

Quantenfeldtheorie
Sommersemester 2006
Wintersemester 2006/7

KLAUS FREDENHAGEN

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Kapitel I. Vielteilchensysteme in der Quantenmechanik	9
1. Der n-Teilchenraum	9
2. Der bosonische Fockraum	11
3. Der fermionische Fockraum	22
Kapitel II. Relativistische Einteilchensysteme	27
1. Die Poincaré-Gruppe	27
2. Poincaré-Symmetrie in der Quantenmechanik	30
3. Die Darstellungen der Poincaré-Gruppe	32
4. Relativistische Wellengleichungen	40
Kapitel III. Freie Felder	45
1. Das skalare Feld	45
2. Felder mit Spin; der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik	52
3. Das freie Dirac-Feld	56
4. Elektrodynamik	62
Kapitel IV. Wechselwirkungen	71
1. S-Matrix und Wirkungsquerschnitte	71
2. Die LSZ-Relationen	74
3. Haag-Ruelle-Streutheorie	77
4. Kanonische Quantisierung	80
5. Pfadintegral	87
6. Zusammenhängende Funktionen	97
7. Einteilchenirreduzible Funktionen (Vertexfunktionen)	100
Kapitel V. Renormierung	107
1. Massen- und Wellenfunktionsrenormierung	107
2. Kopplungskonstantenrenormierung	109
3. Regularisierungs- und Renormierungsmethoden	111
4. Renormierung in allen Ordnungen	128
5. Klassifikation der Wechselwirkungen	131
6. Die Renormierungsgruppe	132

KAPITEL

Einleitung

Die Quantenmechanik ist eine konsistente Theorie, die einen großen Bereich der Physik, vor allem die Atom- und Molekülphysik, gut beschreibt. Sie vernachlässigt jedoch die Effekte der speziellen Relativitätstheorie und ignoriert die Quantennatur der Kraftfelder, insbesondere die des elektromagnetischen Feldes. Außerdem spielt die Teilchenzahl in der Quantenmechanik eine ausgezeichnete Rolle, so dass Vielteilchenprozesse und Prozesse mit Erzeugung und Vernichtung von Teilchen nur mühsam beschrieben werden können. Jeder dieser Gesichtspunkte führt zu einer Erweiterung des Rahmens der Quantenmechanik, die man als Quantenfeldtheorie bezeichnet. Ein gebräuchlicher, wenn auch etwas missverständlicher äquivalenter Begriff ist die „zweite Quantisierung“.

Das Konzept der Quantenfeldtheorie wurde in den Jahren 1927-1929 von Heisenberg, Jordan, Pauli und Dirac entwickelt. Mit Hilfe einer Störungstheorie 1. Ordnung konnte man damit auf Anhieb die spontane Emission von elektromagnetischer Strahlung und den Compton-Effekt erklären. Lange Zeit aber scheiterte eine Verbesserung dieser Rechnungen mit Hilfe höherer Ordnungen der Störungstheorie daran, dass alle entsprechenden Ausdrücke divergierten.

Die Definition einer Störungstheorie ist dann 1949 Tomonaga, Schwinger, Feynman und Dyson mit Hilfe des Renormierungsverfahrens gelungen. Die Grundidee besteht darin, dass die physikalischen Massen und Ladungen nicht mit den in der Formulierung der Theorie verwendeten Parametern (den sogenannten „nackten“ Massen, Ladungen etc.) übereinstimmen. Diese müssen daher neu festgelegt („renormiert“) werden, so dass die physikalischen Parameter ihre richtigen Werte erhalten. Im Fall der Elektrodynamik stimmten die auf diese Weise berechneten Korrekturen zur untersten Ordnung der Störungstheorie ganz ausgezeichnet mit den gemessenen Werten überein. Paradebeispiel ist das magnetische Moment des Elektrons. Bezeichnet man mit μ_0 das Bohrsche Magneton, so ergibt sich für das magnetische Moment des Elektrons für den theoretischen, bzw. experimentellen Wert

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\text{theor}} = 1,001159652460(127)(75) \quad (0.1)$$

und

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\text{exper}} = 1,001159652200(40) \quad (0.2).$$

wobei die Fehler des theoretischen Wertes aus der Unsicherheit in der Feinstrukturkonstante (127) und der numerischen Ungenauigkeit bei der Berechnung der Koeffizienten der Störungsreihe bestehen (nach Nachtmann, Elementary Particles Theory.) Trotz dieser beachtlichen Erfolge ist es bis heute nicht bekannt, ob es eine konsistente Theorie der Quantenelektrodynamik gibt. Tatsächlich sprechen viele Argumente dafür, dass die Formulierung der Quantenelektrodynamik, die den störungstheoretischen Rechnungen zu Grunde liegt, nicht konsistent ist.

Nach dem (partiellen) Erfolg der Quantenelektrodynamik lag es nahe, auch die anderen Wechselwirkungen der Elementarteilchen durch Quantenfeldtheorien zu beschreiben. Hierbei sollten die Quanten dieser Felder wie die Photonen als Teilchen beobachtbar sein. Diese Überlegung führte Yukawa zur Vorhersage von Mesonen als Übermittler der Kernkräfte und wurde in letzter Zeit eindrucksvoll bei dem Nachweis der W- und Z-Bosonen als Überträger der schwachen Wechselwirkung bestätigt.

Die heute weitgehend akzeptierte Theorie der Elementarteilchen ist das sogenannte Standardmodell. Es handelt sich um die Quantenchromodynamik als Theorie der starken Wechselwirkung, kombiniert mit der Weinberg-Salam-Theorie als Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung. Es sind bisher keine Effekte gefunden worden, die den Aussagen des Standardmodells widersprechen. Trotzdem gibt es eine Reihe schwerwiegender Einwände gegen das Standardmodell, auf die wir im Laufe dieser Vorlesung noch zurückkommen werden.

Die Quantenfeldtheorie ist auch mehr als 60 Jahre nach ihrer ersten Formulierung noch keine konsistente abgeschlossene Theorie. Der Vergleich mit dem Experiment beruht in der Regel auf heuristischen Überlegungen, deren Richtigkeit schwer einzuschätzen ist. Eine Ausnahme bilden einige allgemeine Strukturaussagen wie der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik und die PCT-Invarianz, die im Rahmen der Quantenfeldtheorie aus grundlegenden Prinzipien abgeleitet werden können.

Der Plan dieser Vorlesung sieht folgendermaßen aus. Zunächst soll der Vielteilchenformalismus der Quantenmechanik („zweite Quantisierung“) besprochen werden. Wir werden sehen, dass dieser Formalismus als Quantisierung einer durch die Schrödingergleichung definierten Feldtheorie interpretiert werden kann.

Danach sollen relativistische Einteilchensysteme besprochen werden. Dazu werden zunächst die unitären Darstellungen der Poincaregruppe untersucht. Aus dieser Analyse ergeben sich dann die relativistischen Wellengleichungen.

Im dritten Kapitel werden nichtwechselwirkende relativistische Vielteilchensysteme konstruiert, und es wird gezeigt, dass diese Quantenfeldtheorien entsprechen. Alternativ wird einer klassischen Feldtheorie

(am Beispiel der Elektrodynamik) eine Quantenfeldtheorie zugeordnet, und es wird gezeigt, dass diese nichtwechselwirkende Teilchen (in diesem Fall Photonen) beschreibt.

Im vierten Kapitel werden Methoden zur Einführung relativistischer Wechselwirkungen betrachtet. Das Konzept der S-Matrix wird erläutert, das Pfadintegral wird besprochen und die Feynmanregeln werden hergeleitet.

Die möglichen Wechselwirkungen einer relativistischen Theorie sind Lorentz-invariant und lokal. Diese Bedingungen schränken die Zahl der erlaubten Wechselwirkungen stark ein und erzwingen gleichzeitig, dass diese sehr singulär sind, sodass die üblichen quantenmechanischen Methoden nicht anwendbar sind. Eine naive Anwendung der aus der Quantenmechanik bekannten Verfahren führt zum Auftreten von Divergenzen. Die Elimination oder Vermeidung dieser Divergenzen ist der Gegenstand der Renormierungstheorie, die wir im 5. Kapitel behandeln wollen.

Im 6. Kapitel sollen Strukturfragen der Quantenfeldtheorie besprochen werden. Es soll gezeigt werden, dass viele Aspekte der Quantenfeldtheorie, z.B. die Teilcheninterpretation, das Auftreten innerer Symmetriegruppen, die Bose-Fermi-Alternative zur Teilchenstatistik, der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik und PCT-Symmetrie aus allgemeinen Prinzipien der lokalen Quantenphysik abgeleitet werden können.

Im 7. Kapitel sollen nichtabelsche Eichtheorien behandelt werden.

KAPITEL I

Vielteilchensysteme in der Quantenmechanik

1. Der n -Teilchenraum

Nach der Quantenmechanik beschreibt man ein Einteilchensystem durch eine Wellenfunktion $\Phi(\mathbf{x}, m)$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und $m = -s, -s+1, \dots, s$, wobei $s = 0, \frac{1}{2}, 1 \dots$ der Spin des Teilchens ist. Die Wellenfunktion muss quadratisch integrierbar sein, das heißt, das Normierungsintegral

$$\|\Phi\|^2 := \sum_{m=-s}^s \int d^3\mathbf{x} |\Phi(\mathbf{x}, m)|^2$$

muss endlich sein. Diese Wellenfunktionen bilden den Einteilchenhilbertraum \mathfrak{H}_1 . Um Zustände mit zwei Teilchen zu beschreiben, muss man die beiden Einteilchensysteme in geeigneter Weise koppeln. Die einfachste, aber keineswegs einzige Möglichkeit ist das Tensorprodukt der Einteilchenräume,

$$\mathfrak{H}_2 := \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_1 \ni \Phi, \Phi = \Phi(\mathbf{x}_1, m_1, \mathbf{x}_2, m_2).$$

Die Wellenfunktionen eines Zweiteilchensystems können also nicht mehr als Wellen im Ortsraum interpretiert werden. Die n -Teilchenwellenfunktionen sind entsprechend quadratisch integrierbare Funktionen Φ von n Variablen (\mathbf{x}_i, m_i) , $i = 1, \dots, n$,

$$\Phi \in \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_1$$

Observable des n -Teilchensystems sind z.B.

- der Ortsoperator des i -ten Teilchens

$$(\mathbf{X}_i \Phi_n)(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n) = \mathbf{x}_i \Phi(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n)$$

- der Impulsoperator des i -ten Teilchens

$$(\mathbf{P}_i \Phi_n)(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n) = \frac{1}{i} \partial_i \Phi(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n)$$

- die kinetische Energie des i -ten Teilchens (mit Masse M_i)

$$(T_i \Phi_n)(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n) = -\frac{1}{2M_i} \Delta_i \Phi_n(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n)$$

- die 3-Komponente des Spins des i -ten Teilchens

$$S_i^{(3)} \Phi_n(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n) = m_i \Phi_n(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n)$$

- die kinetische Gesamtenergie $T = \sum_i T_i$,

- der Gesamtimpuls $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i$,

- und der Translationsoperator $U(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}$,

$$(U(\mathbf{x})\Phi_n)(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n) = \Phi_n(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, m_1, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}, m_n).$$

Wechselwirkungen sind in der Regel Funktionen $V(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ der Ortsoperatoren. Ist z. B. $V_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ das Wechselwirkungspotential zwischen den Teilchen i und j , so erhält man

$$V = \sum_{i < j} V_{ij}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j).$$

Der Hamiltonoperator ist dann

$$H = T + V \quad .$$

Bisher haben wir angenommen, dass die Teilchen unterscheidbar sind. Wenn die Teilchen ununterscheidbar sind, ist ihre Nummerierung willkürlich. Also wird die Funktion Φ_n^σ ,

$$\Phi_n^\sigma(\mathbf{x}_1, m_1, \dots, \mathbf{x}_n, m_n) = \Phi_n(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, m_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)}, m_{\sigma(n)})$$

für eine beliebige Permutation σ denselben Zustand wie Φ_n beschreiben. Man findet oft das Argument, dass daher $\Phi_n^\sigma = \lambda(\sigma)\Phi_n$ gelten müsse für eine eindimensionale Darstellung λ der Permutationsgruppe S_n . Die beiden eindimensionalen Darstellungen der S_n sind $\lambda(\sigma) = 1$ (total symmetrische Darstellung) und $\lambda(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$ (total antisymmetrische Darstellung). Im ersten Fall ist die Wellenfunktion symmetrisch (Bosestatistik), im zweiten Fall antisymmetrisch (Fermistatistik) unter Vertauschung zweier Argumente.

Tatsächlich haben alle bekannten Teilchen Bose- oder Fermistatistik. Man betrachtet aber oft Modelle, in denen die Wellenfunktionen ein komplizierteres Verhalten unter Permutationen haben. In der Atomphysik z.B. vernachlässigt man oft den Spin; die Ortswellenfunktionen müssen dann keineswegs antisymmetrisch sein.

Wo steckt der Fehler in dem Argument? Die Aussage, dass Φ_n und Φ_n^σ nur dann denselben Zustand darstellen, wenn sie sich um einen Faktor vom Betrage 1 unterscheiden, ist nur dann richtig, wenn alle Operatoren in \mathfrak{H}_n physikalische Observable sind. Dies ist aber gerade nicht der Fall, wenn die Teilchen ununterscheidbar sind. Der Ort des i -ten Teilchens z.B. ist dann keine Observable mehr. Messbar sind nur Größen, die nicht von der Nummerierung der Teilchen abhängen.

Wir definieren jetzt eine unitäre Darstellung der Permutationsgruppe auf \mathfrak{H}_n durch

$$U(\sigma)\Phi = \Phi^\sigma.$$

Es gilt

$$A \text{ observabel} \Rightarrow [A, U(\sigma)] = 0 \quad \forall \sigma \in S_n.$$

Wir können jetzt den Hilbertraum \mathfrak{H}_n in permutationsinvariante Unterräume zerlegen. Minimale invariante Unterräume entsprechen irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe. Es gilt nun der wichtige Satz

THEOREM I.1. *Zustände, die zu inäquivalenten Darstellungen der Permutationsgruppe gehören, lassen sich nicht kohärent überlagern.*

Zum Beweis betrachten wir zwei minimale invariante Unterräume \mathfrak{H}^a und \mathfrak{H}^b mit zugehörigen Orthogonalprojektoren E^a bzw. E^b . Nach Voraussetzung vertauschen diese Projektoren ebenso wie jede Observable A mit den Permutationsoperatoren $U(\sigma)$. Also vertauscht auch $E^a A E^b$ mit $U(\sigma)$. Wenn die Darstellungen der Permutationsgruppe auf den beiden Räumen inäquivalent sind, so muss nach dem Schurschen Lemma $E^a A E^b$ verschwinden. Sei nun $\Phi = \Phi^a + \Phi^b$ mit $\Phi^i \in \mathfrak{H}^i$, $i = a, b$. Der Erwartungswert einer Observablen A ist

$$(\Phi, A\Phi) = (\Phi^a, A\Phi^a) + (\Phi^b, A\Phi^b),$$

da die gemischten Terme verschwinden,

$$(\Phi^a, A\Phi^b) = (\Phi^a, E^a A E^b \Phi^b) = 0.$$

Der durch die Wellenfunktion Φ beschriebene Zustand ist also ein Gemisch der Zustände Φ^a und Φ^b .

Die Tatsache, dass sich Zustände nicht immer kohärent superponieren lassen, ist zuerst von Wick, Wightman und Wigner erkannt worden; sie haben diesem Phänomen den Namen Superauswahlregel gegeben. Mengen von Zuständen, in denen das Superpositionsprinzip uneingeschränkt gilt, nennt man Superauswahlsektoren. Während in der Quantenmechanik mit endlich vielen Teilchen die Superauswahlregeln keine große Rolle spielen, werden sie wesentlich in allen Anwendungen der Quantenfeldtheorie.

Die bekannten Elementarteilchen sind entweder Bosonen oder Fermionen, je nachdem, ob ihr Spin ganz- oder halbzahlig ist. Dies lässt sich im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie begründen, wenn man die Möglichkeit unbeobachtbarer innerer Freiheitsgrade berücksichtigt. Allerdings gilt dies nur für Theorien in einer vierdimensionalen Raumzeit. In zwei- und dreidimensionalen Theorien sind andere Fälle möglich (Anyonen, Plektonen); dies kann beim Verständnis quasi-ein und zweidimensionaler Substanzen von Bedeutung sein (Quanten-Hall-Effekt, Hochtemperatursupraleitung).

2. Der bosonische Fockraum

Will man Prozesse beschreiben, bei denen sich die Teilchenzahl ändert, so muss man die verschiedenen n -Teilchenräume zusammenfassen. Für den Fall, dass die Teilchen ununterscheidbar sind und Bosestatistik haben, besteht der n -Teilchenraum \mathfrak{H}_n^+ aus den symmetrischen Wellenfunktionen. Man definiert jetzt den sogenannten bosonischen Fockraum \mathfrak{H}^+ über dem Einteilchenraum \mathfrak{H}_1 durch

$$\mathfrak{H}^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^+$$

mit $\mathfrak{H}_0^+ = \mathbb{C}$ und $\mathfrak{H}_1^+ = \mathfrak{H}_1$. Elemente $\Phi \in \mathfrak{H}^+$ sind Folgen

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots)$$

mit $\Phi_n \in \mathfrak{H}_n^+$ und

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi_n\|^2 < \infty.$$

Der Vektor

$$\Omega = (1, 0, \dots)$$

beschreibt einen Zustand ohne Teilchen und wird der Vakuumvektor genannt (andere Bezeichnung $|0\rangle$). Ein Einheitsvektor Φ beschreibt einen Zustand mit möglicherweise unscharfer Teilchenzahl; $\|\Phi_n\|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, in diesem Zustand genau n Teilchen zu finden. Typische Observable in \mathfrak{H}^+ sind

- der Teilchenzahloperator

$$(N\Phi)_n = n\Phi_n$$

mit Erwartungswert

$$\langle N \rangle = (\Phi, N\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} n \|\Phi_n\|^2$$

($\langle N \rangle = \infty$ ist möglich) und Schwankungsquadrat

$$\Delta(N)^2 = (\Phi, (N - \langle N \rangle)^2 \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle N \rangle)^2 \|\Phi_n\|^2.$$

Operatoren, die jeden n -Teilchenraum in sich abbilden, vertauschen mit dem Teilchenzahloperator. Beispiele sind

- der Impuls: $(\mathbf{P}\Phi)_n = \mathbf{P}^{(n)}\Phi_n$
- die kinetische Energie: $(T\Phi)_n = T^{(n)}\Phi_n$
- die potentielle Energie: $(V\Phi)_n = V^{(n)}\Phi_n$.

Der große Vorzug des Fockraums besteht darin, dass er eine einfache Beschreibung des Übergangs zwischen verschiedenen Teilchenzahlen gestattet. Das Vorgehen kann an dem folgenden Beispiel erläutert werden. Stellen wir uns ein Teilchen ohne jeden Freiheitsgrad vor. Dann ist $\mathfrak{H}_n^+ = \mathbb{C}\forall n$ und \mathfrak{H}^+ ist der Raum der komplexwertigen quadratisch summierbaren Folgen l_2 . Einen Operator, der die Teilchenzahl ändert, kann man durch

$$(a\Phi)_n = \sqrt{n+1}\Phi_{n+1}$$

definieren. Es gilt

$$[a, N] = a,$$

d.h. a verringert die Teilchenzahl um 1. Man nennt a den Vernichtungsoperator. Der adjungierte Operator a^* ist durch die Gleichung

$$(\Psi, a^*\Phi) = (a\Psi, \Phi)$$

definiert. Man berechnet

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\Psi}_n (a^* \Phi)_n &= \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a \Psi})_n \Phi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \overline{\Psi}_{n+1} \Phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \overline{\Psi}_n \Phi_{n-1}, \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

d.h. $(a^* \Phi)_0 = 0$ und $(a^* \Phi)_n = \sqrt{n} \Phi_{n-1}$, $n > 0$. Damit folgt

$$a^* a = N, \quad a a^* = N + 1 \quad \text{und} \quad [a, a^*] = 1.$$

Diese Beziehungen sind aus der Behandlung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik bekannt. Man setzt

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}} x + \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \frac{d}{dx}, \quad a^* = \sqrt{\frac{\omega}{2}} x - \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \frac{d}{dx},$$

und erhält

$$a^* a = \frac{\omega}{2} x^2 - \frac{1}{2\omega} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}$$

Die n -te Energieeigenfunktion ist dann in dieser Fockrauminterpretation der n -Teilchenzustand. Der Grundzustand (das Vakuum) kann durch

$$a \Omega = 0$$

charakterisiert werden. Die zugehörige Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} x + \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \frac{d}{dx} \right) \Omega(x) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln \Omega(x) &= \frac{\frac{d}{dx} \Omega(x)}{\Omega(x)} = -\omega x \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\Omega(x) = e^{-\frac{1}{2}\omega x^2} \text{const.}$$

Um eine entsprechende Definition im Fockraum zu erhalten, beachten wir, dass jeder Einteilchenwellenfunktion $f \in \mathfrak{H}_1$ ein Freiheitsgrad des Teilchens entspricht. Wir definieren den Vernichtungsoperator für ein Teilchen mit Wellenfunktion f durch

$$(a(f)\Phi)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sqrt{n+1} \int d^3 \mathbf{x} \overline{f(\mathbf{x})} \Phi_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

(der einfacheren Notation wegen beschränken wir uns auf Teilchen mit Spin 0). Der adjungierte Operator ergibt sich zu

$$(a(f)^* \Phi)_0 = 0 \quad ,$$

$$(a(f)^* \Phi)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) \Phi_{n-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Die Operatoren $a(f)$, $a(g)^*$ besitzen die folgenden Vertauschungsrelationen

$$[a(f), a(g)^*] = (f, g) = \int d^3\mathbf{x} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}).$$

Weiter gilt $[a(f), a(g)] = 0 = [a(f)^*, a(g)^*]$. $a(f)$ vernichtet ein Teilchen, $a(f)^*$ erzeugt ein Teilchen,

$$a(f)N = (N + 1)a(f) \quad , \quad a(f)^*N = (N - 1)a(f)^* \quad .$$

Das Vakuum kann charakterisiert werden durch die Gleichung

$$a(f)\Omega = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{H}_1.$$

Für $\|f\| = 1$ hat der Operator $a(f)^*a(f)$ die Eigenwerte $0, 1, 2, \dots$ und die Bedeutung „Zahl der Teilchen mit Wellenfunktion f “. Wählt man eine Orthonormalbasis $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{H}_1 , so definiert $a_i := a(f_i)$, $i \in \mathbb{N}$ ein System unabhängiger harmonischer Oszillatoren mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= 0 = [a_i^*, a_j^*] \\ [a_i, a_j^*] &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die zeitliche Entwicklung des Operators $a(f)$ untersuchen. Nach der Heisenberggleichung gilt

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)]$$

für jeden Operator A in \mathfrak{H} , wenn H der Hamiltonoperator ist. Betrachten wir zunächst den Fall, in dem zwischen den Teilchen keine Kräfte wirken, sondern alle Teilchen einem äußeren Potential v unterworfen sind. Der Hamiltonoperator ist dann $H = T + V$ mit $(V\Phi)_n = V_n\Phi_n$, $V_n(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^n v(\mathbf{X}_i)$. Man berechnet

$$[H, a(f)] = a(-H_1 f)$$

mit dem Einteilchenhamiltonoperator $H_1 = T_1 + V_1$. Die Lösung der Heisenberggleichung (man beachte, dass a antilinear von f abhängt) ist

$$a(f)(t) = a(e^{iH_1 t} f)$$

Für jedes t ist $f \mapsto a(f)(t)$ ein antilineares operatorwertiges Funktional. Wir interpretieren es als operatorwertige Distribution und benutzen die symbolische Notation

$$a(f)(t) = \int d^3\mathbf{x} \overline{f(\mathbf{x})} a(\mathbf{x}, t).$$

Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen lauten

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{x}), a^*(\mathbf{y})] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \\ [a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y})] &= 0 = [a^*(\mathbf{x}), a^*(\mathbf{y})] \end{aligned}$$

im Sinne operatorwertiger Distributionen. Definiert man die Ableitung von Distributionen wie üblich, so erhält man die „quantisierte Schrödingergleichung“

$$i \frac{\partial}{\partial t} a(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{1}{2M} \Delta + v(\mathbf{x}) \right) a(\mathbf{x}, t).$$

Die Bewegungsgleichung eines Vielteilchensystems ohne innere Kräfte kann also auf dieselbe Form gebracht werden wie die Bewegungsgleichung eines Einteilchensystems, nur dass die komplexwertige Wellenfunktion durch eine operatorwertige Distribution ersetzt wird. Dass die Schrödingergleichung („1. Quantisierung“) jetzt als Operatorgleichung interpretiert wird, hat dem Vielteilchenformalismus den etwas irreführenden Namen „2. Quantisierung“ eingebracht. Eine zutreffendere Deutung der quantisierten Schrödingergleichung ist die folgende. Man fasse die Schrödingergleichung als eine klassische Feldgleichung für das Materiefeld auf (dies war auch die ursprüngliche Interpretation von Schrödinger). Der Übergang von der komplexwertigen zur operatorwertigen Wellenfunktion ist dann die Quantisierung dieser klassischen Feldtheorie. Wir haben damit das erste Beispiel für das Zusammenfallen von Vielteilchentheorie und Quantenfeldtheorie gefunden.

Die operatorwertige Distribution $a(\mathbf{x})$ kann auf Vektoren Φ mit endlicher Teilchenzahl (d.h. $\Phi_n \neq 0$ nur für endlich viele n) und Wellenfunktionen aus dem Schwartzschen Testfunktionenraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$ (der von diesen Vektoren gebildete dichte Teilraum von \mathfrak{H} sei mit \mathfrak{D} bezeichnet) durch

$$(a(\mathbf{x})\Phi)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sqrt{n+1} \Phi_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

als Operator erklärt werden. $a(\mathbf{x})$ besitzt jedoch kein dicht definiertes Adjungiertes, ist also nicht abschließbar. Sogenannte normalgeordnete Produkte

$$a^*(\mathbf{x}_1) \dots a^*(\mathbf{x}_n) a(\mathbf{y}_k) \dots a(\mathbf{y}_1),$$

bei denen die Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren stehen, können als quadratische Formen auf \mathfrak{D} erklärt werden:

$$\begin{aligned} & (\Phi, a^*(\mathbf{x}_1) \dots a^*(\mathbf{x}_n) a(\mathbf{y}_k) \dots a(\mathbf{y}_1) \Psi) \\ & := (a(\mathbf{x}_n) \dots a(\mathbf{x}_1) \Phi, a(\mathbf{y}_k) \dots a(\mathbf{y}_1), \Psi) \end{aligned}$$

Auf diese Weise findet man

$$(\Phi, H\Psi) = \int d^3\mathbf{x} (\Phi, h(\mathbf{x})\Psi)$$

mit der Energiedichte

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2M} \partial a^*(\mathbf{x}) \cdot \partial a(\mathbf{x}) + a^*(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}).$$

Entsprechend gilt für die Teilchenzahl

$$(\Phi, N\Psi) = \int d^3\mathbf{x} (\Phi, n(\mathbf{x})\Psi)$$

mit der Teilchenzahldichte

$$n(\mathbf{x}) = a^*(\mathbf{x})a(\mathbf{x}).$$

Im Falle von 2-Teilchenkräften mit einem Potential V hat der Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators die Form

$$(H_I\Phi)_n = H_I^{(n)}\Phi_n, \quad H_I^{(n)} = \sum_{i<j} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

Mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren schreibt er sich als

$$H_I = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} a^*(\mathbf{x}) a^*(\mathbf{y}) V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a(\mathbf{y}) a(\mathbf{x}).$$

Für das Feld $a(\mathbf{x}, t)$ erhält man die nichtlineare Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} a(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2M} \Delta a(\mathbf{x}, t) + \int d^3\mathbf{y} V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a^*(\mathbf{y}, t) a(\mathbf{y}, t) a(\mathbf{x}, t).$$

Als ein einfaches Modell für eine Quelle, die Teilchen emittieren und absorbieren kann, betrachten wir den Wechselwirkungsoperator

$$H_I = a(f) + a(f)^* \quad , f \in \mathfrak{H}_1.$$

Um die Erzeugung von Teilchen zu erschweren, addieren wir zum Hamiltonoperator ein Vielfaches des Teilchenzahloperators

$$H = T + \mu N + H_I$$

mit dem „chemischen Potential“ $\mu > 0$.

Um eine Idee für die Behandlung dieses Hamiltonoperators zu bekommen, untersuchen wir zunächst ein analoges Problem für den harmonischen Oszillator unter der Wirkung einer konstanten Kraft,

$$H = \omega a^* a + \lambda(a + a^*) = \frac{\omega^2}{2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \omega + \lambda \sqrt{2\omega} x$$

Diese Kraft bewirkt bekanntlich eine Verschiebung um eine konstante Strecke c mit $c = \lambda \sqrt{2\omega}^{-\frac{3}{2}}$. Es ergibt sich

$$H = e^{ipc} \left(\frac{\omega^2}{2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \omega \right) e^{-ipc} - \frac{\lambda^2}{\omega}$$

mit $p = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^*)$. Bis auf die additive Konstante $-\frac{\lambda^2}{\omega}$ kann der gestörte Hamiltonoperator H also durch den unitären Operator $e^{ipc} = e^{\frac{\lambda}{\omega}(a - a^*)}$ in den ungestörten Hamiltonoperator $\omega a^* a$ transformiert werden.

Entsprechend suchen wir für den Hamiltonoperator

$$H = T + \mu N + H_I \quad , H_I = a(f) + a(f)^* \quad , f \in \mathfrak{H}_1$$

ein $g \in \mathfrak{H}_1$ mit der Eigenschaft

$$e^{a(g) - a(g)^*} (T + \mu N) e^{-a(g) + a(g)^*} = H + \text{const.}$$

Es gilt

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, \dots, [A, B] \dots].$$

Mit $[a(g), T + \mu N] = a((T_1 + \mu)g)$ und $[a(g)^*, T + \mu N] = -a((T_1 + \mu)g)^*$ sowie

$$[a(g), a((T_1 + \mu)g)^*] = (g, (T_1 + \mu)g)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & e^{a(g)-a(g)^*} (T + \mu N) e^{-a(g)+a(g)^*} \\ &= T + \mu N + a((T_1 + \mu)g) + a((T_1 + \mu)g)^* + (g, (T_1 + \mu)g) \end{aligned}$$

Also leistet $g = (T_1 + \mu)^{-1} f$ das Gewünschte,

$$\tilde{g}(\mathbf{p}) = \left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} + \mu \right)^{-1} \tilde{f}(\mathbf{p})$$

oder

$$g(\mathbf{x}) = \frac{M}{2\pi} \int d^3 \mathbf{y} \frac{e^{-\sqrt{2M\mu}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} f(\mathbf{y}).$$

Der Grundzustand von H ist also

$$\Omega_g = e^{a(g)-a(g)^*} \Omega$$

mit der Grundzustandsenergie

$$E_0 = -(f, (T_1 + \mu)^{-1} f) = - \int d^3 \mathbf{p} \frac{|\tilde{f}(\mathbf{p})|^2}{\frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} + \mu} = - \frac{M}{2\pi} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} f(\mathbf{x}) \frac{e^{-\sqrt{2M\mu}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} f(\mathbf{y}).$$

Ω_g ist ein sogenannter kohärenter Zustand. Er enthält Komponenten zu jeder Teilchenzahl.

Nach der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel gilt für zwei $(n \times n)$ -Matrizen A, B mit $[[A, B], A] = 0 = [[A, B], B]$ die Formel

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Wenden wir dieselbe Formel auf $e^{a(g)-a(g)^*}$ an, wobei Konvergenzfragen zunächst ignoriert werden, so erhält man

$$e^{a(g)-a(g)^*} = e^{-a(g)^*} e^{a(g)} e^{-\frac{1}{2}\|g\|^2}$$

und damit (wegen $a(g)\Omega = 0$)

$$\Omega_g = e^{-\frac{1}{2}\|g\|^2} e^{-a(g)^*} \Omega$$

d.h.

$$\begin{aligned} (\Omega_g)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\|g\|^2}}{n!} ((-a(g)^*)^n \Omega)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\|g\|^2}}{\sqrt{n!}} (-1)^n g(\mathbf{x}_1) \dots g(\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Ω_g genau n Teilchen enthält, ist

$$\|(\Omega_g)_n\|^2 = \frac{e^{-\|g\|^2}}{n!} \|g\|^{2n}.$$

Die Teilchenzahl ist also poissonverteilt mit mittlerer Teilchenzahl

$$\langle N \rangle = \|g\|^2 = \int d^3\mathbf{p} \frac{|\tilde{f}(\mathbf{p})|^2}{\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} + \mu\right)^2}$$

und mit mittlerer Schwankung der Teilchenzahl $\Delta(N)^2 = \langle N \rangle$. Insbesondere geht die mittlere Teilchenzahl für $\mu \rightarrow 0$ gegen unendlich, falls \tilde{f} bei 0 stetig ist und nicht verschwindet. Die Grundzustandsenergie bleibt in diesem Grenzfall jedoch endlich.

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der kohärenten Zustände ist, dass sie Eigenvektoren der Vernichtungsoperatoren sind,

$$a(\mathbf{x})e^{a(g)^*} \Omega = g(\mathbf{x})e^{a(g)^*} \Omega.$$

Daher erhält man den Erwartungswert des Hamiltonoperators in einem kohärenten Zustand dadurch, dass man $a(\mathbf{x})$ durch $g(\mathbf{x})$ und $a(\mathbf{x})^*$ durch $\overline{g(\mathbf{x})}$ ersetzt.

Wir betrachten jetzt den Grenzfall $f(\mathbf{x}) \rightarrow c\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, in dem Teilchen nur am Punkt \mathbf{y} erzeugt oder vernichtet werden. Für H_I ergibt sich in diesem Grenzfall

$$H_I = \bar{c}a(\mathbf{y}) + ca^*(\mathbf{y})$$

Berechnet man formal die Grundzustandsenergie, so erhält man einen divergenten Ausdruck;

$$E_0 = -|c|^2 \int d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{M}{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{2M\mu}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

$g(\mathbf{x}) = c \frac{M}{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{2M\mu}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ ist jedoch eine normierbare Einteilchenwellenfunktion. Daher ist

$$H_{\text{ren}} := e^{a(g)-a(g)^*} (T + \mu N) e^{-a(g)+a(g)^*}$$

ein wohldefinierter selbstadjungierter Operator mit Grundzustand Ω_g und mit mittlerer Teilchenzahl

$$\langle N \rangle < \infty$$

(siehe Übungsaufgabe 7). In der Heisenberggleichung können wir H durch H_{ren} ersetzen, da sich beide Terme nur durch eine (divergente) Konstante unterscheiden. Der zu zahlende Preis ist eine willkürliche Festlegung der Grundzustandsenergie auf 0.

Das vorliegende Modell liefert eine sehr einfache Beschreibung der Kernkräfte durch Mesonenaustausch (Nelson-Modell). Wir betrachten ein System von n Nukleonen, realisiert durch Wellenfunktionen

$$\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

gekoppelt an ein System spinloser Mesonen. Der Hilbertraum des gekoppelten Systems ist das Tensorprodukt des Nukleonenraums mit dem Fockraum der Mesonen. Der Hamiltonoperator ist die Summe der kinetischen Energie der Nukleonen, der kinetischen Energie der Mesonen

einschließlich des Terms mit dem chemischen Potential $\mu = M/2$ (diese Wahl des chemischen Potentials hat zur Folge, dass die kinetische Energie, die zur Erzeugung eines Teilchens benötigt wird, einem Impuls $|\mathbf{p}| = M$ entspricht, wie in der relativistischen Theorie) und des Wechselwirkungsterms

$$H_I = c \sum_{i=1}^n (a(\mathbf{X}_i) + a^*(\mathbf{X}_i)), c \in \mathbb{R},$$

wobei \mathbf{X}_i den Ortsoperator des i -ten Nukleons bezeichnet. In der Born-Oppenheimer-Näherung vernachlässigen wir im ersten Schritt die kinetische Energie der Nukleonen und erhalten für jede Ortskonfiguration der Nukleonen einen Hamiltonoperator der vorher betrachteten Form mit $g = \sum g_i$. Wir untersuchen jetzt die Abhängigkeit der Grundzustandsenergie von der Nukleonenverteilung. Wir finden

$$H_{\text{ren}} = e^{a(g)-a(g)^*} (T + MN) e^{-a(g)+a(g)^*} + E_0(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

mit

$$E_0(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = - \sum_{i < j} \frac{|c|^2 M e^{-M|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}}{\pi |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

Hierbei sind die divergenten Diagonalterme weggelassen worden.

Die so definierte Grundzustandsenergie liefert also das Yukawapotentiale für die Kernwechselwirkung.

Wir betrachten jetzt das entsprechende Problem für eine zeitabhängige Quelle,

$$H(t) = T + \mu N + H_{I,t} \quad , \quad H_{I,t} = a(f_t) + a(f_t)^*$$

mit $f_t(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, t)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Die Schrödingergleichung mit zeitabhängigem Hamiltonoperator wird durch den Zeitentwicklungsoperator $U(t, s)$ gelöst, der durch die folgenden Gleichungen charakterisiert ist:

$$U(t, t) = 1$$

$$i \frac{d}{dt} U(t, s) = H(t) U(t, s)$$

$$U(t, s) U(s, r) = U(t, r)$$

Zeitabhängige Wechselwirkungen lassen sich meist am leichtesten im Wechselwirkungsbild diskutieren. Sei $U_0(t) = e^{it(T+\mu N)}$ und

$$V(t, s) = U_0(t) U(t, s) U_0(-s).$$

Dann erfüllt V die Gleichungen

$$V(t, t) = 1$$

$$i \frac{d}{dt} V(t, s) = H_I(t) V(t, s)$$

$$V(t, s) V(s, r) = V(t, r)$$

mit $H_I(t) = U_0(t)H_{I,t}U_0(-t)$. V erfüllt die Integralgleichung

$$V(t, s) = 1 - i \int_s^t dt' H_I(t') V(t', s).$$

Eine Lösung im Sinne von Potenzreihen in H_I gewinnt man durch Iteration:

$$V(t, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n)$$

Diese Formel läßt sich durch Einführung des zeitgeordneten Produkts elegant schreiben. Sei $A : \mathbb{R} \ni t \mapsto A(t)$ eine operatorwertige Funktion. Dann definiert man operatorwertige Funktionen

$$T_A(t_1, \dots, t_n)$$

(das zeitgeordnete Produkt von $A(t_1), \dots, A(t_n)$) durch die beiden folgenden Gleichungen

$$T_A(t_1, \dots, t_n) = A(t_1) \dots A(t_n) \text{ für } t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$$

$$T_A(t_1, \dots, t_n) = T_A(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n$$

Man schreibt meist

$$T_A(t_1, \dots, t_n) = T A(t_1) \dots A(t_n) .$$

Zu beachten ist aber, dass $T_A(t_1, \dots, t_n)$ von der Funktion $t \mapsto A(t)$ abhängt und nicht von den Operatoren $A(t_1), \dots, A(t_n)$.

Für den Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild erhalten wir damit den Ausdruck

$$\begin{aligned} V(t, s) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_s^t dt_1 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n T H_I(t_1) \dots H_I(t_n) \\ &=: T e^{-i \int_s^t dt' H_I(t')} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile nennt man das zeitgeordnete Exponential.

Im betrachteten Beispiel gilt

$$[[H_I(t_1), H_I(t_2)], H_I(t_3)] = 0.$$

Daher läßt sich die Exponentialreihe aufsummieren. Wir untersuchen zunächst den Fall, dass $H_I(t)$ stückweise konstant ist. Dann ist

$$\begin{aligned} V(t, s) &= V(t, t_1) V(t_1, t_2) \dots V(t_n, s) \\ &= e^{-i \int_{t_1}^t dt' H_I(t')} \dots e^{-i \int_s^{t_n} dt' H_I(t')} \\ &= e^{-i \int_s^t dt' H_I(t') - \frac{1}{2} \sum_{i>j} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt' \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt'' [H_I(t'), H_I(t'')] } \\ &= e^{-i \int_s^t dt' H_I(t') - \frac{1}{2} \int_s^t dt' \int_s^{t'} dt'' [H_I(t'), H_I(t'')] } \end{aligned}$$

Man verifiziert jetzt leicht, dass der Ausdruck in der letzten Zeile die Gleichung für $V(t, s)$ auch im allgemeinen Fall löst.

Wenn die Wechselwirkung für genügend große Zeiten verschwindet, ist es sinnvoll, den Operator zu betrachten, der den gesamten Einfluß der Quelle auf das System beschreibt. Wir definieren die S-Matrix

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty, s \rightarrow -\infty} V(t, s).$$

Sei

$$\varphi(f) = \int dt d^3 \mathbf{x} \left(a(t, \mathbf{x}) \overline{f(t, \mathbf{x})} + a^*(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \right) = a(F) + a(F)^*$$

mit $F = \int dt e^{i(T_1 + \mu)t} f_t$, d.h.

$$\hat{F}(\mathbf{p}) = \sqrt{2\pi} \hat{f}\left(-\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} + \mu\right), \mathbf{p}\right)$$

Dann gilt

$$S = e^{-i\varphi(f) - i\alpha}$$

und $\alpha = \frac{1}{2i} \int_{t>s} dt ds [H_I(t), H_I(s)]$. Berechnung von α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Im} \int_{t>s} dt ds (f_t, e^{-i(t-s)(T_1 + \mu)} f_s) \\ &= \text{Im} (2\pi)^{-1} \int_{t>s} dt ds \int dE dE' \int d^3 \mathbf{p} \overline{\hat{f}(-E, \mathbf{p})} \hat{f}(-E', \mathbf{p}) e^{i(E-E(\mathbf{p}))t} e^{-i(E'-E(\mathbf{p}))s} \end{aligned}$$

($E(\mathbf{p}) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} + 2\mu$). Um die Integration über s zuerst durchführen zu können, multiplizieren wir den Integranden mit $e^{-\varepsilon(t-s)}$, $\varepsilon > 0$. Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir das ursprüngliche Integral zurück. Für $\varepsilon > 0$ läßt sich die Integrationsreihenfolge vertauschen. Es gilt

$$\int_{s<t} ds e^{-\varepsilon(t-s)} e^{-i(E'-E(\mathbf{p}))s} = i(E' - E(\mathbf{p}) + i\varepsilon)^{-1} e^{-i(E'-E(\mathbf{p}))t}$$

und damit

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Re} \int dt \int d^3 \mathbf{p} \int dE dE' \frac{\overline{\hat{f}(-E, \mathbf{p})} \hat{f}(-E', \mathbf{p}) e^{i(E-E')t}}{E' - E(\mathbf{p}) + i\varepsilon}.$$

Um die t -Integration durchzuführen, benutzen wir die Formel

$$\int dt e^{i(E-E')t} = 2\pi \delta(E - E').$$

Diese Formel gilt im Sinne von Distributionen, d.h. für alle Testfunktionen $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\int dt \int dE e^{i(E-E')t} h(E) = 2\pi \int dE \delta(E - E') h(E) = 2\pi h(E').$$

(Umkehrformel der Fouriertransformation.) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d^3 \mathbf{p} \int dE |\hat{f}(-E, \mathbf{p})|^2 \frac{E - E(\mathbf{p})}{(E - E(\mathbf{p}))^2 + \varepsilon^2} \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \int dE |\hat{f}(-E, \mathbf{p})|^2 P \frac{1}{E - E(\mathbf{p})} \end{aligned}$$

wobei das Symbol P den Cauchyschen Hauptwert bezeichnet,

$$\int dx P \frac{1}{x} h(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} dx \frac{h(x)}{x} .$$

Ist der Anfangszustand das Vakuum, so erzeugt die Quelle daraus den kohärenten Zustand

$$S\Omega = e^{-i\alpha} \Omega_{-iF} .$$

Ist der Anfangszustand bereits ein kohärenter Zustand Ω_{-iG} , der etwa durch eine früher angeschaltete Quelle erzeugt worden ist, so gilt

$$S\Omega_{-iG} = c\Omega_{-i(F+G)}, |c| = 1 .$$

Für die mittlere erzeugte Teilchenzahl δN ergibt sich

$$\delta N = \|F + G\|^2 - \|G\|^2 = \|F\|^2 + 2\text{Re}(F, G) .$$

Der Interferenzterm $2\text{Re}(F, G)$ beschreibt je nach Vorzeichen Absorption oder induzierte Emission.

3. Der fermionische Fockraum

Der fermionische Fockraum ist definiert als

$$\mathfrak{H}^- = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^- ,$$

wobei \mathfrak{H}_n^- aus den antisymmetrischen n -Teilchenwellenfunktionen besteht. Die Vernichtungsoperatoren werden genauso wie im bosonischen Fockraum definiert:

$$(a(f)\Phi)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sqrt{n+1} \int d^3\mathbf{x} \overline{f(\mathbf{x})} \Phi_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

Den Erzeugungsoperator definiert man wieder als adjungierten Operator und berechnet

$$(a(f)^*\Phi)_0 = 0 \quad ,$$

$$(a(f)^*\Phi)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f(\mathbf{x}_i) \Phi_{n-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) .$$

Man bestätigt leicht die Vertauschungsrelationen

$$[a(f), a(g)^*]_+ = (f, g)$$

$$[a(f), a(g)]_+ = 0 = [a(f)^*, a(g)^*]_+$$

(kanonische Antivertauschungsrelationen (CAR)). Wie im Bosefall definiert man operatorwertige Distributionen $a(\mathbf{x}, t)$ und $a^*(\mathbf{x}, t)$ durch

$$\int d^3\mathbf{x} \overline{f(\mathbf{x})} a(\mathbf{x}, t) = a(f)(t)$$

$$\int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) a^*(\mathbf{x}, t) = a(f)^*(t)$$

mit den gleichzeitigen Antivertauschungsrelationen

$$[a(\mathbf{x}), a^*(\mathbf{y})]_+ = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad ,$$

$$[a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y})]_+ = 0 = [a^*(\mathbf{x}), a^*(\mathbf{y})]_+.$$

Der Operator $a(f)^*a(f)$ hat für $\|f\| = 1$ wie im Bosefall die Bedeutung „Zahl der Teilchen mit Wellenfunktion f “. Wegen der Fermistatistik hat $a(f)^*a(f)$ nur die Eigenwerte 0 und 1:

$$\begin{aligned} (a(f)^*a(f))^2 &= a(f)^*a(f)a(f)^*a(f) \\ &= a(f)^*[a(f), a(f)^*]_+a(f) - a(f)^*a(f)^*a(f)a(f) \\ &= a(f)^*a(f) \end{aligned}$$

wegen $[a(f), a(f)^*]_+ = \|f\|^2 = 1$ und $a(f)^2 = \frac{1}{2}[a(f), a(f)]_+ = 0$. Also ist $a(f)^*a(f)$ ein Projektor. Insbesondere ist $a(f)$ ein beschränkter Operator mit Norm

$$\|a(f)\| = \|f\|.$$

Im Bosefall hingegen gilt nur

$$(\Phi, a(f)^*a(f)\Phi) \leq \|f\|^2(\Phi, N\Phi)$$

und daher

$$\|a(f)N^{-\frac{1}{2}}\| \leq \|f\|.$$

Eine wichtige Besonderheit von Fermionsystemen ist ihre Fähigkeit, Zustände aufzufüllen. Sei E der Projektor auf einen endlichdimensionalen Teilraum von \mathfrak{H}_1 , und sei $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Orthonormalbasis dieses Raums. Wir betrachten den Vektor

$$\Phi_E = a(f_1)^* \dots a(f_n)^*\Omega.$$

Φ_E wird von allen Operatoren der Form $a(Ef)^*$ und $a((1-E)f)$, $f \in \mathfrak{H}_1$, vernichtet. Diese Eigenschaft charakterisiert Φ_E bis auf eine Phase eindeutig.

Der Operator

$$b(f) = a(Ef)^* + a((1-E)f)$$

kann als Vernichtungsoperator für ein Quasiteilchen betrachtet werden. Ist $f \in E\mathfrak{H}_1$, so ist das Quasiteilchen ein „Loch“, ist $f \in (1-E)\mathfrak{H}_1$, so ist es ein Teilchen der ursprünglichen Art. Die Operatoren $b(f)$ und $b(g)^*$ erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen

$$[b(f), b(g)^*]_+ = (f, (1-E)g) + (g, Ef),$$

$$[b(f), b(g)]_+ = 0 = [b(f)^*, b(g)^*]_+.$$

Der Vektor Φ_E beschreibt den Vakuumzustand für die Quasiteilchen.

Man kann auch für Projektoren E auf unendlichdimensionale Teilräume die Operatoren b und b^* studieren und einen Vektor Φ_E suchen, der durch alle Operatoren $b(f)$ vernichtet wird. Es gilt aber der folgende Satz:

THEOREM I.2. Sei $\Phi \in \mathfrak{H}^-$ mit $a(f)^*\Phi = 0 \forall f \in \mathfrak{K}$, wobei \mathfrak{K} ein unendlichdimensionaler Teilraum von \mathfrak{H}_1 ist. Dann ist $\Phi = 0$.

Beweis: Sei $f \in \mathfrak{K}$ mit $\|f\| = 1$. Dann gilt

$$\Phi = [a(f), a(f)^*]_+ \Phi = a(f)^* a(f) \Phi.$$

Für $g \perp f$ vertauscht $a(g)$ mit $a(f)^* a(f)$. Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von \mathfrak{K} . Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\Phi = a(f_1)^* \dots a(f_k)^* a(f_k) \dots a(f_1) \Phi.$$

Sei nun $\Psi \in \mathfrak{H}^-$ ein Zustand mit beschränkter Teilchenzahl, d.h. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\Psi_n = 0$ für $n > n_0$. Dann ist

$$a(f_k) \dots a(f_1) \Psi = 0$$

für $k > n_0$. Also gilt für $k > n_0$

$$\begin{aligned} (\Psi, \Phi) &= (\Psi, a(f_1)^* \dots a(f_k)^* a(f_k) \dots a(f_1) \Phi) \\ &= (a(f_k) \dots a(f_1) \Psi, a(f_k) \dots a(f_1) \Phi) = 0. \end{aligned}$$

Φ ist also orthogonal auf allen Vektoren mit beschränkter Teilchenzahl, d.h. $\Phi_n = 0 \forall n$, also $\Phi = 0$. \square

Man kann jetzt einen Fockraum für die Quasiteilchen einführen,

$$\mathfrak{H}^{E,-} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^{E,-}$$

mit den n -Quasiteilchenräumen

$$\mathfrak{H}_n^{E,-} = \left\{ \Phi \in \underbrace{\mathfrak{H}_1^E \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_1^E}_n, U(\sigma)\Phi = \text{sign}\sigma\Phi, \sigma \in S_n \right\}$$

und dem Ein-Quasiteilchenraum

$$\mathfrak{H}_1^E = (1 - E)\mathfrak{H}_1 \oplus \overline{E\mathfrak{H}_1}.$$

\mathfrak{H}_1^E stimmt mit \mathfrak{H}_1 als reeller Hilbertraum überein. Der Unterschied besteht darin, dass der Operator der Multiplikation mit i durch $i(1 - E) - iE$ ersetzt worden ist und dass das Skalarprodukt jetzt durch

$$(f, g)_E = (f, (1 - E)g) + (g, Ef)$$

gegeben ist. Auf dem neuen Fockraum wirken die neuen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in entsprechender Weise. Da die neuen n -Teilchenräume nicht unmittelbar als Räume von Funktionen gegeben sind, ist es günstig, die Operatoren b und b^* abstrakt zu charakterisieren:

$$b(f) \sum_{(i)} c_{(i)} \Phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \Phi_{i_n} = \sqrt{n} \sum_{(i)} c_{(i)} (f, \Phi_{i_1}) \Phi_{i_2} \otimes \dots \otimes \Phi_{i_n}$$

$$b(f)^* \sum_{(i)} \Phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \Phi_{i_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^n \Phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \Phi_{i_k} \otimes f \otimes \Phi_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \Phi_{i_n}$$

Φ_E ist der Vakuumvektor im Quasiteilchen-Fockraum $\mathfrak{H}^{E,-}$.

Ein wichtiges Beispiel für einen solchen Projektor ist der Projektor auf Energien unterhalb der Fermi-Energie $\mu > 0$,

$$\hat{E}f(\mathbf{p}) = \begin{cases} \hat{f}(\mathbf{p}) & , \frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} < \mu \\ 0 & , \frac{|\mathbf{p}|^2}{2M} \geq \mu \end{cases} .$$

Dann beschreibt Φ_E den Zustand, in dem alle Einteilchenzustände mit Energien unterhalb von μ besetzt sind.

KAPITEL II

Relativistische Einteilchensysteme

1. Die Poincaré-Gruppe

Nach den Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie haben physikalische Systeme, die sich nur dadurch unterscheiden, dass sie gegeneinander gleichförmig bewegt sind, identische Eigenschaften. Weiter gibt es eine Grenzgeschwindigkeit für die Ausbreitung von Signalen, die Lichtgeschwindigkeit c , die in allen Systemen gleich ist. Üblicher Weise verwendet man in der relativistischen Physik Maßsysteme, in denen $c = 1$ gesetzt wird.

Wir fassen jeden Raumzeitpunkt (t, \mathbf{x}) als Element des \mathbb{R}^4 auf,

$$(t, \mathbf{x}) = x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

mit $x^0 = t$ und $(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{x}$. Eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit \mathbf{v} wird in diesem Raum als Gerade dargestellt,

$$x(\tau) = (1, \mathbf{v})\tau + a, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^4.$$

Für jede mit Signalübertragung verbundene Bewegung gilt $|\mathbf{v}| \leq 1$. Raumzeitpunkte x , die vom Punkt 0 aus durch ein Signal mit $|\mathbf{v}| < 1$ erreichbar sind, bilden den Vorwärtslichtkegel

$$V_+ = \{x \in \mathbb{R}^4, x^0 > |\mathbf{x}|\},$$

solche, von denen aus der Punkt 0 erreichbar ist, den Rückwärtslichtkegel

$$V_- = \{x \in \mathbb{R}^4, -x^0 > |\mathbf{x}|\} = -V_+.$$

$V_+ \cup V_- = \{x \in \mathbb{R}^4, (x^0)^2 > |\mathbf{x}|^2\}$ nennt man die Menge der zeitartigen Punkte. Der Rand des Vorwärtslichtkegels,

$$\partial V_+ = \{x \in \mathbb{R}^4, x^0 = |\mathbf{x}|\}$$

ist die Menge der Punkte, die vom Ursprung aus durch ein Lichtsignal erreichbar sind. Punkte mit $|x^0| = |\mathbf{x}|$ nennt man lichtartig, solche mit $|x^0| < |\mathbf{x}|$ raumartig.

Die Struktur der Raumzeit läßt sich durch ein (indefinites) Skalarprodukt beschreiben

$$\langle x|y \rangle \equiv xy := x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Andere Schreibweisen sind

$$xy = x^\mu y_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu.$$

Hierbei wird immer die Summationskonvention verwendet, dass über Indizes, die einmal oben und einmal unten vorkommen, summiert wird (von 0 bis 3). $g_{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor mit Komponenten

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und $y_\mu = g_{\mu\nu}y^\nu$. Den \mathbb{R}^4 versehen mit diesem Skalarprodukt nennt man den Minkowskiraum \mathbb{M} .

Die Bewegungsgruppe des Minkowskiraums ist die Menge der Abbildungen L mit der Eigenschaft

$$(Lx - Ly)^2 = (x - y)^2, \quad x, y \in \mathbb{M},$$

und wird Poincaré-Gruppe genannt (Bezeichnung \mathcal{P}). Die Abbildungen $\Lambda \in \mathcal{P}$, die den Ursprung nicht ändern, heißen Lorentz-Transformationen. Sie bilden eine Untergruppe \mathcal{L} .

Jede Poincaré-Transformation lässt sich als Produkt einer Lorentz-Transformation Λ und einer Translation a schreiben,

$$Lx = a + \Lambda x, \quad L = (a, \Lambda).$$

Die Lorentz-Transformationen des Minkowski-Raums entsprechen den Rotationen des euklidischen Raums und sind wie diese lineare Abbildungen,

$$(\Lambda x)^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\mu$$

mit $\Lambda^\mu{}_\nu \in \mathbb{R}$.

Das Gruppengesetz in \mathcal{P} lautet

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2).$$

Lorentz-Transformationen sind Volumen erhaltend (also $|\det \Lambda| = 1$), können aber die Orientierung ändern. Z. B. ist die Raumspiegelung

$$I_S(x^0, \mathbf{x}) = (x^0, -\mathbf{x})$$

eine Lorentz-Transformation mit $\det \Lambda = -1$.

Weiter bilden Lorentz-Transformationen den Vorwärtslichtkegel entweder in sich oder in den Rückwärtskegel ab.

Beweis: Seien $x, y \in V_+$. Dann ist $x^0 > |\mathbf{x}|$, $y^0 > |\mathbf{y}|$ und damit

$$xy = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0.$$

Λx und Λy sind zeitartig, liegen also in $V_+ \cup V_-$. Läge einer der beiden Punkte in V_+ , der andere in V_- , so folgte

$$\Lambda x \Lambda y < 0 < xy$$

im Widerspruch dazu, dass die Lorentz-Transformationen das Skalarprodukt des Minkowskiraums erhalten.

Für die Matrixelemente von Λ bedeutet die obige Eigenschaft, dass $|\Lambda^0_0| \geq 1$ ist,

$$1 = \Lambda(1, \mathbf{0})^2 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 .$$

Wir sehen daraus, dass die Lorentz-Gruppe in die folgenden Zusammenhangskomponenten zerfällt:

\mathcal{L}_+^\uparrow (eigentliche orthochrone Lorentzgruppe): $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$. Diese Lorentz-Transformationen erhalten die Raumorientierung und die Zeitorientierung (Zukunft und Vergangenheit werden nicht vertauscht). Die identische Transformation 1 gehört zu dieser Komponente.

\mathcal{L}_+^\downarrow : $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^0_0 \leq -1$, z.B. -1 .

\mathcal{L}_-^\uparrow : $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$, z.B. die Raumspiegelung I_S .

\mathcal{L}_-^\downarrow : $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0_0 \leq -1$, z.B. die Zeitspiegelung I_T .

Entsprechend zerfällt die Poincaré-Gruppe \mathcal{P} in die Zusammenhangskomponenten $\mathcal{P}_+^\uparrow, \mathcal{P}_+^\downarrow, \mathcal{P}_-^\uparrow, \mathcal{P}_-^\downarrow$. Nur die Elemente der Zusammenhangskomponente der Eins entsprechen physikalisch realisierbaren Transformationen. Daher fasst man \mathcal{P}_+^\uparrow als die relativistische Invarianzgruppe auf. Tatsächlich sind sowohl die Raumspiegelung (Parität) als auch die Zeitspiegelung in der Natur nicht als Symmetrien realisiert.

Die Gruppe \mathcal{P}_+^\uparrow ist zweifach zusammenhängend, d.h. die Menge der geschlossenen Kurven in \mathcal{P}_+^\uparrow zerfällt in zwei verschiedene Klassen, die sich nicht stetig ineinander transformieren lassen. Dies liegt daran, dass \mathcal{P}_+^\uparrow die ebenfalls zweifach zusammenhängende Drehgruppe enthält. Die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe der \mathcal{P}_+^\uparrow ist die sogenannte inhomogene $SL(2, \mathbb{C})$, die im folgenden mit \mathcal{P}^c bezeichnet wird. Sie besteht aus Paaren (a, A) mit Translationen a und komplexen (2×2) -Matrizen A mit Determinante 1. $SL(2, \mathbb{C})$ ist die Überlagerungsgruppe der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe \mathcal{L}_+^\uparrow . Der Überlagerungshomomorphismus

$$\Lambda : \begin{cases} SL(2, \mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow \\ A & \mapsto \Lambda(A) \end{cases}$$

wird in der folgenden Weise erklärt: Durch

$$x \mapsto \underset{\sim}{x} = x^0 \mathbf{1} + \mathbf{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

wird eine bijektive Abbildung vom Minkowskiraum in den Raum der hermiteschen 2×2 -Matrizen definiert. Es gilt

$$\det \underset{\sim}{x} = x^2 .$$

Man setzt nun

$$\Lambda(A)x = \underset{\sim}{Ax}A^* .$$

Man verifiziert leicht, dass $\Lambda(A)$ eine Lorentz-Transformation ist. Es gilt $\Lambda(A) = \Lambda(B) \implies A = \pm B$ und $\Lambda(\text{SL}(2, \mathbb{C})) = \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Beispiel: (i) Sei

$$A = e^{i\theta/2} \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) + e^{-i\theta/2} \frac{1}{2}(1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) ,$$

$|\mathbf{n}| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\Lambda(A)$ eine Rotation mit Drehachse \mathbf{n} und Drehwinkel θ .

(ii) Sei

$$A = e^{\theta/2} \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) + e^{-\theta/2} \frac{1}{2}(1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) .$$

$|\mathbf{n}| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\Lambda(A)$ eine Lorentzbeschleunigung (Boost) mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{n} \tanh \theta$.

Die Gruppenmultiplikation in \mathcal{P}^c wird jetzt gegeben durch

$$(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + \Lambda(A_1)a_2, A_1A_2) .$$

Neben der Abbildung $x \mapsto \underset{\sim}{x}$ werden wir noch eine weitere Abbildung des Minkowskiraums in die Menge der hermiteschen 2×2 -Matrizen benutzen,

$$x \mapsto \underset{\sim}{x} = x^0 \mathbf{1} - \mathbf{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} .$$

Es gilt

$$\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{x} = x^2 \mathbf{1}$$

und daher

$$\Lambda(\underset{\sim}{A})x = (A^*)^{-1} \underset{\sim}{x} A^{-1} .$$

2. Poincaré-Symmetrie in der Quantenmechanik

Wir nehmen an, dass die Zustände eines relativistischen Teilchens durch die Strahlen $\hat{\Phi}$ eines Hilbertraumes \mathfrak{H} beschrieben werden

$$\hat{\Phi} = \{\lambda\Phi, \lambda \in \mathbb{C}\} , \quad \Phi \in \mathfrak{H} , \quad \Phi \neq 0 .$$

Eine Poincaré-Transformation $L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ transformiert Einteilchenzustände in Einteilchenzustände,

$$\hat{\Phi} \mapsto \hat{T}_L \hat{\Phi} = \hat{\Psi} , \quad \Psi \in \mathfrak{H} , \quad \Psi \neq 0 .$$

Das transformierte System soll dieselben physikalischen Eigenschaften wie das ursprüngliche System besitzen. Insbesondere sollen die Übergangswahrscheinlichkeiten (Strahlprodukte)

$$(\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) := \frac{|(\Phi, \Psi)|^2}{\|\Phi\|^2 \|\Psi\|^2}$$

gleich bleiben,

$$(\hat{T}_L \hat{\Phi}, \hat{T}_L \hat{\Psi}) = (\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) .$$

Für Transformationen, die das Strahlprodukt invariant lassen, gilt der folgende Satz von Wigner:

THEOREM II.1. *Sei \hat{T} eine invertierbare und Strahlprodukt erhaltende Abbildung der Strahlen eines Hilbertraums auf sich. Dann gibt es eine invertierbare, reell lineare und isometrische Abbildung $T : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft*

$$T\hat{\Phi} = \hat{T}\hat{\Phi} .$$

T ist bis auf einen Faktor vom Betrag 1 eindeutig bestimmt und ist entweder unitär oder antiunitär.

Ist \hat{T} als Quadrat einer anderen Strahltransformation darstellbar,

$$\hat{T} = \hat{S}^2 ,$$

so ist $T = \lambda S^2$ notwendig unitär, da das Quadrat eines antiunitären Operators unitär ist. In der Zusammenhangskomponente der 1 in der Poincaré-Gruppe kann jedes Element als Produkt von Quadraten geschrieben werden, daher ist T_L für alle $L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ unitär.

Führt man zwei Poincaré-Transformationen L_1 und L_2 hintereinander aus, so soll der transformierte Zustand mit demjenigen übereinstimmen, den man durch die Transformation $L = L_1 L_2$ erhält, d.h.

$$\hat{T}_{L_1} \hat{T}_{L_2} = \hat{T}_{L_1 L_2}$$

(Strahldarstellung oder projektive Darstellung). Für die Operatoren T_L folgt daraus

$$T_{L_1} T_{L_2} = e^{i\omega(L_1, L_2)} T_{L_1 L_2}$$

mit $\omega(L_1, L_2) \in \mathbb{R}$. Ändert man die Definition von T_L ab,

$$T'_L = e^{i\alpha(L)} T_L ,$$

so ergibt sich

$$T'_{L_1} T'_{L_2} = e^{i\omega'(L_1, L_2)} T'_{L_1 L_2}$$

mit

$$\omega'(L_1, L_2) = \omega(L_1, L_2) + \alpha(L_1) + \alpha(L_2) - \alpha(L_1 L_2) .$$

Damit stellt sich die Frage, ob man durch eine geschickte Wahl von α erreichen kann, dass ω' verschwindet. Diese Frage führt auf die Untersuchung der Gruppenkohomologie von \mathcal{P}_+^\uparrow .

Nehmen wir an, dass die Strahldarstellung im folgenden Sinne stetig ist,

$$(\hat{T}_L \hat{\Phi}, \hat{\Psi}) \rightarrow (\hat{\Phi}, \hat{\Psi})$$

für $L \rightarrow 1$. Für solche Strahldarstellungen wird das Problem durch den folgenden Satz von Wigner und Bargmann gelöst.

THEOREM II.2. *Zu jeder stetigen Strahldarstellung $L \rightarrow \hat{T}_L$ der eigentlichen orthochronen Poincaré-Gruppe \mathcal{P}_+^\uparrow gibt es eine stark stetige unitäre Darstellung U der zweifachen Überlagerungsgruppe \mathcal{P}^c , sodass gilt*

$$U(\widehat{a, A})\Phi = \hat{T}_{a, \Lambda(A)}\hat{\Phi}$$

mit der Überlagerungsabbildung Λ .

Zur Beschreibung relativistischer Einteilchensysteme verwenden wir daher den folgenden Ansatz: Der Hilbertraum der Zustände eines Teilchens ist der Darstellungsraum einer irreduziblen, stetigen, unitären Darstellung von \mathcal{P}^c . Unsere nächste Aufgabe besteht darin, diese Darstellungen zu finden.

3. Die Darstellungen der Poincaré-Gruppe

Sei U eine stark stetige, unitäre, irreduzible Darstellung von \mathcal{P}^c in einem Hilbertraum \mathfrak{H} . Wir betrachten zunächst die Einschränkung von U auf die Untergruppe der Translationen,

$$\mathbb{R}^4 \ni a \mapsto U(a) .$$

Diese Darstellung kann durch 4 selbstadjungierte, miteinander vertauschbare Operatoren P_μ , $\mu = 0, \dots, 3$ charakterisiert werden,

$$U(a) = e^{iPa} .$$

Das gemeinsame Spektrum dieser 4 Operatoren bildet eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^4 ,

$$\text{sp } P = \{(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^4 \mid p_\mu \in \text{sp } P_\mu, \mu = 0, \dots, 3\} .$$

Aus der Darstellungsrelation

$$U(A)U(a)U(A)^{-1} = U(\Lambda(A)a) , \quad A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

folgt

$$U(A)PaU(A)^{-1} = P(\Lambda(A)a) .$$

Daher ist $\text{sp } P$ Lorentz-invariant. Ist Φ ein gemeinsamer Eigenvektor von Pa , $a \in \mathbb{R}^4$ mit Eigenwerten pa , so ist $U(A)\Phi$ ein Eigenvektor von $P(\Lambda(A)a)$ mit Eigenwerten pa , oder, gleichbedeutend, Eigenvektor von Pa mit Eigenwerten $p(\Lambda(A^{-1})a)$. Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren zu verschiedenen Eigenwerten sind aber orthogonal. Daher ist nur der Eigenwert $p = 0$ mit der angenommenen Stetigkeit der Darstellung U verträglich.

Wir erhalten eine Klasse irreduzibler Darstellungen durch

$$U(a, A) = U(A)$$

mit einer unitären irreduziblen Darstellung der $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Diese Darstellungen beschreiben aber sicherlich keine Teilchen, da die Übergangswahrscheinlichkeiten $\Phi \rightarrow U(a)\Psi$ von a unabhängig sind. Der Fall

$U(A) = 1$ charakterisiert die Transformationseigenschaften des Vakuums.

Wir betrachten nun zu jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^4$ seinen Orbit O_p unter Lorentz-Transformationen,

$$O_p = \{q \in \mathbb{R}^4, \exists \Lambda \in \mathcal{L}_+^\dagger \text{ mit } p\Lambda = q\} .$$

mit $(p\Lambda)_\mu = p_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$. $\text{sp } P$ ist sicherlich eine Vereinigung von Orbits. Die Orbits lassen sich wie folgt klassifizieren

$$\begin{aligned} H_m^+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2, p_0 > 0\} \\ H_m^- &= \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2, p_0 < 0\} \\ \partial V_+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = 0, p_0 > 0\} \\ \partial V_- &= \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = 0, p_0 < 0\} \\ H_{im}^+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = -m^2\} \\ &\{0\} \end{aligned}$$

mit $m > 0$. In einer irreduziblen Darstellung ist P^2 ein Vielfaches der Eins. Ist $P^2 = m^2 \mathbf{1}$, so ist $\text{sp } P = H_m^+$ oder $\text{sp } P = H_m^-$. Ist $P^2 = 0$, so ist $\text{sp } P = \{0\}$, $\text{sp } P = \overline{\partial V_+}$ oder $\text{sp } P = \overline{\partial V_-}$; in den beiden letzteren Fällen enthält das Spektrum nicht nur einen Orbit, sondern (als abgeschlossene Menge) noch zusätzlich den Nullpunkt. 0 ist jedoch kein Eigenwert.

In Analogie zur nichtrelativistischen Quantenmechanik interpretieren wir $P_0 = P^0 \equiv H$ als Energie und $\mathbf{P} = (P^1, P^2, P^3)$ als den Impuls des Teilchens. Wir werden diese Interpretation später begründen. Im Augenblick führt sie dazu, nur die Orbits mit $p_0 > 0$ als Spektren physikalischer Teilchen zu akzeptieren.

Wenden wir uns dem Fall $\text{sp } P = H_m^+$ zu. Wir wählen zuerst eine Darstellung, in der die Impulse diagonal sind. Aufgrund der Poincaré-Invarianz kann diese Darstellung sehr konkret bestimmt werden.

Wir überzeugen uns zunächst davon, dass unser Hilbertraum einen dichten Unterraum \mathfrak{D} besitzt, auf dem die Erwartungswerte der räumlichen Translationen im Unendlichen schnell verschwinden,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^n (\Phi, U(\mathbf{x})\Psi) = 0 \forall n \in \mathbb{N} .$$

Dazu setzen wir

$$\mathfrak{D} = \{\Phi \in \mathfrak{H}, L \mapsto U(L)\Phi \text{ ist unendlich oft differenzierbar}\}$$

Sei jetzt $\mathbf{x} \neq 0$ und sei $(A_\theta)_\theta$ die Einparametergruppe in $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, die Lorentzboosts in Richtung von \mathbf{x} beschreibt. Dann ist

$$\frac{d}{d\theta} \Lambda(A)_\theta(0, \mathbf{x})|_{\theta=0} = (|\mathbf{x}|, 0) .$$

Also gilt für $\Phi, \Psi \in \mathfrak{D}$

$$\frac{d}{d\theta} (U(A_\theta)\Phi, U(\mathbf{x})U(A_\theta)\Psi)|_{\theta=0} = -i|\mathbf{x}|(\Phi, P_0U(\mathbf{x})\Psi)$$

Aber wegen der Bedingung an $\text{sp } P$ ist mit Φ auch $P_0^{-1}\Phi \in \mathfrak{D}$. Wir können daher in dieser Gleichung Φ durch $P_0^{-1}\Phi$ ersetzen. Auf der linken Seite können wir die Differentiationen der vektorwertigen Funktionen innerhalb des Skalarprodukts ausführen und erhalten endlich viele Vektoren $\Phi_i, \Psi_i \in \mathfrak{D}$ mit

$$|\mathbf{x}|(\Phi, U(\mathbf{x})\Psi) = \sum_i (\Phi_i, U(\mathbf{x})\Psi_i) .$$

Wir wissen, dass die Matrixelemente der Translationen beschränkt sind. Dann aber folgt aus dieser Gleichung, dass sie schneller als jede Potenz verschwinden müssen. (Theorem von Hepp und Jost, siehe R.Jost: General Theory of Quantum Fields.)

Wir können daher die Fourier-Transformierte dieser Matrixelemente definieren

$$(\Phi, \Psi)_{\mathbf{p}} := (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{x} (\Phi, U(\mathbf{x})\Psi) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} .$$

Wegen der Umkehrformel der Fourier-Transformation gilt

$$(\Phi, U(\mathbf{x})\Psi) = \int d^3\mathbf{p} (\Phi, \Psi)_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} .$$

Man überzeugt sich davon, dass $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{p}}$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf \mathfrak{D} ist. Dividiert man durch den Nullraum und vervollständigt den so erhaltenen Prä-Hilbertraum, so erhält man einen Hilbertraum $\mathfrak{H}_{\mathbf{p}}$. Auf diese Weise liefert jedes $\Phi \in \mathfrak{D}$ eine Familie von Vektoren $\Phi(\mathbf{p}) \in \mathfrak{H}_{\mathbf{p}}$ mit

$$\|\Phi(\mathbf{p})\|^2 = \|\Phi\|_{\mathbf{p}}^2 .$$

Die Vektoren des ursprünglichen Hilbertraums werden so zu Schnitten in einem Vektorbündel über dem Impulsraum.

Die angegebene Konstruktion zeichnet ein Lorentz-System aus. Man kann sie in der folgenden Weise geringfügig modifizieren, sodass sie explizit unabhängig vom Lorentz-System wird. Wir setzen

$$(\Phi, \Psi)_p = c \int d^4x \delta(px) (\Phi, U(x)\Psi)$$

mit einem noch festzulegenden Faktor $c > 0$. Für $p = (m, 0)$ stimmt dies offenbar mit dem vorher definierten Skalarprodukt bei $\mathbf{p} = 0$ bis auf einen Faktor überein. Im allgemeinen Fall gilt (mit $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$)

$$(\Phi, U(x)\Psi) = \int d^3\mathbf{q} e^{i\omega(\mathbf{q})x^0 - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} (\Phi, \Psi)_{\mathbf{q}}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \int d^4x \delta(px) (\Phi, U(x)\Psi) \\ &= \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{q} \omega(\mathbf{p})^{-1} e^{-i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{p}\omega(\mathbf{q})/\omega(\mathbf{p}))} (\Phi, \Psi)_{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Wir führen als neue Impulsraumvariable $\mathbf{k} = \mathbf{q} - \mathbf{p}\omega(\mathbf{q})/\omega(\mathbf{p})$ ein, mit der Jakobi-Determinante

$$\left| \det \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \right| = 1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{\omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{q})} .$$

Integration über \mathbf{x} liefert die Deltafunktion in \mathbf{k} , multipliziert mit $(2\pi)^3$. Die Auswertung bei $\mathbf{k} = 0$ entspricht der bei $\mathbf{q} = \mathbf{p}$, damit erhalten wir die folgende Beziehung zwischen dem kovarianten und dem nicht kovarianten Skalarprodukt

$$(\Phi, \Psi)_p = c(2\pi)^3 \frac{\omega(\mathbf{p})}{m^2} (\Phi, \Psi)_{\mathbf{p}} .$$

Wir setzen $c = (2\pi)^{-3} 2m^2$ und erhalten die Lorentz-kovariante Impulsraumzerlegung des Skalarprodukts in \mathfrak{H} ,

$$(\Phi, \Psi) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (\Phi, \Psi)_p .$$

Die Elemente der $SL(2, \mathbb{C})$ induzieren unitäre Abbildungen zwischen den Räumen mit scharfem Impuls,

$$\underline{U}(A) : \mathfrak{H}_{p\Lambda(A)} \rightarrow \mathfrak{H}_p$$

mit

$$(U(A)\Phi)(p) = \underline{U}(A)\Phi(p\Lambda(A)) .$$

Zu jedem Impuls $p \in H_m^+$ gibt es eine Untergruppe G_p der $SL(2, \mathbb{C})$, die sogenannte kleine Gruppe, deren Elemente p nicht ändern,

$$G_p = \{A \in SL(2, \mathbb{C}), p\Lambda(A) = p\} .$$

Dann ist $\underline{U}|_{G_p}$ eine irreduzible Darstellung der kleinen Gruppe auf \mathfrak{H}_p .

Die kleinen Gruppen auf demselben Orbit sind in der $SL(2, \mathbb{C})$ konjugiert,

$$q = p\Lambda(A) \implies G_p = AG_qA^{-1} ,$$

und die Darstellungen der kleinen Gruppen auf den jeweiligen Hilberträumen zu scharfem Impuls erfüllen die Gleichung

$$\underline{U}(ARA^{-1}) = \underline{U}(A)\underline{U}(R)\underline{U}(A)^{-1} .$$

mit $R \in G_q$ und $q = p\Lambda(A)$.

Die Darstellung U ist daher bestimmt, wenn die Darstellung einer kleinen Gruppe bekannt ist. Im Fall der Massenschale H_m^+ betrachten wir die kleine Gruppe zum Impuls $(m, 0)$. Diese ist gegeben durch

$$G_{(m,0)} = \{R \in SL(2, \mathbb{C}), R^*R = 1\} = SU(2, \mathbb{C}) .$$

Im Ruhssystem des Teilchens ist die kleine Gruppe also die Überlagerungsgruppe der Drehgruppe.

Die irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe werden bekanntlich durch die Spinquantenzahl $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ parametrisiert. Der Spin, bezogen auf das Ruhssystem, charakterisiert daher die unitären Darstellungen der \mathcal{P}^c mit $\text{sp}(P) = H_m^+$.

Die Existenz der unitären Abbildungen $\underline{U}(A)$ ermöglicht es uns, die Hilberträume \mathfrak{H}_p mit einem Referenzraum zu identifizieren. Im vorliegenden Fall kann man den Raum $\mathfrak{H}_{(m,0)}$ mit verschwindendem räumlichen Impuls wählen. Wir suchen dann eine Familie von Lorentz-Transformationen A_p mit

$$(m, 0)\Lambda(A_p) = p .$$

Wie für Raumzeitvektoren x setzen wir für Impulse p

$$\tilde{p} = p^0 \mathbf{1} - \mathbf{p} \cdot \vec{\sigma} = p_0 \mathbf{1} + \sum p_i \sigma_i .$$

Dann gilt

$$px \equiv p_\mu x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{p} \tilde{x}$$

Also ist

$$p\Lambda(A)x = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{p} A x A^* = \frac{1}{2} \text{tr} A^* \tilde{p} A x ,$$

d.h.

$$(p\Lambda(A)) = A^* \tilde{p} A .$$

Wir wählen A_p positiv definit, also als reinen Boost. Dann folgt

$$A_p = \sqrt{\frac{\tilde{p}}{m}} .$$

Wir können jetzt den Hilbertraum \mathfrak{H} mit einem Raum \mathfrak{K} von Wellenfunktionen mit Werten im Raum $\mathfrak{H}_{(m,0)}$ identifizieren,

$$\mathfrak{K} = L^2(H_m^+, \mathfrak{H}_{(m,0)}, \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}) .$$

Dazu führen wir den folgenden unitären Operator $V : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{K}$ ein,

$$(V\Phi)(p) = \underline{U}(A_p)\Phi(p) .$$

Die Darstellung U von \mathcal{P}^c auf \mathfrak{H} ist dann äquivalent zur Darstellung

$$U'(L) = VU(L)V^{-1} , \quad L \in \mathcal{P}^c$$

auf dem Raum \mathfrak{K} . Die Darstellung U' ist explizit gegeben durch

$$(U'(a, A)\Phi)(p) = e^{ipa} \underline{U}(R(p, A))\Phi(p\Lambda(A)) .$$

Hierbei ist $R(p, A) = A_p A A_{p\Lambda(A)}^{-1}$ ein Element der kleinen Gruppe $G_{(m,0)} = \text{SU}(2)$, die sogenannte Wigner-Rotation. Jede irreduzible Darstellung der $\text{SU}(2)$ induziert so eine irreduzible Darstellung der \mathcal{P}^c , und alle Darstellungen der \mathcal{P}^c mit $\text{sp} P = H_m^+$ sind von dieser Form.

Für das folgende ist es günstig, die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ in der folgenden Weise zu beschreiben. Sei $\mathfrak{H}^{(s)}$, $s \in \mathbb{N}_0/2$, das $2s$ -fache symmetrische Tensorprodukt von \mathbb{C}^2 . $\mathfrak{H}^{(s)}$ ist die lineare Hülle der Vektoren

$$\underbrace{\xi \otimes \cdots \otimes \xi}_{2s}, \quad \xi \in \mathbb{C}^2.$$

$\mathfrak{H}^{(s)}$ hat die Dimension $2s + 1$. Eine Darstellung V_s der $SU(2)$ auf $\mathfrak{H}^{(s)}$ wird erklärt durch

$$V_s(R)\xi \otimes \cdots \otimes \xi = R\xi \otimes \cdots \otimes R\xi.$$

Man verifiziert leicht, dass es sich um die Darstellung mit Spin s handelt. Wir nutzen jetzt aus, dass diese Darstellung eine natürliche Fortsetzung auf die $SL(2, \mathbb{C})$ besitzt,

$$V_{s0}(A)\xi \otimes \cdots \otimes \xi = A\xi \otimes \cdots \otimes A\xi.$$

Damit kann die Wigner-Rotation in der Darstellung V_{s0} faktorisiert werden,

$$V_{s0}(R(p, A)) = V_{s0}(A_p)V_{s0}(A)V_{s0}(A_{p\Lambda(A)}^{-1}).$$

Wir setzen jetzt

$$\Psi(p) = V_{s0}(A_p^{-1})\Phi(p).$$

Ψ transformiert sich unter $L \in \mathcal{P}^c$ nach

$$(U''(a, A)\Psi)(p) = e^{ipa}V_{s0}(A)\Psi(p\Lambda(A)).$$

Damit U'' unitär wird, muss die Norm von Ψ so gewählt werden, dass sie mit der von Φ übereinstimmt. Sie ergibt sich zu

$$\|\Psi\|^2 = \|\Phi\|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (\Psi(p), V_{s0}\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)\Psi(p)).$$

Ψ interpretieren wir als die Impulsraumwellenfunktion eines Teilchens mit Masse m und Spin s . Die zugehörige Ortsraumwellenfunktion ergibt sich durch Fouriertransformation

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx} \Psi(p).$$

Sie transformiert sich unter Poincaré-Transformationen nach

$$(U(a, A)\Psi)(x) = V_{s0}(A)\Psi(\Lambda(A)^{-1}(x - a)).$$

Im Fall verschwindender Masse muss die Analyse etwas modifiziert werden. Wir wählen zunächst einen Impuls $q \in \partial V_+$, z.B. $q = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$. Dann ist

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die kleine Gruppe ist

$$G_q = \left\{ R \in SL(2, \mathbb{C}), R^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Man findet

$$R = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ a & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}.$$

G_q ist die zweifache Überlagerungsgruppe $\widetilde{E}(2)$ der Bewegungsgruppe $E(2)$ der euklidischen Ebene. Dabei entspricht der Fall $a = 0$ einer Drehung um 2φ und der Fall $\varphi = 0$ der Translation um $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$.

Im ersten Schritt müssen jetzt die Darstellungen der $\widetilde{E}(2)$ bestimmt werden. Hierbei kann man wie bei der Poincaré-Gruppe vorgehen. Die Darstellung der Translationsuntergruppe der $\widetilde{E}(2)$ wird bestimmt durch das Spektrum ihrer Generatoren K_1, K_2 ,

$$\underline{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 + ia_2 & 1 \end{pmatrix} = e^{i(K_1 a_1 + K_2 a_2)}.$$

In einer irreduziblen Darstellung der $\widetilde{E}(2)$ muss das Spektrum eine Kreislinie im \mathbb{R}^2 mit dem Ursprung als Mittelpunkt sein.

Ist der Radius Null, so werden die Translationen trivial dargestellt, die entsprechenden Darstellungen der $\widetilde{E}(2)$ sind dann

$$\underline{U} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ a & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = e^{i\varphi n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$n/2$ nennt man die Helizität, die zugehörige Darstellung der \mathcal{P}^c eine Helizitätsdarstellung.

Im Fall, dass der Kreisradius ρ nicht verschwindet, sind die kleinen Gruppen zu jedem Spektralwert von (K_1, K_2) gleich $\{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$. Diese Gruppe besitzt die beiden irreduziblen Darstellungen

$$\pm \mathbf{1} \rightarrow 1, \quad \pm \mathbf{1} \rightarrow \pm 1.$$

\mathfrak{H}_q kann mit $L^2(0, 2\pi)$ identifiziert werden. Die Darstellung ist

$$\left(\underline{U} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \Phi \right) (\alpha) = \Phi(\alpha - 2\varphi)$$

mit $\Phi(\alpha + 2n\pi) = (\pm 1)^n \Phi(\alpha)$. Die entsprechenden Darstellungen der \mathcal{P}^c sind bisher nicht zur Darstellung von Teilchen benutzt worden.

Zur konkreten Beschreibung der Helizitätsdarstellungen suchen wir wieder eine Familie $B_p \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$, $p \in \partial V_+$ mit der Eigenschaft

$$B_p^* \tilde{q} B_p = \tilde{p}.$$

Eine mögliche Wahl ist

$$B_p = (p_0 + p_3)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit identifizieren wir \mathfrak{H} als den Raum der Wellenfunktionen auf ∂V_+ mit dem Skalarprodukt

$$(\Phi, \Psi) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \overline{\Phi(p)} \Psi(p).$$

Die Darstellung der \mathcal{P}^c ist auf diesem Raum gegeben durch

$$(U(a, A)\Phi)(p) = e^{ipa} h(p, A)^n \Phi(p\Lambda(A))$$

mit der Helizitätsphase

$$h(p, A) = (B_p A B_{p\Lambda(A)}^{-1})_{11} .$$

Man kann die Helizitätsdarstellungen mit Helizität $s \in \mathbb{N}_0/2$ als Grenzfälle der Darstellungen mit Masse m und Spin s im Limes $m \rightarrow 0$ erhalten. Dazu fassen wir zunächst den eindimensionalen Raum \mathfrak{H}_q als Unterraum des $(2s + 1)$ -dimensionalen Darstellungsraums der $SU(2)$ auf, in dem die 3-Komponente des Spins den Eigenwert s hat,

$$\mathfrak{H}_q = V_{s_0}(\tilde{q})\mathfrak{H}^{(s)}$$

mit

$$V_{s_0}(A)\xi \otimes \cdots \otimes \xi = A\xi \otimes \cdots \otimes A\xi$$

für alle 2×2 -Matrizen A . Wegen

$$\tilde{q} B_p A B_{p\Lambda(A)}^{-1} = \tilde{q} h(p, A) , \quad A \in SL(2, \mathbb{C})$$

ist die Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$ von der Form

$$(U(A)V_{s_0}(\tilde{q})\Phi)(p) = V_{s_0}(\tilde{q} B_p A B_{p\Lambda(A)}^{-1})\Phi(p\Lambda(A)) .$$

Wir setzen jetzt ähnlich wie bei den Darstellungen mit positiver Masse

$$\Psi(p) = V_{s_0}(B_p^{-1})\Phi(p) .$$

Ψ transformiert sich wie beim massiven Fall

$$(U''(A)\Psi)(p) = V_{s_0}(A)\Psi(p\Lambda(A)) .$$

Das Skalarprodukt ist

$$\|\Psi\|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} (\Psi(p), V_{s_0}(\tilde{p})\Psi(p))$$

Wir erhalten also dieselbe Beschreibung wie im massiven Fall, nur dass vor dem Limes $m \rightarrow 0$ das Skalarprodukt mit m^{2s} multipliziert worden ist. Hierdurch überlebt im Limes nur die Komponente mit $s_3 = s$. Ähnliche Konstruktionen können im Fall negativer Helizität gemacht werden.

Es verbleiben die Darstellungen mit imaginärer Masse („Tachyonen“) und diejenigen mit negativer Energie und positiver Masse. Sie können mit derselben Methode konstruiert werden, entsprechen aber keinen physikalischen Teilchen.

Wir wollen jetzt die Interpretation der Operatoren P^μ als Energie-Impulsoperatoren rechtfertigen. Dazu betrachten wir die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$|(\Phi, U(t, \mathbf{v}t)\Phi)|^2 .$$

Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ wird nur die Komponente von Φ , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, zur Übergangswahrscheinlichkeit beitragen.

Sei Φ glatt mit kompaktem Träger. Der Integrand in

$$(\Phi, U(t, \mathbf{v}t)\Phi) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{i(\omega(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v})t} \|\Phi(p)\|^2$$

oszilliert für große t stark bis auf die stationären Punkte des Exponenten

$$0 = \nabla_{\mathbf{p}}(\omega(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})} - \mathbf{v} .$$

Daher kann

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \|\Phi(\mathbf{p})\|^2$$

als die Wahrscheinlichkeit dafür gedeutet werden, dass die Geschwindigkeit \mathbf{v} im Gebiet $\frac{m^2}{2(1-|\mathbf{v}|^2)} d^3\mathbf{v}$ um den Wert $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}$ liegt. Dies ist genau der relativistische Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit. Im Fall imaginärer Masse findet man Überlichtgeschwindigkeiten $|\mathbf{v}| > 1$, im Fall $p_0 < 0$ sind Geschwindigkeit und Impuls entgegengesetzt gerichtet, was einer negativen Energie entspricht.

4. Relativistische Wellengleichungen

Die Ortsraum-Wellenfunktionen Ψ , die man durch Fourier-Transformation der Impulsraumwellenfunktionen in irreduziblen Darstellungen der \mathcal{P}^c erhält, verhalten sich unter Poincaré-Transformationen in der erwarteten Weise. Ψ ist durch seine Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ eindeutig bestimmt,

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = 2i \int d^3\mathbf{y} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_+(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \Psi(0, \mathbf{y}) .$$

mit

$$\Delta_+(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{-i(\omega(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} .$$

Überraschender Weise ist es aber nicht möglich, eine Wellenfunktion strikt zu lokalisieren. Ist die Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt t in einem kompakten Gebiet G lokalisiert,

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in G ,$$

so breitet sie sich in beliebig kurzer Zeit über den ganzen Raum aus. Dieses Verhalten scheint im Widerspruch zur Einstein-Kausalität zu stehen, nach der Signale sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Es gilt der folgende Satz:

THEOREM II.3. *Sei $\Psi \neq 0$ die Ortsraum-Wellenfunktion eines relativistischen Teilchens. Dann kann Ψ nicht auf einer offenen nichtleeren Teilmenge des Minkowskiraums verschwinden.*

Beweis: Die Impulsraumwellenfunktion Φ hat Träger in $\overline{V_+}$. Daher besitzt sie eine Laplace-Transformierte

$$\Psi(x - iy) = (\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \Phi(p) e^{-ip(x-iy)}$$

mit $y \in V_+$. Ψ ist analytisch in der sogenannten Röhre („Tube“) $\mathcal{T} = \mathbb{M} - iV_+$. Die Ortsraumwellenfunktion ergibt sich als Randwert für $y \rightarrow 0$. Nach dem „Edge of the Wedge“-Theorem (einer mehrdimensionalen Version des Schwarzschen Spiegelungsprinzips) ist Ψ identisch Null, wenn die Randwerte auf einer offenen Menge verschwinden. \square

Das Normierungsintegral im Ortsraum ergibt sich zu

$$\|\Psi\|^2 = 2i^{(2s+1)} \int d^3\mathbf{x} (\Psi(t, \mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial t} V_{s0}(m^{-1}\tilde{\partial})\Psi(t, \mathbf{x}))_{\mathfrak{H}^{(s)}}$$

unabhängig von t . Hierbei ist $\partial = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\mathbf{x}})$.

Im Fall $s = 1/2$ lässt sich das Normierungsintegral vereinfachen. Es gilt

$$\mathbf{1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}(\tilde{\partial} + \partial), \quad \tilde{\partial}\partial\Psi = -m^2\Psi.$$

Wir setzen $\chi = \frac{i}{m}\tilde{\partial}\Psi$, definieren eine 4-komponentige Wellen-Funktion

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

und finden

$$\|\Psi\|^2 = m \int d^3\mathbf{x} \|\psi(t, \mathbf{x})\|^2$$

mit dem Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{C}^4 .

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$P_0 = \sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}$$

ist nicht polynomial. Daher geht sie im Ortsraum nicht in eine Differentialgleichung über; dies ist die Ursache für das nichtlokale Verhalten der Lösungen. Es liegt daher nahe, von der quadrierten Gleichung

$$P_0^2 = |\mathbf{P}|^2 + m^2$$

auszugehen. Diese Gleichung besitzt zusätzlich Lösungen negativer Energie. Im Ortsraum wird sie zur Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\Psi = 0, \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu.$$

Die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist eine Superposition einer Lösung mit positiver Energie und einer Lösung mit negativer Energie,

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (a_+(p)e^{-ipx} + a_-(p)e^{ipx}).$$

Zur Bestimmung von $\varphi(t, \mathbf{x})$ muss neben $\varphi(0, \mathbf{x})$ auch $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, \mathbf{x})$ als Anfangsbedingung (Cauchy-Daten) vorgegeben werden. Mit

$$\Delta(x) := 2\text{Im } \Delta_+(x)$$

ergibt sich

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = - \int d^3\mathbf{y} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(0, \mathbf{y}) + \Delta(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(0, \mathbf{y}) \right) .$$

Δ ist antisymmetrisch

$$\Delta(-x) = \Delta(x)$$

und invariant unter eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen

$$\Delta(\Lambda x) = \Delta(x) , \quad \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow .$$

Hieraus folgt, dass $\Delta(x)$ für raumartige x ($x^2 < 0$) verschwindet. Denn für rein räumliche $x = (0, \mathbf{x})$ gibt es eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ mit $\Lambda x = -x$, z.B. die Drehung um π um eine Drehachse senkrecht zu \mathbf{x} . Da jeder raumartige Punkt durch eine geeignete Lorentz-Transformation in die $t = 0$ Ebene gedreht werden kann, gilt diese Eigenschaft für alle raumartigen x . Also gilt für $x^2 < 0$ und ein geeignetes $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

$$\Delta(x) = \Delta(\Lambda x) = \Delta(-x) = -\Delta(x) ,$$

d.h. $\Delta(x) = 0$.

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung ein kausales Ausbreitungsverhalten besitzen. Denn sind die Cauchy-Daten zur Zeit $t = 0$ in einer Kugel mit Radius r konzentriert, so sind sie zur Zeit t in einer Kugel mit Radius $r + |t|$ lokalisiert. Wegen der Komponente mit negativer Energie können die lokalisierten Lösungen aber nicht als Wellenfunktionen physikalischer Teilchen angesehen werden.

Δ selbst ist eine distributionelle Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit den Cauchy-Daten

$$\Delta(0, \mathbf{x}) = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta(0, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) .$$

Für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ verwendet man statt der Klein-Gordon-Gleichung meist die Dirac-Gleichung. Dabei definiert man im massiven Fall eine zweite 2-komponentige Wellenfunktion

$$\chi = \frac{i}{m} \tilde{\partial} \varphi$$

und fasst die beiden Spinoren φ und χ zu einem 4-komponentigen Bispinor ψ zusammen,

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} .$$

ψ erfüllt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \tilde{\partial} & 0 \end{pmatrix} \psi = -im\psi .$$

Dies ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma\partial - m)\psi = 0$$

mit den γ -Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ +\sigma_i & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Gleichung ist auch im masselosen Fall sinnvoll. In diesem Fall zerfällt ψ in die beiden chiralen Komponenten φ und χ , die die Weyl-Gleichungen

$$\tilde{\partial}\varphi = 0, \quad \partial\chi = 0$$

erfüllen.

Während φ sich unter Lorentz-Transformationen nach der definierenden Darstellung $A \mapsto A$ der $SL(2, \mathbb{C})$ transformiert, gilt für χ

$$(U(A)\chi)(x) = (A^*)^{-1}\chi(\Lambda(A)^{-1}x) .$$

Der Dirac-Spinor ψ transformiert sich daher nach der reduziblen Darstellung

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix} .$$

KAPITEL III

Freie Felder

1. Das skalare Feld

Sei

$$\mathfrak{H}_1 = \left\{ \Phi : H_m^+ \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\Phi\|^2 = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} |\Phi(p)|^2 < \infty \right\}$$

der Einteilchenraum eines relativistischen Teilchens mit Spin 0 und Masse $m > 0$. Wie im nichtrelativistischen Fall definieren wir den bosonischen Fockraum

$$\mathfrak{H}^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^+$$

mit den n -Teilchenräumen

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_n^+ = & \left\{ \Phi : H_m^+ \times \dots \times H_m^+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ symmetrisch} \mid \right. \\ & \left. \|\Phi\|^2 = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2\omega(\mathbf{p}_1)} \dots \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{2\omega(\mathbf{p}_n)} |\Phi(p_1, \dots, p_n)|^2 < \infty \right\} . \end{aligned}$$

Die Darstellung der Poincaré-Gruppe \mathcal{P}^c ist durch die Darstellung im Einteilchenraum festgelegt,

$$(U(x, A)\Phi)_n(p_1, \dots, p_n) = e^{i \sum p_k x} \Phi_n(p_1 \Lambda(A), \dots, p_n \Lambda(A)) .$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren werden wie im nichtrelativistischen Fall erklärt,

$$\begin{aligned} (a(f)\Phi)_n(p_1, \dots, p_n) &= \sqrt{n+1} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \overline{f(p)} \Phi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n) , \\ (a(f)^*\Phi)_n(p, p_1, \dots, p_n) &= \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum f(p_k) \Phi_{n-1}(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n) & , n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

mit $f \in \mathfrak{H}_1$. Entsprechend ergeben sich die Vertauschungsrelationen zu

$$[a(f), a(g)^*] = (f, g) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \overline{f(\mathbf{p})} g(\mathbf{p}) ,$$

$$[a(f), a(g)] = 0 = [a(f)^*, a(g)^*] .$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu scharfem Impuls werden als operatorwertige Distributionen eingeführt durch

$$a(f) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \overline{f(p)} a(p) ,$$

$$a(f)^* = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a^*(p) f(p) .$$

Sie besitzen die Vertauschungsrelationen

$$[a(p), a^*(q)] = 2\omega(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) , [a(p), a(q)] = 0 = [a^*(p), a^*(q)] .$$

Im Sinne operatorwertiger Distributionen können wir auch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Ortsraum einführen,

$$a(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx} a(p) ,$$

$$a^*(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a^*(p) e^{ipx} .$$

Dies sind Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung. Ihre Vertauschungsrelationen sind

$$[a(x), a^*(y)] = \Delta_+(x - y) , [a(x), a(y)] = 0 = [a^*(x), a^*(y)] .$$

Wir suchen jetzt Operatoren, die als lokale Messungen gedeutet werden können (lokale Observable). Wenn $A(x)$ eine Messgröße am Punkt x beschreibt, so soll die translatierte Observable

$$A(y) = U(y - x)A(x)U(x - y)$$

die entsprechende Größe am Punkt y beschreiben. Das Einsteinsche Kausalitätsprinzip verlangt, dass Signale nicht mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden können, daher müssen Messungen an raumartig getrennten Punkten miteinander kompatibel sein, d.h. die entsprechenden Operatoren müssen kommutieren,

$$[A(x), A(y)] = 0 \text{ falls } (x - y)^2 < 0 .$$

Eine solche Größe ist das skalare Feld

$$\varphi(x) = a(x) + a^*(x) .$$

Es ist eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, transformiert sich unter Poincaré-Transformationen nach

$$U(x, \Lambda)\varphi(y)U(x, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda y + x)$$

und erfüllt die Vertauschungsrelation

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x - y) .$$

Da Δ für raumartige Punkte verschwindet, kann $\varphi(x)$ als Messung am Punkt x gedeutet werden. Aus den Cauchy-Daten für Δ ergeben sich die folgenden gleichzeitigen Vertauschungsrelationen für φ ,

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] = 0 = [\dot{\varphi}(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] ,$$

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

Diese Relationen sind das kontinuierliche Analogon zu den kanonischen Vertauschungsrelationen der Quantenmechanik,

$$[q_k, q_l] = 0 = [p_k, p_l] , [q_k, p_l] = i\delta_{kl} ,$$

wobei der Ort \mathbf{x} die Rolle der Komponente k spielt und $\dot{\varphi}$ der zu φ kanonisch konjugierte Impuls ist.

Dass Messungen an raumartig getrennten Punkten kompatibel sind, bedeutet keineswegs, dass sie auch unkorreliert sein müssen. Korrelationen gibt es im Gegensatz zur nichtrelativistischen Theorie bereits im Vakuum,

$$\begin{aligned} (\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) &= (\Omega, (a(x) + a^*(x))(a(y) + a^*(y))\Omega) \\ &= [a(x), a^*(y)] = \Delta_+(x - y) . \end{aligned}$$

Die Vakuumerwartungswerte der Produkte der Felder nennt man die Wightmanfunktionen,

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = (\Omega, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega) .$$

Die Wightmanfunktionen sind temperierte Distributionen. Sie lassen sich mit Hilfe der Vertauschungsrelationen leicht berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} &(\Omega, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega) \\ &= (\Omega, (a(x_1) + a^*(x_1))\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)\Omega) . \end{aligned}$$

Der Erzeugungsoperator wird jetzt auf die linke Seite des Skalarprodukts gebracht, wo er als Vernichtungsoperator das Vakuum annulliert. Der Vernichtungsoperator wird mit dem Produkt der übrigen Felder kommutiert und annulliert das Vakuum auf der rechten Seite. Es bleibt der Erwartungswert des Kommutators,

$$\begin{aligned} &[a(x_1), \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)] \\ &= \sum_{k=2}^n \Delta_+(x_1 - x_k) \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_{k-1}) \varphi(x_{k+1}) \cdots \varphi(x_n) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Rekursionsrelation

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=2}^n \Delta_+(x_1 - x_k) W_{n-2}(x_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) ,$$

wobei das Symbol \hat{y} bedeutet, dass das Argument y ausgelassen wird. Zusammen mit den Anfangsbedingungen $W_0 = 1$ und $W_1 = 0$ sind dadurch alle Wightmanfunktionen bestimmt.

Es hat sich als sehr praktisch herausgestellt, die sich ergebenden kombinatorischen Formeln mit Hilfe von Graphen zu formulieren. Sei $\mathcal{G}_+(n)$ die Menge aller gerichteten Graphen mit n Vertices $\{1, \dots, n\}$, sodass jeder Vertex mit genau einem anderen Vertex durch eine Linie verbunden ist, wobei der Anfangspunkt („source“) $s(l)$ der Linie l immer einen kleineren Index hat als der Endpunkt $r(l)$ („range“). Für ungerade n ist diese Menge offenbar leer. Es gilt

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}_+(n)} \prod_l \Delta_+(x_{s(l)} - x_{r(l)}) .$$

Nützlich ist auch die Formulierung mit erzeugenden Funktionen. Sei f eine reellwertige Testfunktion. Es gilt nach der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^{i \int d^4x \varphi(x) f(x)} = e^{i \int d^4x a^*(x) f(x)} e^{i \int d^4x a(x) f(x)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y f(x) \Delta_+(x-y) f(y)} .$$

Also folgt

$$(\Omega, e^{i \int d^4x \varphi(x) f(x)} \Omega) = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y f(x) \Delta_+(x-y) f(y)} .$$

Daher erhält man den symmetrisierten Anteil der Wightmanfunktionen durch Funktionalableitungen aus der erzeugenden Funktion

$$\begin{aligned} & i^n W_n(x_1, \dots, x_n)_{\text{symm}} \\ &= \frac{\delta^n}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y f(x) \Delta_+(x-y) f(y)} \Big|_{f=0} . \end{aligned}$$

Wegen des singulären Charakters der 2-Punkt-Funktion Δ_+ sind Potenzen des Feldes nicht wohldefiniert. Berechnet man z.B. formal den Vakuumerwartungswert von $\varphi(x)^2$, so ergibt sich

$$(\Omega, \varphi(x)^2 \Omega) = \Delta_+(0) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} = \infty .$$

Wir können aber normalgeordnete Produkte definieren, indem wir das Feld in den Vernichtungs- und den Erzeugungsanteil aufspalten und alle Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugungsoperatoren schreiben,

$$:\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n): := \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in I} a^*(x_i) \prod_{j \notin I} a(x_j) .$$

Mit Hilfe erzeugender Funktionen finden wir für die normalgeordneten Produkte

$$i^n :\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n): := \frac{\delta^n}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} : e^{i \int d^4x \varphi(x) f(x)} : \Big|_{f=0}$$

mit

$$: e^{i \int d^4x \varphi(x) f(x)} : := e^{i \int d^4x \varphi(x) f(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y f(x) \Delta_+(x-y) f(y)} .$$

Die normalgeordneten Produkte lassen sich auf zusammenfallende Punkte einschränken. Man erhält die Wickpotenzen $:\varphi(x)^n:$. Diese sind selbst als Quantenfelder erklärt. Ihre Wightmanfunktionen ergeben sich aus denen von φ , indem man alle Argumente, die zu einer Potenz gehören, gleichsetzt und die Graphen mit Linien, deren Randpunkte zusammenfallen („Kaulquappen“ (tadpoles)) weglässt,

$$(\Omega, :\varphi(x_1)^{n_1} : \cdots : \varphi(x_k)^{n_k} : \Omega) = \sum_{G \in \mathcal{G}_+(n_1, \dots, n_k)} c_G \prod_l \Delta_+(x_{s(l)} - x_{r(l)}) .$$

Hierbei ist $\mathcal{G}_+(n_1, \dots, n_k)$ die Menge der Graphen mit k Vertizes $1, \dots, k$, bei der vom i -ten Vertex n_i Linien ausgehen. Die Linien verbinden jeweils zwei verschiedene Vertizes und sind zum Vertex mit dem größeren Index gerichtet. Der Faktor c_G gibt an, wieviele Graphen $G_0 \in$

$\mathcal{G}_+(\sum n_i)$ es gibt, die durch Kontraktion der ersten n_1 Vertizes zum Vertex 1, der nächsten n_2 Vertizes zum Vertex 2, usw. den Graphen G ergeben.

Zur Berechnung des kombinatorischen Faktors c_G ersetzen wir die Vertizes $i \in \{1, \dots, k\}$ des Graphen G durch Mengen von n_i Punkten. Ist l_{ij} , die Zahl der Linien zwischen i und j , dann gibt es $\frac{n_i!}{\prod_j l_{ij}!}$ Möglichkeiten, die dem Vertex i entsprechenden Punkte in die mit den anderen Vertizes durch jeweils eine Linie verbundenen Teilmengen aufzuteilen. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{\prod n_i!}{\prod_{i \neq j} (l_{ij}!)}$$

Möglichkeiten. Zwischen den durch Linien verbundenen Teilmengen der Punkte in den Vertizes i und j gibt es $l_{ij}!$ verschiedene Möglichkeiten, die Linien zu wählen. Insgesamt erhält man

$$c_G = \frac{n_i!}{\prod_{i < j} l_{ij}!} .$$

Wir können die obige Formel für die Wightmanfunktionen der Wickpotenzen auch in der folgenden Form schreiben

$$\left(\Omega, \prod_i \frac{:\varphi(x_i)^{n_i}:}{n_i!} \Omega \right) = \sum_G \prod_{i < j} \frac{\Delta_+(x_i - x_j)^{l_{ij}}}{l_{ij}!} .$$

Wesentlich für diese Formel ist, dass die auftretenden Produkte von Δ_+ wohldefinierte Distributionen sind (siehe Aufgabe 22).

Als ein Beispiel für ein etwas allgemeineres Wickpolynom betrachten wir die Energiedichte

$$h(x) = \frac{m^2}{2} : \varphi(x)^2 : + \frac{1}{2} : \dot{\varphi}(x)^2 : + \frac{1}{2} : \nabla \varphi(x)^2 : .$$

Ausgedrückt durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu scharfen Impulsen ergibt sich

$$h(x) =$$

$$\frac{1}{2} (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{2\omega(\mathbf{q})} (2(m^2 + \omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{q}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) a^*(p) a(q) e^{i(p-q)x} + (m^2 - \omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{q}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) (a(p) a(q) e^{-i(p+q)x} + a^*(p) a^*(q) e^{i(p+q)x})) .$$

Die Energiedichte hat also einen Teilchenzahl erhaltenden Term, einen Term, der ein Teilchenpaar erzeugt und einen, der ein Teilchenpaar vernichtet. Bei Integration über \mathbf{x} bei festgehaltener Zeit erhält der Teilchenzahl ändernde Term einen Faktor $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})$, der Teilchenzahl erhaltende Term einen Faktor $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Der Term $m^2 - \omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{q}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ verschwindet bei $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$, daher trägt zum Integral nur der Teilchenzahl erhaltende Term bei. Man findet

$$\int d^3 \mathbf{x} h(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \omega(\mathbf{p}) a^*(p) a(p) = H ,$$

also die Gesamtenergie, was die Interpretation von h als Energiedichte rechtfertigt.

Die klassische Energiedichte des Klein-Gordon-Feldes hat dieselbe Form, nur dass die Normalordnung wegfällt. Im Gegensatz zur klassischen Energiedichte ist die Energiedichte des Quantenfeldes aber nicht immer positiv. Dies folgt aus der einfachen Tatsache, dass die Energiedichte im Vakuum verschwindet, die Fluktuationen der Energiedichte aber nicht. Formal gilt

$$(\Omega, h(x)^2 \Omega) = \infty .$$

Daher ist das Vakuum kein Eigenzustand der Energiedichte, und in der Zerlegung nach Eigenzuständen müssen sich die Beiträge mit positiven und negativen Eigenwerten aufheben.

Die Existenz von Zuständen mit Energiedichten, die in bestimmten Raumzeitgebieten negativ sind, hat Auswirkungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Viele Aussagen dieser Theorie beruhen auf der Annahme einer positiven Energiedichte. Ist diese Annahme verletzt, so sind exotische Raumzeiten mit Wurmlochern und ähnlichem möglich. In der Science Fiction Literatur wird daher ausgiebig von dieser Option Gebrauch gemacht. Eine genauere Analyse allerdings zeigt, dass negative Energiedichten nur unter sehr einschränkenden Bedingungen möglich sind. So ist das zeitliche Integral der Energiedichte an jedem Punkt nichtnegativ, eine zu einem Zeitpunkt negative Energiedichte muss daher später zurückgezahlt werden, und zwar, wie sich zeigt, mit Zinsen („Quantenzins“).

Wir wollen jetzt, wie im nichtrelativistischen Fall, die Auswirkung einer zeitunabhängigen Quelle auf unser System untersuchen. Unser zeitabhängiger Hamilton-Operator sei gegeben durch

$$H(t) = H_0 - \int d^3 \mathbf{x} \varphi(0, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x})$$

mit einer reellwertigen Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$. Die Rechnungen sind völlig analog zu denen in Kapitel I. Der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild ist

$$V(t, s) = T e^{i \int_{s < x^0 < t} d^4 x \varphi(x) f(x)} ,$$

und für die S-Matrix finden wir

$$S(f) = T e^{i \int d^4 x \varphi(x) f(x)} = e^{i \int d^4 x \varphi(x) f(x)} e^{-i\alpha}$$

mit $\alpha = \frac{1}{2} \int_{x^0 > y^0} d^8(x, y) f(x) f(y) \Delta(x - y)$. Ausgedrückt durch normalgeordnete Produkte ergibt sich

$$S(f) =: e^{i \int d^4 x \varphi(x) f(x)} : (\Omega, S(f) \Omega)$$

mit

$$(\Omega, S(f) \Omega) = e^{-\frac{1}{2} \int d^8(x, y) f(x) f(y) (\Delta_+(x-y) + i\Theta(x^0 - y^0) \Delta(x-y))}$$

Hierbei ist Θ die Heavisidesche Sprungfunktion

$$\Theta(x^0) = \begin{cases} 1 & , \quad x^0 > 0 \\ 0 & , \quad x^0 \leq 0 \end{cases} .$$

Der symmetrisierte Anteil des Koeffizienten von $f(x)f(y)$ im Integranden des Exponenten ist der Feynman-Propagator

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= \Theta(x^0 - y^0)\Delta_+(x-y) + \Theta(y^0 - x^0)\Delta_+(y-x) \\ &= (\Omega, T\varphi(x)\varphi(y)\Omega) . \end{aligned}$$

Man berechnet

$$\Delta_F(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} .$$

Der Feynmanpropagator ist invariant unter der vollen Lorentzgruppe (einschließlich der Zeitinversion) und ist eine Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung,

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = -\delta(x) .$$

Die oben angegebenen Formeln liefern eine Definition der zeitgeordneten Produkte des Feldes φ mittels Funktionalableitungen

$$\begin{aligned} &i^n T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\ &= \frac{\delta^n}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} : e^{i \int d^4x \varphi(x) f(x)} : e^{-\frac{i}{2} \int d^8(x,y) f(x) f(y) \Delta_F(x-y)} \Big|_{f=0} \end{aligned}$$

Die sich ergebende kombinatorische Formel kann wieder mit Hilfe von Graphen übersichtlich geschrieben werden. Sei $\mathcal{G}(n)$ die Menge der Graphen mit Vertizes $1, \dots, n$ und ungerichteten Linien, die entweder zwei Vertizes verbinden (innere Linien $l \in K_1$) oder von einem Vertex nach außen gehen (äußere Linien $l \in K_2$). Jeder Vertex v ist Randpunkt, $v \in \partial l$, genau einer Linie l . Dann gilt

$$T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}(n)} \prod_{K_1} : \varphi(x_{\partial l}) : \prod_{K_2} (\Omega, T \prod_{v \in \partial l} \varphi(x_v) \Omega) .$$

Formal erhält man analoge Formeln, wenn man als Wechselwirkungen höhere Wickpotenzen einsetzt. Wieder berechnet sich die S-Matrix aus den zeitgeordneten Produkten, und diese ergeben sich wie bei den Wightmanfunktionen aus den Graphen $G \in \mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)$, die durch Zusammenziehung von Vertizes aus $\mathcal{G}(\sum n_i)$ entstehen. Man findet

$$T \prod_i \frac{\varphi(x_i)^{n_i}}{n_i!} = \sum_{G \in \mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)} \prod_j \frac{\varphi(x_j)^{l_j}}{l_j!} \prod_{j < m} \frac{(i\Delta_F(x_j - x_m))^{l_{jm}}}{l_{jm}!}$$

Leider sind die in dieser Formel auftretenden Produkte des Feynman-Propagators im allgemeinen nicht wohldefiniert. Dies ist die Ursache der Ultraviolett-Divergenzen der Quantenfeldtheorie.

Die auftretenden Graphen lassen sich nach der Zahl der unabhängigen Schleifen („Loops“) klassifizieren. Die Graphen ohne Schleifen nennt

man Baumgraphen („Trees“). Die entsprechenden Terme in der Entwicklung der zeitgeordneten Produkte sind wohldefiniert, da die in den Feynman-Propagatoren vorkommenden Differenzvariablen $y_{jm} = x_j - x_m$, $l_{jm} = 1$, unabhängig sind und nur erste Potenzen auftreten.

Als ein Beispiel betrachten wir die S-Matrix

$$S = T e^{i \int d^4x f(x) \varphi(x)^3} .$$

bis zur 2.Ordnung. Wir finden

$$S = 1 + i \int d^4x f(x) : \varphi(x)^3 : - \frac{1}{2} \int d^8(x, y) f(x) f(y) T : \varphi(x)^3 : : \varphi(y)^3 :$$

mit

$$\begin{aligned} T \frac{: \varphi(x)^3 : : \varphi(y)^3 :}{3! \cdot 3!} &= \frac{: \varphi(x)^3 \varphi(y)^3 :}{3! \cdot 3!} + \frac{: \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 :}{2! \cdot 2!} i \Delta_F(x - y) \\ &+ : \varphi(x) \varphi(y) : \frac{(i \Delta_F(x - y))^2}{2!} + \frac{(i \Delta_F(x - y))^3}{3!} . \end{aligned}$$

Man kann jetzt die Wick-Polynome nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren entwickeln. Für den Anteil, der 2-Teilchenzustände auf 2-Teilchenzustände abbildet, ergibt sich zum Beispiel

$$S_{2 \rightarrow 2} = 1 -$$

$$9i \int d^8(x, y) f(x) f(y) (a^*(x)^2 a(y)^2 + 2a^*(x) a^*(y) a(x) a(y)) \Delta_F(x - y) .$$

Der erste Term kann als Paarvernichtung am Punkte y , bei der ein neues „virtuelles“ Teilchen entsteht, das seinerseits am Punkt x wieder in 2 Teilchen zerfällt, interpretiert werden. Der zweite Term wird entsprechend als Austausch eines virtuellen Teilchens zwischen einem Teilchen bei x und einem bei y gedeutet.

2. Felder mit Spin; der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik

Sei \mathfrak{H}_1 der Zustandsraum eines Teilchens mit Spin s und Masse $m > 0$. Zur Vereinfachung der Notation wollen wir in diesem Abschnitt $m = 1$ setzen. Das bedeutet, dass Impulse und Energien in Einheiten von m gemessen werden.

\mathfrak{H}_1 ist nach Kapitel II der Darstellungsraum der \mathcal{P}^c zur Darstellung (m, s) . Wir wählen ihn in der Form

$$\mathfrak{H}_1 = \{ \Phi : H_1^+ \rightarrow \mathfrak{H}^{(s)} \mid \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (\Phi(p), V_{s0}(\tilde{p}) \Phi(p)) < \infty \} .$$

mit den Bezeichnungen aus Kapitel II. Die Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$ auf \mathfrak{H}_1 ist gegeben durch

$$(U(A)\Phi)(p) = V_{s0}(A)\Phi(p\Lambda(A)) .$$

Für das folgende ist wichtig, dass $\mathfrak{H}^{(s)}$ eine natürliche komplexe Konjugation besitzt, sodass gilt

$$\overline{V_{s0}(A)\Phi} = V_{s0}(\overline{A})\overline{\Phi} , \quad \Phi \in \mathfrak{H}^{(s)} .$$

Wir wählen eine reelle Orthonormalbasis in $\mathfrak{H}^{(s)}$. Die Elemente von \mathfrak{H}_1 können dann als $(2s+1)$ -komponentige Funktionen dargestellt werden.

Die symmetrischen, bzw. antisymmetrischen n -Teilchenräume \mathfrak{H}_n^\pm bestehen aus $(2s+1)^n$ -komponentigen Funktionen von n Impulsen mit der jeweiligen Symmetrieeigenschaft. Das Skalarprodukt lautet

$$\|\Phi\|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2\omega(\mathbf{p}_1)} \cdots \frac{d^3\mathbf{p}_n}{2\omega(\mathbf{p}_n)} \sum_{k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_n} \overline{\Phi_{k_1, \dots, k_n}(p_1, \dots, p_n)} V_{s0}(\tilde{p})_{k_1 j_1} \cdots V_{s0}(\tilde{p})_{k_n j_n} \Phi_{j_1, \dots, j_n}(p_1, \dots, p_n)$$

Bosonische und fermionische Fockräume \mathfrak{H}^\pm werden wie vorher konstruiert. Vernichtungsoperatoren werden mit Hilfe des Skalarprodukts in \mathfrak{H}_1 definiert,

$$(a(f)\Phi)_{n; k_1, \dots, k_n}(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{n+1} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{kj} \overline{f_k(\tilde{p})} V_{s0}(\tilde{p})_{kj} \Phi_{n+1; j, k_1, \dots, k_n}(p, p_1, \dots, p_n) .$$

Die Darstellung U der Poincaré-Gruppe auf \mathfrak{H}_\pm ergibt sich in natürlicher Weise aus der Einteilchendarstellung. Insbesondere gilt

$$U(x, A)a(f)U(x, A) = a(U(x, A)f) .$$

Die Vertauschungsrelationen lauten

$$a(f)a(g) = \varepsilon a(g)a(f) , \quad a(f)a(g)^* = \varepsilon a(g)^*a(f) + (f, g) ,$$

wobei $\varepsilon = 1$ für Bose- und $\varepsilon = -1$ für Fermi-Statistik gilt.

Wir suchen jetzt wie im Fall $s = 0$ Felder mit lokalen Vertauschungsrelationen,

$$\varphi_i(x)\varphi_j(y) = \varepsilon\varphi_j(y)\varphi_i(x) , \quad (x-y)^2 < 0 .$$

Diese Felder sollen sich kovariant unter Poincaré-Transformationen transformieren,

$$U(y, A)\varphi_i(x)U(y, A)^{-1} = \sum_j \varphi_j(\Lambda(A)x + y)S(A)_{ji} ,$$

mit einer endlichdimensionalen Darstellung S der $SL(2\mathbb{C})$.

Da die Felder operatorwertige Distributionen sind, ist es sinnvoll, die verschmierten Felder

$$\varphi(f) = \int d^4x \sum \varphi_i(x)f_i(x)$$

zu betrachten, wobei f eine Testfunktion mit Werten im Darstellungsraum von S ist. Auf dem Raum \mathcal{D} dieser Testfunktionen wird die $SL(2, \mathbb{C})$ durch

$$(V(A)f)(x) = S(A)f(\Lambda(A)^{-1}x)$$

dargestellt. Die Kovarianz-Bedingung an φ lautet dann

$$U(A)\varphi(f)U(A)^{-1} = \varphi(V(A)f) .$$

Wir suchen zunächst eine Linearkombination aus Erzeugungsoperatoren und Vernichtungsoperatoren, die sich kovariant transformiert,

$$\varphi(f) = a(Q(f)) + a(R(f))^* ,$$

wobei R und Q Abbildungen vom Testfunktionenraum \mathcal{D} in den Ein teilchenraum sind. R ist linear und Q ist antilinear. Q und R sollen die Darstellungen V und U verketteten,

$$QV(A) = U(A)Q , RV(A) = U(A)R .$$

Die Bedingung an R ist leicht zu erfüllen. Wir wählen $S = V_{s_0}$ und setzen

$$R(f)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4x e^{ipx} f(x) .$$

Bei Q bereitet die Antilinearität Probleme. Wir suchen daher einen Operator C („Ladungskonjugation“) in \mathfrak{H}_1 mit $U(A)C\bar{\Phi} = C\overline{U(A)\Phi}$. Ein solcher Operator ist

$$(C\bar{\Phi})(p) = V_{s_0}(p\zeta)\bar{\Phi}(p)$$

mit $\zeta = i\sigma_2$. Denn mit $(\Lambda = \Lambda(A))$

$$(\underset{\sim}{p}\Lambda) = A^{-1}\underset{\sim}{p}(A^*)^{-1} , (A^*)^{-1}\zeta = \zeta\bar{A}$$

und

$$(U(A)C\bar{\Phi})(p) = V_{s_0}(A(\underset{\sim}{p}\Lambda)\zeta)\bar{\Phi}(\underset{\sim}{p}\Lambda) ,$$

$$(CU(\bar{A})\bar{\Phi})(p) = V_{s_0}(p\zeta\bar{A})\bar{\Phi}(\underset{\sim}{p}\Lambda) .$$

folgt die Behauptung aus der Gleichung

$$\underset{\sim}{p}\zeta\bar{A} = A(\underset{\sim}{p}\Lambda)\zeta .$$

Wir wählen daher

$$Q(f) = CR(\bar{f}) .$$

Wir untersuchen jetzt, ob das so definierte Feld lokale Vertauschungsrelationen besitzt. Es gilt

$$\varphi(f)\varphi(g) - \varepsilon\varphi(g)\varphi(f) = (Q(f), R(g)) - \varepsilon(Q(g), R(f)) .$$

Wir berechnen

$$(Q(f), R(g)) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (V_{s0}(\zeta)R(\bar{f}), R(g)) = \\ \int d^8(x, y) \Delta_+(x - y) \sum_{jk} V_{s0}(\zeta)_{kj} f_j(x) g_k(y) .$$

Mit $V_{s0}(\zeta)_{kj} = (-1)^{2s} V_{s0}(\zeta)_{jk}$ ergibt sich

$$\varphi(f)\varphi(g) - \varepsilon\varphi(g)\varphi(f) = \\ \int d^8(x, y) \sum_{jk} V_{s0}(\zeta)_{kj} f_j(x) g_k(y) (\Delta_+(x - y) - \varepsilon(-1)^{2s} \Delta_+(y - x)) .$$

Falls $\varepsilon = (-1)^{2s}$, d.h. wenn der übliche Zusammenhang zwischen Spin und Statistik gilt, ergibt sich in der letzten Klammer die aus der skalaren Theorie bekannte Kommutatorfunktion $i\Delta$. In diesem Fall erfüllen die kovarianten Felder lokale Vertauschungsrelationen

$$[\varphi_j(x), \varphi_k(y)]_{\pm} = i\Delta(x - y) V_{s0}(\zeta)_{kj} .$$

Im anderen Fall sind die Vertauschungsrelationen verletzt, da Δ_+ nicht für raumartige Argumente verschwindet.

Die angegebenen Felder sind für $s > 0$ nicht hermitesch. Die hermitesch konjugierten Felder lassen sich mit Hilfe der Felder φ_i linear darstellen. Wir betrachten den Operator

$$\varphi(f)^* = a(Q(f))^* + a(R(f)) .$$

Man findet

$$Q(f) = CR(\bar{f}) = R(V_{s0}(-i\tilde{\partial}\zeta)\bar{f}) = R(\mathcal{C}\bar{f}) .$$

mit $\mathcal{C} = V_{s0}(i\tilde{\partial}\zeta)$. Entsprechend gilt

$$Q(\mathcal{C}\bar{f}) = CR(\bar{f}) = R(\mathcal{C}\bar{f}) .$$

mit $\bar{\mathcal{C}} = V_{s0}(-i\zeta\tilde{\partial})$. Wegen $\zeta^2 = -1$, $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = \square$, $R \circ \square^{2s} = (-m^2)^{2s} R$ und $m = 1$ folgt $R \circ \bar{\mathcal{C}} = R$, also

$$Q(\mathcal{C}\bar{f}) = R(f) .$$

Damit erhalten wir die Majorana-Bedingung

$$\varphi(f)^* = \varphi(\mathcal{C}\bar{f}) .$$

Die durch

$$\varphi(f)^* = \int d^4x \sum_j \varphi_j^*(x) \overline{f_j(x)}$$

implizit definierten hermitesch konjugierten Felder ergeben sich also zu

$$\varphi_k^*(x) = V_{s0}(i\tilde{\partial}\zeta)_{kj} \varphi_j(x)$$

Physikalisch besagt die Majorana-Bedingung, dass das Teilchen mit seinem Antiteilchen übereinstimmt. Sind Teilchen und Antiteilchen verschieden, so wählt man als Einteilchenraum die direkte Summe zweier irreduzibler Darstellungsräume zur selben Masse und zum selben Spin. Nennt man a den Vernichtungsoperator für das erste Teilchen und b den Vernichtungsoperator für das zweite Teilchen, so erhält man lokale Felder durch die Definition

$$\varphi(f) = a(Q(f)) + b(R(f))^* .$$

In diesem Fall vertauschen die Felder φ_i miteinander. Für den (Anti-)Kommutator von φ und φ^* ergibt sich wie im Majorana-Fall (beim richtigen Zusammenhang zwischen Spin und Statistik)

$$[\varphi(f)^*, \varphi(g)]_{\pm} = i^{2s+1} \int d^8(x, y) f_k(x) g_j(y) V_{s0}(\tilde{\partial})_{kj} \Delta(x - y) .$$

also

$$[\varphi_k^*(x), \varphi_j(y)]_{\pm} = i^{2s+1} V_{s0}(\tilde{\partial})_{kj} \Delta(x - y) .$$

3. Das freie Dirac-Feld

Wir betrachten jetzt den Fall $s = \frac{1}{2}$. Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen nehmen in diesem Fall die einfache Form an

$$\{\varphi_k^*(t, \mathbf{x}), \varphi_l(t, \mathbf{y})\} = \frac{1}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{kl} , \quad k, l = 1, 2 .$$

Hierbei wurde benutzt, dass $\Delta(0, \mathbf{x}) = 0$ und $\partial_t \Delta(0, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$ ist.

φ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung und transformiert sich unter Poincaré-Transformationen nach

$$U(x, A) \varphi_k(y) U(x, A)^{-1} = \sum_{j=1}^2 \varphi_j(\Lambda(A)y + x) A_{jk} .$$

Wir führen jetzt ein zweites Feld χ ein durch

$$\chi_k(x) = \frac{i}{m} \sum_j (\tilde{\partial}\zeta)_{kj} \varphi_j(x) .$$

χ erfüllt ebenfalls die Klein-Gordon-Gleichung. Im Majorana-Fall ist $\chi = \varphi^*$. χ transformiert sich unter Poincaré-Transformationen nach der konjugierten Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$,

$$U(x, A) \chi_k(y) U(x, A)^{-1} = \sum_{j=1}^2 \chi_j(\Lambda(A)y + x) \overline{A_{jk}} .$$

Wir fassen jetzt φ und χ zu einem 4-komponentigen Feld ψ zusammen,

$$\psi = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} .$$

ψ transformiert sich unter Poincaré-Transformationen nach

$$U(x, A)\psi_\alpha(y)U(x, A)^{-1} = \sum_{\beta=1}^4 \psi_\beta(\Lambda(A)y + x)S(A)_{\beta\alpha}$$

mit $S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ und erfüllt die Dirac-Gleichung

$$(i\partial - m)\psi = 0$$

mit

$$\partial = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta\partial \\ \tilde{\partial}\zeta & 0 \end{pmatrix} = \partial_\mu\gamma^\mu .$$

Hierbei werden die γ -Matrizen in der Form

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \zeta\sigma_\mu \\ -\sigma^\mu\zeta & 0 \end{pmatrix}$$

gewählt. Diese Form geht durch Ähnlichkeits-Transformation mit der unitären Matrix $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus der in Kapitel II angegebenen Form hervor. Sie erfüllen wie diese die Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} ,$$

und transformieren sich unter Lorentz-Transformationen nach

$$S(A)^T\gamma^\mu S(A^{-1})^T = \Lambda(A)^\mu{}_\nu\gamma^\nu .$$

Darüber hinaus erfüllt die Darstellung S die Pseudo-Unitaritätsbedingung

$$S(A)^*\gamma^0 S(A) = \gamma^0 .$$

Die Vertauschungsrelationen des Dirac-Feldes ergeben sich zu

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^*(y)\} = i(S(x-y)\gamma^0)_{\alpha\beta}$$

mit der 4×4 -Matrix-wertigen Antikommutator-Funktion

$$S(x-y) = (i\partial + m)\Delta(x-y) .$$

Insbesondere erhält man für die gleichzeitigen Antivertauschungsrelationen

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^*(t, \mathbf{y})\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

Die 2-Punkt-Wightman-Funktion ist

$$(\Omega, \psi_\alpha(x)\psi_\beta^*(y)\Omega) = (S_+(x-y)\gamma^0)_{\alpha\beta}$$

mit

$$S_+(x-y) = (i\partial + m)\Delta_+(x-y) .$$

Bei der Definition der zeitgeordneten Produkte muss die Fermi-Statistik beachtet werden. Man setzt

$$T\psi_\alpha(x)\psi_\beta^*(y) = \Theta(x^0 - y^0)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^*(y) - \Theta(y^0 - x^0)\psi_\beta^*(y)\psi_\alpha(x) .$$

Damit ergibt sich der Feynman-Propagator des Dirac-Feldes zu

$$(\Omega, T\psi_\alpha(x)\psi_\beta^*(y)\Omega) = i(S_F(x-y)\gamma^0)_{\alpha\beta}$$

mit

$$S_F(x) = (i\cancel{\partial} + m)\Delta_F(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ipx} (\cancel{p} - m + i\varepsilon)^{-1} .$$

Normalgeordnete Produkte werden ähnlich wie im Bosefall definiert. Der Unterschied besteht darin, dass jetzt jeder Term mit dem Vorzeichen einer Permutation versehen wird, die die Erzeugungsoperatoren auf die linke Seite der Vernichtungsoperatoren bringt (verschiedene solche Permutationen haben dasselbe Vorzeichen). Normalgeordnete Produkte lassen sich wieder auf zusammenfallenden Punkten erklären; man erhält wie beim Bose-Feld die Wick-Polynome als neue lokale Felder.

Ein Beispiel für ein solches Feld ist der Strom

$$j^\mu(x) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): .$$

Hierbei ist die Notation in der folgenden Weise zu verstehen: ψ wird als Spaltenvektor aufgefasst, ψ^* als der zugehörige adjungierte Zeilenvektor. $\bar{\psi}$ ist der durch $\psi^*\gamma^0$ definierte Zeilenvektor. Wegen der Pseudo-Unitarität der Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$ ist $:\bar{\psi}\psi:$ ein skalares Feld, und j transformiert sich wie ein Lorentz-Vektor,

$$U(A)j^\mu(x)U(A)^{-1} = \Lambda(A^{-1})^\mu{}_\nu j^\nu(\Lambda(A)x) .$$

j ist ein erhaltener Strom, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Daher ist das Integral

$$Q = \int d^3\mathbf{x} j^0(t, \mathbf{x}) .$$

(der Ladungsoperator) eine Erhaltungsgröße (d.h. unabhängig von t). Das obige Integral existiert im Sinne von Erwartungswerten auf einem dichten Bereich und stimmt mit der Differenz der Zahl der Teilchen und der Zahl der Antiteilchen überein. Das Spektrum von Q besteht daher aus den ganzen Zahlen.

Die Dirac-Gleichung ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Daher erwarten wir, dass die Lösungen durch ihre Werte zu einer vorgegebenen Zeit festgelegt sind. Man findet

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} S(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(0, \mathbf{y}) .$$

Als Beispiel für eine Wechselwirkung betrachten wir die Kopplung des Dirac-Feldes an ein äußeres elektromagnetisches Feld mit Vektorpotential A_μ . Das wechselwirkende Dirac-Feld erfüllt die Gleichung

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0 .$$

Wenn wir das wechselwirkende Feld zur Zeit $t = 0$ mit dem freien Dirac-Feld identifizieren, so erhalten wir als zeitabhängigen Hamiltonoperator

$$H(t) = H_0 - e \int d^3\mathbf{x} j^\mu(0, \mathbf{x}) A_\mu(t, \mathbf{x}) .$$

Die S-Matrix ergibt sich zu

$$S = T e^{i \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x)} .$$

Die zeitgeordneten Produkte lassen sich wieder mit Hilfe von Feynmangraphen darstellen. Die auftretenden Graphen haben gerichtete Linien, und jeder Vertex ist Anfangs- und Endpunkt einer Linie. Die inneren Linien $l \in K_2$ entsprechen Feynmanpropagatoren iS_F , die einlaufenden äußeren Linien $l \in K_+$ entsprechen einem Faktor $\bar{\psi}$, die auslaufenden äußeren Linien $l \in K_-$ einem Faktor ψ im Normalprodukt. Man findet

$$\begin{aligned} T j^{\mu_1}(x_1) \cdots j^{\mu_n}(x_n) &= \sum_G \varepsilon \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n} \\ &: \prod_{l \in K_+} \bar{\psi}_{\beta_{\partial l}}(x_{\partial l}) \prod_{l \in K_-} \psi_{\alpha_{\partial l}}(x_{\partial l}) : \prod_{l \in K_2} iS_F(x_{s(l)} - x_{r(l)})_{\alpha_{s(l)} \beta_{r(l)}} \prod_{i=1}^n \gamma_{\beta_i \alpha_i}^{\mu_i} \end{aligned}$$

wobei ε das Vorzeichen der Permutation der Fermi-Felder ist.

Betrachten wir zunächst die zusammenhängenden Graphen. Hier gibt es zwei Typen, die linearen Graphen und die Schleifengraphen. Für die linearen Graphen mit n Vertizes gibt es $n!$ mögliche Reihenfolgen, in denen die Vertizes durchlaufen werden können. Bezeichnen wir die Reihenfolge durch eine Permutation $\sigma \in S_n$, so ergibt der entsprechende Graph den Beitrag

$$: \bar{\psi}(x_{\sigma(1)}) \gamma^{\mu_{\sigma(1)}} iS_F(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}) \cdots iS_F(x_{\sigma(n-1)} - x_{\sigma(n)}) \gamma^{\mu_{\sigma(n)}} \psi(x_{\sigma(n)}) : .$$

Wir setzen jetzt

$$\Gamma(x, y) = ie\mathcal{A}(x) iS_F(x - y)$$

und fassen Γ als Integraloperator auf,

$$(\Gamma f)(x) = \int d^4y \Gamma(x, y) f(y) , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) .$$

Dann ergibt die Summe über alle Liniengraphen mit n Vertizes nach Integration

$$n! : \int d^8(x, y) \bar{\psi}(x) \Gamma^{n-1}(x, y) ie\mathcal{A}(y) \psi(y) : \equiv n! : \int \bar{\psi} \Gamma^{n-1} ie\mathcal{A} \psi : .$$

Für die Schleifengraphen mit n Vertizes gibt es nur $(n-1)!$ verschiedene Möglichkeiten, da die Wahl des Anfangspunktes willkürlich ist. Bezeichnen wir die Reihenfolge, in der die Vertizes durchlaufen werden, wieder durch eine Permutation σ , so erhält man (unter Berücksichtigung des Vorzeichens von der Vertauschung der Fermifelder) den Beitrag

$$- \text{tr} \gamma^{\mu_{\sigma(1)}} iS_F(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}) \cdots \gamma^{\mu_{\sigma(n)}} iS_F(x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)}) ,$$

wobei tr die Spur einer 4×4 -Matrix bezeichnet. Integration ergibt den Beitrag

$$-(n-1)! \text{Tr} \Gamma^n := (n-1)! \int d^4x \text{tr} \Gamma^n(x, x) .$$

Da sich jeder Graph in Zusammenhangskomponenten zerlegen läßt, können damit die Beiträge aller Graphen berechnet werden. Sei G ein Graph mit n Vertizes und Zusammenhangskomponenten $L_1, \dots, L_k, S_1, \dots, S_l$, wobei die Liniengraphen L_i n_i Vertizes und die Schleifengraphen S_j m_j Vertizes haben. Dann ist der entsprechende Beitrag

$$: \prod_{i=1}^k \int \bar{\psi} \Gamma^{n_i-1} i e A \psi : \prod_{j=1}^l \text{Tr} \Gamma^{m_j} .$$

Es gibt

$$\frac{n!}{\prod n_i! \prod m_j!}$$

verschiedene Möglichkeiten der Aufteilung von n Vertizes in Teilmengen mit $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l$ Vertizes. Der Beitrag aller dieser Graphen ist also

$$n! : \prod_i \int \bar{\psi} \Gamma^{n_i-1} i e A \psi : \prod_j \left(- \text{Tr} \frac{\Gamma^{m_j}}{m_j} \right)$$

Nach Summation über n ist die Summation über die anderen Summationsvariablen nur noch durch $n_i > 0$ und $m_j > 1$ eingeschränkt. Mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n = (1 - \Gamma)^{-1}$$

(geometrische Reihe) und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \Gamma^n = - \ln(1 - \Gamma) - \Gamma$$

(Taylorreihe von $\ln(1+x)$) ergibt sich für die S-Matrix die geschlossene Formel

$$S =: e^{\int \bar{\psi} (1-\Gamma)^{-1} i e A \psi} : e^{\text{Tr} \ln(1-\Gamma) + \Gamma} .$$

Mit der für Matrizen B gültigen Formel

$$e^{\text{Tr} B} = \det e^B$$

schreibt sich der Vakumerwartungswert von S als

$$(\Omega, S\Omega) = \det(1 - \Gamma) e^{\Gamma} .$$

Die obigen Überlegungen lösen das mit der Entwicklung nach Graphen verbundene kombinatorische Problem. Es bleibt noch zu zeigen, dass die gefundenen Ausdrücke mathematisch wohl definiert sind.

Dies ist sicher dann der Fall, wenn die Raumzeit durch ein endliches Gitter ersetzt wird. In diesem Fall sind die Operatoren endliche Matrizen, und man kann die gewonnenen Ausdrücke numerisch berechnen.

Mit ähnlichen Methoden wie bei der Konstruktion der S-Matrix kann man auch das wechselwirkende Feld konstruieren. Wir benutzen wieder die Schreibweise als Distribution,

$$\psi(f) = \int d^4x \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(x) f_{\alpha}(x) .$$

Wenn ψ die Dirac-Gleichung mit Vektorpotential A_{μ} erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \sum_{\alpha\beta} (i\partial - e\mathcal{A} - m)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) f_{\alpha}(x) \\ &= \int d^4x \sum_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) (-i\partial - e\mathcal{A} - m)_{\alpha\beta} f_{\alpha}(x) . \end{aligned}$$

d.h. mit $D = i\partial - m$ gilt

$$\psi((D^t - e\mathcal{A}^t)f) = 0 ,$$

wobei der Exponent t den transponierten Operator bezeichnet. Ist z.B. G ein Integraloperator in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ mit Integralkern $G(x, y)$, so ist der Integralkern des transponierten Operators

$$G^t(x, y) = G(y, x)^T .$$

wobei T sich auf die Transposition der 4×4 -Matrix bezieht.

Das freie Dirac-Feld ψ_0 erfüllt die Gleichung

$$\psi_0(D^t f) = 0 .$$

Wir suchen daher einen linearen Operator

$$W : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$$

mit

$$D^t = W(D^t - e\mathcal{A}^t) .$$

Dann löst

$$\psi = \psi_0 \circ W$$

die Dirac-Gleichung mit Wechselwirkung.

Sei G eine Greensche Funktion des Operators $D - e\mathcal{A}$,

$$(D - e\mathcal{A})G(x, y) = \delta(x - y)\mathbf{1} .$$

Dann ist

$$W = D^t G^t$$

eine Lösung.

Sei G_0 eine Greensche Funktion des freien Operators D . Dann gewinnt man eine Reihendarstellung von G durch

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_0(eA G_0)^n$$

Als Greensche Funktion G_0 könnten wir den Feynmanpropagator S_F wählen. Praktischer ist es, die retardierte Greensche Funktion zu nehmen,

$$G_0(x, y) = S_{\text{ret}}(x - y) = \Theta(x^0 - y^0)S(x - y)$$

In diesem Fall stimmt das wechselwirkende Feld im Limes $t \rightarrow -\infty$ mit dem freien Feld ψ_0 überein, $\psi_{\text{ein}} = \psi_0$. Im Limes $t \rightarrow +\infty$ erhält man ein anderes freies Feld, das auslaufende freie Feld ψ_{aus} . Es gilt

$$\psi_{\text{ein}}S = S\psi_{\text{aus}} .$$

4. Elektrodynamik

Bisher haben wir relativistische Vielteilchensysteme betrachtet und gesehen, dass man sie als quantisierte Feldtheorien auffassen kann, sofern der richtige Zusammenhang zwischen Spin und Statistik und die Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie vorhanden sind. Wir wollen jetzt den umgekehrten Weg beschreiten und einer klassischen Feldtheorie, nämlich der Elektrodynamik, eine Quantenfeldtheorie zuordnen. Wir werden sehen, dass die Quantisierung direkt zu einer Teilcheninterpretation der Elektrodynamik führt, wie sie seit Planck und Einstein bekannt ist.

Die Maxwell-Gleichungen für das Magnetfeld \mathbf{B} und das elektrische Feld \mathbf{E} lauten in Abwesenheit von Ladungen

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad , \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \text{div } \mathbf{E} \quad , \quad \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Durch die Einführung des elektromagnetischen Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ kann man die Gleichungen in Lorentz-kovarianter Form schreiben: mit

$$\mathbf{E} = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) \quad , \quad \mathbf{B} = (F_{32}, F_{13}, F_{21}) \quad , \quad F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu} \quad ,$$

nehmen die Maxwell-Gleichungen die Form an

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 .$$

$F_{\mu\nu}$ erfüllt die Wellengleichung,

$$\begin{aligned} \square F_{\mu\nu} &= \partial^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} = -\partial^\rho (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}) \\ &= \partial_\mu \partial^\rho F_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho F_{\rho\mu} = 0 . \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Felder $F_{\mu\nu}$ als hermitesche (temperierte) operatorwertige Distributionen in einem Hilbertraum \mathfrak{H} auffassen. Die Maxwell-Gleichungen sollen gelten; weiter soll es eine Darstellung U der Poincaré-Gruppe in \mathfrak{H} geben mit

$$U(x, \Lambda)F_{\mu\nu}(y)U(x, \Lambda)^{-1} = F_{\rho\sigma}(\Lambda y + x)\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu$$

(Kovarianz), sodass die Energie positiv ist,

$$U(x) = e^{iPx} \text{ , } \text{sp } P \subset \overline{V_+} \text{ .}$$

(Spektrumsbedingung). Feldstärkemessungen an raumartig getrennten Punkten sollen kommensurabel sein,

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\rho\sigma}(y)] = 0 \text{ , } (x - y)^2 < 0 \text{ .}$$

(Lokalität). Schließlich fordern wir die Existenz eines (bis auf eine Phase) eindeutigen Poincaré-invarianten Einheitsvektors Ω (zur Beschreibung des Vakuums), und wir wollen annehmen, dass Ω für die Felder $F_{\mu\nu}$ zyklisch ist, d.h. die Vektoren

$$\sum \prod F(f_i)\Omega \text{ ,}$$

$F(f) = \frac{1}{2} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) f^{\mu\nu}(x)$, $f^{\mu\nu} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, sollen in \mathfrak{H} dicht liegen.

Wir betrachten zunächst die 2-Punkt-Funktion

$$W_{\mu\nu\sigma\tau}(x, y) = (\Omega, F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)\Omega) \text{ .}$$

Wegen der Translationsinvarianz von Ω und der Kovarianz von $F_{\mu\nu}$ hängt die 2-Punkt-Funktion nur von der Differenz $x - y$ ab, besitzt also eine Darstellung der Form

$$W_{\mu\nu\sigma\tau}(x, y) = \int d^4p e^{-ip(x-y)} \rho_{\mu\nu\sigma\tau}(p)$$

mit temperierten Distributionen $\rho_{\mu\nu\sigma\tau}$. Wegen der Spektrumsbedingung hat ρ Träger in $\overline{V_+}$. Da $F_{\mu\nu}$ Lösung der Maxwell-Gleichungen ist, gilt

$$p^2 \rho_{\mu\nu\sigma\tau}(p) = 0 \text{ .}$$

Daher ist ρ von der Form

$$\rho_{\mu\nu\sigma\tau}(p) = P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)\delta(p^2)\Theta(p_0) \text{ ,}$$

wobei P eine Funktion auf ∂V_+ ist, die sich kovariant unter Lorentztransformationen transformiert. Die einzigen derartigen Funktionen sind Linearkombinationen von $p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau$, $g_{\mu\nu} p_\sigma p_\tau$, $g_{\mu\nu} g_{\sigma\tau}$ und der daraus durch Vertauschung der Indizes gewonnenen Funktionen. Wegen der Antisymmetrie in den Indizes können die vierfachen Produkte von Impulsen nicht auftauchen. Die Maxwell-Gleichung $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ schließt auch die impulsunabhängigen Terme aus. Daher gilt

$$P_{\mu\nu\sigma\tau} = -c(g_{\mu\sigma} p_\nu p_\tau - g_{\nu\sigma} p_\mu p_\tau - g_{\mu\tau} p_\nu p_\sigma + g_{\nu\tau} p_\mu p_\sigma)$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

Damit ergibt sich die 2-Punkt-Funktion zu

$$W_{\mu\nu\sigma\tau}(x, y) = c(2\pi)^3 (g_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\tau - g_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\tau - g_{\mu\tau}\partial_\nu\partial_\sigma + g_{\nu\tau}\partial_\mu\partial_\sigma) D_+(x - y)$$

mit der masselosen Propagatorfunktion

$$D_+(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} e^{-ipx} = \Delta_+(x, m = 0) .$$

D_+ kann explizit berechnet werden: Sei f eine Testfunktion aus dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. D_+ ist als Distribution definiert durch

$$\int d^4x D_+(x) f(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \int d^4x f(x) e^{-ipx} .$$

Wir können die Winkelintegration über \mathbf{p} mit der x -Integration vertauschen und erhalten

$$(2\pi)^{-2} \int_0^\infty dp \int d^4x f(x) \frac{e^{-ip(t-r)} - e^{-ip(t+r)}}{2ir}$$

mit $x = (t, \mathbf{x})$ und $r = |\mathbf{x}|$. Wir ersetzen jetzt t durch $t - i\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir das ursprüngliche Integral zurück. Für $\varepsilon > 0$ aber können wir die Integration über p mit der x -Integration vertauschen und erhalten

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d^4x f(x) \frac{-1}{4\pi^2((t - i\varepsilon)^2 - r^2)},$$

also

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{-1}{4\pi^2((t - i\varepsilon)^2 - r^2)} \\ &= \frac{-1}{4\pi^2 x^2} \text{ für } x^2 \neq 0 . \end{aligned}$$

Man erkennt explizit, dass D_+ Randwert einer analytischen Funktion in der Röhre $\mathcal{T}_+ = \mathbb{R}^4 - iV_+$ ist.

Wir betrachten jetzt den folgenden Unterraum \mathfrak{H}_1 von \mathfrak{H} ,

$$\mathfrak{H}_1 = \{F(f)\Omega, f^{\mu\nu} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4), f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}\} .$$

Auf diesem Raum ist das Skalarprodukt durch die 2-Punktfunction bestimmt,

$$\begin{aligned} \|F(f)\Omega\|^2 &= \frac{1}{4} \int d^8(x, y) \overline{f^{\mu\nu}(x)} f^{\sigma\tau}(y) W_{\mu\nu\sigma\tau}(x - y) = \\ &= c \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} g_{\mu\tau} p_\nu p_\sigma (2\pi)^4 \overline{\hat{f}^{\mu\nu}(-p)} \hat{f}^{\sigma\tau}(-p) . \end{aligned}$$

Wir setzen $\hat{f}^\mu(p) = (2\pi)^2 p_\nu \hat{f}^{\mu\nu}(-p)$ und finden

$$\|F(f)\Omega\|^2 = -c \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \overline{\hat{f}^\mu(p)} \hat{f}_\mu(p) . \quad (\text{III.1})$$

Wegen der Antisymmetrie von $f^{\mu\nu}$ erfüllt \hat{f}^μ die Bedingung $p_\mu \hat{f}^\mu(p) = 0$. Auf dem Raum \mathcal{V} dieser Funktionen wird durch Gleichung (III.1) ein positiv semidefinites Skalarprodukt erklärt. Der Einteilchenraum \mathfrak{H}_1 ist die Vervollständigung des Quotientenraums von \mathcal{V} nach dem Nullraum.

Nach der Quotientenbildung besitzt \hat{f}^μ nur zwei unabhängige Komponenten. Sei z.B. $p = (|p|, 0, 0, |p|)$. Dann ist $\hat{f}^0(p) = \hat{f}^3(p)$ und

$$\overline{\hat{f}_\mu(p)} \hat{f}^\mu(p) = -|\hat{f}_1(p)|^2 - |\hat{f}_2(p)|^2 .$$

\mathfrak{H}_1 ist wegen der Kovarianz von $F_{\mu\nu}$ und der Invarianz von Ω invariant unter Poincaré-Transformationen. Es gilt

$$U(x, \Lambda) F(f) \Omega = F(f_{(x, \Lambda)}) \Omega$$

mit

$$f_{(x, \Lambda)}^{\mu\nu}(y) = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau f^{\sigma\tau}(\Lambda^{-1}(y - x)) .$$

Auf dem Vektorraum \mathcal{V} erhält man die Darstellung

$$(D(x, \Lambda) \hat{f})^\mu(p) = e^{ipx} \Lambda^\mu{}_\nu \hat{f}^\nu(p\Lambda) .$$

Da das Skalarprodukt (III.1) invariant unter Poincaré-Transformationen ist, induziert D auf dem Quotientenraum eine unitäre Darstellung, die natürlich mit der Darstellung U auf dem Raum \mathfrak{H}_1 übereinstimmt.

Wir überzeugen uns jetzt davon, dass diese Darstellung eine direkte Summe der Darstellungen mit Helizität ± 1 ist. Dazu betrachten wir die Darstellung d der kleinen Gruppe G_q des Impulses $q = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ auf dem Raum

$$V = \{b \in \mathbb{C}^4, b^\mu q_\mu = 0\} .$$

Es gilt

$$(d(\Lambda)b)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu b^\nu, \quad \Lambda \in G_q .$$

V besitzt das invariante positiv semidefinite Skalarprodukt

$$(b, b) = -b_\mu b^\mu$$

mit dem Nullraum

$$N = \{\lambda \hat{q}, \lambda \in \mathbb{C}\} ,$$

wobei \hat{q} den zum Kovektor q gehörigen Vektor bezeichnet, $\hat{q}^\mu = q^\mu$. d induziert daher auf dem 2-dimensionalen Raum V/N eine unitäre Darstellung.

Nach Kapitel 2 ist G_q isomorph zur euklidischen Gruppe in 2 Dimensionen. Deren endlich dimensionale Darstellungen sind trivial auf den Translationen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^2 ; die Rotationen entsprechen den Rotationen der 1-2-Ebene in der Lorentzgruppe und wirken auf V in der natürlichen Weise durch Rotation der 1- und 2-Komponenten von b . Eigenvektoren dieser Rotationen sind

$$e_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0) .$$

Die 1-dimensionalen Unterräume $\{\lambda e_{\pm} + N, \lambda \in \mathbb{C}\}$ von V/N sind invariant unter G_q . Dies folgt aus

$$d(\mathbf{a}, R)(\lambda \hat{q} + \mathbf{b}) = (\lambda + (\mathbf{a}, R\mathbf{b}))\hat{q} + R\mathbf{b}$$

mit den Spaltenvektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ und dem natürlichen Skalarprodukt in \mathbb{C}^2 .

Sei Λ_p eine Lorentz-Transformation mit der Eigenschaft

$$p = q\Lambda_p$$

Man kann z.B. $\Lambda_p = \Lambda(B_p)$ wählen mit den Bezeichnungen aus Kapitel II. Es gibt allerdings keine Wahl, sodass Λ_p eine glatte Funktion von p wird.

Wir setzen jetzt $e_{\pm}(p) = \Lambda_p^{-1}e_{\pm}$. Dann gilt

$$\Lambda e_{\pm}(p) = \Lambda \Lambda_p^{-1}e_{\pm} = h(p, \Lambda)^{\pm 1}e_{\pm}(p\Lambda^{-1}) + \lambda p \widehat{\Lambda^{-1}}$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$. Hierbei ist $h(p, \Lambda)$ die Wignerphase, d.h. der Wert von $\Lambda_p \Lambda^{-1}$ in der 1-dimensionalen Darstellung von G_q auf dem von e_+ erzeugten Teilraum von V/N .

Wir führen nun Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu Impuls p und Helizität $\lambda = \pm 1$ mit den Vertauschungsrelationen

$$[a_{\lambda}(p), a_{\lambda'}(p')] = 0 = [a_{\lambda}^*(p), a_{\lambda'}^*(p')]$$

und

$$[a_{\lambda}(p), a_{\lambda'}^*(p')] = 2|\mathbf{p}|\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

ein. Auf dem entsprechenden Fockraum definieren wir Felder mit

$$F_{\mu\nu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \sum_{\lambda} (e_{\mu\nu}(p, \lambda)a_{\lambda}(p)e^{-ipx} + \overline{e_{\mu\nu}(p, \lambda)}a_{\lambda}^*(p)e^{ipx})$$

mit

$$e_{\mu\nu}(p, \lambda) = -i(p_{\mu}e_{\lambda,\nu}(p) - p_{\nu}e_{\lambda,\mu}(p)) .$$

Man verifiziert jetzt leicht, dass diese Felder die geforderten Kovarianzbedingungen erfüllen und eine 2-Punktfunktion der gewünschten Form besitzen, mit $c = (2\pi)^{-3}$. Wir überzeugen uns davon, dass dieser Wert von c durch das Korrespondenzprinzip bestimmt wird.

Der Hamiltonoperator für freie Photonen ist nämlich

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} |\mathbf{p}| \sum_{\lambda} a_{\lambda}^*(p)a_{\lambda}(p) .$$

Für den oben angegebenen Wert von c ist dies gleich dem räumlichen Integral über die normal geordnete Energiedichte,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (: \mathbf{E}(0, \mathbf{x})^2 : + : \mathbf{B}(0, \mathbf{x})^2 :) .$$

Damit haben wir eine Lösung des gestellten Problems gefunden. Man kann zeigen (Jost-Schroer-Pohlmeyer-Theorem), dass die gefundene Lösung eindeutig ist. Hierbei geht das Lokalitätspostulat ein, das für die Zweipunktfunktion automatisch erfüllt ist.

Das Feld $F_{\mu\nu}$ erfüllt die Vertauschungsregeln

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\tau}(y)] = -(g_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\tau - g_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\tau - g_{\mu\tau}\partial_\nu\partial_\sigma + g_{\nu\tau}\partial_\mu\partial_\sigma)iD(x-y)$$

mit der masselosen Kommutatorfunktion des skalaren Feldes

$$D(x) = -i(D_+(x) - D_+(-x)) = -\frac{1}{2\pi} \text{sign}(x^0)\delta(x^2) .$$

Als einfaches Beispiel für eine Wechselwirkung können wir die Kopplung an einen klassischen erhaltenen Strom j_μ behandeln. Die Feldgleichung für das wechselwirkende Feld lautet

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu .$$

Sei $F_{\mu\nu}^0$ das freie Maxwell-Feld. Wir betrachten die klassische retardierte Lösung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen,

$$f_{\mu\nu}(x) = - \int d^4y (\partial_\mu D_{\text{ret}} j_\nu(x) - \partial_\nu D_{\text{ret}} j_\mu(x)) ,$$

mit $D_{\text{ret}}(x) = \Theta(x^0)D(x)$. Dann ist

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^0(x) + f_{\mu\nu}(x)$$

eine Lösung der Feldgleichung mit dem asymptotischen Verhalten

$$F_{\mu\nu}^{\text{ein}} = F_{\mu\nu}^0 , F_{\mu\nu}^{\text{aus}} = F_{\mu\nu}^0 + f_{\mu\nu}^{\text{aus}} .$$

Hierbei ist $f_{\mu\nu}^{\text{aus}}$ die von dem klassischen Strom asymptotisch erzeugte freie elektromagnetische Welle,

$$f_{\mu\nu}^{\text{aus}} = - \int d^4y (\partial_\mu D(x-y)j_\nu(y) - \partial_\nu D(x-y)j_\mu(y)) .$$

Die S-Matrix ergibt sich bis auf einen Phasenfaktor aus der Beziehung

$$F_{\mu\nu}^{\text{ein}} S = S F_{\mu\nu}^{\text{aus}}$$

zu

$$S = e^{i\alpha} e^{-ia(\hat{f})^*} e^{-ia(\hat{f})}$$

mit $\hat{f}_\mu(p) = \hat{j}_\mu(p)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. α berechnet sich zu

$$\alpha = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j_\mu(x) j_\nu(y) D_F^{\mu\nu}(x-y)$$

mit dem Feynmanpropagator $D_F^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} D_F$, $D_F = \Delta_F(m=0)$. Der masselose skalare Feynman-Propagator ist explizit gegeben durch

$$D_F(x) = \Theta(x^0)D_+(x) + \Theta(-x^0)D_+(-x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{-1}{4\pi^2(x^2 - i\varepsilon)} .$$

Als Beispiel für einen klassischen erhaltenen Strom wählen wir den Strom, der mit der Bewegung eines klassischen Punktteilchens verbunden ist. Sei $x(\tau)$ die Weltlinie des Teilchens. Sie ist zeitartig ($\dot{x}^2 > 0$) und zukunftsgerichtet ($\dot{x}^0 > 0$). Der Strom ist dann

$$j^\mu(y) = e \int d\tau \dot{x}^\mu \delta(y - x(\tau)) .$$

Die Fourier-Transformierte ergibt sich zu

$$\hat{j}^\mu(p) = (2\pi)^{-2} e \int d\tau \dot{x}^\mu(\tau) e^{-ipx(\tau)} .$$

Sei jetzt τ die Eigenzeit des Teilchens und sei $\ddot{x} = 0$ außerhalb eines endlichen Intervalls $[\tau_1, \tau_2]$. Sei $u_1 = \dot{x}(\tau)$ für $\tau < \tau_1$ und $u_2 = \dot{x}(\tau)$ für $\tau > \tau_2$. Für jeden Impuls $p \neq 0$, $p \in \partial V_+$ ist $px > 0$. Für diese Impulse folgt

$$\hat{j}^\mu(p) = (2\pi)^{-2} e \left(\frac{u_1^\mu}{ipu_1} e^{ipx(\tau_1)} - \frac{u_2^\mu}{ipu_2} e^{ipx(\tau_2)} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{x}^\mu(\tau) e^{-ipx(\tau)} \right)$$

Die mittlere Photonenzahl im Zustand $S\Omega$ ist

$$\langle N \rangle = (S\Omega, NS\Omega) = - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \overline{\hat{j}^\mu(p)} \hat{j}_\mu(p) .$$

Es gilt

$$\langle N \rangle < \infty \iff u_1 = u_2 .$$

Im Fall $\langle N \rangle = \infty$ ist S nicht mehr als Operator im Fockraum erklärbar, und es gibt keinen Vektor Φ im Fockraum, der die Rolle von $S\Omega$ spielt, d.h. der die Gleichung

$$(\Phi, e^{iF^0(f)} \Phi) = (\Omega, e^{iF^{\text{aus}}(f)} \Omega)$$

erfüllt. Die Erwartungswerte in diesem Zustand sind jedoch durch die rechte Seite wohldefiniert. Z.B ergibt sich für die Zahl der abgestrahlten Photonen mit Energie $> \varepsilon$

$$\langle N_\varepsilon \rangle = - \int_{|\mathbf{p}| > \varepsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \overline{\hat{j}^\mu(p)} \hat{j}_\mu(p) < \infty .$$

Eine überraschende Konsequenz der Vakuum-Fluktuationen des elektromagnetischen Feldes ist der sogenannte Casimir-Effekt. Casimir ging davon aus, dass auch die fluktuierenden Felder im Vakuum durch Leiter abgeschirmt werden können. Hierdurch sollte sich die mittlere Feldenergie ändern; sichtbar werden sollte dies durch zusätzliche Kräfte auf die Leiter.

Wir betrachten die 2-Punkt-Funktion des elektromagnetischen Feldes in Anwesenheit zweier leitender Ebenen bei $x^3 = 0$ und $x^3 = a$. Auf den Ebenen sollen das tangential elektrische Feld und die Normalkomponente des Magnetfeldes verschwinden,

$$F_{01} = F_{02} = F_{12} = 0 \text{ für } x^3 = 0, a .$$

Aufgrund der Maxwellgleichung $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ müssen dann die Normalableitungen der anderen Feldkomponenten auf den leitenden Ebenen verschwinden,

$$\partial_3 F_{03} = \partial_3 F_{13} = \partial_3 F_{23} = 0 \text{ für } x^3 = 0, a .$$

Die Zweipunktfunktionen der Komponenten des elektromagnetischen Feldes zwischen den beiden Ebenen lassen sich mit Hilfe des aus der klassischen Elektrodynamik bekannten Spiegelungsprinzips finden. Sei G die Gruppe, die von den Spiegelungen an den beiden Ebenen erzeugt wird, und sei $\text{sign}(S) = (-1)^n$ wenn $S \in G$ Produkt von n Spiegelungen ist. Dann gilt

$$\langle F_{01}(x)F_{01}(y) \rangle = (-\partial_0^2 + \partial_1^2) \sum_{S \in G} \text{sign}(S) D_+(x - Sy)$$

$$\langle F_{02}(x)F_{02}(y) \rangle = (-\partial_0^2 + \partial_2^2) \sum_{S \in G} \text{sign}(S) D_+(x - Sy)$$

$$\langle F_{12}(x)F_{12}(y) \rangle = (-\partial_1^2 - \partial_2^2) \sum_{S \in G} \text{sign}(S) D_+(x - Sy)$$

$$\langle F_{03}(x)F_{03}(y) \rangle = (-\partial_0^2 + \partial_3^2) \sum_{S \in G} D_+(x - Sy)$$

$$\langle F_{13}(x)F_{13}(y) \rangle = (-\partial_1^2 - \partial_3^2) \sum_{S \in G} D_+(x - Sy)$$

$$\langle F_{23}(x)F_{23}(y) \rangle = (-\partial_2^2 - \partial_3^2) \sum_{S \in G} D_+(x - Sy)$$

Wir eliminieren die Ableitungen nach der 3-Komponente, indem wir ausnutzen, dass D_+ eine Lösung der Wellengleichung ist. Normalordnung bedeutet Subtraktion des Vakuumerwartungswerts, d.h. des Beitrags des Einheitselements von G zu den obigen Summen. Bei der Berechnung des Erwartungswertes der Energiedichte kompensieren sich die Beiträge der ungeraden Elemente von G . Die geraden Elemente von G sind die Translationen um Vielfache von $2a$ in 3-Richtung. Wir erhalten für den Erwartungswert der Energiedichte $h(x)$ den Ausdruck

$$\langle h(x) \rangle = -4 \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_0^2 D_+)(2nae_3)$$

mit dem Einheitsvektor e_3 in 3-Richtung. Einsetzen des Ausdrucks für D_+ und Berechnung der Ableitung ergibt

$$(\partial_0^2 D_+)(2nae_3) = \frac{1}{2^5 \pi^2 a^4 n^4} .$$

Mit der Summenformel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \equiv \zeta(4)$$

(diese Formel kann z.B. mit Hilfe der Fourierreihe von x^4 auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ abgeleitet werden) erhalten wir schließlich als Ergebnis

$$\langle h(x) \rangle = -\frac{\pi^2}{720a^4}.$$

für einen Punkt zwischen den beiden leitenden Ebenen. Außerhalb der Ebenen verschwindet der Erwartungswert der Energiedichte. Der Druck im Inneren ergibt sich zu

$$p = -\frac{\pi^2}{240a^4}.$$

Die beiden Platten ziehen sich also an.

KAPITEL IV

Wechselwirkungen

Wir haben in den ersten 3 Kapiteln den Fockraum, die relativistischen Wellengleichungen und die freien Felder kennen gelernt. Wir haben auch bereits gesehen, wie man ausgehend von den freien Feldern wechselwirkende Theorien konstruieren kann. Insbesondere haben wir die S-Matrix für eine raumzeitlich beschränkte Wechselwirkung eingeführt, haben die zeitgeordneten Produkte als die Taylorkoeffizienten der S-Matrix studiert und ihre kombinatorische Beschreibung durch Feynman-Graphen betrachtet. In diesem Kapitel wollen wir wechselwirkende Theorien von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus untersuchen. Zunächst wollen wir die Wirkungsquerschnitte aus der S-Matrix berechnen. Danach werden die LSZ-Relationen besprochen, die den Zusammenhang zwischen S-Matrix-Elementen und zeitgeordneten Funktionen für wechselwirkende Theorien herstellen. Die Herleitung der LSZ-Relationen aus den Axiomen der allgemeinen Quantenfeldtheorie wird im 6. Kapitel erfolgen. In Kapitel IV sollen noch zwei allgemeine Quantisierungsmethoden behandelt werden: die kanonische Quantisierung, die auf der kanonischen Formulierung der klassischen Feldtheorie aufbaut, und die Methode der Pfadintegrale.

1. S-Matrix und Wirkungsquerschnitte

Auch in einer wechselwirkenden Theorie erwartet man, dass jeder Zustand zu asymptotischen Zeiten wie ein Zustand nicht wechselwirkender Teilchen aussieht. Diese Vermutung kann man in der folgenden Weise präzisieren: Sei \mathfrak{H} der Hilbertraum der Zustände der wechselwirkenden Theorie. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Theorie nur ein einziges Teilchen beschreibt, das Spin 0 und Masse $m > 0$ hat. Sei \mathfrak{H}_0 der zugehörige Fockraum. Dann soll es unitäre Operatoren

$$W_{\pm} : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}$$

geben, so dass die Vektoren $W_{\pm}\Phi$ zu Zeiten $t \rightarrow \pm\infty$ als Mehrteilchenzustände Φ interpretiert werden können. Die Abbildung

$$S = W_+^{-1}W_-$$

nennt man die S-Matrix. Wenn die Wechselwirkung Poincaré-invariant ist, so vertauscht S mit den Poincaré-Transformationen. Man hat versucht, Quantenfeldtheorie allein durch die S-Matrix zu beschreiben. Bei diesem Ansatz charakterisiert man die S-Matrix durch eine Reihe von

Eigenschaften, die die S-Matrix einer lokalen Quantenfeldtheorie besitzen sollte. Im allgemeinen reicht diese Charakterisierung nicht aus, um die S-Matrix fest zu legen. Fordert man aber, dass die Vielteilchenstreuung sich als eine Aufeinanderfolge von Zweiteilchenstreuungen auffassen lässt (faktorisierende S-Matrizen), so erhält man in zwei Raumzeitdimensionen interessante Lösungen. In höheren Dimensionen gibt es allerdings nur die triviale Lösung.

In Experimenten wird in der Regel nicht direkt die S-Matrix bestimmt, sondern es werden die Wirkungsquerschnitte gemessen. Der Grund ist, dass bei einem Streuversuch der Stoßparameter eines Zweiteilchensystems im allgemeinen nicht genügend genau fest gelegt werden kann. Daher ist der einlaufende Zustand ein Gemisch über transversal zur Bewegungsrichtung verschobene Zustände. Sei $\Phi = a(f)^* a(g)^* \Omega$ ein einlaufender Zweiteilchenzustand mit normierten Einteilchenwellenfunktionen f und g , die disjunkten Träger haben. Sei β eine raumartige Ebene im Minkowskiraum, die die von Paaren $p \in \text{supp } f$ und $q \in \text{supp } g$ aufgespannten Ebenen nur im Ursprung schneidet. Dann ist die Dichtematrix des einlaufenden Zustands von der Form

$$\rho = \int_{\beta} d^2b \mu(b) |\Phi_b\rangle \langle \Phi_b|$$

mit $\Phi_b = a(U(b)f)^* a(g)^* \Omega$ und $\mu(b) \geq 0$, $\int_{\beta} d^2b \mu(b) = 1$.

Sei nun A eine translationsinvariante positive Observable, die auf den einlaufenden Zustand nicht anspricht,

$$\text{Tr } \rho A = 0 .$$

Dann werden die Erwartungswerte von A in den auslaufenden Zuständen $S\Phi_b$ schnell in b abfallen. Ist $\mu(b)$ im relevanten Bereich konstant, so bietet es sich an, die Normierungsbedingung an den einlaufenden Zustand aufzugeben und stattdessen den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{f,g,\beta}(A) = \int_{\beta} d^2b (S\Phi_b, AS\Phi_b)$$

einzuführen.

Wir definieren jetzt die T-Matrix durch $S = 1 + iT$. Dann gilt wegen $A\Phi_b = 0$

$$\sigma_{f,g,\beta}(A) = \int_{\beta} d^2b (\Phi_b, T^* A T \Phi_b) .$$

T und A sind nach Voraussetzung translationsinvariant. Daher sind die Matrixelemente von $T^* A T$ im Zweiteilchenraum von der Form

$$(a^*(p) a^*(q) \Omega, T^* A T a^*(p') a^*(q') \Omega) = \delta(p + q - p' - q') A_T(p, q, p', q') .$$

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts liefert die Integration über den Stoßparameter b einen zusätzlichen Faktor

$$(2\pi)^2 \delta((p - p')e_1) \delta((p - p')e_2)$$

mit einer Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von β . Wir schließen, dass die Wirkungsquerschnitte diagonal in den Impulsen sind,

$$\sigma_{f,g,\beta}(A) = (2\pi)^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{d^3\mathbf{q}}{2\omega(\mathbf{q})} |f(p)|^2 |g(q)|^2 A_T(p, q, p, q) \left| \det \frac{\partial \alpha}{\partial (p, q)} \right|^{-1}.$$

Hierbei ist α für vorgegebenes $p, q \in H_m^+$ durch

$$\alpha(p', q') = ((p')^2 - m^2, (q')^2 - m^2, p' + q' - p - q, (p' - p)e_1, (p' - p)e_2)$$

definiert. Die Funktionaldeterminante von α an der Stelle $(p', q') = (p, q)$ ist $|\det(2p, 2q, e_1, e_2)|$. Für $\beta \perp p, q$ gilt

$$|\det(2p, 2q, e_1, e_2)| = 4\sqrt{(pq)^2 - m^4}.$$

Diesen Ausdruck nennt man den Flussfaktor.

Betrachten wir als Beispiel

$$A = |a^*(p_1) \dots a^*(p_n)\Omega\rangle \langle a^*(p_1) \dots a^*(p_n)\Omega|,$$

sodass die Impulse p, q, p_1, \dots, p_n , $p \in \text{supp } f, q \in \text{supp } g$, paarweise verschieden sind. A misst die Wahrscheinlichkeitsdichte für n Impulse,

$$(\Psi, A\Psi) = n! |\Psi_n(p_1, \dots, p_n)|^2.$$

Wir wählen einen einlaufenden Zustand mit scharfen Impulsen p und q und wählen die Ebene β senkrecht zu p und q . Da T translationsinvariant ist, sind seine Matrixelemente zwischen 2-Teilchen- und n -Teilchenzuständen von der Form

$$\begin{aligned} & (a^*(p_1) \dots a^*(p_n)\Omega, T a^*(p) a^*(q)\Omega) \\ &= \delta(p + q - \sum p_i) \mathcal{T}(p_1, \dots, p_n; p, q). \end{aligned}$$

mit der Streuamplitude \mathcal{T} . Daher ist

$$A_T(p, q, p, q) = \delta(p + q - \sum p_i) |\mathcal{T}(p_1, \dots, p_n; p, q)|^2.$$

Wir finden schließlich für den Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} & \sigma_{p,q \rightarrow p_1, \dots, p_n} \\ &= (2\pi)^2 (4\sqrt{(pq)^2 - m^4})^{-1} \delta(p + q - \sum p_i) |\mathcal{T}(p_1, \dots, p_n; p, q)|^2. \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir die S-Matrix zur Wechselwirkungs-Lagrangedichte $\frac{g}{n!} : \varphi^n :$ zur ersten Ordnung. Man findet

$$T = \frac{g}{n!} \int d^4x : \varphi^n(x) :$$

und damit für die Streuamplitude

$$\begin{aligned} & \delta(p + q - \sum p_i) \mathcal{T}(p_1, \dots, p_{n-2}; p, q) \\ &= \frac{g}{n!} \int d^4x \binom{n}{2} (a^*(p_1) \dots a^*(p_{n-2})\Omega, (a^*)^{n-2}(x) a(x)^2 a^*(p) a^*(q)\Omega) \\ &= g(2\pi)^{-3n/2} \int d^4x e^{-i(p+q-\sum p_i)x} \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{T}(p_1, \dots, p_{n-2}; p, q) = (2\pi)^{4-\frac{3n}{2}} g$$

Für den Wirkungsquerschnitt findet man

$$\sigma_{p,q \rightarrow p_1, \dots, p_{n-2}} = (2\pi)^{10-3n} g^2 (4\sqrt{(pq)^2 - m^4})^{-1} \delta(p + q - \sum p_i) .$$

Interessant ist das Verhalten des totalen Wirkungsquerschnitts

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{(n-2)!} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2\omega(\mathbf{p}_1)} \cdots \frac{d^3 \mathbf{p}_{n-2}}{2\omega(\mathbf{p}_{n-2})} \sigma_{p,q \rightarrow p_1, \dots, p_{n-2}} .$$

Er ist offenbar nur von der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} , $s = (p + q)^2$ abhängig. Für Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \gg (n-2)m$ weit oberhalb der Schwelle für Teilchenerzeugung verhält er sich wie s^{n-5} .

2. Die LSZ-Relationen

In einer translationsinvarianten Theorie kann die S-Matrix nicht direkt in der Form

$$S = T e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4 x}$$

geschrieben werden. Stattdessen kann man die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte mit einer Testfunktion g multiplizieren und die lokalen S-Matrizen

$$S(g) = T e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}} g d^4 x}$$

introduzieren. Anschließend kann man den adiabatischen Limes

$$S = \lim_{g \rightarrow 1} S(g)$$

betrachten. Bei dieser Definition bleibt aber offen, welche Eigenschaften der wechselwirkenden Theorie durch die S-Matrix beschrieben werden.

Lehmann, Symanzik und Zimmermann (LSZ) ist es 1954 gelungen, einen eleganten Ausdruck für die S-Matrix zu finden, der völlig im Rahmen der wechselwirkenden Theorie erklärt ist.

Ausgangspunkt ist (im einfachsten Fall) ein skalares Feld φ , das als operatorwertige Distribution in einem Hilbertraum \mathfrak{H} definiert ist, zusammen mit einer unitären, stark stetigen Darstellung U der Poincaré-Gruppe, die die Spektrumsbedingung erfüllt. Weiter soll es einen eindeutigen (bis auf eine Phase) Poincaré-invarianten Einheitsvektor geben. Das skalare Feld soll sich kovariant unter der Poincaré-Gruppe transformieren,

$$U(x, \Lambda) \varphi(y) U(x, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda y + x) .$$

Man nimmt jetzt an, dass es einen Teilraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ gibt, der zu der irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe mit Masse $m > 0$ und Spin $s = 0$ gehört, und dass es keine weiteren Zustände in \mathfrak{H} gibt, deren Massenspektrum m enthält. Unter diesen Voraussetzungen kann man mit Mitteln der Haag-Ruelle-Streutheorie zeigen, dass es isometrische Abbildungen W_{\pm} vom Fockraum \mathfrak{H}_0 nach \mathfrak{H} gibt, die die jeweiligen Darstellungen der Poincaré-Gruppe verketten.

Wir verlangen zusätzlich, dass das wechselwirkende Feld φ nichtverschwindende Matrixelemente zwischen Vakuum und Einteilchenraum besitzt. Wegen der Poincaré-Kovarianz sind diese von der Form

$$\langle p|\varphi(x)\Omega\rangle = (2\pi)^{-3/2}\sqrt{Z}e^{ipx}$$

mit einer Konstante $Z \neq 0$. Z nennt man die Wellenfunktionsrenormierung. Durch Umnormierung des Feldes kann sie gleich 1 gesetzt werden.

Man definiert jetzt freie Felder im Hilbertraum der wechselwirkenden Theorie durch

$$W_{\pm}\varphi_0(x) = \varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(x)W_{\pm} ,$$

wobei φ_0 das freie Feld im Fockraum ist. Das wechselwirkende Feld strebt im folgende Sinn gegen das auslaufende ($t \rightarrow \infty$) beziehungsweise das einlaufende ($t \rightarrow -\infty$) Feld: Es gilt die LSZ-Asymptoten-Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (W_+\Phi, (\varphi(t, \mathbf{x}) - \varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(t, \mathbf{x}))W_-\Psi) = 0 .$$

Hierbei sind Φ und Ψ aus dem dichten Unterraum mit endlicher Teilchenzahl, glatten Impulsraumwellenfunktionen mit kompaktem Träger und nicht zusammenfallenden Impulsen.

Sei nun f eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, deren Cauchy-Daten kompakten Träger besitzen. Dann ist

$$\varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(f) = \int d^3\mathbf{x} (\dot{\varphi}_{\text{ein}}^{\text{aus}}(t, \mathbf{x})f(t, \mathbf{x}) - \varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(t, \mathbf{x})\dot{f}(t, \mathbf{x}))$$

unabhängig von t . Ersetzt man die freien Felder durch das wechselwirkende Feld, so erhält man einen zeitabhängigen Ausdruck, der für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen $\varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}$ strebt. Da φ nach Voraussetzung eine operatorwertige Distribution auf dem Minkowskiraum ist, ist nicht sicher, dass das Integral über den Raum zu einer scharfen Zeit existiert. Wir mitteln daher mit einer Testfunktion $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int dt h(t) = 1$ über die Zeit,

$$\varphi_t(f, h) = \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} (\dot{\varphi}(t+\tau, \mathbf{x})f(t+\tau, \mathbf{x}) - \varphi(t+\tau, \mathbf{x})\dot{f}(t+\tau, \mathbf{x}))$$

und finden

$$\begin{aligned} & (W_+\Phi, (\varphi_{\text{aus}}(f) - \varphi_{\text{ein}}(f))W_-\Psi) \\ &= \int dt \frac{d}{dt} (W_+\Phi, \varphi_t(f, h)W_-\Psi) . \end{aligned}$$

Wir nutzen aus, dass f eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_t(f, h) &= \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} (\dot{\varphi}(t + \tau, \mathbf{x})f(t + \tau, \mathbf{x}) - \varphi(t + \tau, \mathbf{x})\ddot{f}(t + \tau, \mathbf{x})) \\ &= \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} (\dot{\varphi}(t + \tau, \mathbf{x})f(t + \tau, \mathbf{x}) - \varphi(t + \tau, \mathbf{x})(\Delta - m^2)f(t + \tau, \mathbf{x})) \\ &= \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} ((\square + m^2)\varphi(t + \tau, \mathbf{x}))f(t + \tau, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &(W_+\Phi, (\varphi_{\text{aus}}(f) - \varphi_{\text{ein}}(f)W_-\Psi)) \\ &= \int d^4x f(x)(\square + m^2)(W_+\Phi, \varphi(x)W_-\Psi) . \end{aligned}$$

Wir führen jetzt zeitgeordnete Produkte des Feldes φ ein. Dies sind symmetrische operatorwertige Distributionen in mehreren Argumenten, die für zeitgeordnete Argumente mit dem Operatorprodukt übereinstimmen. Sie sind in der Regel nicht eindeutig; dies spielt aber im folgenden keine Rolle. Wir benutzen für zwei Funktionen f, g die Notation

$$\overleftrightarrow{f\partial_t g} = (\partial_t f)g - f\partial_t g .$$

Seien jetzt f_1, \dots, f_n Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung mit kompakt getragenen Cauchy-Daten. Wir setzen

$$\begin{aligned} &T(t_1, \dots, t_n) \\ &= \int d^{4n}x T(\varphi(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1) \cdots \varphi(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n) \overleftrightarrow{\partial_{t_1}} \cdots \overleftrightarrow{\partial_{t_n}} \\ &f_1(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1)h(x_1^0) \cdots f_n(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n)h(x_n^0) . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n}{\partial_{t_1} \cdots \partial_{t_n}} T(t_1, \dots, t_n) \\ &= \int d^{4n}x h(x_1^0)f_1(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1) \cdots h(x_n^0)f_n(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n) \\ &(\square_1 + m^2) \cdots (\square_n + m^2) T\varphi(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1) \cdots \varphi(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n) , \end{aligned}$$

und für $t_{\pi(1)} + \text{supp } h > \cdots > t_{\pi(n)} + \text{supp } h$ erhalten wir

$$T(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{t_{\pi(1)}}(f_{\pi(1)}, h) \cdots \varphi_{t_{\pi(n)}}(f_{\pi(n)}, h) .$$

Aus der Haag-Ruelle-Theorie folgt für Wellenfunktionen f_i mit nichtüberlappenden Geschwindigkeiten

$$\lim_{t_1, \dots, t_k \rightarrow \infty, t_{k+1}, \dots, t_n \rightarrow -\infty} (\Omega, T(t_1, \dots, t_n)\Omega) = \left(\prod_{i=1}^k \varphi_{\text{aus}}(f_i)^* \Omega, \prod_{j=k+1}^n \varphi_{\text{ein}}(f_j)\Omega \right) .$$

Seien f_1, \dots, f_k Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung mit negativer Energie, und seien f_{k+1}, \dots, f_n Lösungen mit positiver Energie. Dann folgen die LSZ-Relationen

$$\begin{aligned} & \int d^{4n}x f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) (\square_1 + m^2) \cdots (\square_n + m^2) (\Omega, T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega) \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \varphi_{\text{aus}}(f_i)^* \Omega, \prod_{j=k+1}^n \varphi_{\text{ein}}(f_j) \Omega \right) . \end{aligned}$$

Fouriertransformation ergibt

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m^2) \hat{t}_n(-p_1, \dots, -p_k, p_{k+1}, \dots, p_n) \upharpoonright_{(H_m^+)^n} \\ &= N \left(\prod_{i=1}^k a_{\text{aus}}^*(p_i) \Omega, \prod_{j=k+1}^n a_{\text{ein}}^*(p_j) \Omega \right) . \end{aligned}$$

mit $N = i^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ und

$$\hat{t}_n(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^{-2n} \int d^{4n}x e^{-i \sum p_j x_j} (\Omega, T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega) .$$

Wir erkennen, dass die Fouriertransformierten der Erwartungswerte zeitgeordneter Produkte für jede Impulsvariable auf der Massenschale H_m^+ einen Pol der Form $(p^2 - m^2)^{-1}$ besitzen und dass die Koeffizienten gerade die S-Matrix-Elemente sind. Dies sind die berühmten LSZ-Relationen.

3. Haag-Ruelle-Streutheorie

Die LSZ-Relationen liefern den Zusammenhang zwischen den zeitgeordneten Produkten der wechselwirkenden Felder und der S-Matrix. Grundlage ihrer Herleitung ist die LSZ-Asymptotenbedingung, wonach das wechselwirkende Feld zu asymptotischen Zeiten gegen ein freies Feld konvergiert. Diese Annahme kann in etwas abgeschwächter Form ihrerseits aus wenigen Strukturannahmen hergeleitet werden. Dies ist das Ergebnis der Haag-Ruelle-Streutheorie.

Wir betrachten die Theorie eines skalaren Feldes. Gegeben ist eine operatowertige Distribution $\varphi(f)$ mit Werten in den Operatoren eines Hilbertraumes \mathfrak{H} . Auf dem Hilbertraum gibt es eine unitäre stark stetige Darstellung der Poincaré-Gruppe U . Wir fordern Kovarianz des Feldes,

$$U(x, \Lambda) \varphi(y) U(x, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda y + x) ,$$

lokale Kommutativität

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \text{ falls } (x - y)^2 < 0 ,$$

Existenz und Eindeutigkeit des Vakuums, d.h. die Existenz eines U -invarianten Einheitsvektors $\Omega \in \mathfrak{H}$, der bis auf eine Phase eindeutig

ist. Ω soll zyklisch sein, d.h. die Anwendung der verschmierten Feldoperatoren $\varphi(f)$ erzeugt einen dichten Unterraum \mathfrak{D} von \mathfrak{H} . Weiter soll die Energie in allen Lorentzsystemen positiv sein (Spektrumsbedingung). Zusätzlich nehmen wir die Existenz von Einteilchenzuständen an, deren Impuls-Spektrum durch eine Lücke vom übrigen Spektrum getrennt ist. Das Impulsspektrum soll die Bedingung

$$\text{sp } P = \{p \in \mathbb{R}^4, p_0 \geq 0, p = 0 \text{ oder } p^2 = m^2 \text{ oder } p^2 > (m + \delta)^2\}$$

erfüllen, mit der oberen Masselücke $\delta > 0$.

Der erste Schritt zur Erzeugung von Mehrteilchenzuständen ist die Konstruktion von fastlokalen Einteilchenenerzeugern. Sei Φ_0 ein Einteilchenvektor mit kompaktem Impulsträger. Wegen der Zyklizität des Vakuums gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom A_0 in den Feldoperatoren, sodass $\|A_0\Omega - \Phi_0\| < \epsilon$ ist. Sei f eine Schwartz-Funktion, deren Fourier-Transformierte auf dem Spektrum von Φ_0 gleich 1 ist und deren Träger kompakt ist und das Impulsspektrum nur auf der Massenschale schneidet. Wir setzen

$$A = \int d^4x e^{iPx} A_0 e^{-iPx} f(x)$$

und finden

$$A\Omega = \tilde{f}(P)A_0\Omega \equiv \Phi$$

mit der Fouriertransformierten

$$\tilde{f}(p) = \int d^4x e^{ipx} f(x).$$

Φ ist ein Vektor im Einteilchenraum, der sich von Φ_0 nur um einen Vektor der Länge $\epsilon \sup |f|$ unterscheidet. A ist ein sogenannter fastlokaler Operator, d.h. ein Operator der sich durch Operatoren A_n , die in Doppelkegeln $\mathcal{O}_n = \{(t, \mathbf{x}), |t| + |\mathbf{x}| < n\}$ lokalisiert sind, schnell approximieren lässt, d.h. für alle Vektoren $\Psi \in \mathfrak{D}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^N (A - A_n)\Psi = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Wir fassen A als eine Operation auf, die nahe am Ursprung stattfindet und dort einen Einteilchenzustand erzeugt.

Wir nutzen jetzt aus, dass die vektorwertige Funktion $e^{iPx}\Phi$ eine positive-Frequenz-Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist. Wir wählen eine numerische negative-Frequenz-Lösung der Form

$$h(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{p} e^{-i(\omega(\mathbf{p})t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} h_0(\mathbf{p})$$

wobei h eine Testfunktion mit kompaktem Träger ist, die auf dem Spektrum des räumlichen Impulses im Zustand Φ gleich 1 ist. Wir setzen

$$A(t) = \int d^3\mathbf{x} h(t, \mathbf{x}) e^{itP_0 - i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} A e^{-itP_0 + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}}$$

und erkennen, dass für alle t

$$A(t)\Omega = \Phi$$

gilt. Die Lokalisation von $A(t)$ ist offenbar durch das Verhalten von h zur Zeit t bestimmt.

Die Ausbreitung einer Lösung der Klein-Gordon-Gleichung der obigen Form hängt im wesentlichen von den Geschwindigkeiten ab, die den Impulsen im Träger von h_0 entsprechen (die Annahme, dass h_0 auf einem bestimmten Bereich gleich 1 ist, spielt hierbei keine Rolle). Sei

$$V(h_0) = \left\{ \frac{\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}, \mathbf{p} \in \text{supp } h_0 \right\} .$$

Dann gilt der folgende Satz

THEOREM IV.1. *Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Konstanten $c, c_N > 0$ sodass gilt*

- (i) $|h(t, t\mathbf{v})| < c_N |t|^{-N} \text{dist}(\mathbf{v}, V(h_0))^{-N}$ für $t \neq 0$ und $\text{dist}(\mathbf{v}, V(h_0)) > \epsilon$.
- (ii) $\int d^3\mathbf{x} |h(t, \mathbf{x})| < c(1 + |t|^3)$

Der Beweis findet sich z.B. im Reed-Simon.

Der Satz besagt, dass sich die Lösung im wesentlichen im kinematisch erlaubten Gebiet $(t, \mathbf{x}), \frac{\mathbf{x}}{t} \in V(h_0)$ aufhält.

Wir wollen jetzt zeigen, dass unser Hilbertraum Zustandsvektoren enthält, die zu großen Zeiten als einlaufende, bzw. auslaufende Mehrteilchenzustände interpretiert werden können. Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns auf den Fall von zwei Teilchen. Dazu betrachten wir zwei wie oben konstruierte Einteilchenvektoren Φ_1, Φ_2 mit den entsprechenden fastlokalen Operatoren $A_i, i = 1, 2$. Wir nehmen an, dass sich die Geschwindigkeitsträger der beiden Einteilchenzustände nicht überlappen, und wählen die numerischen Lösungen der Klein-Gordongleichung h_1, h_2 dementsprechend. Dadurch sind die Operatoren $A_1(t)$ und $A_2(t)$ für große t bis auf kleine Korrekturen weit voneinander entfernt lokalisiert. Als approximative Zweiteilchenzustände (Haag-Ruelle-Approximanten) setzen wir

$$\Psi(t) = A_1(t)A_2(t)\Omega$$

THEOREM IV.2. (i) $\Psi(t)$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$ und für $t \rightarrow -\infty$.

- (ii) Die Limiten hängen nur von den Einteilchenvektoren Ψ_1 und Ψ_2 ab. Bezeichnung:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Psi(t) = (\Phi_1 \times \Phi_2)_{\text{aus, ein}}$$

- (iii) Das Skalarprodukt zweier asymptotischer Zweiteilchenzustände ist

$$((\Phi_1 \times \Phi_2)_{\text{aus}}, (\Phi'_1 \times \Phi'_2)_{\text{aus}}) = (\Phi_1, \Phi'_1)(\Phi_2, \Phi'_2) + (\Phi_1, \Phi'_2)(\Phi_2, \Phi'_1)$$

stimmt also mit dem Skalarprodukt im bosonischen Zweiteilchenraum überein (entsprechend für die einlaufenden Zweiteilchenzustände).

(iv) Die Poincaré-Gruppe wirkt durch

$$U(L)(\Phi_1 \times \Phi_2)_{aus,ein} = (U(L)\Phi_1 \times U(L)\Phi_2)_{aus,ein}$$

Der Beweis beruht auf den erwähnten Lokalisationseigenschaften der fastlokalen Operatoren $A_i(t)$ und auf der t -Unabhängigkeit der Einteilchenvektoren $A_i(t)\Omega$. Zum Beispiel ergibt sich die Konvergenz der Haag-Ruelle-Approximanten aus dem schnellen Verschwinden ihrer Zeitableitung. Es gilt wegen $A_i(t)\Omega = \text{const}$

$$\frac{d}{dt}A_1(t)A_2(t)\Omega = [(\frac{d}{dt}A_1(t)), A_2(t)]\Omega$$

Aufgrund des Lokalisationsverhaltens der Operatoren verschwindet der Kommutator schneller als jede Potenz von t . Ein präziser Beweis erfordert allerdings einigen Aufwand. Hierfür wird auf die Literatur verwiesen.

Die Verallgemeinerung der obigen Konstruktion auf Mehrteilchenzustände liefert zwei isometrische Abbildungen W_{\pm} des bosonischen Fockraums \mathfrak{F} über dem Einteilchenraum in den Hilbertraum \mathfrak{H} . Ihre Bilder sind die Unterräume der auslaufenden, bzw. einlaufenden Streuzustände $\mathfrak{H}_{aus,ein}$. Die Matrixelemente der S-Matrix sind definiert durch

$$(\Phi, S\Psi) = (W_+\Phi, W_-\Psi), \quad \Phi, \Psi \in \mathfrak{F}.$$

Wenn die Operatoren W_{\pm} unitär sind, ist auch die S-Matrix unitär. In diesem Fall nennt man die Theorie asymptotisch vollständig. Während in der nichtrelativistischen Quantenmechanik die asymptotische Vollständigkeit unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen worden ist, ist in der Quantenfeldtheorie fast nichts über diese Frage bekannt.

Die beschriebene Herleitung liefert ausschließlich Bosonen als Folge der lokalen Kommutativität der Observablen. Fermionen könnte man erhalten, indem man eine gradierte Algebra mit Antivertauschungsrelationen für ungerade Elemente annimmt. Bemerkenswerter Weise kommt man aber ohne diese Annahme aus. Doplicher, Haag und Roberts haben in einer Reihe von Arbeiten gezeigt, dass man im Minkowskiraum mit mindestens 4 Dimensionen die Algebra der Observablen in eindeutiger Weise zu einer gradierten Algebra erweitern kann. Der Beweis gilt nicht in 3 und 2 Dimensionen; dort sind tatsächlich auch allgemeinere Teilchenstatistiken möglich.

4. Kanonische Quantisierung

Ein Standardverfahren zur Definition von Quantenfeldtheorien ist die kanonische Quantisierung klassischer Feldtheorien. Hierbei geht man von der Lagrangeschen Formulierung der klassischen Feldtheorie aus. Wie in der klassischen Mechanik leitet man die Feldgleichungen aus dem Prinzip der stationären Wirkung ab. Sei \mathcal{L} eine Funktion, die von

den Feldern und ihren ersten Ableitungen abhängt. Sei G ein kompaktes Gebiet der Raumzeit mit genügend glattem Rand ∂G . Dann soll das Funktional

$$S_G(\varphi) = \int_G d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

unter den Feldern mit gleichen Werten am Rand stationär sein (in der Regel minimal). Zur Auswertung dieser Bedingung betrachten wir ein Feld ψ , das am Rand von G verschwindet. Dann gilt nach Voraussetzung

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} S_G(\varphi + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0} .$$

Auswertung der Ableitung ergibt

$$0 = \int_G d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) \psi(x) + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(x) \partial_\mu \psi(x) \right) .$$

Der zweite Term im Integranden kann in der Form

$$\sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(x) \psi(x) \right) - \left(\sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(x) \right) \psi(x) .$$

geschrieben werden. Der erste Term dabei ist eine Divergenz. Das Integral darüber verschwindet wegen des Verschwindens der Randwerte von ψ . Soll das verbleibende Integral für alle ψ verschwinden, so muss φ innerhalb von G die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$$

erfüllen.

Sei z.B. $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4$, so ergibt sich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi - \frac{g}{3!} \varphi^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi .$$

Damit erhält man die Feldgleichung

$$(\square + m^2)\varphi = -\frac{g}{3!} \varphi^3 .$$

Als Ausgangspunkt der Quantisierung benutzt man die Hamiltonsche Formulierung. Hierzu wird die Zeitkoordinate ausgezeichnet, und man definiert die Lagrangefunktion L als das räumliche Integral der Lagrangedichte. Die kanonisch konjugierten Impulse ergeben sich zu

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}(\mathbf{x}) .$$

Falls $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ , $\vec{\partial}\varphi$ und π geschrieben werden kann, erhält man die Hamiltonfunktion als

$$H(\varphi, \pi) = \int d^3\mathbf{x} h(\varphi(\mathbf{x}), \vec{\partial}\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}))$$

mit der Hamiltondichte

$$h(\varphi, \partial\varphi, \pi) = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} .$$

Die Quantisierungsvorschrift besteht jetzt darin, φ und π durch operatorwertige Distributionen zu ersetzen, sodass die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})] &= 0 = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] \\ [\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Die Zeitentwicklung ist dann durch die Heisenberggleichung gegeben,

$$\dot{\varphi}(x) = i \int d^3\mathbf{y} [h(\mathbf{y}), \varphi(x)] .$$

Die angegebene Vorschrift ist mit einigen Problemen belastet. Wir wollen das am Beispiel der φ^4 -Theorie genauer ansehen. In diesem Fall ist

$$\pi = \dot{\varphi} ,$$

und die Hamiltondichte ergibt sich zu

$$h = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\vec{\partial}\varphi|^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 .$$

Die kanonischen Vertauschungsrelationen sind im Fockraum des freien Feldes zur Masse m realisiert. Um die Hamiltondichte dort einzuführen, kann man die Produkte der Felder durch Wickprodukte ersetzen. Die Definition des Hamiltonoperators als das räumliche Integral der Hamiltondichte ist aber nicht möglich. Es gilt der folgende Satz (Haagsches Theorem)

THEOREM IV.3. *Sei \mathfrak{H} der Fockraum eines freien Feldes φ_0 , und sei $U(\mathbf{x})$ der räumliche Translationsoperator. Sei φ eine operatorwertige Distribution mit den Eigenschaften*

- (i) $\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(0, \mathbf{x})$, $\dot{\varphi}(0, \mathbf{x}) = \dot{\varphi}_0(0, \mathbf{x})$.
- (ii) $U(\mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{y})U(\mathbf{x})^{-1} = \varphi(t, \mathbf{y} + \mathbf{x})$.
- (iii) *Es existiert ein selbstadjungierter Operator H mit der Eigenschaft*

$$e^{itH}\varphi(0, \mathbf{x})e^{-itH} = \varphi(t, \mathbf{x}) .$$

Dann stimmt H bis auf eine additive Konstante mit dem Hamiltonoperator H_0 der freien Theorie überein, und $\varphi = \varphi_0$.

Beweisskizze nach [?]: Der Beweis beruht im wesentlichen darauf, dass das Vakuum Ω bis auf einen Faktor der einzige translationsinvariante Vektor in \mathfrak{H} ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass H mit den räumlichen Translationen vertauscht. Dann ist Ω ein Eigenvektor von H . Sei λ der zugehörige Eigenwert. Die mit räumlichen Testfunktionen

verschmierten freien Felder $\varphi_0(0, f) = \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x})\varphi_0(\mathbf{x})$ erzeugen aus Ω einen dichten Teilraum \mathfrak{D} . Auf \mathfrak{D} gilt:

$$\begin{aligned} (H - \lambda)\varphi_0(0, f_1) \cdots \varphi_0(0, f_n)\Omega &= (H - \lambda)\varphi(0, f_1) \cdots \varphi(0, f_n)\Omega \\ &= \sum_k \varphi(0, f_1) \cdots \dot{\varphi}(0, f_k) \cdots \varphi(0, f_n)\Omega \\ &= \sum_k \varphi_0(0, f_1) \cdots \dot{\varphi}_0(0, f_k) \cdots \varphi_0(0, f_n)\Omega \\ &= H_0\varphi_0(0, f_1) \cdots \varphi_0(0, f_n)\Omega . \end{aligned}$$

Also gilt $H = H_0 + \lambda$ auf \mathfrak{D} . Zur Vervollständigung des Beweises genügt es zu zeigen, dass H_0 auf \mathfrak{D} wesentlich selbstadjungiert ist. \square

Zur Vermeidung der Konsequenzen des Haagschen Theorems kann man versuchen, zunächst räumlich abgeschnittene Hamiltonoperatoren

$$H(g) = H_0 + \int d^3\mathbf{x} g(\mathbf{x})h(\mathbf{x})$$

mit einer Testfunktion g zu betrachten. Man erwartet dann wegen der durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzten Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen, dass

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{itH(g)}\varphi(0, \mathbf{x})e^{-itH(g)}$$

von g unabhängig ist, sofern g im Bereich $\{\mathbf{y}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < |t|\}$ identisch 1 ist. Auf diese Weise erhält man dann eine Konstruktion der Observablenalgebra der wechselwirkenden Theorie.

Um auch die Vakuumdarstellung der wechselwirkenden Theorie zu erhalten, kann man zunächst die Grundzustandsvektoren $\Omega(g)$ der lokal gestörten Hamiltonoperatoren $H(g)$ betrachten (falls diese existieren). Die Wightmanfunktionen der wechselwirkenden Theorie sucht man dann als Limes $g \rightarrow 1$ der Erwartungswerte

$$(\Omega(g), \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega(g)) .$$

Mit dem Rekonstruktionstheorem gewinnt man schließlich den Vakuumhilbertraum der wechselwirkenden Theorie. Diese Idee ist von Glimm und Jaffe erfolgreich für die Konstruktion der φ^4 -Theorie in 2 Raumzeitdimensionen durchgeführt worden.

Wir wollen jetzt die kanonische Quantisierung der Elektrodynamik behandeln. Die Maxwellgleichungen lassen sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ableiten. Hierbei ist j_μ ein erhaltener Strom, der von A_μ unabhängig ist. Es gilt nämlich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j_\mu , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} ,$$

und daher

$$j^\nu = \partial_\mu F^{\nu\mu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu .$$

Das Anfangswertproblem für das Vektorpotential ist durch die Maxwellgleichungen nicht wohldefiniert. Denn wenn A_μ eine Lösung ist, dann ist auch $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ eine Lösung, wobei Λ eine beliebige Funktion ist (Eichfreiheit). Daher ist auch der Übergang zum Hamiltonformalismus nicht möglich. Formal sieht man das daran, dass die kanonisch konjugierten Impulse nicht unabhängig sind und dass eine Elimination der Zeitableitungen des Vektorpotentials nicht möglich ist. Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_\mu)} = \begin{cases} 0 & , \quad \mu = 0 \\ -F^{0\mu} = E_\mu & , \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases} .$$

Man wählt den folgenden Ausweg. Man addiert zur Lagrangedichte einen Zusatzterm (Eichfixierung), sodass die modifizierte Feldgleichung ein wohldefiniertes Anfangswertproblem besitzt. Eine solche Wahl ist $-\frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$ mit $\lambda \neq 0$. Die Feldgleichungen sind dann

$$\square A_\mu + (\lambda - 1)\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = j_\mu .$$

Es folgt aus der Stromerhaltung

$$\square(\partial_\mu A^\mu) = 0 .$$

Daher ist $B := \partial_\mu A^\mu$ ein freies masseloses skalares Feld. Verschwindet B , so sind die modifizierten Feldgleichungen äquivalent zu den Maxwellgleichungen. Allerdings kann B nicht einfach gleich Null gesetzt werden, da es nichttriviale kanonische Vertauschungsrelationen besitzt.

Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$\pi_0 = -\lambda \partial_\mu A^\mu , \quad \pi_k = \partial_0 A_k - \partial_k A_0 .$$

Auflösen nach den Zeitableitungen von A_μ ergibt

$$\dot{A}_0 = \vec{\partial} \cdot \mathbf{A} - \lambda^{-1} \pi_0 , \quad \dot{A}_k = \pi_k + \partial_k A_0 .$$

Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen zwischen A_μ und \dot{A}_μ ergeben sich zu

$$[A_\mu(0, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(0, \mathbf{y})] = -i(g_{\mu\nu} - (\lambda^{-1} - 1)g_{\mu 0}g_{\nu 0})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ,$$

und die zwischen \dot{A}_0 und \dot{A}_k zu

$$\begin{aligned} [\dot{A}_0(0, \mathbf{x}), \dot{A}_k(0, \mathbf{y})] &= [(\vec{\partial} \cdot \mathbf{A} - \lambda^{-1} \pi_0)(0, \mathbf{x}), (\pi_k + \partial_k A_0)(0, \mathbf{y})] \\ &= i(1 - \lambda^{-1})\partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Besonders einfach werden die Vertauschungsrelationen für $\lambda = 1$ (Feynman-Eichung). Ein anderer oft betrachteter Spezialfall ist $\lambda = \infty$ (Landau-Eichung).

Wir wollen im folgenden die Feynman-Eichung verwenden. Die Feldgleichung stimmt in diesem Fall mit der inhomogenen Wellengleichung

überein. Wenn j_μ mit A_μ vertauscht, dann ist der Kommutator verschiedener Komponenten von A_μ eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Da die Anfangsbedingungen durch die kanonischen Vertauschungsrelationen bestimmt sind, ergibt sich

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu}D(x-y)$$

mit der Pauli-Jordan-Funktion D . Für das Feld B findet man

$$[B(x), A_\mu(y)] = -i\partial_\mu D(x-y),$$

daher implementiert $\int d^3\mathbf{x}B(t, \mathbf{x})\overset{\leftrightarrow}{\partial}_t\Lambda(t, \mathbf{x})$ mit einer Lösung Λ der Wellengleichung gerade eine infinitesimale Eichtransformation, die mit der Eichfixierung $\partial_\mu A^\mu = B$ verträglich ist. B kann also nicht identisch Null sein.

Wir können jetzt aber die Algebra \mathfrak{A}_0 der verschmierten Felder betrachten, die mit B vertauschen. Diese Algebra wird von $F_{\mu\nu}$ und B erzeugt. In dieser Algebra erzeugt B ein nichttriviales Ideal I . Die Quotientenalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0/I$ ist dann die Observablenalgebra der Quantenelektrodynamik. Sie wird von den Feldern $F_{\mu\nu}$ erzeugt. Deren Vertauschungsrelationen und Feldgleichungen sind dieselben wie die aus Kapitel 3.

Wir wollen jetzt eine Hilbertraumdarstellung finden. Zuerst versuchen wir, eine Darstellung der Felder A_μ durch hermitesche Operatoren in einem Hilbertraum \mathfrak{K} zu konstruieren. \mathfrak{K} soll einen Vektor Ω enthalten, der das Vakuum beschreibt, und soll durch Anwendung der verschmierten Felder auf Ω erzeugt werden. Weiter soll es eine positive Energiedarstellung der Poincaré-Gruppe geben, die Ω invariant lässt und unter der sich A_μ kovariant transformiert,

$$U(x, \Lambda)A_\mu(y)U(x, \Lambda)^{-1} = A_\nu(\Lambda y + x)\Lambda^\nu{}_\mu.$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich die Zweipunktfunktion zu

$$(\Omega, A_\mu(x)A_\nu(y)\Omega) = -g_{\mu\nu}D_+(x-y).$$

Im Einteilchenraum

$$\mathfrak{K}_1 = \{A(f)\Omega, f = (f^\mu), f^\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)\}$$

erhält man das Skalarprodukt

$$(A(f)\Omega, A(f)\Omega) = - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \overline{\hat{f}^\mu(p)} \hat{f}_\mu(p).$$

Man erkennt, dass das Skalarprodukt in \mathfrak{K} nicht positiv definit sein kann, wenn A_0 hermitesch ist.

Die 4 Komponenten in \mathfrak{K}_1 kann man als zeitartige, longitudinale und die beiden transversalen Photonen interpretieren (jeweils bezogen auf die Richtung des Impulses). Nur die transversalen Photonen entsprechen physikalischen Teilchen. Zur Elimination der unphysikalischen

Freiheitsgrade verwenden wir das Feld B . Sei

$$\mathfrak{H}_0 = \{ \Phi \in \mathfrak{K}, B(f)\Phi = 0 \text{ falls } \text{supp } \hat{f} \cap \overline{V_+} = \emptyset \} .$$

(Gupta-Bleuler-Bedingung). Dann gilt der folgende Satz:

THEOREM IV.4. $(\Phi, \Phi) \geq 0$ für $\Phi \in \mathfrak{H}_0$.

Beweis: Die n -Teilchenkomponente Φ_n von Φ ist eine symmetrische Funktion $\Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, \dots, p_n)$ mit $p_i \in \partial V_+$. Die Gupta-Bleuler-Bedingung besagt

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} p^\mu \hat{f}(-p) g_{\mu\mu_1} \Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p, p_2, \dots, p_n) = 0 .$$

für alle f mit $\text{supp } \hat{f} \cap \overline{V_+} = \emptyset$. Also gilt

$$p_{\mu_1} \Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p, p_2, \dots, p_n) = 0 .$$

für $p, \dots, p_n \in \partial \overline{V_+}$. Da $-g_{\mu\nu}$ auf dem orthogonalen Komplement eines lichtartigen Vektors $p \neq 0$ positiv semidefinit ist,

$$p^2 = 0, qp = 0 \iff p_0 = \pm |\mathbf{p}|, q_0 p_0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p},$$

also unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$|\mathbf{q}|^2 \geq \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2}{|\mathbf{p}|^2} = (q_0)^2,$$

ist

$$(-1)^n \overline{\Phi_{n\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, \dots, p_n)} \Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0 .$$

Dies ist aber gerade der Integrand, der bei der Berechnung des Skalarprodukts (Φ_n, Φ_n) auftritt. Also ist $(\Phi_n, \Phi_n) \geq 0$ für alle n und damit $(\Phi, \Phi) \geq 0$. \square

Sei \mathcal{N} der Nullraum des positiv semidefiniten Skalarprodukts auf \mathfrak{H}_0 ,

$$\mathcal{N} = \{ \Phi \in \mathfrak{H}_0, (\Phi, \Phi) = 0 \} .$$

Dann besitzt der Quotientenraum $\mathfrak{H}_0/\mathcal{N}$ ein positiv definites Skalarprodukt. Seine Vervollständigung nennen wir den physikalischen Hilbertraum \mathfrak{H} . Wir wollen jetzt zeigen, dass die Observablenalgebra \mathfrak{A} auf \mathfrak{H} durch Operatoren dargestellt werden kann. Die Algebra \mathfrak{A}_0 besteht nach Definition aus den Feldoperatoren, die mit B vertauschen. Daher lässt sie den Raum \mathfrak{H}_0 invariant. Auch der Nullraum ist invariant unter \mathfrak{A}_0 . Denn sei $\Phi \in \mathcal{N}$ und $C \in \mathfrak{A}_0$. Dann ist wegen der Hermitizität von B auch der adjungierte Operator $C^* \in \mathfrak{A}_0$. Damit folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$(C\Phi, C\Phi) = (C^*C\Phi, \Phi) \leq \|C^*C\Phi\| \|\Phi\| = 0 .$$

Also besitzt \mathfrak{A}_0 eine Darstellung auf dem physikalischen Hilbertraum \mathfrak{H} . Dabei wird das von B erzeugte Ideal auf Null abgebildet,

$$B(f)\Phi \in \mathcal{N} .$$

Damit erhalten wir die gewünschte Hilbertraumdarstellung der Observablenalgebra \mathfrak{H} . Sie stimmt mit der in Kapitel III konstruierten Darstellung überein. Im Gegensatz zu dieser lässt sich die Gupta-Bleuler-Methode auch auf den wechselwirkenden Fall übertragen. Eine ähnliche Methode gibt es für nichtabelsche Eichtheorien.

5. Pfadintegral

Eine andere Methode zur Definition von Quantenfeldtheorien ist die Methode der Pfadintegrale. Ursprünglich von Dirac vorgeschlagen, wurde sie von Feynman in seiner Doktorarbeit als eine alternative Formulierung der Quantentheorie entwickelt.

Wir erläutern die Methode zunächst am Beispiel eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m , das sich in einer Raumdimension unter dem Einfluss des Potentials $V(x)$ bewegt. Der Hamiltonoperator des Systems ist

$$H = H_0 + V \text{ mit } H_0 = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} .$$

Wenn $H_0 + V$ wesentlich selbstadjungiert ist (z.B. für V stetig und beschränkt), dann gilt nach der Trotter-Produkt-Formel

$$e^{-itH}\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-i\frac{t}{n}H_0} e^{-i\frac{t}{n}V})^n \Phi , \quad \Phi \in L^2(\mathbb{R}) .$$

Für Testfunktionen $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lässt sich die Wirkung des freien Zeitentwicklungsoperators e^{-itH_0} mittels Fourier-Transformation durch das folgende Integral beschreiben

$$\begin{aligned} (e^{-itH_0}\Phi)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \int dy e^{ip(x-y)} e^{-it\frac{p^2}{2m}} \Phi(y) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi it}} \int dy e^{i\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{t}} \Phi(y) \end{aligned}$$

mit

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi it}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi|t|}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign}(t)} .$$

Ist V unendlich oft differenzierbar mit polynomial beschränkten Ableitungen, so gilt für die Lösung der Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (H\psi)(t, x)$$

mit Anfangswert $\psi(0, x) = \Phi(x)$ die Formel

$$\begin{aligned} \psi(t, y_0) &= (e^{-itH}\Phi)(y_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mn}{2\pi it}} \right)^n \int dy_1 \cdots dy_n e^{i\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{m}{2} \frac{(y_{k-1} - y_k)^2}{(t/n)^2} - V(y_k) \right)} \Phi(y_n) \end{aligned}$$

(Konvergenz im Sinne von $L^2(\mathbb{R})$). Der Exponent in der zweiten Zeile ist eine Riemann-Summe, die das Integral

$$i \int_0^t dt' \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2 - V(y) \right) = iI$$

approximiert, wenn $y(t)$ eine Bahnkurve ist mit $y(k \frac{t}{n}) = y_k$. I ist hierbei die klassische Wirkung der Bahnkurve.

Diese Darstellung des Zeitentwicklungsoperators legt die folgende suggestive Deutung nahe: Die quantenmechanische Übergangsamplitude

$$\langle y | e^{-itH} | x \rangle := e^{-itH}(y, x)$$

ergibt sich als eine Superposition der Amplituden für alle möglichen Bahnen $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Jede dieser Bahnen liefert einen Beitrag $e^{iI(\gamma)}$. Der führende Beitrag kommt von den Bahnen in der Nähe eines stationären Punktes der Wirkung, also von Bahnen in der Nähe der klassischen Lösung.

Sei nun $\mathcal{W}_{x,y,t}$ die Menge der stetigen Bahnen $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Wir schreiben

$$\langle y | e^{-itH} | x \rangle = \int_{\mathcal{W}_{x,y,t}} \mathcal{D}\gamma e^{iI(\gamma)} .$$

Hierbei soll

$$\mathcal{D}\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mn}{2\pi it}} \right)^n d\gamma\left(\frac{t}{n}\right) \cdots d\gamma\left(\frac{n-1}{n}t\right)$$

das geeignet normierte Integral über alle Wege bedeuten.

Wenn es gelingt, dem Pfadintegral für $V = 0$ einen mathematisch präzisen Sinn zu geben, dann erhält man den Integranden für beliebiges V durch Multiplikation mit dem Faktor

$$e^{i \int_0^t dt' V(\gamma(t'))}$$

(Feynman-Kac-Formel). Sofern dieser Faktor integrierbar ist, hat man eine explizite Integraldarstellung für die Übergangsamplitude gefunden.

Bei dem Versuch, diese Ideen mathematisch zu präzisieren, bereitet der oszillatorische Charakter der Integrale Probleme. Leichter zu handhaben sind die Integralkerne der positiven Operatoren e^{-tH} , $t > 0$ (falls H nach unten beschränkt ist). Für $t > 0$ gilt

$$e^{-tH_0}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi t}} e^{-\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{t}} .$$

Der Integrkern von e^{-tH_0} besitzt die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} e^{-tH_0}(x, y) &> 0, \\ \int dx e^{-tH_0}(x, y) &= 1, \\ \int dy e^{-tH_0}(x, y) e^{-sH_0}(y, z) &= e^{-(t+s)H_0}(x, z). \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften kann man als eine wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung der Diffusion interpretieren. Dabei deutet man $e^{-tH_0}(x, y)$ als die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass ein Teilchen durch Diffusion (mit der Diffusionskonstante $D = \frac{1}{2m}$) in der Zeit t von y nach x gelangt. Die zweite Gleichung ist die Normierung der Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen an irgendeinem Punkt ist, auf 1. Die dritte Eigenschaft charakterisiert einen Markov-Prozess.

In der Theorie der Brownschen Bewegung führt man auf $\mathcal{W}_{x,y,t}$ die Struktur eines Maßraums ein. Dabei muss man das System der messbaren Mengen auszeichnen. Hierzu sollen auf jeden Fall die sogenannten Zylindermengen gehören:

DEFINITION IV.1. *Eine Zylindermenge $Z(t_1, \dots, t_n; B)$ ist die Menge der Wege γ mit $(\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)) \in B$, wobei B eine messbare Menge in \mathbb{R}^n ist und $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ gilt.*

Man kann dann das sogenannte Wiener-Integral über Zylindermengen erklären durch

$$\int_{Z(t_1, \dots, t_n; B)} dW_{xy}^t = \int_B dy_1 \cdots dy_n e^{-H_0(t-t_n)}(y - y_n) \cdots e^{-H_0 t_1}(y_1 - x).$$

Es gilt nun der folgende Satz:

THEOREM IV.5. *Sei V stetig und nach unten beschränkt, und sei $H = H_0 + V$ wesentlich selbstadjungiert. Dann ist die Funktion $e^{-\int_0^t dt' V(\gamma(t'))}$ auf $\mathcal{W}_{x,y,t}$ bezüglich des Wiener-Maßes integrierbar, und es gilt die Feynman-Kac-Formel*

$$(e^{-tH})(y, x) = \int dW_{xy}^t e^{-\int_0^t dt' V(\gamma(t'))}.$$

Beweis: Nach der Trotter-Produkt-Formel gilt

$$(e^{-tH})(y, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mn}{2\pi t}} \right)^n \int dy_1 \cdots dy_n e^{-\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{m}{2} \frac{(y_{k-1} - y_k)^2}{(t/n)^2} + V(y_k) \right)}.$$

Nach der Definition des Wiener-Maßes ist die rechte Seite der Limes $n \rightarrow \infty$ der Wiener-Integrale

$$\int dW_{xy}^t e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t}{n} V(\gamma(\frac{kt}{n}))}$$

über die Zylinderfunktionen

$$\gamma \rightarrow e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t}{n} V(\gamma(\frac{kt}{n}))}$$

Diese Funktionen konvergieren punktweise gegen $e^{-\int_0^t dt' V(\gamma(t'))}$. Wegen der unteren Schranke an V sind sie gleichmäßig durch eine Konstante beschränkt. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz ist die Limesfunktion daher integrierbar, und das Integral stimmt mit dem Limes der Integrale über die approximierenden Zylinderfunktionen überein. \square

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass der Integrialkern von e^{-tH} positiv ist. Daraus ergibt sich, dass auch die Grundzustandsfunktion Ω (falls es sie gibt) positiv sein muss. Man erhält sie durch die folgende Formel:

THEOREM IV.6. *Sei $\Omega_0 \in L^2(\mathbb{R})$ positiv. Dann ist*

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tH} \Omega_0 \|e^{-tH} \Omega_0\|^{-1} ,$$

falls der Limes existiert, der bis auf einen Phasenfaktor eindeutige Grundzustand von H . Wenn der Limes nicht existiert, besitzt H keinen Grundzustand.

Hieraus erhält man die folgende Formel für den Erwartungswert eines Produkts von Funktionen f_i des Ortsoperators zu verschiedenen (imaginären) Zeiten

$$(\Omega, e^{t_1 H} f_1(x) e^{-t_1 H} \dots e^{t_n H} f_n(x) e^{-t_n H} \Omega) = \int d\mu(\gamma) f_1(\gamma(t_1)) \dots f_n(\gamma(t_n)) .$$

Hierbei ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum aller Wege $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es ergibt sich als Limes $t \rightarrow \infty$ der Maße

$$Z(t)^{-1} dx \Omega_0(x) dy \Omega_0(y) dW_{yx}^{-t,t} e^{-\int_{-t}^t dt' V(\gamma(t'))}$$

mit einem Normierungsfaktor $Z(t)$. Bemerkenswert an dieser Formel ist, dass man die Grundzustandswellenfunktion Ω nicht zur Berechnung der Erwartungswerte benötigt.

Wir wollen jetzt entsprechende Formeln für die Feldtheorie gewinnen. Dazu konstruieren wir zunächst die Schrödingerdarstellung des freien Skalarfeldes. An die Stelle der Ortsoperatoren treten jetzt die Zeit-Null-Felder $\varphi(0, \mathbf{x})$. Als Wertebereich der Felder betrachten wir den Raum der temperierten reellwertigen Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Wir suchen ein Maß μ auf diesem Raum, sodass der Fockraum mit $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3), d\mu)$ identifiziert werden kann. Ein Vektor Φ des Fockraums ist dann eine Funktion auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\int |\Phi(T)|^2 d\mu(T) = \|\Phi\|^2 .$$

Die mit Testfunktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ verschmierten Zeit-Null-Felder wirken als Multiplikationsoperatoren,

$$(\varphi(0, f)\Phi)(T) = T(f)\Phi(T) .$$

Zur Durchführung dieses Programms betrachten wir die von den Operatoren $e^{i\varphi(0,f)}$ erzeugte Algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)} c_f e^{i\varphi(0,f)}, c_f \in \mathbb{C}, c_f \neq 0 \text{ nur für endlich viele } f \right\}$$

Jedes Element C dieser Algebra definiert über

$$C(T) = \sum_f c_f e^{iT(f)}$$

eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, und das punktweise Produkt dieser Funktionen entspricht dem Produkt der Operatoren,

$$(C_1 C_2)(T) = C_1(T) C_2(T) .$$

Ein Maß auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ kann jetzt dadurch charakterisiert werden, dass es ein lineares Funktional auf dieser Funktionenalgebra beschreibt,

$$\int d\mu(T) C(T) = \mu(C) .$$

In unserem Fall bietet sich als lineares Funktional der Vakuumerwartungswert an,

$$\mu(C) = (\Omega, C\Omega) .$$

Das zugehörige Maß beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Konfigurationen T des Zeit-Null-Feldes im Vakuum.

Bei dieser Beschreibung des Maßes gibt man seine Fourier-Transformierte an,

$$\chi(f) := \hat{\mu}(f) = \mu(e^{i\varphi(0,f)}) = \int d\mu(T) e^{iT(f)} .$$

Wegen der Positivität des Skalarproduktes im Fockraum (äquivalent zur Positivität des Maßes) besitzt χ (die sogenannte charakteristische Funktion des Maßes) die Eigenschaft

$$\sum_{f,g} \chi(f-g) c_f \bar{c}_g \geq 0 .$$

Umgekehrt ist jede stetige Funktion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, die die obige Positivitätseigenschaft besitzt, die Fourier-Transformierte eines Maßes auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ (Minlos-Theorem).

In unserem Fall ist

$$\chi(f) = e^{-\frac{1}{2}(f, \frac{1}{2\omega} f)}$$

mit

$$\frac{1}{2\omega} f(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} \Delta_+(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) .$$

Maße, deren Fourier-Transformierte Exponentiale einer positiven quadratischen Form sind, nennt man Gaußsche-Maße. Die quadratische

Form ist die Kovarianz des Maßes,

$$\int d\mu(T)T(\mathbf{x})T(\mathbf{y}) = (\Omega, \varphi(0, \mathbf{x})\varphi(0, \mathbf{y})\Omega) = \Delta_+(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

Gaußsche Maße über \mathbb{R}^n werden durch eine positiv semidefinite $n \times n$ -Matrix K charakterisiert,

$$\begin{aligned} \int d\mu_K(x)x_i x_j &= K_{ij} \\ \int d\mu_K e^{i(x,y)} &= e^{-\frac{1}{2}(y,Ky)} . \end{aligned}$$

Falls K invertierbar ist, berechnet man durch inverse Fourier-Transformation

$$d\mu_K(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(K)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x,K^{-1}x)} d^n x .$$

Im unendlich dimensionalen Fall gibt es kein Lebesgue-Maß, die obige Faktorisierung des Gauß-Maßes verliert daher ihren Sinn. Das Gauß-Maß selber ist aber auch im unendlich dimensionalen Fall wohldefiniert.

Gaußsche Maße lassen sich mit Hilfe ihrer charakteristischen Funktion leicht auf unendlich dimensionalen Räumen erklären. Sie besitzen aber einige Eigenschaften, die im endlich dimensionalen Fall nicht auftreten können.

Der allgemeine Fall ist der folgende. Wir betrachten einen reellen separablen Prä-Hilbert-Raum \mathfrak{D} . Auf \mathfrak{D} betrachten wir die stetige Funktion positiven Typs

$$\chi(f) = e^{-\frac{1}{2}(f,f)} .$$

Sei \mathfrak{D}' der Raum der (nicht notwendig stetigen) linearen Funktionale auf \mathfrak{D} . Wir definieren ein Maß μ auf \mathfrak{D}' als lineares Funktional auf der Algebra der Funktionen $l \rightarrow \sum c_l e^{il(f)}$ mit Hilfe der charakteristischen Funktion. Die wichtige Frage ist jetzt, auf welchen Funktionalen das Maß konzentriert ist. Es gilt der folgende Satz:

THEOREM IV.7. *Die Menge der stetigen Funktionale hat das Maß Null.*

Beweis: Sei $\|l\| := \sup_{\|f\|=1} |l(f)|$. Wir definieren die Funktion

$$F(l) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}\|l\|^2} & , \quad \|l\| < \infty \\ 0 & , \quad \|l\| = \infty \end{cases}$$

($\lambda > 0$). Wir wollen zeigen, dass $\int d\mu(l)F(l) = 0$ ist. Dies bedeutet, dass die Menge der stetigen Funktionale (d.h. der Funktionale mit endlicher Norm) das Maß Null hat.

Wir wählen ein Orthonormalsystem (f_k) in \mathfrak{D} und setzen

$$F_n(l) = e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^n l(f_k)^2} .$$

Es gilt

$$F(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(l) , \quad F_n(l) \leq 1 .$$

F ist also punktweiser Limes einer gleichmäßig beschränkten Folge von Zylinderfunktionen und daher integrierbar, und es gilt

$$\int d\mu(l)F(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\mu(l)F_n(l) .$$

Das Integral von F_n ist aber das Integral des Gaußschen Maßes

$$(2\pi)^{-n/2} \int d^n x e^{-\frac{1+\lambda}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2} = (1 + \lambda)^{-n/2} .$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Mit Hilfe dieses Satzes zeigt man z.B. für das Wiener-Integral, dass die Menge der differenzierbaren Wege Maß Null hat. Mit einer Modifikation des obigen Arguments zeigt man, dass, falls \mathfrak{D} ein Hilbertraum ist, für jeden Hilbert-Schmidt-Operator A auf \mathfrak{D} die Menge der linearen Funktionale l , für die lA nicht stetig ist, eine Menge vom Maß 0 ist. Auf diese Weise kann man zeigen, dass das Wiener-Integral auf den stetigen Wegen konzentriert ist.

Im Fall von $\mathfrak{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und einem im Sinne der Schwartz-Raum-Topologie stetigen Skalarprodukt kann man zeigen, dass das Gaußsche Maß auf dem Raum der temperierten Distributionen konzentriert ist.

Wir haben den Fockraum als den L^2 -Raum eines Gaußschen Maßes mit Kovarianz $\frac{1}{2\omega}$ über $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dargestellt. Die Zeit-Null-Felder wirken als Multiplikationsoperatoren, und der Vakuumvektor entspricht der Funktion $\Omega(T) = 1$. Es bleiben die kanonisch konjugierten Impulse zu bestimmen. Diese wirken als Funktionalableitungen zuzüglich eines Terms, der durch die fehlende Translationsinvarianz des Gaußschen Maßes verursacht wird. Man berechnet für $C \in \mathcal{A}$

$$(\pi(0, f)C)(T) = (\pi(0, f)C\Omega)(T) = ([\pi(0, f), C]\Omega)(T) + C(\pi(0, f)\Omega)(T) .$$

Der Kommutator berechnet sich aus den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\pi(0, f), C] = \frac{1}{i} \int d^3 \mathbf{x} \frac{\delta C}{\delta \varphi(0, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) .$$

Die Wirkung auf dem Vakuum bestimmt sich aus

$$\pi(0, f)\Omega = \dot{\varphi}(0, f)\Omega = iH_0\varphi(0, f)\Omega = i\varphi(0, \omega f)\Omega .$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Integralkern von e^{-tH_0} berechnen. Wir fassen ihn zunächst als Distribution in zwei Variablen auf,

$$\int (e^{-tH_0})(T, T') d\mu(T) d\mu(T') \overline{\Phi(T)} \Psi(T') := (\Phi, e^{-tH_0} \Psi) .$$

Deren Fourier-Transformation ist

$$(\Omega, e^{i\varphi(0, f)} e^{-tH_0} e^{i\varphi(0, g)} \Omega) = e^{-\frac{1}{2} (f, \frac{1}{2\omega} f)} e^{-\frac{1}{2} (g, \frac{1}{2\omega} g)} e^{-\left(f, \frac{e^{-t\omega}}{2\omega} g\right)} .$$

Diese ist eine Funktion positiven Typs und daher die charakteristische Funktion eines Maßes. In Analogie zur Theorie der Brownschen

Bewegung fassen wir dieses Maß als die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines durch H_0 beschriebenen Diffusionsprozesses auf. Sie gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass eine Bahn von Feldkonfigurationen $T_{t'}$ zur Zeit t den Wert T' und zur Zeit 0 den Wert T hat. Entsprechend definieren wir auch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Feldkonfigurationen zu Zeiten $t_1 > \dots > t_n$ mit charakteristischer Funktion

$$\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_j (f_j, \frac{1}{2\omega} f_j) - \sum_{j < k} (f_j, \frac{e^{-(t_j - t_k)\omega}}{2\omega} f_k) \right) .$$

Der Übergang zu kontinuierlichen Zeiten kann in der folgenden Weise gemacht werden. Sei $f(x^0, \mathbf{x}) = \sum_k f_k(\mathbf{x}) \delta(x^0 - t_k)$. Dann ist die in der charakteristischen Funktion auftretende quadratische Form gegeben durch

$$(f, S_2 f) = \int d^4 x f(x) S_2(x - y) f(y)$$

mit der 2-Punkt-Schwingerfunktion

$$S_2(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p \frac{e^{ipx}}{|p|^2 + m^2} .$$

Die 2-Punkt-Schwingerfunktion ergibt sich aus dem Feynmanpropagator, indem man p_0 durch ip_0 und x_0 durch ix_0 ersetzt („Wick-Rotation“). Für $x_0 = 0$ stimmt sie mit Δ_+ überein. Sie ist analytisch für $x \neq 0$ mit einer analytischen Fortsetzung in ein Gebiet des \mathbb{C}^4 . Wir wissen bereits, dass Δ_+ Randwert einer analytischen Funktion ist; diese analytische Funktion ist die 2-Punkt-Schwingerfunktion.

Das Gaußsche Maß mit der 2-Punkt-Schwingerfunktion als Kovarianz definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_0 auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$. Jeder Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ wird eine Zufallsvariable $\varphi(f)$ zugeordnet durch

$$\varphi(f)(T) = T(f) , \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4) .$$

Man nennt φ das euklidische freie massive Skalarfeld. Seine Korrelationsfunktionen nennt man die Schwingerfunktionen. S_2 ist die Greensche Funktion des Operators $-\Delta + m^2$. Wir stellen uns daher μ_0 vor als

$$d\mu_0 = Z^{-1} e^{-I_E(\varphi)} D\varphi$$

mit der euklidischen Wirkung

$$I_E(\varphi) = \int d^4 x \frac{1}{2} ((\partial\varphi)^2 + m^2 \varphi^2)$$

und dem Integral über alle Feldkonfigurationen $D\varphi = \prod_x d\varphi(x)$. Bei einer Gitterapproximation des euklidischen Feldes kann man diese Formel direkt verwenden. Im Kontinuum ist diese Formel nur heuristisch, da das Lebesgue-Integral $D\varphi$ nicht existiert und zudem der Integrand mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich Null ist.

Wechselwirkende euklidische Feldtheorien gewinnt man formal aus der Feynman-Kac-Formel. Für das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß setzt man an

$$d\mu(\varphi) = Z^{-1} e^{-\int d^4x V(\varphi(x))} d\mu_0(\varphi) .$$

Allerdings ist im Gegensatz zur Quantenmechanik die Funktion $e^{-\int V}$ in der Regel nicht integrierbar. Im Falle einer translationsinvarianten Wechselwirkung ist dies eine euklidische Version des Haagschen Theorems. Multipliziert man V mit einer Testfunktion $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$, so gilt in 2 Dimensionen, dass für nach unten beschränkte Polynome V die Funktion $e^{-\int gV}$ integrierbar ist. Man erhält so eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_g auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Diese besitzt für $g \rightarrow 1$ Limespunkte, die als wechselwirkende euklidische Feldtheorien aufgefasst werden können. Durch analytische Fortsetzung der Korrelationsfunktionen erhält man dann die Wightman-Funktionen eines wechselwirkenden Quantenfeldes.

Die euklidische Wirkung ist der statische Anteil der Energie eines klassischen skalaren Feldes in 4 Raumdimensionen. Das oben definierte Maß kann daher als der Zustand eines klassischen statistischen Systems statischer Feldkonfigurationen angesehen werden, wobei \hbar die Rolle der Temperatur spielt. Diese Beziehung zwischen statistischer Mechanik und klassischer statistischer Mechanik ermöglicht es, Resultate, die in einem Bereich erhalten worden sind, in den anderen zu übertragen. Ein Beispiel ist der Begriff des Phasenübergangs, der aus der statistischen Mechanik stammt und in der Quantenfeldtheorie auf plötzliche Änderungen in Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten angewandt wird.

Bei der Definition wechselwirkender euklidischer Theorien treten ähnliche Probleme auf, wie wir sie schon bei dem Versuch der Definition wechselwirkender Quantenfeldtheorien angetroffen haben. Eines dieser Probleme ist die Definition von Potenzen der Felder. Da φ Werte im Raum der temperierten Distributionen annimmt, ist ein Ausdruck der Form $\varphi(x)^n$ nicht wohldefiniert. Wir versuchen daher, euklidische Wick-Potenzen $:\varphi(x)^n:$ zu definieren. Dazu betrachten wir zunächst die Struktur der Schwinger-Funktionen. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) &:= \int d\mu_0 \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ ungerade} , \\ \sum_{\text{Paarungen}} \prod_{\text{Paare}} S_2(x_i, x_j) & , \quad n \text{ gerade} . \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Formel ist völlig analog zu den Formeln für die zeitgeordneten Funktionen des freien Feldes, wobei S_2 an die Stelle des Feynman-Propagators tritt. Von der Formel für die Wightman-Funktionen des freien Feldes unterscheidet sie sich dadurch, dass dort die Paare in der Reihenfolge ihrer Indizes geordnet werden, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die Wightman-2-Punkt-Funktion $\Delta_+(x-y)$ des

freien Feldes nicht symmetrisch unter Vertauschung von x und y ist. Wir können daher dieselben kombinatorischen Formeln verwenden, die bequemer Weise mit Hilfe von Graphen beschrieben werden. Sei ähnlich wie dort $\mathcal{G}(n)$ die Menge der Graphen G mit Vertizes $v \in \{1, \dots, n\}$ und ungerichteten Linien $l \in K(G)$, die jeweils 2 Vertizes verbinden (äußere Linien werden hier nicht zugelassen), sodass jeder Vertex v Randpunkt genau einer Linie l ist, in Zeichen $v \in \partial l$. Dann ist

$$\int d\mu_0 \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \prod_{l \in K(G)} S_2(\{x_v, v \in \partial l\}) .$$

Die Korrelationsfunktionen für Wick-Polynome ergeben sich formal durch die Identifizierung bestimmter Vertizes, wobei die entsprechenden Linien weggelassen werden. Sei $\mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)$ die Menge der Graphen G mit Vertizes $\{1, \dots, k\}$ und ungerichteten Linien l , sodass der Vertex i Randpunkt von genau n_i Linien ist. Wir definieren die Wick-Polynome zunächst als Linearformen auf dem Raum der Polynome durch

$$\int d\mu_0 \frac{:\varphi(x)^n:}{n!} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) = \sum_{G \in \mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)} \prod_{l \in K(G)} S_2(\{x_v, v \in \partial l\}) .$$

Für nichtzusammenfallende Punkte x_1, \dots, x_k können auch die Korrelationsfunktionen der Wick-Polynome angegeben werden,

$$\int d\mu_0 \prod_i \frac{\varphi(x_i)^{n_i}}{n_i!} = \sum_{G \in \mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)} \prod_{i < j} \frac{S_2(x_i - x_j)^{l_{ij}}}{l_{ij}!} ,$$

wobei l_{ij} die Zahl der Linien zwischen den Vertizes i und j ist. In der störungstheoretischen Renormierung euklidischer Feldtheorien konstruiert man die Fortsetzung der Korrelationsfunktionen zu überall definierten Distributionen. Allerdings ist es in der Regel nicht möglich, diese Fortsetzungen als Korrelationsfunktionen eines euklidischen Feldes anzusehen, d.h. insbesondere, dass $:\varphi^n: (f)$ keine Zufallsvariable ist.

Betrachten wir als Beispiel das euklidische freie Feld in 3 Dimensionen. In diesem Fall ist die Schwingerfunktion gegeben durch

$$S_2(x) = \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|} .$$

Die 2-Punkt-Korrelationsfunktionen der n -ten Wick-Potenz sind daher für $n > 2$ nicht mehr integrierbar. Für $n = 2$ aber ergibt sich

$$\int d\mu_0 |:\varphi^2: (f)|^2 = \int d^6(x, y) \overline{f(x)} f(y) S_2(x - y)^2 < \infty ,$$

$:\varphi^2: (f)$ ist also quadratintegrierbar. Im Fall $n > 2$ divergiert das entsprechende Integral, und für die renormierten 2-Punktfunktionen ist

das Ergebnis nicht notwendig positiv, sodass es nicht als Erwartungswert eines Wahrscheinlichkeitsmaßes aufgefasst werden kann.

6. Zusammenhängende Funktionen

Bei der Entwicklung der Terme der Störungstheorie nach Graphen kann man die Graphen in Zusammenhangskomponenten zerlegen. Die dem Graphen entsprechende Distribution ist das Tensorprodukt der zu den Komponenten gehörigen Distributionen, daher reicht es aus, sich auf die zusammenhängenden Graphen zu beschränken. Tatsächlich ist die Zerlegung von Korrelationsfunktionen nach zusammenhängenden Anteilen unabhängig von der Störungstheorie definiert und kann insbesondere auch für die wechselwirkenden Theorien durchgeführt werden.

Sei ω ein lineares Funktional über einer (nicht notwendig kommutativen) unitalen Algebra \mathcal{A} mit der Normierungsbedingung $\omega(1) = 1$. Wir denken dabei z.B. an das Wightmanfunktional über der Tensoralgebra der Testfunktionen,

$$\omega(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (\Omega, \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n) \Omega) ,$$

oder an das System der zeitgeordneten Funktionen als Funktional über der symmetrischen Tensoralgebra der Testfunktionen,

$$\omega(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (\Omega, T\varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n) \Omega) .$$

Eine weitere Möglichkeit sind Wahrscheinlichkeitsmaße, aufgefasst als lineare Funktionale auf der Algebra der Zufallsvariablen, die jeder Zufallsvariable ihren Erwartungswert zuordnen.

Wir wollen zunächst annehmen, dass ω eine Entwicklung nach Graphen besitzt,

$$\omega(A_1 \cdots A_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \omega_G(A_1, \dots, A_n) ,$$

wobei ω_G für jeden Graphen G ein multilineares Funktional auf \mathcal{A} ist, das faktorisiert, wenn der Graph sich in unverbundene Untergraphen zerlegen lässt. Wir können jeden Graphen in seine Zusammenhangskomponenten zerlegen. Dabei wird die Menge der Vertizes in disjunkte nichtleere Teilmengen zerlegt,

$$\{1, \dots, n\} = I_1 \cup \dots \cup I_k , \quad I_j \cap I_l = \emptyset \text{ für } j \neq l .$$

Eine solche Zerlegung nennt man eine Partition, und wir bezeichnen die Menge der Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ mit $\text{Part}(\{1, \dots, n\})$. Wir können jetzt zunächst eine Partition festhalten und nur über diejenigen Graphen summieren, deren Zerlegung in Komponenten die gegebene Partition der Menge der Vertizes ergibt, und anschließend über alle Partitionen summieren. Sei

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}_c} \omega_G(A_1, \dots, A_n) ,$$

wobei $\mathcal{G}_c \subset \mathcal{G}$ die Teilmenge der zusammenhängenden Graphen bezeichnet. Dann gilt

$$\omega(A_1 \dots A_n) = \sum_{P \in \text{Part}(\{1, \dots, n\})} \prod_{I \in P} \omega_c(A_i, i \in I) . \quad (\text{IV.1})$$

Wir benutzen diese Formel jetzt auch im Fall, in dem keine Entwicklung nach Graphen gegeben ist, und betrachten sie als eine implizite Definition der zusammenhängenden Funktionen ω_c als multilinearen Funktionalen auf \mathcal{A} . Tatsächlich lässt sich die obige Gleichung nach den zusammenhängenden Funktionen auflösen, z.B. gilt $\omega_c(A) = \omega(A)$, $\omega_c(A_1, A_2) = \omega(A_1 A_2) - \omega(A_1)\omega(A_2)$, und es gilt die Rekursionsrelation

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \omega(A_1 \dots A_n) - \sum_{\#(P) > 1} \prod_{I \in P} \omega_c(A_i, i \in I) ,$$

wobei $\#(P)$ die Zahl der Elemente der Partition P angibt.

Es gibt auch geschlossene Formeln für die zusammenhängenden Funktionen. Multilineare Funktionalen auf Vektorräumen lassen sich immer als lineare Funktionalen auf dem Tensorprodukt der Vektorräume auffassen. In unserem Fall betrachten wir die Algebra \mathcal{A} als Vektorraum. Die zusammenhängenden Funktionen bilden ein System multilinearer Abbildungen und lassen sich formal als ein lineares Funktional auf der Tensoralgebra

$$T\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^{\otimes n}$$

auffassen (mit $\omega_c(1) = 0$). Auf der Menge der linearen Funktionalen auf $T\mathcal{A}$ kann das folgende assoziative Produkt eingeführt werden,

$$(FG)(A_1 \otimes \dots \otimes A_n) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} F(\bigotimes_{i \in I} A_i) G(\bigotimes_{j \in I^c} A_j) , \quad (\text{IV.2})$$

wobei I^c das Komplement von I in $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet. Das Einselement für dieses Produkt ist das lineare Funktional

$$1(A_1 \otimes \dots \otimes A_n) = \delta_{n0} .$$

Die definierende Gleichung (IV.1) für die zusammenhängenden Funktionen lässt sich mit Hilfe dieses Produkts in der folgenden Form schreiben,

$$\omega m = e^{\omega_c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_c^n}{n!} . \quad (\text{IV.3})$$

(Hierbei haben wir die Multiplikation in der Algebra \mathcal{A} zur Definition einer linearen Abbildung

$$m : \begin{cases} T\mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{A} \\ A_1 \otimes \dots \otimes A_n & \mapsto A_1 \dots A_n \end{cases}$$

benutzt.) Denn es gilt

$$\omega_c^k(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, n\}} \prod_j \omega_c(\bigotimes_{i \in I_j} A_j) .$$

Hierbei sind die Indexmengen paarweise disjunkt, und ihre Vereinigung ergibt $\{1, \dots, n\}$. Die Beiträge der leeren Mengen verschwinden wegen $\omega_c(1) = 0$, daher wird über alle Permutationen $P \in \text{Part}(\{1, \dots, n\})$ summiert. Jede Partition tritt $k!$ mal auf, entsprechend der Anzahl der Nummerierungsmöglichkeiten der Indexmengen. Nach Division durch $k!$ und Summation über k ergibt sich Gleichung (IV.1).

Aus (IV.3) erhält man durch Umkehrung der Potenzreihe der Exponentialfunktion die gesuchte geschlossene Formel für die zusammenhängenden Funktionen,

$$\omega_c = \log \omega m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\omega m - 1)^k . \quad (\text{IV.4})$$

Die angegebene Reihe konvergiert, da $(\omega m - 1)(1) = 0$. Ausgeschrieben ergibt sich

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \sum_{P \in \text{Part}(\{1, \dots, n\})} (-1)^{\#(P)} (\#(P) - 1)! \prod_{I \in P} \omega(\prod_{i \in I} A_i) .$$

Wir wollen die Formel anwenden auf Elemente der Form

$$\exp_{\otimes} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{\otimes k} , \quad A \in \mathcal{A} .$$

Wertet man lineare Funktionale auf $T\mathcal{A}$ auf diesen Elementen aus, so geht das Produkt der Funktionale in das Produkt der Werte über,

$$(FG)(\exp_{\otimes} A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F(A^{\otimes k}) G(A^{\otimes(n-k)}) = F(\exp_{\otimes} A) G(\exp_{\otimes} A) .$$

Daher gilt

$$\omega_c(\exp_{\otimes} A) = \log(\omega(e^A)) .$$

(Wir haben dabei benutzt, dass $m(\exp_{\otimes} A) = e^A$ gilt.)

Bei diesen Formeln ist zu beachten, dass über die Konvergenz der auftretenden Reihen nichts gesagt wird. Stattdessen werden sie im Sinne formaler Potenzreihen in A interpretiert.

Für die charakteristische Funktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes der wechselwirkenden Theorie ergibt sich damit

$$\chi(f) = \frac{\mu_0(e^{i\varphi(f)} e^{-\int V})}{\mu_0(e^{-\int V})} = e^{(\mu_0)_c((\exp_{\otimes} i\varphi(f) - 1) \exp_{\otimes}(-\int V))} .$$

Setzen wir $V = (g/4!) : \varphi^4 \cdot$, so erhalten wir für die zusammenhängenden Korrelationsfunktionen die folgende Entwicklung nach Graphen,

$$\mu_c(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-g)^k}{k!} \int d^{4k}(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \sum_{G \in \mathcal{G}_c(n \times 1, k \times 4)} \prod_{1 \leq i < j \leq n+k} \frac{S_2(x_i - x_j)^{l_{ij}}}{l_{ij}!}. \quad (\text{IV.5})$$

In dieser Entwicklung nennen wir die ersten n Vertizes, über die nicht integriert wird, äußere Vertizes, und die anderen innere Vertizes.

Praktisch dieselbe Formel gilt für die zusammenhängenden zeitgeordneten Funktionen der φ^4 -Theorie. Man ersetzt lediglich $-g$ durch ig und S_2 durch $i\Delta_F$. Aus diesen kann man dann nach den LSZ-Relationen die zusammenhängenden S-Matrix-Elemente bestimmen.

Es gibt noch eine andere Formel, mit der sich die zusammenhängende n -Punkt-Funktion berechnen lässt. Für die 2-Punkt-Funktion gilt

$$\omega_c(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(\omega \otimes \omega)(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2)$$

mit $\tilde{A} = A \otimes 1 - 1 \otimes A$, wobei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ als Algebra aufgefasst wird mit dem Produkt

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2.$$

Entsprechend findet man für die n -Punkt-Funktion

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{n} \omega^{\otimes n}(\tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_n) \quad (\text{IV.6})$$

mit

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^n e^{2\pi i(k-1)/n} 1 \otimes \cdots \underset{k\text{-te Stelle}}{A} \otimes \cdots 1. \quad (\text{IV.7})$$

Diese Formel ist vor allem dann nützlich, wenn man Positivitätseigenschaften von ω verwenden will (ω_c ist i.a. kein positives Funktional). Ist z.B. ω ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ , so kann $(\omega_c)_n$ mit Hilfe des Produktmaßes $\mu \times \cdots \times \mu$ berechnet werden.

7. Einteilchenirreduzible Funktionen (Vertexfunktionen)

Die Korrelationsfunktionen einer translationsinvarianten Theorie hängen nur von den relativen Koordinaten ab. Dies führt zu einer weiteren Faktorisierungseigenschaft. Sei G ein Graph, der aus zwei Untergraphen G_1 und G_2 besteht, die durch eine Linie l_0 miteinander verbunden sind. Seien S_{G_1} und S_{G_2} die jeweiligen Beiträge zur Schwingerfunktion. Dann gilt

$$S_G(x_i, i \in V(G)) = S_{G_1}(x_i, i \in V(G_1)) S_2(x_j, j \in \partial l_0) S_{G_2}(x_i, i \in V(G_2)).$$

Diese Formel bleibt sinnvoll, auch wenn die Faktoren Distributionen sind. Denn seien v_1, v_2 die Endpunkte der Linie l_0 in den Graphen G_1 ,

bzw. G_2 . Dann hängen wegen der angenommenen Translationsinvarianz S_{G_1} nur von den Relativkoordinaten $y_i = x_i - x_{v_1}$, $i \in V(G_1) \setminus \{v_1\}$ und S_{G_2} nur von den Relativkoordinaten $y_i = x_i - x_{v_2}$, $i \in V(G_2) \setminus \{v_2\}$ ab. Zusammen mit $y_{l_0} = x_{v_1} - x_{v_2}$ erhält man ein System unabhängiger Relativkoordinaten, und man erkennt, dass das obige Produkt ein Tensorprodukt ist.

Wir zerlegen daher zusammenhängende Graphen nach sogenannten einteilchenirreduziblen (1PI) (besser: einlinienirreduziblen) Untergraphen. Hierbei heißt ein zusammenhängender Graph 1PI, wenn er nicht durch Weglassen einer Linie in Zusammenhangskomponenten zerfällt.

Zur Durchführung dieser Zerlegung führen wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Vertizes ein. Wir nennen die Vertizes i und j des Graphen G stark verbunden, wenn sie in jedem durch Weglassen einer Linie aus G entstandenen Graphen durch einen Weg verbunden sind. Jede Äquivalenzklasse stark verbundener Vertizes bildet zusammen mit ihren inneren Linien einen maximalen 1PI-Untergraphen. Zieht man die maximalen 1PI-Untergraphen zu einem Vertex zusammen, so bleibt ein Baumgraph („tree“) (d.h. ein Graph ohne Schleifen („loops“)) übrig.

Wir nehmen im folgenden an, dass der Beitrag aller Graphen mit einem äußeren Vertex verschwindet. Dies bedeutet, dass die Einpunkt-Funktion Null ist. Wir können daher die 1PI-Graphen mit einer äußeren Linie weglassen.

Im Fall, dass nur zwei äußere Vertizes vorkommen (dies sind die Graphen, die zur Zwei-Punkt-Funktion beitragen), besitzt der sich ergebende Baumgraph dann keine Verzweigungen, und an den Vertizes der Ordnung 2 sitzen 1PI-Untergraphen, die durch 2 Linien mit dem übrigen Graph verbunden sind. Wir integrieren jetzt über alle Vertizes eines solchen 1PI-Graphen, an denen keine äußere Linie ansetzt, und summieren über die Beiträge aller 1PI-Graphen mit 2 äußeren Linien. Wir erhalten eine Funktion $\Sigma(x, y)$ (im Fall, dass die äußeren Linien am selben Vertex ankommen, multiplizieren wir den entstehenden Beitrag mit $\delta(x - y)$). Die störungstheoretische Formel für die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion G_2 der wechselwirkenden Theorie lautet nun

$$G_2(x, y) = S_2(x - y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^{4n} z S_2(x - z_1) \Sigma(z_1, z_2) S_2(z_2 - z_3) \cdots \Sigma(z_{n-1}, z_n) S_2(z_n - y) . \quad (\text{IV.8})$$

Wir betrachten jetzt die Funktionen G_2 , Σ und S_2 als Integralkerne von Operatoren in $L^2(\mathbb{R}^4)$. Dann lautet die Entwicklung in Gleichung

(IV.8)

$$G_2 = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(\Sigma S_2)^n .$$

Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit dem Limes

$$G_2 = (-\Delta + m^2 - \Sigma)^{-1} .$$

Man nennt Σ den Selbstenergieanteil (m^2 wird durch $m^2 - \Sigma$ ersetzt).

Sei entsprechend $\Gamma_n(x_1, \dots, x_n)$ die Summe aller Beiträge von 1PI-Graphen mit n äußeren Linien, $n > 2$. Man nennt Γ_n die n -Punkt-Vertex-Funktion. Man kann jetzt alle zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen G_n (auch Greensche Funktionen genannt) durch die Vertex-Funktionen und die zusammenhängende 2-Punkt-Funktion ausdrücken. Sei \mathcal{T}_n die Menge der Baumgraphen T , die n Randvertizes $1, \dots, n$ und eine beliebige (endliche) Anzahl von inneren Vertizes $v \in V_i(T)$ mit $n_v > 2$ anstoßenden Linien haben. Da die Zahl der Linien eines Baumgraphen um 1 kleiner ist als die Zahl seiner Linien $l \in K(T)$, jede Linie aber zwei Vertizes verbindet, ergibt sich die Gleichung

$$2\#(K(T)) = n + \sum_{v \in V_i(T)} n_v = 2(n + \#(V_i(T)) - 1) ,$$

also

$$\sum_v (n_v - 2) = n - 2 .$$

Jeder innere Vertex v wird durch n_v Hilfs-Vertizes $v_i, i = 1, \dots, n_v$ ersetzt. Wir schreiben $y_v = (y_{v_1}, \dots, y_{n_v})$ und $y_{\partial l} = (y_i, i \in \partial l)$. Dann gilt

$$G_n = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} G_T$$

mit

$$G_T(y_1, \dots, y_n) = \int \prod_{v \in V_i(T)} (d^{4n_v} y_v \Gamma_{n_v}(y_v)) \prod_{l \in K(T)} G_2(y_{\partial l}) . \quad (\text{IV.9})$$

Auch die Vertex-Funktionen lassen sich unabhängig von der ursprünglichen Entwicklung nach Graphen definieren. Dabei setzen wir $\Gamma_2 = -G_2^{-1}$ (im Sinne von Operatoren), $\Gamma_1 = 0$ (wir beschränken uns auf den Fall, dass $G_1 = 0$ gilt) und $\Gamma_0 = 0$.

Wir betrachten zunächst ein scheinbar völlig anderes Problem. Sei $\phi(x; j)$ der Erwartungswert des Feldes $\varphi(x)$ unter Einschaltung eines zusätzlichen Wechselwirkungsterm $-\varphi(j) = -\int d^4x \varphi(x) j(x)$ mit einer Testfunktion j ,

$$\phi(x; j) = \mu_j(\varphi(x)) = \frac{\mu(\varphi(x) e^{\varphi(j)})}{\mu(e^{\varphi(j)})} = \frac{\delta}{\delta j(x)} G(j)$$

mit der erzeugenden Funktion der zusammenhängenden Funktionen $G(j) = \log \mu(e^{\varphi(j)})$,

$$G(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G_n(j^{\otimes n}) .$$

Wir suchen jetzt die sogenannte effektive Wirkung, d.h. ein Funktional Γ auf dem Raum der klassischen Feldkonfigurationen, das ϕ als stationären Punkt besitzt. Wir setzen

$$\Gamma(\phi) = \sup_j (\phi(j) - G(j)) .$$

Falls das Supremum angenommen wird und G dort differenzierbar ist, liegt es bei $\phi = \frac{\delta G}{\delta j}$. Γ ist die Legendre-Transformierte von G . Umgekehrt ist

$$G(j) = \sup_{\phi} (\phi(j) - \Gamma(\phi)) .$$

die Legendre-Transformierte von Γ (falls G konvex ist). Das Supremum liegt bei $j = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi}$. Man erkennt, dass $\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} : \phi \rightarrow j$ die Umkehrabbildung von $\frac{\delta G}{\delta j} : j \rightarrow \phi$ ist.

Das Inverse einer Potenzreihe in einer Variable ist die sogenannte Bürmann-Lagrange-Reihe. Hier haben wir eine unendlich dimensionale Version dieser Formel zu finden. Wir zeigen, dass die Vertexfunktionen Γ_n bis auf ein Vorzeichen die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von Γ sind.

Sei

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi) = \frac{\delta^n \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x_1) \cdots \delta \phi(x_n)}$$

und

$$G_n(x_1, \dots, x_n; j) = \frac{\delta^n G(j)}{\delta j(x_1) \cdots \delta j(x_n)} .$$

Aus $\phi(x) = G_1(x, j)$ folgt

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta j(y)} = G_2(x, y; j) .$$

Also ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{\delta \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi(j))}{\delta j(y)} = \int dx_{n+1} \Gamma^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}; \phi(j)) G_2(x_{n+1}, y; j) .$$

Damit findet man

$$\delta(x - y) = \frac{\delta j(x)}{\delta j(y)} = \int dz \Gamma^{(2)}(x, z; \phi(j)) G_2(z, y; j) .$$

Als Integralkern ist $\Gamma^{(2)}$ also das Inverse von G_2 .

Wir differenzieren diese Gleichung jetzt nach j und erhalten

$$0 = \int dz (dz' \Gamma^{(3)}(x, z, z'; \phi(j)) G_2(z, y; j) G_2(z', y'; j) + \Gamma^{(2)}(x, z; \phi(j)) G_3(x, y, y'; j)) .$$

Auflösung nach G_3 liefert

$$G_3(y, y', y''; j) = - \int dz dz' dz'' G_2(y, z; j) G_2(y', z'; j) G_2(y'', z''; j) \Gamma^{(3)}(z, z', z''; \phi(j)).$$

Dies ist gerade die Formel für die Entwicklung von G_3 nach 1PI-Funktionen, wenn man $\Gamma_3 = -\Gamma^{(3)}$ setzt.

Wir nehmen jetzt an, dass die Formel IV.9 mit $\Gamma_n = -\Gamma^{(n)}$ bis zur Ordnung n gilt, und differenzieren sie nach j .

Wir erhalten

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x; j) = \\ \sum_T \left(\int \prod_v dy_v \left(\prod_v \Gamma_{n_v}(y_v; \phi(j)) \sum_l G_3(y_{\partial l}, x; j) \prod_{l' \neq l} G_2(y_{\partial l'}; j) + \right. \right. \\ \left. \left. \int dz \sum_v \Gamma_{n_v+1}(y_v, z; \phi(j)) G_2(z, x; j) \prod_{v' \neq v} \Gamma_{n_{v'}}(y_{n_{v'}}; \phi(j)) \prod_l G_2(y_{\partial l}; j) \right) \right). \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die Darstellung von G_3 durch Γ_3 und G_2 ein, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass jeder Baumgraph mit Randpunkten $1, \dots, n+1$ und inneren Vertizes der Ordnung größer als 2 aus einem mit Randpunkten $1, \dots, n$ dadurch hervorgeht, dass der Punkt $n+1$ entweder mit einer Linie (dabei entsteht ein neuer 3-er Vertex, dies entspricht der ersten Summe in der obigen Formel) oder mit einem inneren Vertex verbunden wird (2. Teil der Summe).

Ein Nebenergebnis der abgeleiteten Beziehung ist, dass eine bis auf Vorzeichen gleiche Entwicklung der Vertexfunktionen nach zusammenhängenden Funktionen existiert. (Man ersetzt G_n durch $-\Gamma_n$ und Γ_n durch $-G_n$.)

Die obigen Beziehungen gelten unabhängig davon, ob die Theorie translationsinvariant ist. Falls die zusammenhängenden Funktionen aber nur von den Relativkoordinaten abhängen, bietet sich eine Impulsraumdarstellung an. Es gilt dann für die Fourier-transformierten n -Punktfunktionen die Darstellung

$$\hat{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \delta(\sum p_i) g_n(p_1, \dots, p_n)$$

und

$$\hat{\Gamma}_n(p_1, \dots, p_n) = \delta(\sum p_i) \gamma_n(p_1, \dots, p_n),$$

wobei g_n und γ_n nur auf der Hyperfläche $\sum p_i = 0$ definiert sind. Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (IV.9) ein, so können wegen der δ -Funktionen alle Integrationen ausgeführt werden. Es bleiben lediglich die äußeren Impulse an den Randvertizes mit der Bedingung $\sum p_i = 0$ zurück. Alle Impulse an den inneren Vertizes sind durch die Randimpulse eindeutig festgelegt. Wir erhalten

$$g_n(p_1, \dots, p_n) = \sum_T \prod_l g_2(p_{\partial l}) \prod_v \gamma_{n_v}(p_v). \quad (\text{IV.10})$$

Wenden wir jetzt die LSZ-Relationen zur Berechnung der S-Matrix an, so müssen wir zunächst beachten, dass der Beitrag der Selbstenergie $\hat{\Sigma}(p, q) = \delta(p + q)\sigma(p)$ die Masse des Teilchens verschieben kann. Sind die Greenschen Funktionen Lorentz-invariant, so ist σ eine Funktion von p^2 . Ist $p^2 = M^2$ eine einfache Nullstelle von $p^2 - m^2 - \sigma(p) = 0$, so interpretieren wir M als die Masse des wechselwirkenden Teilchens. Nach den LSZ-Relationen erhalten wir die S-Matrix-Elemente, indem wir die Fourier-transformierten Greenschen Funktionen mit $p_i^2 - M^2$ für jeden äußeren Vertex multiplizieren und anschließend die äußeren Impulse auf die Massenschale $p_i^2 = M^2$ setzen. Auf der Massenschale gilt

$$(p^2 - M^2)g_2(p, -p) = \text{const} .$$

Der Beitrag der zusammenhängenden Funktion zur S-Matrix berechnet sich also (bis auf einen Normierungsfaktor) aus der Entwicklung (IV.10) nach den Vertexfunktionen, wobei alle äußeren Linien weggelassen werden („Amputation der äußeren Beine“).

KAPITEL V

Renormierung

1. Massen- und Wellenfunktionsrenormierung

Bei der störungstheoretischen Konstruktion wechselwirkender Quantenfeldtheorien ergeben sich Ausdrücke, die wegen der Singularitäten des Feynman-Propagators nicht wohldefiniert sind. Betrachten wir als Beispiel eine skalare Feldtheorie mit Wechselwirkung $\frac{g}{4!}\varphi^4$. Der erste Beitrag zur Selbstenergie ist

$$\Sigma(x, y) = \frac{g^2}{3!} (i\Delta_F(x - y))^3 .$$

Δ_F ist für lichtartige Argumente singular. Trotzdem sind die Potenzen von $\Delta_F(x)$ für $x \neq 0$ wohldefiniert. Denn außerhalb des Nullpunkts stimmt $i\Delta_F$ entweder mit Δ_+ (falls $x \notin \overline{V_-}$) oder Δ_- (falls $x \notin \overline{V_+}$) überein. Diese beiden Distributionen besitzen aber wohldefinierte Potenzen, z.B. gilt für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$

$$\int d^4x \Delta_+(x)^3 f(x) = (2\pi)^{-7} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2\omega_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2\omega_2} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2\omega_3} \hat{f}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$

mit der Fourier-Transformierten \hat{f} von f . Da \hat{f} im Unendlichen schnell abfällt, konvergiert das Integral auf der rechten Seite und definiert eine Distribution.

Es bleibt die Singularität bei $x = 0$. Wir versuchen zunächst wie bei den Potenzen von Δ_+ eine Darstellung durch die Fourier-Transformierten und erhalten

$$\int d^4x (i\Delta_F(x))^3 f(x) = (2\pi)^{-10} \int d^4p \hat{f}(p) \int \int \frac{d^4k d^4q}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k - q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} .$$

Das Problem besteht darin, dass das Integral über k und q nicht konvergiert. Wir entwickeln jetzt den Integranden nach Taylor bis zur 2.

Ordnung in p um den Punkt $p = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k - q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} = \\ & \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((k + q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\ & + \frac{2p(k + q)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((k + q)^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \\ & + \frac{4(p(k + q))^2 - p^2((k + q)^2 - m^2)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((k + q)^2 - m^2 + i\varepsilon)^3} \\ & + R(p, k, q) . \end{aligned}$$

Der Restterm R fällt für große Impulse mit der 9. Potenz ab und sollte daher bei der Integration keine Probleme bereiten. Beim ersten Term erwarten wir quadratische Divergenz; dieser Term hängt nicht vom äußeren Impuls p ab. Der zweite Term sollte linear divergieren; er hängt linear von p ab. Beim dritten Term erwarten wir schließlich eine logarithmische Divergenz und eine quadratische Abhängigkeit von p .

Um diese Vorstellungen zu präzisieren, regularisieren wir den Integranden durch Multiplikation mit einer Testfunktion, die für große Impulse verschwindet. Sei $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^8)$ mit $w(0) = 1$. Wir multiplizieren den Integranden mit $w(\frac{k}{\Lambda}, \frac{q}{\Lambda})$ mit dem Abschneide-Impuls (Cutoff) $\Lambda > 0$. Im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ konvergiert dieser Faktor gegen 1. Wir erhalten von den Termen der Taylor-Entwicklung nach Integration über k und q die Terme

$$a(\Lambda) + b_\mu(\Lambda)p^\mu + c_{\mu\nu}(\Lambda)p^\mu p^\nu + R(p, \Lambda) .$$

Für große Λ verhält sich $a(\Lambda)$ wie Λ^2 , $b_\mu(\Lambda)$ wie Λ und $c_{\mu\nu}(\Lambda)$ wie $\ln(\Lambda)$. $R(p, \Lambda)$ konvergiert für $\Lambda \rightarrow \infty$ gegen eine Distribution $R(p)$. Wie kann man den divergenten Größen einen Sinn geben?

Wir wollen zunächst die Freiheit bei der Wahl von w nutzen, sodass $b_\mu = 0$ und $c_{\mu\nu} = cg_{\mu\nu}$ ist. Dann erhält man bei endlichem Λ als quadratischen Term der effektiven Wirkung

$$\Gamma(\phi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(1+c)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2+a)\phi^2 \right) + \int d^4x \int d^4y \phi(x)\hat{R}(x-y; \Lambda)\phi(y) .$$

Wir definieren $Z = 1 + c$ (Wellenfunktionsrenormierung) und $m_{\text{ren}}^2 = (m^2 + a)Z^{-1}$ (Massenrenormierung). Dann setzen wir $\hat{\phi} = \sqrt{Z}\phi$ und $\hat{\Gamma}(\hat{\phi}) = \Gamma(\phi)$. Die lokalen Beiträge zu $\hat{\Gamma}$ sehen aus wie die der klassischen Wirkung mit der renormierten Masse. Wir halten jetzt $\hat{\phi}$ und m_{ren} fest und berechnen ϕ und m (die „nackte“ Masse) als Funktion von Λ . Dieses Verfahren nennt man multiplikative Renormierung.

Eine andere (äquivalente) Möglichkeit zur Elimination der Divergenzen ist es, Λ -abhängige Gegenterme zur Lagrangedichte hinzuzunehmen, die gerade die divergenten Terme in der effektiven Wirkung

kompensieren. In unserem Fall sind geeignete Gegenterme

$$-\frac{c}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{a}{2}\varphi^2 .$$

Dieses Verfahren nennt man additive Renormierung.

2. Kopplungskonstantenrenormierung

Die 4-Punkt-Vertex-Funktion ist in 2.Ordnung

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= g\delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3)\delta(x_3 - x_4) \\ &+ \frac{g^2}{2} \int d^4y d^4z (i\Delta_F(y - z))^2 \delta(x_1 - y) (\delta(x_2 - y)\delta(x_3 - z)\delta(x_4 - z) \\ &+ \delta(x_3 - y)\delta(x_2 - z)\delta(x_4 - z) + \delta(x_4 - y)\delta(x_2 - z)\delta(x_3 - z)) . \end{aligned}$$

Die Berechnung von Δ_F^2 führt auf ein logarithmisch divergentes Integral im Impulsraum,

$$\begin{aligned} \widehat{(i\Delta_F)^2}(p) &= (2\pi)^{-6} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} = \\ (2\pi)^{-6} \int d^4p &\left(\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} + \frac{p^2 - 2kp}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^2((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right) . \end{aligned}$$

Der zweite Term ist endlich, der erste Term divergiert logarithmisch. Wir regularisieren das Integral wie im vorigen Abschnitt und erhalten einen Beitrag der Form $d(\Lambda)$. Der Koeffizient von ϕ^4 in der effektiven Wirkung ist daher (bis auf nichtlokale Terme, die im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ endlich bleiben)

$$\frac{g}{4!} + \frac{g^2}{2 \cdot 4!} d(\Lambda) .$$

Wir haben wie vorher die beiden Alternativen: Wir können die renormierte Kopplungskonstante

$$g_{\text{ren}} = \left(g + \frac{g^2}{2} d\right) Z^{-2}$$

eingeführen und die nackte Kopplungskonstante g als Funktion von Λ ausdrücken (multiplikative Renormierung) oder einen Gegenterm $-\frac{g^2}{2 \cdot 4!} d\phi^4$ zur Lagrangedichte addieren.

Man kann zeigen, dass in der ϕ^4 -Theorie alle divergenten Terme in der effektiven Wirkung von der Form $\frac{a}{2}(\partial\phi)^2$, $\frac{c}{2}\phi^2$ und $\frac{d}{4!}\phi^4$ sind. Man kann daher sowohl die additive als auch die multiplikative Renormierung in jeder Ordnung der Störungstheorie durchführen.

Bei dem Beweis dieser Aussage bereiten allerdings die Divergenzen von Unterdiagrammen erhebliche Schwierigkeiten, die erst Ende der 60er Jahre bewältigt werden konnten. In der Impulsdarstellung treten diese Schwierigkeiten bereits beim „setting sun“-Graphen aus Abschnitt 1 auf, der den „Fisch“-Graphen aus diesem Abschnitt dreimal als divergenten Untergraphen enthält. Daher konvergiert das Integral

über den Restterm nicht absolut, und das Ergebnis hängt von der Wahl der Testfunktion w ab.

In der Ortsraumdarstellung ist dieses Problem allerdings in dieser Ordnung noch nicht vorhanden. Dies kann man in der folgenden Weise einsehen.

Wir wissen bereits, dass die Potenzen von Δ_+ wohldefinierte Distributionen sind. Wir können sie in der folgenden Weise schreiben

$$\Delta_+(x)^n = \int_0^\infty dM^2 \rho_n(M^2) \Delta_+(x, M) .$$

Hierbei ist

$$\rho_n(M^2) = (2\pi)^{-3(n-1)} \int \prod_j \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{2\omega_j} \delta(M - \sum \omega_j) \delta(\sum \mathbf{p}_j) .$$

Dies ist ein Spezialfall der Källan-Lehmann-Darstellung der 2-Punkt-Darstellung eines skalaren Feldes, angewandt auf die 2-Punkt-Funktion von $:\varphi^n:$. Man bestätigt leicht, dass $\rho_n(M^2)$ sich für $M \rightarrow \infty$ wie M^{2n-4} verhält und für $M < nm$ verschwindet. Für $n = 2$ z.B. gilt nach Ausführung einer Impulsintegration

$$\rho_2(M^2) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{4\omega^2} \delta(M - 2\omega) .$$

Wir erhalten

$$\rho_2(M^2) = \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} .$$

Eine entsprechende Darstellung mit derselben Funktion ρ gilt für Δ_- .

Es ist naheliegend, dieselbe Darstellung auch für die Potenzen des Feynman-Propagators zu verwenden. Dies führt aber zu divergenten Ausdrücken. Stattdessen kann man ausnützen, dass $\Delta_\pm(x; M)$ Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung zur Masse M sind. Wir setzen

$$(i\Delta_F(x))_{\text{ren}}^n = (-\square + a)^n \int_{n^2 m^2}^\infty dM^2 \frac{\rho_n(M^2)}{(M^2 + a)^{n-1}} i\Delta_F(x, M) .$$

Dieser Ausdruck stimmt für $x \neq 0$ mit dem unrenormierten überein. Er hängt in nichttrivialer Weise von der Wahl der Konstanten a ab.

Wir berechnen als Beispiel die Differenz der renormierten Quadrate des Feynmanpropagators mit Konstanten a und 0. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & (i\Delta_F(x))_{\text{ren}, a=0}^2 - (i\Delta_F(x))_{\text{ren}, a}^2 \\ &= (-\square) \int dM^2 \rho_2(M^2) \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{M^2 + a} \right) i\Delta_F(x, M) \\ & \quad - a \int dM^2 \frac{\rho_2(M^2)}{M^2 + a} i\Delta_F(x, M) . \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

Im ersten Term darf man jetzt wegen des schnelleren Abfalls für $M \rightarrow \infty$ den d'Alembert-Operator \square mit der Integration vertauschen. $i\Delta_F$

ist eine Greensche Funktion für den Klein-Gordon-Operator zur Masse M , daher gilt

$$-\square i\Delta_F(x, M) = M^2 i\Delta_F(x, M) + \delta(x) .$$

Der erste Term auf der rechten Seite kompensiert gerade das zweite Integral in (V.1). Man erkennt, dass sich die beiden renormierten Ausdrücke um ein Vielfaches der δ -Funktion unterscheiden.

3. Regularisierungs- und Renormierungsmethoden

3.1. Pauli-Villars-Regularisierung. Eine einfache Methode zur Regularisierung des Feynman-Propagators geht auf Pauli und Villars zurück. Dabei subtrahiert man vom Feynman-Propagator geeignete Linearkombinationen von Feynman-Propagatoren zu anderen Massen,

$$\Delta_F^{\text{reg}}(x) := \sum_{i=1}^n c_i \Delta_F(x, M_i)$$

mit $M_1 = m, c_1 = 1, \sum c_i M_i^{2k} = 0, k = 0, \dots, n-2$. Im Limes $M_i \rightarrow \infty, i > 1$ erhält man den ursprünglichen Feynman-Propagator zurück. Im einfachsten Fall ($n = 2$) ist

$$\Delta_F^{\text{reg}}(x) = \Delta_F(x, m) - \Delta_F(x, M) .$$

Da das Hochenergieverhalten des Feynman-Propagators in führender Ordnung unabhängig von M ist, gilt für die Fourier-Transformierte

$$\widehat{\Delta}_F^{\text{reg}} \sim \frac{1}{(k^2)^2}, \quad k^2 \rightarrow \infty \quad (n = 2) .$$

Der Fisch-Graph wird dadurch endlich. Bei stärker divergenten Graphen muss n entsprechend größer gewählt werden.

Der Vorteil der Pauli-Villars-Regularisierung besteht darin, dass sie Lorentz-invariant ist. Man kann den regularisierten Propagator als den Propagator eines Feldes $\phi = \sum \sqrt{c_i} \varphi_{M_i}$ ansehen, wobei die Felder φ_{M_i} unabhängige freie skalare Felder zur Masse M_i sind. Der zugehörige Hilbert-Raum ist das Tensor-Produkt der Fock-Räume zu den einzelnen freien Feldern. Da die Koeffizienten c_i nicht alle positiv sind, ist ϕ nicht hermitesch. Durch Abänderung des Skalarprodukts kann man ϕ hermitesch machen, dann verliert das Skalarprodukt allerdings seine Positivität.

Eine andere Version der Pauli-Villars-Regularisierung besteht darin, dass man die Subtraktion der Beiträge höherer Massen graphenweise ausführt, z. B. beim setting-sun-Graphen

$$(\Delta_F(x)^3)^{\text{reg}} = \sum_{i=1}^3 c_i \Delta_F(x, M_i)^3$$

mit $c_1 = 1, M_1 = m$ und $c_2 = \frac{M_3^2 - M_1^2}{M_2^2 - M_3^2}, c_3 = \frac{M_1^2 - M_2^2}{M_2^2 - M_3^2}$.

Leider kann die Pauli-Villars-Regularisierung nicht in nichtabelschen Eichtheorien durchgeführt werden, da man den nichtabelschen Eichfeldern keine Masse zuordnen kann.

3.2. Feynman-Parameter. Bei der Berechnung von Feynman-Graphen ist oft der folgende Trick nützlich. Man kann nämlich das Produkt von n Feynman-Propagatoren auf ein Integral über eine n -te Potenz einer quadratischen Form in den Impulsen zurückführen. Dann ist die Impuls-Integration ausführbar, und es bleibt das Integral über die bei diesem Verfahren eingeführten Parameter übrig.

Dieser Methode liegt das folgende Lemma zugrunde:

LEMMA V.1. *Seien $a_1, \dots, a_n > 0$. Dann gilt*

$$\frac{1}{a_1 \cdots a_n} = (n-1)! \int_{x_1, \dots, x_n > 0} dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta(\sum x_i - 1)}{(\sum x_i a_i)^n}.$$

Beweis: Für $n = 1$ ist die Formel offenbar richtig. Wir nehmen an, dass sie für ein $n \geq 1$ gilt. Für $n + 1$ lautet die rechte Seite

$$n! \int dx_1 \cdots dx_{n+1} \frac{\delta(\sum^{n+1} x_i - 1)}{(\sum^{n+1} x_i a_i)^{n+1}}.$$

Wir führen die Integration über x_{n+1} aus und erhalten

$$n! \int_{\sum x_i < 1} dx_1 \cdots dx_n \frac{1}{(\sum^n x_i (a_i - a_{n+1}) + a_{n+1})^n}.$$

Wir können jetzt auch die x_n -Integration durchführen. Das Ergebnis ist

$$(n-1)! \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \int_{\sum x_i < 1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \left(\sum^{n-1} x_i (a_i - b) + b \right)^{1-n} \Big|_{b=a_n}^{b=a_{n+1}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dies gleich

$$\frac{1}{a_n - a_{n+1}} \left(\frac{1}{a_1 \cdots a_{n-1} a_{n+1}} - \frac{1}{a_1 \cdots a_{n-1} a_n} \right) = \frac{1}{a_1 \cdots a_{n+1}}.$$

□

Wir benutzen diesen Trick zur Berechnung des Fisch-Graphen. Um Probleme mit wechselnden Vorzeichen zu vermeiden, betrachten wir das entsprechende Problem für die euklidische Theorie.

Das Quadrat der 2-Punkt-Schwingerfunktion ist formal gegeben durch

$$S_2(x)^2 = (2\pi)^{-8} \int d^4 p e^{ipx} \int d^4 k \frac{1}{(k^2 + m^2)((p-k)^2 + m^2)}.$$

Nach dem Lemma können wir den Integranden der k -Integration durch

$$\int_0^1 dx \frac{1}{(x((p-k)^2 + m^2) + (1-x)(k^2 + m^2))}$$

ersetzen. Die quadratische Form im Nenner ist

$$k^2 + m^2 + xp^2 - 2xpk$$

Wir setzen $q = k - xp$ und $a = m^2 + x(1-x)p^2$. Dann bleibt das Integral

$$\int d^4q (q^2 + a)^{-2}$$

zu berechnen. Dieses Integral divergiert logarithmisch. Wir schneiden es bei $|q| = \Lambda$ ab und erhalten

$$\int_{|q| \leq \Lambda} d^4q (q^2 + a)^{-2} = 2\pi^2 \int_0^\Lambda dq q^3 (q^2 + a)^{-2} = -\pi^2 \int_0^\Lambda dq q^2 \frac{d}{dq} \frac{1}{q^2 + a} .$$

Hierbei haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, dass die Oberfläche einer Kugel im \mathbb{R}^4 mit Radius r den Wert $2\pi^2 r^3$ hat. Wir können jetzt partiell integrieren und finden

$$-\pi^2 \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + a} + \pi^2 \int_0^\Lambda dq \frac{2q}{q^2 + a} .$$

Die Stammfunktion des verbleibenden Integranden ist $\ln(q^2 + a)$. Damit erhalten wir das Ergebnis

$$\int_{|q| < \Lambda} d^4q (q^2 + a)^{-2} = -\pi^2 \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + a} + \pi^2 \ln \frac{\Lambda^2 + a}{a} .$$

Der erste Term konvergiert für $\Lambda \rightarrow \infty$ gegen $-\pi^2$. Der zweite Term divergiert logarithmisch. Es gilt für $b > 0$

$$\ln \frac{\Lambda^2 + a}{a} = \ln \frac{\Lambda^2 + a}{\Lambda^2 + b} + \ln \frac{\Lambda^2 + b}{b} + \ln \frac{b}{a} .$$

Man erkennt, dass der divergente Term unabhängig von a gewählt werden kann. Das bedeutet, dass die Divergenz unabhängig vom äußeren Impuls ist. Wir subtrahieren den Wert des Integrals bei $p = 0$ und erhalten im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\int d^4q \left((q^2 + m^2 + x(1-x)p^2)^{-2} - (q^2 + m^2)^{-2} \right) = -\pi^2 \ln \left(1 + x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right) .$$

Es verbleibt die Integration über den Feynman-Parameter x . Dazu faktorisieren wir das Argument des Logarithmus

$$1 + x(1-x) \frac{p^2}{m^2} = -\frac{p^2}{m^2} \left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}} \right) \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}} \right) .$$

Die Stammfunktion des Logarithmus ist $x(\ln x - 1)$. Damit gilt

$$\int_0^1 dx \ln \left(1 + x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right) = \ln \frac{p^2}{m^2} + 2x(\ln x - 1) \Big|_{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}}} .$$

Nach einigen Umformungen erhält man das Ergebnis

$$2(\theta \coth \theta - 1)$$

mit $\sinh \theta = \frac{p^2}{4m^2}$.

Der bei Impuls $p = 0$ subtrahierte Beitrag des Fischgraphen ist also

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\hat{S}_2^2(p)_\Lambda - \hat{S}_2^2(0)_\Lambda \right) = \frac{1}{32\pi^4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2} \operatorname{Arsinh} \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}}} \right) =: f(p^2).$$

Für die Vertex-Funktion $\Gamma_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = \gamma_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \delta(\sum p_i)$ ergibt sich

$$\gamma_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = f(s) + f(t) + f(u)$$

mit den Mandelstam-Variablen $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 + p_3)^2$ und $u = (p_1 + p_4)^2$ (unter der Bedingung $\sum p_i = 0$).

3.3. α -Parameter oder Schwingerscher Eigenzeit-Formalismus.

Wir gehen aus von der Darstellung

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2 + m^2)}$$

des Propagators. Damit erhält man für den Beitrag des Fisch-Graphen

$$\begin{aligned} I(p) &:= \int \frac{d^4 q}{(q^2 + m^2)((p - q)^2 + m^2)} \\ &= \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int d^4 q e^{-(\alpha + \beta)m^2 - \alpha q^2 - \beta(p - q)^2}. \end{aligned}$$

Das Integral über q ist ein Gaußsches Integral. Man berechnet

$$\int d^4 q e^{-\alpha q^2 - \beta(p - q)^2} = e^{-(\alpha + \beta)(q - \frac{\beta}{\alpha + \beta} p)^2 - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} p^2} = \frac{\pi^2}{(\alpha + \beta)^2} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} p^2}.$$

Wir setzen $\alpha + \beta = \gamma$ und $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = x$. Dann ist

$$I(p) = \pi^2 \int_0^1 dx \int_0^\infty d\gamma \gamma^{-1} e^{-\gamma(m^2 + x(1-x)p^2)}.$$

Das Integral über γ divergiert bei $\gamma = 0$ logarithmisch.

Wir gehen jetzt so vor wie im letzten Abschnitt und subtrahieren den Wert bei $p = 0$ vor der Integration über γ . Wir erhalten einen Ausdruck der Form

$$F(a, b) = \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} (f(\gamma a) - f(\gamma b)).$$

Für einen solchen Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} (f(\gamma a) - f(\gamma b)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{d\gamma}{\gamma} f(\gamma) = f(0) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den renormierten Beitrag des Fisch-Graphen

$$I(p)_{\text{ren}} = -\pi^2 \int_0^1 dx \ln \left(1 + x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right),$$

also derselbe Wert wie bei der Berechnung mit Feynman-Parametern.

3.4. Dimensionale Regularisierung. Die Ultraviolett-Divergenzen werden in kleineren Raumdimensionen schwächer. In der α -Parameter-Darstellung erscheint die Raumdimension nach Integration über die inneren Impulse als ein Exponent in einem homogenen Polynom der α -Parameter. Im Beispiel des vorigen Abschnitts gilt für das unrenormierte Integral in Abhängigkeit von der Raumdimension d

$$I_d(p) = \mu^{4-d} \pi^{d/2} \int dx \int_0^\infty d\gamma \gamma^{-\frac{d-2}{2}} e^{-\gamma(m^2+x(1-x)p^2)} .$$

Hierbei ist μ ein willkürlich gewählter Parameter mit der Dimension einer Masse. Dadurch wird das Integral auch für $d \neq 4$ dimensionslos. Der Integrand ist auch für komplexe Werte von d wohldefiniert, und das Integral ist für $\text{Re } d < 4$ absolut konvergent. Es gilt für $a > 0$

$$\int d\gamma \gamma^{-\frac{d-2}{2}} e^{-\gamma a} = a^{\frac{d-4}{2}} \int d\gamma \gamma^{-\frac{d-2}{2}} e^{-\gamma} = a^{\frac{d-4}{2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) .$$

Die Γ -Funktion ist analytisch mit Polen an den Punkten $0, -1, -2, \dots$. Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) .$$

Also gilt

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{6-d}{2}\right)}{\frac{4-d}{2}} .$$

Wir erkennen, dass $I_d(p)$ eine analytische Fortsetzung mit einem Pol bei $d = 4$ besitzt. Der Koeffizient des Polterms ist π^2 . Nach Subtraktion des Polterms erhalten wir eine in einer Umgebung von $d = 4$ analytische Funktion,

$$I_d(p)_{\text{ren}} = I_d(p) - \frac{\pi^2}{\frac{4-d}{2}} = \frac{2}{d-4} \left(\int_0^1 dx \pi^{d/2} \left(\frac{m^2+x(1-x)p^2}{\mu^2} \right)^{\frac{d-4}{2}} \Gamma\left(\frac{6-d}{2}\right) - \pi^2 \right)$$

Sei $\varepsilon = \frac{4-d}{2}$. Der Limes $d \rightarrow 4$ ist dann die Ableitung der Funktion

$$\int_0^1 dx \pi^{2-\varepsilon} \left(\frac{\mu^2}{m^2+x(1-x)p^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon)$$

nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$. Das Ergebnis ist

$$I(p)_{\text{ren}} = \pi^2 \int_0^1 dx \left(-\ln \pi - \ln \frac{m^2+x(1-x)p^2}{\mu^2} + \Gamma'(1) \right) .$$

Es hängt von der Wahl des Parameters μ ab. Man nennt den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck minimal subtrahiert (MS-Schema). Die Konstante $\gamma = -\Gamma'(1) = 0.5772$ ist die sogenannte Euler-Mascheroni-Konstante. Meist benutzt man die modifizierte minimale Substitution ($\overline{\text{MS}}$, gesprochen MS bar). Hierbei wird zusätzlich die Konstante $-\pi^2(\gamma + \ln 4\pi)$ subtrahiert.

Diese Konventionen haben keine physikalische Bedeutung. Physikalisch wohldefinierte Größen sind z.B. die Differenzen $I(p)_{\text{ren}} - I(0)_{\text{ren}}$. Diese stimmen mit den vorher erhaltenen Ausdrücken überein.

3.5. Fortsetzung von Distributionen. Die bisher besprochenen Verfahren beruhen wesentlich auf der Form des Feynman-Propagators im Impulsraum. Wir haben aber bereits gesehen, dass im Falle der Potenzen des Feynman-Propagators das Ergebnis im Ortsraum für $x \neq 0$ sofort angegeben werden kann. Das verbleibende Problem besteht darin, eine Distribution, die nur auf Testfunktionen erklärt ist, die in einer Umgebung des Nullpunkts verschwinden, auf allen Testfunktionen zu erklären. Für die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit dieser Fortsetzungen kommt es auf das singuläre Verhalten der Distribution in der Nähe des Nullpunkts an. Dieses Verhalten lässt sich nach Steinmann [?] bequem durch den Skalengrad charakterisieren.

DEFINITION V.1. Sei T eine Distribution auf \mathbb{R}^d oder $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Der Skalengrad $\text{sd}(T)$ ist die kleinste Zahl aus $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^\delta T(\lambda x) = 0 \quad \forall \delta > \text{sd}(T)$$

(Konvergenz im Sinne von Distributionen).

BEISPIEL V.1. (i) Sei f eine stetige Funktion mit $f(0) \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^\delta \int dx f(\lambda x) \varphi(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & , \delta > 0 \\ f(0) \int \varphi & , \delta = 0 \\ \infty \int \varphi & , \delta < 0 \end{cases}$$

also $\text{sd}(f) = 0$.

(ii) Für die δ -Funktion gilt

$$\delta(\lambda x) = \lambda^{-d} \delta(x) ,$$

also $\text{sd}(\delta) = d$.

(iii) Die Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ definiert eine Distribution auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $\lambda^\delta e^{\frac{1}{\lambda x}}$ für alle $\delta \in \mathbb{R}$ divergiert, ist $\text{sd}(f) = \infty$.

(iv) Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt die Eigenschaft

$$\lambda^\delta f(\lambda x) \rightarrow 0 \quad \forall \delta \in \mathbb{R} ,$$

daher ist der Skalengrad der zugehörigen Distribution $\text{sd}(f) = -\infty$.

(v) Der Feynman-Propagator hat das Skalenverhalten

$$\Delta_F(\lambda x, m) = \lambda^{-2} \Delta_F(x, \lambda m) .$$

Im Limes $m \rightarrow 0$ konvergiert der Feynman-Propagator gegen den Feynman-Propagator der masselosen Theorie. Daher ist der Skalengrad des Feynman-Propagators $\text{sd}(\Delta_F) = 2$ (in 4 Dimensionen).

(vi) Sei

$$T(\varphi) = \int d^n p \hat{T}(p) \hat{\varphi}(-p)$$

mit $\hat{T}(\lambda^{-1}p) \rightarrow \lambda^{-N} t(p)$ für $\lambda \rightarrow 0$. Dann gilt

$$\int d^n x T(\lambda x) \varphi(x) = \lambda^{-n} \int d^n x T(x) \varphi(\lambda^{-1}x) .$$

Mit

$$\varphi(\lambda^{-1}x) = (2\pi)^{-n/2} \lambda^n \int d^n p e^{ipx} \hat{\varphi}(\lambda p)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int d^n x T(\lambda x) \varphi(x) &= \int d^n p \hat{T}(p) \hat{\varphi}(-\lambda p) \\ &= \lambda^{-n} \int d^n p \hat{T}(\lambda^{-1}p) \hat{\varphi}(-p) \\ &\sim \lambda^{-(n+N)} \int d^n p t(p) \hat{\varphi}(p) . \end{aligned}$$

Der Skalengrad von T ist also $\text{sd}(T) = n + N$.

Der Skalengrad besitzt die folgenden Eigenschaften:

- LEMMA V.2. (i) $\text{sd}(\partial^\alpha T) \leq \text{sd}(T) + |\alpha|$ (Hier wie im folgenden bezeichnet α einen Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ mit $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$. $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$ bezeichnet die Länge des Multi-Index.)
- (ii) $\text{sd}(x^\alpha T) \leq \text{sd}(T) - |\alpha|$
- (iii) $\text{sd}(S + T) \leq \max(\text{sd}(S), \text{sd}(T))$
- (iv) $\text{sd}(fT) \leq \text{sd} T$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Die letzte Eigenschaft bedarf eines Beweises. Nach Voraussetzung gilt

$$\lambda^\delta \int d^d x T(\lambda x) \varphi(x) \rightarrow 0 \quad \forall \delta > \text{sd}(T) , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$$

mit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Die Familie der Distributionen $T_\lambda(x) = \lambda^\delta T(\lambda x)$, $\lambda \leq 1$ ist also insbesondere schwach beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Banach-Steinhaus) ist sie dann auch gleichmäßig beschränkt, d.h. es gibt zu jedem kompakten Gebiet $K \subset \mathcal{U}$ ein Polynom P , sodass für $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ gilt

$$|T_\lambda(\varphi)| \leq \sup_x |P(\partial) \varphi(x)| .$$

Für den Skalengrad von fT folgt

$$|\lambda^\delta \int d^d x f(\lambda x) T(\lambda x) \varphi(x)| \leq \sup_x |P(\partial_x) f(\lambda x) \varphi(x)| .$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist beschränkt in λ , $\lambda \leq 1$, daher ist der Skalengrad $\text{sd}(fT) \leq \delta$. Da dies für alle $\delta > \text{sd}(T)$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Wir kommen jetzt zu dem grundlegenden Existenz- und Eindeutigkeitsatz:

THEOREM V.3. *Sei $T_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Dann gilt:*

- (i) *Wenn $\text{sd}(T_0) < n$ ist, dann existiert eine eindeutige Distribution $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften*

$$T(\varphi) = T_0(\varphi) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

und $\text{sd}(T) = \text{sd}(T_0)$.

- (ii) *Im Fall $n \leq \text{sd}(T_0) < \infty$ gibt es Distributionen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften*

$$T(\varphi) = T_0(\varphi) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

und $\text{sd}(T) = \text{sd}(T_0)$. Zwei derartige Distributionen T_1 und T_2 unterscheiden sich um eine Ableitung der δ -Funktion,

$$T_1 - T_2 = P(\partial)\delta ,$$

wobei P ein Polynom mit Grad $\deg(P) \leq \text{sd}(T) - n$ ist.

- (iii) *Wenn $\text{sd}(T_0) = \infty$ ist, dann gibt es keine Distribution $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft*

$$T(\varphi) = T_0(\varphi) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) .$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist umfangreich. Wir beginnen mit Punkt (iii). Da jede Distribution T lokal als Ableitung einer stetigen Funktion dargestellt werden kann, es also zu jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Darstellung der Form $T(\varphi) = P(\partial)f(\varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ gibt, ist der Skalengrad von T endlich. Da T_0 eine Einschränkung von T auf einen kleineren Testfunktionenraum ist, muss dann auch der Skalengrad von T_0 endlich sein.

Wir kommen jetzt zur Eindeutigkeitsaussage von Punkt (i). Zwei Fortsetzungen T_1 und T_2 unterscheiden sich um eine Distribution R mit $\text{supp } R = \{0\}$. Eine solche Distribution ist aber eine Ableitung der δ -Funktion und besitzt, wenn sie nicht verschwindet, einen Skalengrad $\geq n > \text{sd}(T_1), \text{sd}(T_2)$. Also ist $T_1 = T_2$.

Als nächstes zeigen wir die Existenz einer Fortsetzung von T_0 im Fall $\text{sd}(T_0) < n$. Wir wählen dazu eine Testfunktion $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(x) = 1$ in einer Umgebung des Nullpunktes. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $(1 - \chi(2^k x))\varphi(x) = 0$ in einer Umgebung des Nullpunkts, also ist

$$T_k(x) = T_0(x)(1 - \chi(2^k x))$$

eine Folge von Distributionen, die auf ganz \mathbb{R}^n erklärt sind. Da es für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\chi(2^k x)\varphi(x) = 0$ ist, für alle x und für alle $k \geq k_0$, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\varphi) = T_0(\varphi) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) .$$

Wir zeigen jetzt, dass der Limes $(T_k)_{k \rightarrow \infty}$ für alle Testfunktionen existiert. Da der Raum der Distributionen folgenvollständig ist, definiert der Limes dann eine Distribution T .

Wir betrachten zunächst die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder,

$$\begin{aligned} T_{k+1}(\varphi) - T_k(\varphi) &= \int d^n x T_0(x) (\chi(2^k x) - \chi(2^{k+1} x)) \varphi(x) \\ &= 2^{-kn} \int d^n x T_0(2^{-k} x) \varphi(2^{-k} x) (\chi(x) - \chi(2x)) . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung besitzt T_0 einen Skalengrad kleiner als n , nach Lemma V.2 gilt dasselbe auch für φT_0 . Sei $\text{sd}(T_0) < \delta < n$. Dann konvergiert die Folge

$$2^{-k\delta} \int d^n x (\varphi T_0)(2^{-k} x) (\chi(x) - \chi(2x))$$

nach Definition des Skalengrades gegen Null, ist also insbesondere durch eine Konstante c dem Betrage nach beschränkt. Daher gilt die Abschätzung

$$|T_{k+1}(\varphi) - T_k(\varphi)| \leq 2^{-k(n-\delta)} c .$$

Aufsummation liefert dann die Abschätzung für $l > k$

$$|T_l(\varphi) - T_k(\varphi)| \leq c \sum_{k'=k}^{l-1} 2^{-k'(n-\delta)} \leq c(1 - 2^{-(n-\delta)})^{-1} 2^{-k(n-\delta)} .$$

Die Folge $(T_k(\varphi))_k$ erfüllt also für jedes φ das Cauchy-Kriterium und konvergiert daher. Wir setzen

$$T(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\varphi) .$$

Es bleibt der Skalengrad von T zu berechnen. Da T nach Konstruktion eine Fortsetzung von T_0 ist, kann der Skalengrad nicht kleiner werden.

Sei $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten für $\delta > \text{sd} T$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} \lambda^\delta \int d^n x T(\lambda x) \varphi(x) &= \lambda^{\delta-n} \int d^n x T(x) \varphi(\lambda^{-1} x) \\ &= \lambda^{\delta-n} \lim_{k \rightarrow \infty} \int d^n x T_0(x) (1 - \chi(2^k x)) \varphi(\lambda^{-1} x) \\ &= \lambda^{\delta-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int d^n x T_0(x) (\chi(2^k x) - \chi(2^{k+1} x)) \varphi(\lambda^{-1} x) . \end{aligned}$$

In der obigen Summe verschwinden die Terme für genügend kleine k in Abhängigkeit von λ . Denn sei $R = \sup\{|x|, x \in \text{supp } \varphi\}$ und $\varepsilon = \inf\{|x|, \chi(x) \neq 1\}$. Dann verschwindet das Produkt

$$(\chi(2^k x) - \chi(2^{k+1} x)) \varphi(\lambda^{-1} x) ,$$

falls die Bedingungen $\lambda^{-1}|x| < R$ und $2^{k+1}|x| > \varepsilon$ nicht erfüllt sind.
Für

$$2^{-(k+1)}\varepsilon < \lambda R$$

verschwindet das Produkt für alle x . Die obige Summe kann daher auf $k \geq k_\lambda$, mit $k_\lambda = \ln(\varepsilon/2\lambda R)/\ln 2$ eingeschränkt werden.

Wir schätzen jetzt die einzelnen Summanden wie vorher ab,

$$\begin{aligned} & \left| \int d^n x T_0(x) (\chi(2^k x) - \chi(2^{k+1} x)) \varphi(\lambda^{-1} x) \right| \\ &= 2^{-kn} \left| \int d^n x T_0(2^{-k} x) (\chi(x) - \chi(2x)) \varphi(\lambda^{-1} 2^{-k} x) \right| \\ &\leq 2^{-k(n-\delta')} \sup_x |P(\partial_x) (\chi(x) - \chi(2x)) \varphi(\lambda^{-1} 2^{-k} x)| \end{aligned}$$

für $\text{sd } T_0 \leq \delta' < n, \delta$. Für $k \geq k_\lambda$ ist $\lambda^{-1} 2^{-k}$ beschränkt, daher ist auch das Supremum in der obigen Ungleichung durch eine von k und λ unabhängige Konstante beschränkt. Wir können jetzt die Reihe aufsummieren und erhalten die Abschätzung

$$\left| \int d^n x T(x) \varphi(\lambda^{-1} x) \right| \leq c 2^{-(n-\delta')k_\lambda} .$$

Setzt man den Wert von k_λ ein, so erhält man die gewünschte Aussage über den Skalengrad.

Wir kommen jetzt zum Fall $n \leq \text{sd } T_0 < \infty$. Hier kann mit denselben Argumenten gezeigt werden, dass es eine eindeutige Fortsetzung mit demselben Skalengrad auf den Raum der Testfunktionen gibt, die bei Null bis zur Ordnung $\omega = \text{sd } T_0 - n$ verschwinden.

Sei

$$\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha \varphi(0) = 0, |\alpha| \leq \omega \} .$$

Wir nutzen aus, dass sich jedes $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ in der Form

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|=[\omega]+1} x^\alpha \psi_\alpha(x)$$

darstellen lässt, mit $\psi_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dies folgt aus der Taylorentwicklung von $\varphi(\lambda x)$ um $\lambda = 0$; die Terme bis zur Ordnung $[\omega]$ verschwinden, und der Restterm

$$\varphi(x) = \int_0^1 d\lambda \frac{(1-\lambda)^{[\omega]}}{[\omega]!} \frac{d^{[\omega]+1}}{d\lambda^{[\omega]+1}} \varphi(\lambda x)$$

ist von der gewünschten Form mit $\psi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Durch Multiplikation der Gleichung mit einer Testfunktion, die auf dem Träger von φ gleich 1 ist, gewinnen wir die gewünschte Darstellung. Wenn wir diese Darstellung in den Beweis von (i) einsetzen, so erhalten wir das folgende Theorem:

THEOREM V.4. *Sei $T_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $n \leq \text{sd } T_0 < \infty$. Dann gibt es eine eindeutige bestimmte Distribution T_ω auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$, $\omega = \text{sd } T_0 - n$, mit $T_\omega(\varphi) = T_0(\varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $\text{sd } T_\omega = \text{sd } T_0$.*

Der letzte Schritt des Beweises ist die Fortsetzung der Distribution T_ω auf ganz $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen dazu einen Komplementärraum \mathcal{W} zu $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und setzen

$$T = T_\omega \oplus l$$

mit einem beliebigen linearen Funktional l auf \mathcal{W} . Dies ist offenbar die allgemeinste Fortsetzung von T_ω . Der Dualraum von \mathcal{W} kann mit der Menge der Distributionen identifiziert werden, die auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ verschwinden,

$$l \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp = \{P(\partial)\delta, \deg P \leq \omega\} .$$

Die Distributionen $\{\partial^\alpha \delta, |\alpha| \leq \omega\}$ bilden offenbar eine Basis von $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp$. Die duale Basis in \mathcal{W} besteht aus Funktionen w_α mit $\partial^\alpha w_\beta(0) = (-1)^{|\alpha|} \delta_{\alpha\beta}$, $|\alpha|, |\beta| \leq \omega$. Umgekehrt erzeugt jede Familie von Testfunktionen w_α mit dieser Eigenschaft einen Komplementärraum von $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$. Ein Beispiel bilden die Funktionen $w_\alpha = \frac{(-x)^\alpha}{\alpha!} w$ mit einer Funktion w , die in einer Umgebung von Null identisch 1 ist.

Mit Hilfe der dualen Basis können wir jetzt einen Projektor W von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ konstruieren,

$$W = 1 - \sum_{|\alpha| \leq \omega} |w_\alpha\rangle \langle \partial^\alpha \delta| .$$

W kann als eine modifizierte Taylor-Subtraktion aufgefasst werden. Die Fortsetzungen von T_ω sind dann von der Form

$$T = T_\omega W + l$$

mit $l \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp$.

Tatsächlich kann man durch Modifikation von \mathcal{W} das lineare Funktional l verschwinden lassen. Denn sei $\psi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ mit $T_\omega(\psi) = 1$. Dann ist auch

$$W' = W + |\psi\rangle \langle l|$$

ein Projektor auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$T_\omega W' = T_\omega W + l .$$

Die zugehörige duale Basis ist $\{w'_\alpha = w_\alpha - c_\alpha \psi\}$, wenn $l = \sum c_\alpha \partial^\alpha \delta$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die so erhaltenen Fortsetzungen denselben Skalengrad wie T_ω besitzen. Sei

$$(V_\lambda \varphi)(x) = \lambda^{-n} \varphi(\lambda^{-1} x) .$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\lambda^\delta \langle T_\omega, V_\lambda \phi \rangle \rightarrow 0$$

für $\delta > \text{sd } T_\omega$ und $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten

$$\lambda^\delta \langle T_\omega, W V_\lambda \varphi \rangle = \lambda^\delta \langle T_\omega, V_\lambda W \varphi \rangle + \lambda^\delta \langle T_\omega, V_\lambda (V_\lambda^{-1} W V_\lambda - W) \varphi \rangle .$$

Der erste Term konvergiert nach Voraussetzung gegen Null. Zur Untersuchung des zweiten Terms schreiben wir

$$V_\lambda^{-1}WV_\lambda - W = - \int_\lambda^1 d\mu \frac{d}{d\mu} V_\mu^{-1}WV_\mu = \sum_{|\alpha| \leq \omega} \int \frac{d\mu}{\mu} \mu \frac{d}{d\mu} |V_\mu^{-1}w_\alpha\rangle \langle \partial^\alpha \delta | V_\mu.$$

Mit

$$\langle \partial^\alpha \delta, V_\mu \varphi \rangle = \mu^{-(n+|\alpha|)} \langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle$$

und

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} (V_\mu^{-1}w_\alpha)(x) \mu^{-(n+|\alpha|)} &= \mu \frac{d}{d\mu} \mu^{-|\alpha|} w_\alpha(\mu x) \\ &= (-|\alpha| + \mu x^\rho \partial_\rho) w_\alpha(\mu x) \mu^{-|\alpha|} = \mu^{-(n+|\alpha|)} (V_\mu^{-1}w'_\alpha)(x), \end{aligned}$$

wobei

$$w'_\alpha(x) = (-|\alpha| + x^\rho \partial_\rho) w_\alpha(x)$$

ist, ergibt sich

$$\lambda^\delta \langle T_\omega, V_\lambda (V_\lambda^{-1}WV_\lambda - W) \varphi \rangle = \sum_\alpha \int_\lambda^1 \frac{d\mu}{\mu} \lambda^\delta \mu^{-(n+|\alpha|)} \langle T_\omega, V_{\lambda\mu^{-1}} w'_\alpha \rangle \langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle.$$

Nach Definition des Skalengrades existieren zu jedem $\delta' > \text{sd } T_\omega$ Konstanten $c_\alpha > 0$ mit

$$|\langle T_\omega, V_{\lambda\mu^{-1}} w'_\alpha \rangle \langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle| \leq c_\alpha (\lambda\mu^{-1})^{-\delta'}.$$

Durch Einsetzen findet man die Abschätzung

$$\sum_\alpha \lambda^{\delta-\delta'} \int_\lambda^1 \frac{d\mu}{\mu} \mu^{\delta'-n-|\alpha|} c_\alpha \leq \lambda^{\delta-\delta'} (\delta' - n - |\alpha|)^{-1} \sum c_\alpha.$$

Also ist $\text{sd } T \leq \delta'$ für alle $\delta' > \text{sd } T_\omega$, d.h. $\text{sd } T = \text{sd } T_\omega$. \square

BEISPIEL V.2. (i) Sei $T_0(\varphi) = \int dx \frac{\varphi(x)}{|x|}$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Es gilt $\text{sd } T_0 = 1$, daher kann T_0 eindeutig auf $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi(0) = 0\}$ fortgesetzt werden.

Sei $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $w(0) = 1$. Dann gilt

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \oplus \{\lambda w, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Denn für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - w(x)\varphi(0) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$$

und daher

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi(0)w.$$

Wir definieren eine Fortsetzung von T_0 durch

$$\begin{aligned}
 T(\varphi) &= T_0(\varphi_0) = \int dx \frac{\varphi(x) - \varphi(0)w(x)}{|x|} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) dx \frac{\varphi(x) - \varphi(0)w(x)}{x} \\
 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-\ln|x|) (\varphi(x) - \varphi(0)w(x)) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) dx \ln|x| \frac{d}{d|x|} (\varphi(x) - \varphi(0)w(x)) \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \ln|x| \operatorname{sign} x \frac{d}{dx} (\varphi(x) - \varphi(0)w(x)) \\
 &= \int dx \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sign} x \ln|x| \right) \varphi(x) - \varphi(0) \int dx \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sign} x \ln|x| \right) w(x) ,
 \end{aligned}$$

also $T = (\operatorname{sign} x \ln|x|)' + c\delta$ mit $c = -(\operatorname{sign} x \ln|x|)'(w)$.

(ii) Sei $T_0(x) = (i\Delta_F(x))^n$, $x \neq 0$. Mit der Spektralfunktion ρ_n gilt die Darstellung

$$T_0(x) = \int dM^2 \rho_n(M) i\Delta_F(x, M)$$

Der Skalengrad von T_0 ist $2n$. Wir wählen Testfunktionen w_α mit $\partial^\beta w_\alpha(0) = (-1)^{|\alpha|} \delta_\alpha^\beta$, $|\alpha|, |\beta| \leq 2n - 4$. Dann ist

$$W\varphi = \varphi - \sum_{\alpha} w_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) (-1)^{|\alpha|} \in \mathcal{D}_{2n-4}(\mathbb{R}^4) .$$

Da die Delta-Funktion und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $2n - 4$ auf $W\varphi$ verschwinden, gilt

$$\int d^4x \Delta_F(x, \mathcal{M})(W\varphi)(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{M^{2(n-1)}} \int d^4x \Delta_F(x, M) \square^{n-1}(W\varphi)(x)$$

Daher ist T_ω , $\omega = 2n - 4$ gegeben durch

$$T_\omega = (-1)^{n-1} \square^{n-1} \int dM^2 \frac{\rho_n(M)}{M^{2(n-1)}} i\Delta_F(\cdot, M) .$$

$T = T_\omega W$ ist dann

$$T = (-1)^{n-1} \square^{n-1} \int dM^2 \frac{\rho_n(M)}{M^{2(n-1)}} i\Delta_F(\cdot, M) + \sum_{\alpha} c_\alpha \partial^\alpha \delta$$

mit

$$c_\alpha = -(-1)^{n-1} \square^{n-1} \int dM^2 \frac{\rho_n(M)}{M^{2(n-1)}} \int d^4x i\Delta_F(x, M) w_\alpha(x) .$$

Bei dem beschriebenen Fortsetzungsverfahren treten keine Divergenzen auf. Der Zusammenhang mit den vorher behandelten Renormierungsmethoden ist, allgemein gesehen, der folgende: Sei (T^Λ) eine Folge von Distributionen, die auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ gegen T_ω konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 T &= T_\omega W = \lim_{\Lambda} T^\Lambda W \\
 &= \lim_{\Lambda} T^\Lambda - \sum_{\alpha} T^\Lambda(w_\alpha) \partial^\alpha \delta .
 \end{aligned}$$

Die divergenten Gegenterme sind also $T^\Lambda(w_\alpha)\partial^\alpha\delta$.

Falls T_ω temperiert ist (also auf $\mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha\varphi(0) = 0, |\alpha| \leq \omega\}$ definiert ist), und die Folge $T^\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^n)$ gegen T_ω konvergiert, kann die Fortsetzung auch im Impulsraum diskutiert werden. Aus $\partial^\alpha W\varphi(0) = 0$ für $|\alpha| \leq \omega$ folgt

$$\int d^n p p^\alpha \widehat{W}\varphi(p) = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T_\omega(W\varphi) = \lim_\Lambda T^\Lambda(W\varphi) \\ &= \lim_\Lambda \int d^n p \widehat{T}^\Lambda(p) \widehat{W}\varphi(-p) \\ &= \lim_\Lambda \int d^n p \left(\widehat{T}^\Lambda(p) - \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{p^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \widehat{T}^\Lambda(0) \right) \widehat{W}\varphi(-p). \end{aligned}$$

Falls die bei $p = 0$ subtrahierten Distributionen

$$\widehat{T}^\Lambda_{\text{ren}} := \widehat{T}^\Lambda(p) - \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{p^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \widehat{T}^\Lambda(0)$$

auf ganz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen eine temperierte Distribution \widehat{T}_{ren} konvergieren, findet man

$$\widehat{T}(p) = \widehat{T}_{\text{ren}}(p) + \sum c_\alpha p^\alpha$$

mit $c_\alpha = - \int d^n p \widehat{T}_{\text{ren}}(p) \widehat{w}_\alpha(-p)$. Dieser Fall liegt bei Feynman-Integralen in massiven Theorien vor. In Theorien mit masselosen Teilchen muss man stattdessen die Taylor-Entwicklung bei einem raumartigen Impuls subtrahieren.

Die Taylor-Subtraktion im Impulsraum ist die Grundlage des BPHZ (Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann)-Renormierungsverfahrens. Wie bei der Epstein-Glaser-Methode treten keine divergenten Gegenterme auf.

Wir kommen jetzt zu der Frage, ob die eventuell vorhandenen Symmetrien von T_0 bei der Renormierung erhalten bleiben können.

Dass dies nicht immer der Fall ist, sieht man am Beispiel von $\frac{1}{|x|}$. $\frac{1}{|x|}$ ist eine homogene Distribution auf $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, seine Fortsetzungen $\frac{d}{dx} \left(\text{sign } x \ln \frac{|x|}{a} \right)$, $a > 0$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ aber nicht. In der Feldtheorie tritt dieses Problem bei der Renormierung des Fischgraphen in der masselosen φ^4 -Theorie auf. Die renormierte Theorie ist nicht mehr skaleninvariant („dimensionale Transmutation“).

Sei V eine Darstellung einer Gruppe G auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sodass $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ und T_ω invariant unter V sind,

$$\langle T_\omega, V(g)\varphi \rangle = \langle T_\omega, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n).$$

Sei V^t die transponierte Darstellung von G auf dem Raum der Distributionen $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle V^t(g)S, \varphi \rangle = \langle S, V(g^{-1})\varphi \rangle .$$

Dann gilt für die Fortsetzungen T von T_ω

$$V^t(g)T = T + l(g) , \quad l(g) \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp .$$

$V^t(g)$, eingeschränkt auf $\{\lambda T, \lambda \in \mathbb{C}\} \oplus \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp$, ist eine endlich dimensionale Darstellung von G . Sie enthält als Unterdarstellung die Einschränkung $D(g)$ von $V^t(g)$ auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp$.

Wir suchen jetzt ein $l_0 \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)^\perp$, sodass $T + l_0$ invariant ist. Dann gilt

$$V^t(g)(T + l_0) = T + l(g) + V^t(g)l_0 = T + l_0 ,$$

d.h. l_0 muss die Gleichung

$$l(g) = l_0 - D(g)l_0$$

erfüllen. Wir wissen, dass $l(g)$ die Gleichung

$$l(gh) = V^t(gh)T - T = V^t(g) (V^t(h)T - T) + V^t(g)T - T = D(g)l(h) + l(g)$$

erfüllt. Man nennt die Lösung einer solchen Gleichung einen Kozyklus. Wenn $l(g)$ sich durch ein l_0 wie oben beschreiben lässt, ist die Kozyklus-Gleichung automatisch erfüllt; ein solches $l(g)$ nennt man einen Korand. Der Raum der Kozyklen modulo Koränder ist die Kohomologie der Gruppe, bezogen auf die Darstellung D .

Falls die endlich dimensionalen Darstellungen der Gruppe vollständig reduzibel sind, ist die Kohomologie einer endlich dimensionalen Darstellung immer trivial. Dazu betrachten wir die Matrix-Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l(g) & D(g) \end{pmatrix}$$

Wegen der vollständigen Reduzibilität der Darstellung gibt es einen 1-dimensionalen invarianten Unterraum, der komplementär zum Darstellungsraum von D ist. Ein solcher Unterraum ist von der Form $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ l_0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ Auf diesem Unterraum ist die Darstellung trivial.

Dies ist gleichbedeutend mit der oben gestellten Bedingung an l_0 .

Bei der Lorentz-Gruppe ist jede endlich dimensionale Darstellung vollständig reduzibel. Daher besitzen Lorentz-invariante Distributionen immer Lorentz-invariante Fortsetzungen. Bei den Skalentransformationen muss man hingegen die Darstellungen von \mathbb{R}_+ als multiplikative Gruppe betrachten. Diese sind nicht immer vollständig reduzibel. Ein Beispiel für eine reduzible, aber nicht vollständig reduzible Darstellung ist

$$\mathbb{R}_+ \ni \lambda \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ln \lambda & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Existenz derartiger Darstellungen ist für die Brechung der Skalen-Invarianz in der masselosen φ^4 -Theorie verantwortlich.

Es bleibt die Frage, wie man die Lösung l_0 der Kozyklus-Gleichung findet (falls sie existiert). Dies ist einfach, wenn die Gruppe kompakt ist. In diesem Fall setzt man

$$l_0 := \int_G dg l(g)$$

(hierbei bezeichnet dg das eindeutig bestimmte, unter Rechts- und Linkstranslationen invariante und auf 1 normierte Maß auf der Gruppe (Haar-Maß). Denn nach der Kozyklusgleichung gilt

$$l_0 - D(g)l_0 = \int_G dh (l(h) - D(g)l(h)) = \int_G dh (l(h) - l(gh) + l(g)) .$$

Wegen der Translations-Invarianz des Haar-Maßes sind die Integrale über die beiden ersten Terme entgegengesetzt gleich und heben sich daher weg. Da das Maß normiert ist, erhalten wir wie gewünscht

$$l_0 - D(g)l_0 = l(g) .$$

Bei der Lorentz-Gruppe versagt diese Methode leider. Es gibt eine ganze Reihe von Verfahren, wie man in diesem Fall eine Lösung finden kann.

In massiven Modellen kann man im Impulsraum die Taylorreihe bei $p = 0$ subtrahieren; äquivalent dazu ist die Wahl $w_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$. Falls masselose Felder vorkommen, ist diese Methode i.a. nicht möglich. Von Lowenstein stammt eine Modifikation der BPHZ-Subtraktion, die auch im masselosen Fall benutzt werden kann. Danach entwickelt man den masselosen Propagator als Funktion der Masse nach Taylor um eine nichtverschwindende Masse, sodass der Restterm keiner Renormierung bedarf. Die Taylorkoeffizienten werden dann wie beim massiven BPHZ-Verfahren bei $p = 0$ subtrahiert.

Epstein und Glaser nutzen aus, dass die zu renormierenden Distributionen Randwerte von analytischen Funktionen in einem Gebiet des komplexifizierten Raums sind, die zudem unter der komplexen Lorentzgruppe invariant sind. Es reicht dann, die Invarianz unter der kompakten Untergruppe $SO(4)$ zu betrachten.

Eine weitere Methode ist von Steinmann eingeführt worden. Steinmann betrachtet den Casimir-Operator C der Lorentz-Gruppe und zerlegt die endlich dimensionale Darstellung der Lorentz-Gruppe nach den Eigenwerten des Casimir-Operators. Eine ähnliche Methode ist kürzlich von Bresser, Pinter und Prange vorgestellt worden.

Die beste Methode, die ich gefunden habe, baut auf diesen Ansätzen auf. Sie beruht auf der Tatsache, dass der Operator $c^{-1}(c1 - C)$ die Eigenvektoren von C zum Eigenwert $c \neq 0$ vernichtet und auf den invarianten Vektoren wie die 1 wirkt. Daher ist in jeder endlich dimensional

Darstellung der Lorentz-Gruppe der Operator

$$P = \prod_{c \neq 0} \frac{c1 - C}{c}$$

der Projektor auf die triviale Darstellung.

Tatsächlich besitzt die Lorentz-Gruppe zwei Casimir-Operatoren,

$$C = \vec{L}^2 - \vec{M}^2, \quad C' = \vec{L} \cdot \vec{M},$$

wobei \vec{L} die infinitesimalen Drehungen und \vec{M} die infinitesimalen Lorentz-Beschleunigungen („boosts“) bezeichnet. Auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ gilt

$$\vec{L} = \frac{1}{i} \vec{x} \times \vec{\partial}, \quad \vec{M} = \frac{1}{i} (x^0 \vec{\partial} - \vec{x} \partial_0).$$

Die irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen der Lorentz-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow ergeben sich aus den irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$, bei denen die Matrix -1 durch 1 dargestellt wird. Die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ werden durch 2 Spinquantenzahlen $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ indiziert und haben die Form

$$D_{j_1 j_2}(A) \xi^{\otimes 2j_1+1} \otimes \eta^{\otimes 2j_2+1} = (A\xi)^{\otimes 2j_1+1} \otimes ((A^*)^{-1}\eta)^{\otimes 2j_2+1}$$

mit $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ (siehe Kapitel 2). Für $j_1 + j_2 \in \mathbb{N}_0$ erhält man eine Darstellung der Lorentzgruppe. Seien $\vec{L}_i, \vec{M}_i, i = 1, 2$, die Darstellungen von \vec{L} und \vec{M} auf dem linken, bzw. dem rechten Faktor. In der fundamentalen Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^2 gilt

$$\vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \quad \vec{M} = \frac{i}{2} \vec{\sigma},$$

in der konjugierten Darstellung ergibt sich

$$\vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \quad \vec{M} = -\frac{i}{2} \vec{\sigma},$$

Also gilt

$$\vec{M}_1 = i\vec{L}_1, \quad \vec{M}_2 = -i\vec{L}_2.$$

Damit folgt für die Casimir-Operatoren

$$C = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2 - (\vec{M}_1 + \vec{M}_2)^2 = 2\vec{L}_1^2 + 2\vec{L}_2^2 = 2(j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1))$$

und

$$C' = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) \cdot (\vec{M}_1 + \vec{M}_2) = i\vec{L}_1^2 - i\vec{L}_2^2 = i(j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)).$$

Wir erkennen, dass C nur auf der trivialen Darstellung $j_1 = j_2 = 0$ verschwindet.

Betrachten wir als Beispiel eine Lorentz-invariante Distribution t_ω auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^4)$, $\omega = 2$. Sei

$$W = 1 - \sum_{|\alpha| \leq \omega} |w_\alpha\rangle \langle \partial^\alpha \delta|$$

ein Projektor auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^4)$. Die Darstellung der Lorentz-Gruppe auf $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^4)^\perp \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ besitzt die irreduziblen Unterdarstellungen

$$(j_1, j_2) = (0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 1)$$

mit den Eigenwerten $c = 0, 3, 8$ des Casimiroperators C . Der Casimir-operator ist

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{2}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \\ &= (x^\mu \partial_\mu)^2 + 2x^\mu \partial_\mu - x^2 \square \end{aligned}$$

Wir setzen

$$P = \left(1 - \frac{1}{3}C\right)\left(1 - \frac{1}{8}C\right).$$

Dann ist

$$t := P(t_\omega \circ W)$$

eine Lorentz-invariante Fortsetzung von t_ω .

4. Renormierung in allen Ordnungen

Nachdem wir Divergenzen und ihre Beseitigung in einigen Beispielen betrachtet haben, wollen wir uns jetzt dem Problem zuwenden, wie die Renormierung in allen Ordnungen der Störungstheorie systematisch durchgeführt werden kann. Ein sehr übersichtliches Verfahren ist von Epstein und Glaser nach Ideen von Stückelberg und Bogoliubov entwickelt worden. Es besteht in einer induktiven Konstruktion zeitgeordneter Produkte.

Da die Zeitordnung nicht mit der Zeitableitung vertauscht, ist es zweckmäßig, als Argumente der zeitgeordneten Produkte die klassischen Felder zu betrachten, wie sie in der Lagrangedichte auftauchen, ohne Berücksichtigung der Feldgleichungen. Sei

$$\mathcal{L}(x, \varphi, \partial\varphi) = \sum g_i(x) A_i$$

die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte, mit Testfunktionen g_i und klassischen Feldern $A_i = A_i(\varphi, \partial\varphi)$. Die S-Matrix für diese Wechselwirkung ist das erzeugende Funktional der zeitgeordneten Produkte der Felder A_i ,

$$S(\mathcal{L}) = \sum_n \frac{i^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} T(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_n})$$

Die zeitgeordneten Produkte von n Feldern werden dabei als operatorwertige Distributionen in n Argumenten aufgefasst (symbolische Schreibweise $TA_{i_1}(x_1) \cdots A_{i_n}(x_n)$). Die Eigenschaften der zeitgeordneten Produkte ergeben sich jetzt aus Eigenschaften der S-Matrix:

Unitarität:

$$S(\mathcal{L})^* = S(\overline{\mathcal{L}})^{-1}$$

Kausalität: Ist die Wechselwirkung zerlegbar in der Form $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, sodass es eine Cauchy-Fläche gibt, für die der Träger von \mathcal{L}_1 in der Zukunft und der Träger von \mathcal{L}_2 in der Vergangenheit liegen, dann faktorisiert die S-Matrix

$$S(\mathcal{L}) = S(\mathcal{L}_1)S(\mathcal{L}_2)$$

Kovarianz:

$$U(a, \Lambda)S(\mathcal{L})U(a, \Lambda)^{-1} = S(\mathcal{L}_{(a, \Lambda)})$$

mit der transformierten Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{(a, \Lambda)}(x, \varphi, \partial\varphi) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}(x - a), \Lambda\varphi, \Lambda\partial\varphi)$$

Hierbei bezeichnet ΛA die Wirkung der Lorentz-Transformation auf dem klassischen Feld A .

Für die zeitgeordneten Produkte bedeutet das

Symmetrie: Als Entwicklungskoeffizienten einer Potenzreihe sind die zeitgeordneten Produkte symmetrisch in den Indizes.

Kausalität:

$$TA_1(x_1) \cdots A_n(x_n) = TA_1(x_1) \cdots A_k(x_k)TA_1(x_{k+1}) \cdots A_n(x_n)$$

falls keiner der Punkte x_1, \dots, x_k in der Vergangenheit eines der Punkte x_{k+1}, \dots, x_n liegt. Falls die beiden Punktemengen raumartig zueinander liegen, folgt insbesondere, dass die zeitgeordneten Produkte auf der rechten Seite miteinander kommutieren müssen.

Unitarität:

$$(TA_1(x_1) \cdots A_n(x_n))^* = \sum_{I_1 + \dots + I_k = \{1, \dots, n\}} (-1)^k T(A_i^*(x_i), i \in I_1) \cdots T(A_i^*(x_i), i \in I_k)$$

Kovarianz:

$$U(a, \Lambda)TA_1(x_1) \cdots A_n(x_n)U(a, \Lambda)^{-1} = T\Lambda A_1(\Lambda x_1 + a) \cdots \Lambda A_n(\Lambda x_1 + a)$$

Diese allgemeinen Regeln werden jetzt noch durch die Anfangsbedingung

$$TA(x) =: A(x):$$

ergänzt, wobei $:A(x):$ das dem klassischen Feld A entsprechende Wick-Produkt ist.

Aus dieser Anfangsbedingung folgt zusammen mit den Bedingungen der Symmetrie und Kausalität, dass für paarweise verschiedene Argumente das zeitgeordnete Produkt durch ein Operator-Produkt ausgedrückt werden kann. Denn sei $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Dann gibt es eine Permutation π , sodass $x_{\pi(1)} > \dots > x_{\pi(n)}$ gilt. Hierbei bedeutet $x > y$, dass x nicht in der Vergangenheit von y liegt. Wir finden

$$TA_1(x_1) \cdots A_n(x_n) =: A_{\pi(1)}(x_{\pi(1)}) : \cdots : A_{\pi(n)}(x_{\pi(n)}) :$$

Wir sehen insbesondere, dass nur Felder, die bei raumartigen Abständen kommutieren, als Anfangsbedingungen verwendet werden können. (Bei Fermifeldern kann durch die Einführung antikommutierender Testfunktionen in die Lagrangedichte die Symmetrie durch eine gradierte Symmetrie, bei der Fermifelder in zeitgeordneten Produkten antikommutieren, ersetzt werden.)

Das zeitgeordnete Produkt von 2 Feldern ist für nicht zusammenfallende Argumente eindeutig bestimmt. Das Problem der Renormierung besteht darin, diese operatorwertige Distribution in 2 Variablen auf den gesamten Raum $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ auszudehnen. Wir gehen jetzt per Induktion vor und nehmen an, dass die zeitgeordneten Produkte von weniger als n Faktoren als operatorwertige Distributionen überall definiert sind und die obigen Bedingungen erfüllen. Hierbei reduziert sich die Kausalitätsbedingung für den Fall, dass die gesamte Anzahl der Faktoren n erreicht, auf die Forderung der Kommutativität bei raumartiger Lokalisierung.

Dann ist das zeitgeordnete Produkt von n Faktoren außerhalb der totalen Diagonale $x_1 = \dots = x_n$ eindeutig bestimmt. Denn seien nicht alle Punkte x_i gleich. Dann kann man die Menge der Punkte durch eine raumartige Hyperebene so trennen, dass eine nichtleere Teilmenge in der Zukunft und die komplementäre Teilmenge in der Vergangenheit der Hyperebene liegen. Wegen der Forderung der Kausalität lässt sich das zeitgeordnete Produkt von n Faktoren als Produkt zeitgeordneter Produkte mit weniger als n Faktoren schreiben. Die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der Hyperebene folgt aus der raumartigen Kommutativität der zeitgeordneten Produkte.

Das zeitgeordnete Produkt von n Faktoren wird jetzt nach Wickprodukten entwickelt. Die Koeffizienten sind Distributionen, die nur von den $(n - 1)$ Koordinatendifferenzen abhängen. Sie sind zunächst nur außerhalb des Nullpunkts erklärt. Ihr Skalengrad ergibt sich aus den Dimensionen der Felder und ist in jedem Fall endlich. Nach dem Satz über die Fortsetzbarkeit von Distributionen besitzen sie daher Fortsetzungen, die bis auf eine Ableitung der δ -Funktion eindeutig sind. Dementsprechend sind die zeitgeordneten Produkte von n Feldern durch die Produkte von $k < n$ Feldern eindeutig bestimmt bis auf die Addition eines weiteren Feldes in n -ter Ordnung.

Wir fassen das Resultat in dem folgenden Satz zusammen:

THEOREM V.5. (i) *Es existieren formale Reihen multilinearer Abbildungen*

$$S(\mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} T_n(\mathcal{L}, \dots, \mathcal{L})$$

die die angegebenen Axiome erfüllen.

- (ii) Zwei Lösungen S und \hat{S} unterscheiden sich um eine analytische Abbildung $Z : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$ mit $Z'(0) = \text{id}$ im Raum der zulässigen Lagrangedichten, sodass gilt

$$S(\hat{\mathcal{L}}) = \hat{S}(\mathcal{L}) .$$

Hierbei werden die zulässigen Lagrangedichten als formale Potenzreihen aufgefasst, die mit dem Term erster Ordnung beginnen.

Die Abbildungen Z charakterisieren die Mehrdeutigkeit bei der Konstruktion der Theorie aus der Lagrangedichte. Sie bilden eine Gruppe, die von Stückelberg und Petermann Renormierungsgruppe genannt worden ist. Heute wird der Begriff Renormierungsgruppe meist in einem etwas anderen Sinne gebraucht, bei dem insbesondere die Gruppeneigenschaft nicht mehr erfüllt ist.

5. Klassifikation der Wechselwirkungen

Der Divergenzgrad ω eines Feynmangraphen lässt sich leicht berechnen. Der Skalengrad ist die Summe der Skalengrade der Feynmanpropagatoren ($d - 2$ für skalare Felder, $d - 1$ für Diracfelder) plus der Zahl der Ableitungen an den Vertizes. Davon subtrahiert man die Dimension des Raumes der Differenzvariablen, also $(\#(\text{Vertizes}) - 1)d$,

$$\omega = \sum_v \left(\frac{b_v}{2}(d - 2) + \frac{f_v}{2}(d - 1) - (\#(V) - 1)d \right)$$

mit b_v bosonischen und f_v fermionischen Linien am Vertex v . Einen Wechselwirkungsvertex nennt man superrenormierbar, wenn seine Hinzunahme den Divergenzgrad senkt, renormierbar, wenn er konstant bleibt, und nichtrenormierbar, wenn er wächst, d.h. $\frac{b_v}{2}(d - 2) + \frac{f_v}{2}(d - 1)$ ist kleiner, gleich oder größer als d . Für $d = 4$ ist $b_v = 3$, $f_v = 0$ (φ^3 -Theorie) superrenormierbar, $b_v = 4$, $f_v = 0$ (φ^4 -Theorie) und $b_v = 1$, $f_v = 2$ (Yukawa-Wechselwirkung $\varphi\psi\psi$) renormierbar. Die Fermitheorie ($f_v = 4$) mit Wechselwirkungsterm $j_\mu j^\mu$ ist nichtrenormierbar.

In superrenormierbaren Theorien gibt es nur endlich viele divergente Graphen. Der Orbit der Lagrangedichte unter der Renormierungsgruppe \mathcal{R}

$$\{Z(\lambda\mathcal{L}), Z \in \mathcal{R}\}$$

hat die Form

$$\sum_i P_i(\lambda)\mathcal{L}_i$$

mit $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$, endlich vielen zusätzlichen Wechselwirkungstermen \mathcal{L}_i , $i \geq 2$ und Polynomen P_i mit $P_1(\lambda) = \lambda(1 + O(\lambda))$ und $P_i(\lambda) = O(\lambda^2)$, $i \geq 2$. In renormierbaren Theorien werden die Polynome durch Potenzreihen ersetzt, in nichtrenormierbaren Theorien treten unendlich viele zusätzliche Wechselwirkungen auf.

Früher herrschte die Auffassung vor, dass nichtrenormierbare Theorien keine Vorhersagekraft haben. Heute betrachtet man sie als sogenannte effektive Theorien, die bei niedrigen Energien zu physikalisch sinnvollen Aussagen führen.

Felder mit höherem Spin können in 4 Dimensionen nur zu renormierbaren Wechselwirkungen führen, wenn unphysikalische Freiheitsgrade einbezogen werden. In der Elektrodynamik ist dies möglich durch das Vektorpotential in einer lokalen Eichung. In den nichtabelschen Eichtheorien führt man zusätzlich sogenannte Geistfelder ein. Im massiven Fall muss dann auch noch ein weiteres physikalisches Feld, das Higgsfeld, eingeführt werden. Zur Renormierbarkeit muss dann noch gezeigt werden, dass die nichtphysikalischen Freiheitsgrade eliminiert werden können. Im Falle der QED geschieht das durch die Gupta-Bleuler-Bedingung, im Falle der nichtabelschen Eichtheorie durch den BRS-Formalismus.

6. Die Renormierungsgruppe

Die Nichteindeutigkeit des Renormierungsverfahrens wird nach Stückelberg und Petermann durch eine Gruppe von Transformationen im Raum der Wechselwirkungen beschrieben. Stellt man zusätzliche Bedingungen an die zeitgeordneten Produkte, so verkleinert sich diese Gruppe. Die wichtigste Bedingung dieser Art ist eine Bedingung an das Transformationsverhalten unter Skalierungen.

Wir haben bereits an Beispielen gesehen, dass die Skalierungseigenschaften der klassischen Theorie durch Renormierungseffekte gebrochen werden können. Zunächst scheint das nur für die masselose Theorie von Bedeutung zu sein, da bei Skalierung der massiven Theorie die Masse mitskaliert wird, sodass man die renormierte Theorie bei der skalierten Masse durch die Skalierung der ursprünglichen Theorie definieren kann. Die Brechung der Skaleninvarianz in der masselosen Theorie zeigt sich dann in Singularitäten der massiven Theorie als Funktion der Masse im masselosen Limes. Dies ist äquivalent zu Singularitäten im Kurzabstandsimes bei festgehaltener Masse.

Wir ersetzen daher die Wickprodukte $\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)$ in der Entwicklung der zeitgeordneten Produkte durch einen anderen Satz von Feldern $(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n))_\mu$ mit einem willkürlichen Parameter μ , der die Dimension einer Masse hat, sodass die Koeffizienten glatte Funktionen von m^2 werden. Die Koeffizienten werden dann bis zu einer geeigneten Ordnung um $m^2 = 0$ nach Taylor entwickelt, sodass der Restterm aufgrund seines Skalengrades eine eindeutige Fortsetzung besitzt. Die anderen Terme sind bis auf logarithmische Korrekturen homogene Distributionen. Diese besitzen Fortsetzungen, die im selben Sinn fast homogen sind, wobei eine zusätzliche Potenz im Logarithmus des Skalenparameters auftreten kann. Wichtig ist jetzt, dass sich verschiedene Fortsetzungen mit dieser Eigenschaft nur um einen Term der Form $P(\partial)\delta$

mit einem homogenen Polynom P unterscheiden können, dessen Grad mit dem Skalengrad übereinstimmt. Die Renormierungsgruppentransformationen ändern sich daher unter Skalierungen nur noch dadurch, dass der Parameter μ skaliert wird. Setzen wir $\sigma_\varrho(\varphi(x) = \varrho^{-1}\varphi(\varrho x))$, so gilt für die modifizierten Wick-Polynome

$$\sigma_\varrho(P(\varphi(x)))_\mu = (\sigma_\varrho(P(\varphi(x))))_{\varrho\mu}.$$

Wir setzen $A_\varrho(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n))_\mu = (\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n))_{\varrho\mu}$ und erhalten für das Skalenverhalten von Z

$$\sigma_\varrho \circ Z \circ \sigma_\varrho^{-1} = A_\varrho \circ Z \circ A_\varrho^{-1}$$

Wir gehen jetzt von einer Zeitordnungsvorschrift T aus und vergleichen sie mit der skalierten Vorschrift

$$T^{[\varrho]} = \sigma_\varrho \circ T \circ \sigma_\varrho^{-1}$$

Nach dem Hauptsatz der Renormierungstheorie gibt es eine Renormierungsgruppentransformation $Z(\varrho)$ mit der Eigenschaft

$$T^{[\varrho]} = T \circ Z(\varrho)$$

Die 1-Parameterfamilie $Z(\varrho)$ bildet keine Untergruppe. Stattdessen erfüllt sie die Kozyklus-Gleichung

$$Z(\varrho\tau) = Z(\varrho) \circ A_\varrho \circ Z(\tau) \circ A_\varrho^{-1}$$