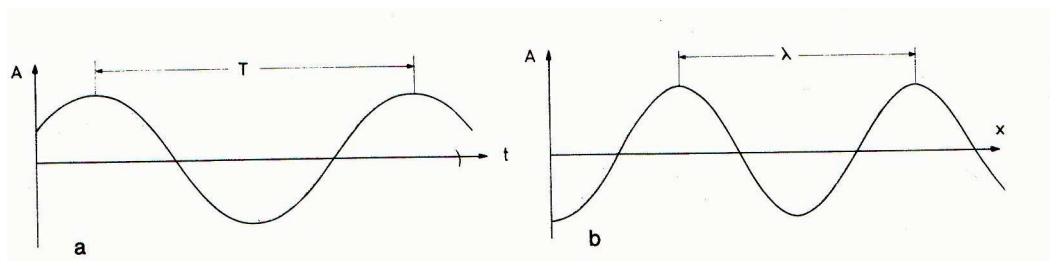


Abbildung 153: a zeigt die Periodizität der Welle in der Zeit (durch T gekennzeichnet)
b zeigt die Periodizität der Welle im Raum (durch λ gekennzeichnet)

13.2 Interferenz, stehende Wellen

Wenn ein Raumpunkt von zwei Wellen betroffen wird, hängt sein Zustand davon ab, wie sich die zwei Wellen an diesem Punkt überlagert haben. Die Überlagerung der Wellen (wie bei Schwingungen) wird als **Interferenz** bezeichnet. Sie hängt vom **Phasenunterschied** der beiden Wellen ab. Wenn die zwei Wellenquellen unterschiedlichen Abstand vom betrachteten Raumpunkt haben, gibt es eine *Wegdifferenz*. Diese Wegdifferenz wird als **Gangunterschied** bezeichnet. Es gibt zwei Extremfälle:

1. Ist die Phasendifferenz $\varphi = 0$, dann ist der Gangunterschied auch gleich Null und die beiden Wellen sind *in Phase*. Es gibt an diesem Punkt eine Verstärkung der Welle (Wellenberge). Diese Art der Überlagerung nennt man **konstruktive Interferenz**.
2. Bei einer Phasendifferenz von Schwingungen $\varphi = \pi = 180^\circ$ beträgt der Gangunterschied $\lambda/2$. Die beiden Wellen sind nicht mehr in Phase. Dann spricht man von **destruktiver Interferenz**. Es kommt zu einer Auslöschung der Wellen.

Ein Beispiel von Interferenz sind Überlagerung von zwei gegenläufigen Wellen gleicher Amplitude und Frequenz. Diese Überlagerung führt zu ortsfesten **stehenden Wellen**.

Betrachten wir ein, nur an einem Ende befestigtes Seil, das mit einem Impuls angeregt wird (Abb. 154).

Ein von rechts einlaufender Impuls wird an die Wand reflektiert. Der reflektierte und einlaufende Impuls sind invertiert. Die einlaufende und reflektierte Welle können sich zu einer stehenden Welle überlagern. Einzelne Massenpunkte des Seils bleiben ständig in Ruhe (Schwächung). Sie liegen im ortsfesten Schwingungsknoten. Andere sind in maximaler Bewegung, sie liegen im ortsfesten Schwingungsbäuchen (Verstärkung).

Der Abstand zwischen benachbarten Knoten oder Bäuchen beträgt eine halbe Wellenlänge $\lambda/2$ (Abb. 155).

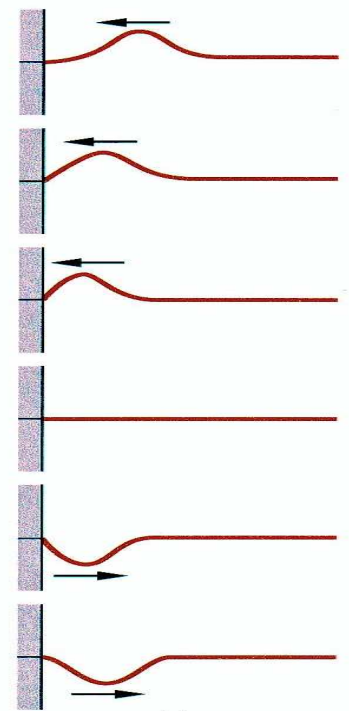


Abbildung 154: Überlagerung von einlaufenden und reflektierenden Wellen führt zu ortsfesten stehenden Wellen

Wellen

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir eine gespannte Seite (z.B. eine Gitarrensaiten), die zwischen zwei festen Halterungen mit Abstand L befestigt ist (Abb. 155).

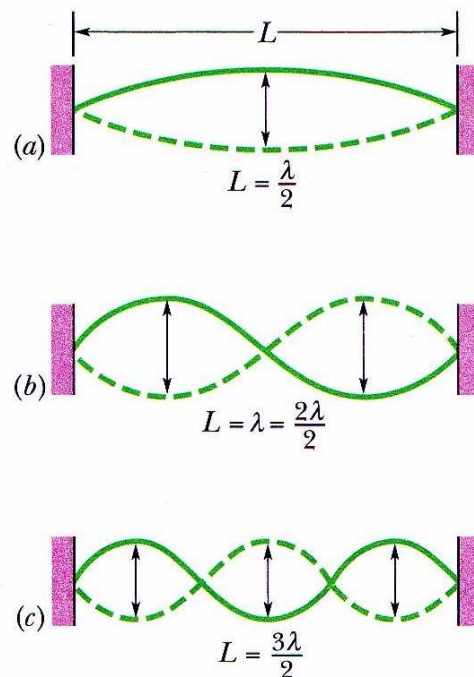


Abbildung 155: Eine gespannte Saite und Entstehung der stehenden Welle

Wir erzeugen auf der linken Seite eine anhaltende Welle, die sich nach rechts ausbreitet. Hat sie das rechte Ende erreicht, wird sie reflektiert und breitet sich noch weiter nach links aus. Die reflektierte Welle überlagert sich mit der einlaufenden Welle. Für bestimmte Frequenzen führt die Interferenz zu einer stehenden Welle. Bei (a) sind die beiden Knoten am Seilende, da keines der Enden frei schwingen kann. Der Abstand der beiden Knoten ist

$$L = \frac{\lambda}{2}.$$

Ein Schwingungsbauch bildet sich in der Mitte der Seite. Bei (b) gibt es zwei Schwingungsbäuche und einen Knoten in der Mitte

$$L = 2 \frac{\lambda}{2}$$

Allgemein können sich auf einer Saite der Länge L stehende Wellen ausbilden, deren Wellenlänge einen der folgenden Werte entspricht:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

13.3 Schallwellen, Akustik

Mechanische Schwingungen im Frequenzbereich von etwa 20.000 Hz kann das menschliche Ohr hören. Sie werden Hörschall genannt. Schall ist ganz allgemein dann gegeben, wenn sich Druck oder Dichteschwankungen in einem Medium fortpflanzen. Wir betrachten zwei Beispiele:

1. Schwingungen einer Membran z.B. bei einem Lautsprecher wird während ihrer Bewegung der angrenzenden Luftmoleküle periodisch mit bewegt (Abb. 156). Es wird abwechselnd ein Überdruck (bei Luftmolekülüberschuss) oder ein Unterdruck (bei Luftmolekülmangel) entstehen. Es kommt also zu Druckschwankungen beziehungsweise Dichteschwankungen, die sich wie eine Welle in der Luft ausbreiten.

Die Geschwindigkeit der Ausbreitung nennt man **Schallgeschwindigkeit** c . Sie ist bei Gasen gleich:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

p = Druck

ρ = Dichte

κ ist der sogenannte Adiabaten-Exponent und ist eine für die Gasart charakteristische Konstante (z.B. beim O_2 : $\kappa = 1,3$)

In Luft beträgt die Schallgeschwindigkeit bei einer Temperatur von $0^\circ C$ 330 m/s.

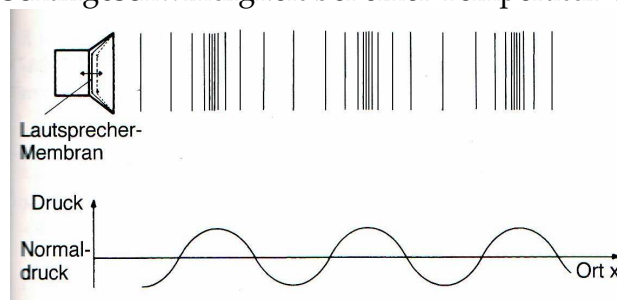


Abbildung 156: Druckschwankungen der Luft die von der Membran eines Lautsprechers erzeugt werden.

2. In einem luftgefüllten Rohr (Abb. 157) wird eine Schallwelle erzeugt, indem ein Kolben abwechselnd periodisch hineingedrückt und herausgezogen wird. Auf diese Weise breitet sich im Rohr ein Druckunterschied (zunächst Über-, dann Unterdruck) aus. Da die Schwingung eines Luftteilchens parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle erfolgt, handelt es sich um eine **longitudinale** Welle.

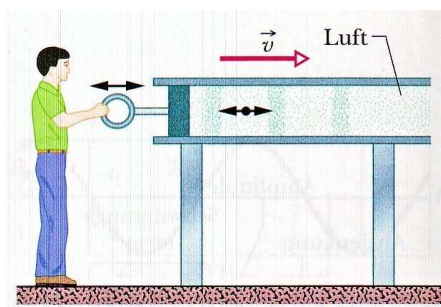


Abbildung 157: Erzeugung einer longitudinalen Schallwelle in einem luftgefüllten Rohr.

13.4 Schallfeldgrößen

Die Ausbreitung von Schallwellen ist an Materie gebunden, d.h. Im Vakuum können sich Schallwellen nicht ausbreiten.

- In *festen* Stoffen breiten sich Schallwellen sowohl als Transversalwelle als auch Longitudinalwelle aus.
- In *Flüssigkeiten* und *Gasen* sind Schallwellen Druckschwankungen. Sie können sich in ihnen nur als Longitudinalwelle ausbreiten.

Die Ausbreitung der Schallwelle um die Strecke λ (Wellenlänge) erfolgt in der Zeit T (Schwingungsdauer) und wir erhalten für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c (wie bei allen Wellenarten):

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \text{bzw.} \quad c = \lambda \cdot f$$

Die Schallgeschwindigkeit ist in Luft 330 m/s, in Wasser 1530 m/s, in Eisen 5850 m/s (longitudinal) und 3230 m/s (transversal).

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Ausbreitung der Schallwelle in Luft. Die Bewegung eines einzelnen Luftmoleküls an einem Ort erfolgt periodisch nach der Gleichung:

$$x = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (*)$$

Die maximale Auslenkung der Schwingung wird als **Schallamplitude** A_0 bezeichnet. Die Geschwindigkeit v der periodischen Teilchenbewegung (z.B. Luftmoleküle) kann man aus der Ableitung von (*) bekommen. Der Maximalwert dieser Geschwindigkeit v_0 wird **Schallschnelle** genannt. v_0 ist die Molekülgeschwindigkeit und liegt im Bereich von 01mm/s. Sie ist mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c nicht zu verwechseln.

Durch die periodische Änderung der Geschwindigkeit v der Moleküle entstehen periodische Druckschwankungen, deren Amplitude als **Schallwechseldruck**, oder einfach **Schalldruck** bezeichnet wird. Sie beträgt im Bereich von 10^{-2} Pa (Abb. 158).

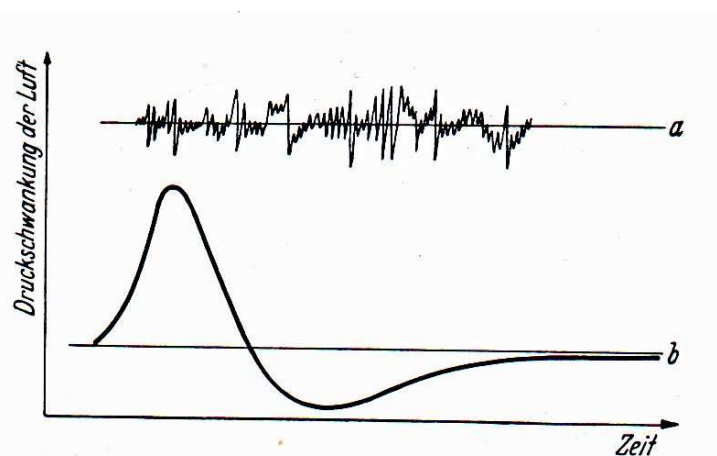


Abbildung 158: Zeitabhängigkeit der Druckschwankungen der Luft

Wellen

Schallwellen transportieren durch eine Fläche F senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung in der Zeiteinheit eine bestimmte Energie, also eine Leistung P (Abb. 159):

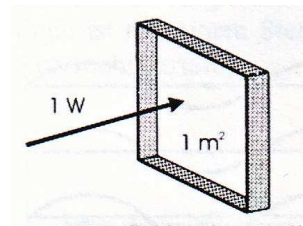


Abbildung 159: Schallenergie pro Fläche und Zeit wird Schallstärke oder Schallintensität genannt

$$\text{Schallstärke} = \text{Intensität } I = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$$

I nennt man **Schallintensität** oder **Schallstärke**. Die Einheit der Intensität ist demnach

$$\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Zwischen Schallintensität I und Schallschnelle v (Molekülgeschwindigkeit) besteht der Zusammenhang

$$I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c \cdot v^2$$

wobei ρ die Mediumdichte und c die Schallgeschwindigkeit bedeutet.

Die maximale Empfindlichkeiten des menschlichen Ohres liegen bei Frequenzen von etwa 1000 Hz. Bei diesen Frequenzen können Schallstärken (Intensitäten) von 10^{-12} W/m^2 (Hörschwelle) bis 10 W/m^2 (Schmerzschwelle) registriert werden. Aufgrund des extrem großen, vom Ohr wahrnehmbaren Intensitätsbereiches verwendet man zum Vergleich von zwei Schallintensitäten eine logarithmische Skala. Das Ohr zeigt innerhalb des Hörbereiches eine besondere Fähigkeit, sich verschiedenen Schallintensitäten anzupassen.

Das **Weber-Fechner-Gesetz** besagt, dass die *subjektiv* empfundene Lautstärke nicht linear sondern logarithmisch mit der Intensität wächst (Abb. 156). Man gibt daher die Schallintensität I relativ zur Bezugsintensität I_0 an (bei $f = 1000 \text{ Hz}$). Als I_0 wird die untere Hörgrenze des Menschen (Hörschwelle) gesetzt:

$$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Dann wird der logarithmische **Schallstärkepegel** L definiert:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$$

Der Schallstärkepegel ist eine Zahl und wird Dezibel (dB) genannt. Auf dieser Skala beträgt die **Hörschwelle** $I = I_0$. I_0 = Hörschwelle = Bezugsintensität

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I_0}{I_0} = 0 \text{ dB}$$

und die Schmerzschwelle $1\text{W}/\text{m}^2$ beträgt:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{1}{10^{-12}} \text{dB} = 10 \cdot \lg 10^{12} \text{dB} = 120\text{dB}$$

Als Beispiel beträgt die Intensität beim Sprechen $10^{-8}\text{W}/\text{m}^2$. Das entspricht einem Schallstärkepegel von

$$L = 10 \cdot \lg \frac{10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \text{dB} = 10 \cdot \lg 10^4 \text{dB} = 10 \cdot 4 \text{dB} = 40\text{dB}$$

Allgemein gilt:

Bei einer Verdopplung der Schallintensität I wird der Schallstärkepegel um ca. 3dB erhöht. Da die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres im Hörbereich stark variiert, ist die Schallintensität allgemein nicht maßgebend. Man braucht eine neue physikalische Größe, um die physikalischen Effekte der *Frequenzabhängigkeiten* zu berücksichtigen. Das ist die Größe **Lautstärke** mit der Einheit **Phon**. Um nun angeben zu können, wie laut ein Ton beliebiger Frequenz gehört wird, vergleicht man ihn mit einem Ton der Frequenz 1000 Hz. Der **Lautstärkepegel** L_N eines Tones beliebiger Frequenz ist aber der Schallstärkepegel L des 1kHz Tones, der ebenso **laut** empfunden wird wie der Ton *beliebiger* Frequenz. Jetzt wird aber der Lautstärkepegel L nicht mehr in Dezibel sondern in **Phon** angegeben. Abbildung 160 zeigt die Frequenzabhängigkeit der **Schallstärke** (Intensität) und **Lautstärke** (in Phon) an.

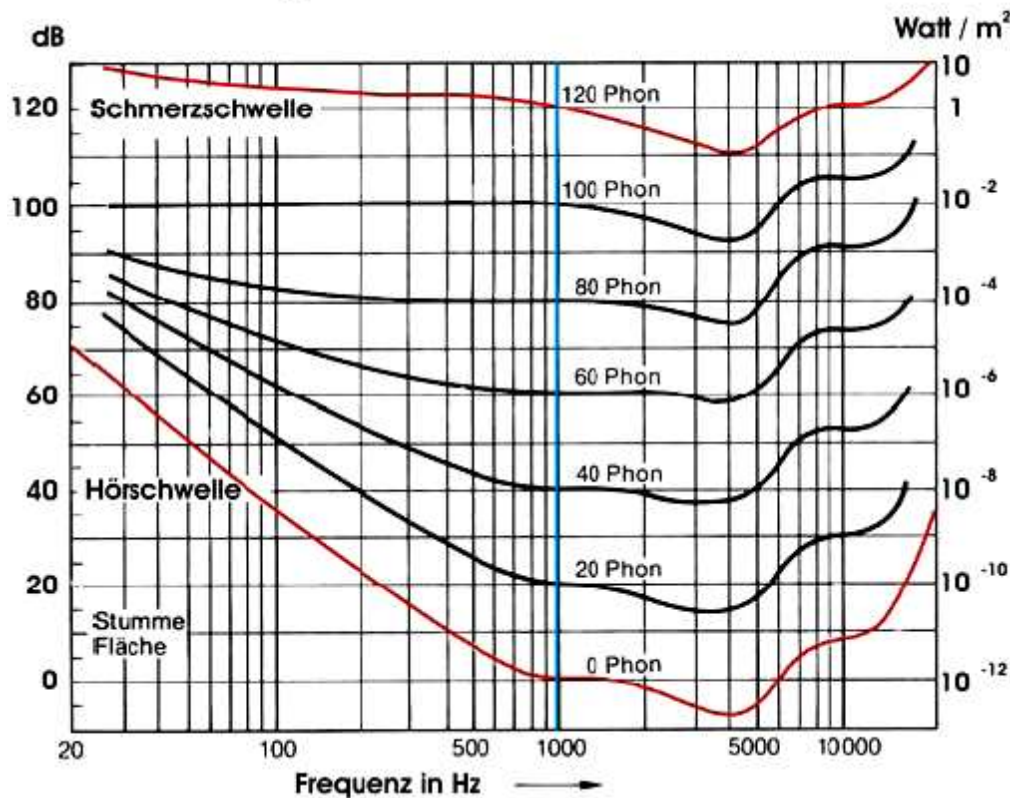


Abbildung 160: Frequenzabhängigkeit der Intensität (in Dezibel) und Lautstärke (in Phon)

Bei der Frequenz 1 kHz stimmen die Dezibel und Phonangaben überein. In der folgenden Tabelle wird die Intensität und Lautstärke einiger Schallquellen angegeben:

Lautstärke in Phon	Schallintensität in W/m ²	Schallquelle
0	10 ⁻¹²	Hörschwelle
20	10 ⁻¹⁰	Blätterrauschen
50	10 ⁻⁷	Sprache
100	10 ⁻²	Motorrad
120	1	Schmerzschwelle

Tabelle 2: Gegenüberstellung von Lautstärke und Schallintensität einiger Schallquellen

13.5 Ultraschall

Ultraschall sind Schallwellen, die wegen der hohen Frequenz vom menschlichen Ohr nicht mehr gehört werden können. Seine Frequenzen liegen im Bereich von 20 kHz bis etwas 1 GHz. Der Ultraschall wird häufig durch sogenannte piezoelektrische Sender erzeugt. Piezoelektrische Kristalle von Quarz zeigen im elektrischen Wechselfeld periodische Längsänderungen, die sich als Druck- oder Dichteschwankungen auf das umgebende Medium (z.B. Luft) übertragen. Häufig wird derselbe Kristall als Empfänger des Ultraschallechos verwendet. Die Anwendung des Ultraschalls in der Technik und Medizin beruht auf Reflexion, Absorption und Interferenz der Schallwellen. Diese Phänomene werden ausführlich bei Lichtwellen untersucht. Die Anwendung in der Medizin erfolgt so, dass mit einem Ultraschallsender der Körper des Patienten gescannt wird.

Ultraschallwellen werden je nach Gewebeart absorbiert oder reflektiert. Als Beispiel wird in einem einfachen Fall die Reflexion der Schallwellen an Grenzschichten zweier Medien betrachtet (Abb. 161).

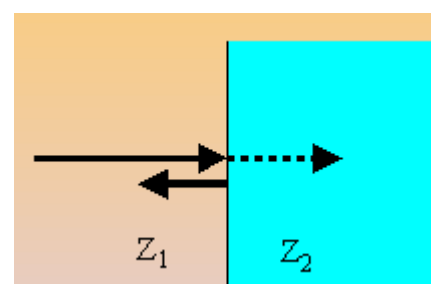


Abbildung 161: Reflexion und Absorption von Schallwellen an der Grenzschicht zweier Medien mit Wellenwiderstand Z_1 und Z_2

Dazu definieren wir den **Wellenwiderstand** Z eines Mediums. Bei einer Schallwelle, die sich in einer Richtung ausbreitet, ist der Wellenwiderstand des Mediums gleich dem Produkt aus Dichte und Ausbreitungsgeschwindigkeit.

$$Z = \rho \cdot c$$

Ultraschall wird an den Grenzflächen, an denen sich der Wellenwiderstand ändert mehr oder weniger stark reflektiert. Man kann die reflektierte Welle (**Echo**) registrieren. An der Laufzeit des Echos (Abb. 162) lässt sich bei bekannter Geschwindigkeit c des Ultraschalls die Entfernung s der Grenzfläche oder des Hindernisses bestimmen:

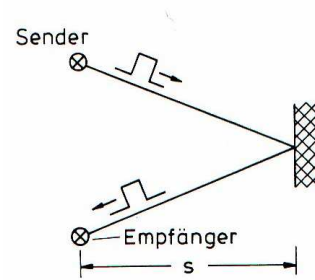


Abbildung 162: Echoverfahren zur Bestimmung der Entfernung eines Hindernisses

$$s = v \cdot \frac{t}{2}$$

Anwendung findet dieses Verfahren in der Medizin, wo man die Lage und Veränderung der inneren Organe im Körper bestimmt. Diese Methode nennt man **Sonographie**, die man zu einem bildgebenden Verfahren wie bei der Röntgendiagnostik entwickelt hat. Bei Ultraschalluntersuchungen ermöglicht der infolge unterschiedlicher Wellenwiderstände an Grenzflächen reflektierte Schall den Aufbau eines Bildes. Abbildung 163 zeigt ein Sonogramm eines vier Monate alten ungeborenen Kindes.



Abbildung 163: Sonogramm eines vier Monate alten Kindes

Man kann z.B. durch Abtasten der Bauchdecke eines Patienten die Struktur der inneren Organe beobachten. Es muss aber der Raum zwischen Ultraschallsender (Quarz) und dem Körper mit einem Gel gefüllt werden. Sonst wird die Schallwelle durch die Luftpolster vollständig reflektiert und kann gar nicht in den Körper des Patienten eindringen. Die sonographische Diagnostik ist relativ zur Röntgendiagnostik unschädlich, weil Ultraschall keine **ionisierende Strahlung** ist.

Ein Ultraschallgerät zur diagnostischen Zwecken arbeitet mit einer Frequenz von etwa $f=2\text{ MHz}$. Im Pulsbetrieb erreicht man Schallintensitäten bis zu $I=10\text{ W/cm}^2$.

Bildquellenverzeichnis und Literatur

- 1) Mechanik (Mentor) (Kapitel 1-4)
- 2) Physik (Halliday-Risnik)
- 3) Physik (Paul Tipler)
- 4) Physik für Pharmazeuten und Mediziner (Haas)
- 5) Physik für Mediziner (Harten)
- 6) Einführung Physik (Pohl)
- 7) Kurzes Lehrbuch der Physik (Stuart-Klages)

Zuletzt bearbeitet am: 08.11.07