Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg
Fachbereich Physik
Fachgruppe Theoretische Physik

Diplomarbeit

Stringkompaktifizierung mit Termen höherer Ordnung

Vorgelegt von: Kristian Debrabant
Fachbereich Physik

Betreut von: Prof. Dr. Jan Louis
Fachbereich Physik

Halle an der Saale im Februar 2001

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Jan Louis für die kontinuierliche und intensive Betreuung sowie für die vielen wertvollen Hinweise und Anregungen meinen herzlichen Dank aussprechen. Desweiteren bedanke ich mich bei Herrn Michael Haack für die ständige Bereitschaft zur Diskussion auftretender Probleme.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Stringtheorie **4**

2 Calabi - Yau - Kompaktifizierung von Stringtheorien **10**

3 Kompaktifizierung von $B \wedge X_8$ auf CY_3 **14**
- 3.1 Einleitung 14
- 3.2 Kompaktifizierung auf CY_3. 15
- 3.3 $K3 \times T^2$ 18

4 Zusammenfassung und Ausblick **20**

A Zusammenstellung der in der allgemeinen Relativitätstheorie verwendeten Konventionen **21**

B Grundlagen der Differentialgeometrie **22**
- B.1 Topologische Räume und Mannigfaltigkeiten 22
- B.2 Differentialformen 25
- B.3 Alternierende Differentiation, Integration von Differentialformen . 26
- B.4 Riemannsche, fast-komplexe und Kählermannigfaltigkeiten 29
- B.5 Betti- und Hodgezahlen 32
- B.6 Chernklassen 34
- B.7 Calabi - Yau - Mannigfaltigkeiten 37
- B.8 Projektiver Raum und K3-Flächen 39

C Eigenschaften der Metrikdeformationen **42**
- C.1 Lichnerowicz-Gleichung 42
- C.2 Harmonizität der Metrikdeformationen 45
- C.3 Eigenschaften der harmonischen Formen 47
- C.4 Kovariante Konstanz der Metrik 50

D Kompaktifizierung von $B \wedge X_8$ auf CY_3 **52**

E Kompaktifizierung des Ricciskalars auf CY_3 **68**

F Literaturverzeichnis **71**

Kapitel 1

Einführung in die Stringtheorie

In der Physik kennt man vier grundlegende Kräfte: Elektromagnetismus, Gravitation, schwache und starke Kernkraft. Die Einbeziehung der speziellen Relativitätstheorie in die Quantenmechanik führte zum mathematischen Formalismus der Quantenfeldtheorie, die Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen als Austausch von Elementarteilchen erklärt. Der Elektromagnetismus, die schwache und die starke Kernkraft können mit Hilfe der Quantenfeldtheorie beschrieben werden. Dabei trat zunächst das Problem auf, daß manche der berechneten Größen, zum Beispiel die Selbstenergie eines Elektrons, ins Unendliche gingen. Feynman und andere zeigten, daß in einer eingeschränkten Klasse von Feldtheorien diese unendlichen Größen nur als Korrekturen („Renormierungen") fundamentaler Parameter auftreten, die beobachtete Elektronenmasse entspricht zum Beispiel der Summe der „nackten" Masse des Elektrons und der der elektromagnetischen Selbstenergie entsprechenden Masse. Der „nackten" Masse wird ein Wert von minus Unendlich so zugewiesen, daß die gemessene Masse einen endlichen Wert erhält.

Mit dieser Methode der Renormierung erhält man außerordentlich genaue Voraussagen in der Quantenelektrodynamik, der Quantenfeldtheorie des Elektromagnetismus, zum Beispiel stimmen die ersten elf Stellen des berechneten Wertes des magnetischen Moments des Elektrons mit dem gemessenen Wert überein. Auch für die Quantenfeldtheorien der schwachen Kernkraft und der starken Kernkraft (Quantenchromodynamik) konnte die Renormierbarkeit bewiesen werden.

Die Gravitation wird ebenfalls erfolgreich durch eine Feldtheorie beschrieben, durch Einsteins allgemeine Relativitätstheorie. Die Gravitationskraft ergibt sich aus der Forderung, daß die Poincarésymmetrie lokal ist. Der metrische Tensor transformiert in der Spin - 2- Darstellung der Lorentzgruppe, das Gravitationsfeld wird also durch ein masseloses Spin - 2 - Feld beschrieben, das zugehörige Teilchen wird Graviton genannt. Quantenmechanik und allgemeine Relativitätstheorie schließen sich jedoch gegenseitig aus, eine renormierbare Quantenfeldtheorie der Gravitation konnte bisher nicht aufgestellt werden.

Eine Idee zur Lösung dieses Problems besteht darin, Materieteilchen nicht länger als punktförmig anzusehen, sondern als in mindestens einer Raumdimension ausgedehnt zu betrachten, diese ausgedehnten Objekte nennt man Strings.

Die folgenden Ausführungen basieren auf [3, 13, 15, 22].
Man unterscheidet offene Strings, die zwei Endpunkte haben, und geschlossene Strings, die topologisch äquivalent einem Kreis S^1 sind.

Strings werden üblicherweise durch eine Koordinate σ parametrisiert, die von 0 bis π läuft. Um die Bewegung des Strings zu beschreiben, wird eine zeitartige Koordinate τ eingeführt, τ_1 charakterisiert den Beginn, τ_2 das Ende der Bewegung. Der Parameterraum $\Sigma = [\tau_1, \tau_2] \times [0, \pi]$ (Rechteckfläche) für offene Strings bzw. $\Sigma = [\tau_1, \tau_2] \times S^1$ für geschlossene Strings wird als Weltfläche des Strings bezeichnet. Versehen mit der Weltflächenmetrik $h_{\alpha\beta}$ mit $\alpha, \beta = 0, 1$ kann sie als Teilmenge des zweidimensionalen Minkowskiraums $\mathbb{R}^{1,1}$ aufgefaßt werden.

Während seiner Bewegung in der zunächst als D - dimensional angenommenen Raumzeit füllt der String eine Fläche aus, die in Verallgemeinerung der Weltlinie eines Massenpunktes oft ebenfalls als Weltfläche bezeichnet wird. Mathematisch wird sie als Abbildung X von der zweidimensionalen Weltfläche Σ in den D-dimensionalen Minkowskiraum als Zielraum beschrieben,

$$X : \Sigma \to \mathbb{R}^{1,D-1}. \tag{1.1}$$

Die Punkte im Zielraum haben die Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$, als Zielraummetrik wird $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ gewählt, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, D-1$.

Für geschlossene Strings gilt

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma) \; \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2], \tag{1.2}$$

für offene Strings müssen an $\sigma = 0$ und $\sigma = \pi$ Randwerte vorgeschrieben werden.

An eine Wirkung für den String fordert man neben der Lorentzkovarianz, daß die Physik unabhängig von der Wahl der Weltflächenkoordinaten ist. Dies erfüllt die Polyakovwirkung

$$S[X, h] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int\limits_\Sigma \sqrt{-\det h}\, h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} d\sigma d\tau, \tag{1.3}$$

wobei $\alpha, \beta = 0, 1$ gilt, ∂_0 bzw. ∂_1 eine partielle Ableitung nach τ bzw. σ bedeuten sollen und $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ die Spannung des Strings ist.

Die physikalischen Teilchen lassen sich als Eigenanregungen der Strings auffassen. Als Bewegungsgleichung kann man in kovarianter Eichung (das heißt, die Weltflächenmetrik $h_{\alpha\beta}$ wird gleich der flachen Metrik $(\eta_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1, 1)$ gewählt)

$$\left(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2\right) X^\mu = 0 \tag{1.4}$$

herleiten, die eindimensionale Wellengleichung. Die Lösung kann deshalb in der Form

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma) \tag{1.5}$$

dargestellt werden, X_R^μ beschreibt rechtslaufende, X_L^μ linkslaufende Terme.

Durch die Polyakovwirkung (1.3) wird ein sogenannter bosonischer String beschrieben. Der Grundzustand des bosonischen Strings ist tachyonisch (Zustand mit negativem Massenquadrat), was auf eine Instabilität hindeutet, und die Theorie enthält keine fermionischen Zustände. Durch Einführung der Supersymmetrie, einer Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, wird dieses Problem behoben.

Durch die Supersymmetrie werden Teilchen unterschiedlichen Spins, aber gleicher Masse, in Multipletts angeordnet. Verknüpft werden jeweils Fermionen und Bosonen. Mathematisch wird Supersymmetrie durch eine nichttriviale Erweiterung der Poincaréalgebra um fermionische Generatoren realisiert. Diese ändern den Spin eines Feldes, auf das sie wirken, und genügen im Gegensatz zu den Generatoren der Poincaréalgebra nicht Vertauschungsregeln, sondern Antivertauschungsregeln. Ist Q ein fermionischer Generator, so gelten

$$\{Q, Q^+\} \sim \gamma^\mu P_\mu, \; [Q, P_\mu] = 0, \; \mu = 0, \ldots, 3, \tag{1.6}$$

wobei die P_μ die Generatoren der Translationsgruppe und γ^μ die Dirac - Matrizen sind.

Eine wiederholte Fermion - Boson - Transformation verschiebt ein Teilchen von einem Ort zu einem anderen. Eine wiederholte Supersymmetrietransformation ergibt damit eine Poincarétransformation in der Raumzeit. Da die lokale Poincaréinvarianz zur allgemeinen Relativitätstheorie führt, ist ein Zusammenhang zwischen Supersymmetrie und Gravitation zu erwarten. Der Superpartner des Spin - 2 - Gravitons ist ein Fermion mit dem Spin $\frac{3}{2}$, dieses Teilchen wird Gravitino genannt.

Erweiterte Supersymmetrietheorien enthalten N Boson - Fermion - Transformationen, wobei für die natürliche Zahl N $1 \leq N \leq 8$ gilt. Jede dieser Theorien kann mit einem Spin-2-Graviton und N Spin-$\frac{3}{2}$-Gravitini versehen werden.

Die Dimension des Zielraums ist in allen bekannten konsistenten Stringtheorien höchstens gleich zehn. In der maximal möglichen Dimension zehn sind die Theorien besonders einfach: In zehn Dimensionen gibt es nur vier konsistente Theorien geschlossener Strings, den Typ IIA, den Typ IIB und den heterotischen String mit der Eichgruppe SO(32) oder $E_8 \times E_8$. Alle diese Theorien sind Raumzeit - supersymmetrisch. Während in den Typ II - Stringtheorien rechts- und linkslaufende Weltflächenfermionen existieren, enthalten die heterotischen Stringtheorien nur in einer Richtung laufende Weltflächenfermionen.

Alle Theorien enthalten einen Skalar Φ (das Dilaton), ein Zweiformfeld $B_{\mu\nu}$ und ein metrisches Tensorfeld $g_{\mu\nu}$, das mit dem Graviton identifiziert wird und bei niedrigen Energien wie der metrische Tensor der allgemeinen Relativitätstheorie koppelt. Das Anregungsspektrum enthält unendlich viele massive Zustände, die in Einheiten der Planckmasse quantisiert sind, aber nur endlich viele masselose. Die Typ II - Theorien enthalten zwei Gravitini in ihrem Raumzeitspektrum, in der Typ IIA - Theorie haben diese entgegengesetzte und in der Typ IIB - Theorie die gleiche Chiralität.

Wird die charakteristische Skala der Stringtheorie etwa gleich der Planckmasse gewählt, so ergeben sich als klassische Feldgleichungen die Einsteingleichungen mit Korrekturtermen, es können Quantenkorrekturen zur allgemeinen Relativitätstheorie berechnet werden. Der Niederenergielimes der Stringtheorie ist die Quantenfeldtheorie.

Die Streuamplituden $\mathcal{A}$ wechselwirkender Strings kann man durch Summation über die Topologien der Weltfläche bestimmen, man erhält die formale Potenzreihe

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} g_s^{-\chi_n} \mathcal{A}^{(n)}, \tag{1.7}$$

dabei sind g_s die dimensionslose Stringkopplungskonstante, $\mathcal{A}^{(n)}$ die Streuamplitude auf einer Riemannfläche vom Geschlecht n und χ_n die Eulerzahl dieser Fläche, $\chi_n = 2(1-n)$. Eine Störungsentwicklung ist damit für $g_s < 1$ möglich.

Alle supersymmetrischen Stringtheorien beschreiben die Raumzeit mit bis zu zehn Dimensionen. Direkt beobachtbar sind jedoch nur drei Raum- und eine Zeitdimension. Dies wird dadurch erklärt, daß die zusätzlichen Dimensionen „ganz klein aufgerollt“ sind, so daß sie bisher nicht experimentell aufgelöst werden können.

Realistische zehndimensionale Theorien haben deshalb einen Grundzustand der Form $M_4 \times K$, wobei M_4 die vierdimensionale Minkowski - Raumzeit und K eine kompakte sechsdimensionale Raumzeit bezeichnen.

Wenn die Struktur von K durch die (nichtlinearen) Gleichungen, denen das Gravitationsfeld genügt (im einfachsten Fall sind dies die Vakuum - Einsteingleichungen), vollständig bestimmt ist, können keine Fluktuationen auftreten. Wenn aber die Struktur von K nicht eindeutig bestimmt ist, sondern K einer kontinuierlichen Familie angehört, so sind Freiheitsgrade („Moduli“) vorhanden, die in der vierdimensionalen Theorie als masselose Spin - 0 - Teilchen auftreten, weil die Moduli dann auch als langsam veränderliche Funktionen der Koordinaten des vierdimensionalen Minkowskiraums betrachtet werden können und deshalb wie die Goldstone - Bosonen spontan gebrochener globaler Symmetrien als masselose Felder wahrgenommen werden.

Zur Bestimmung des Spektrums der vierdimensionalen Theorie bestimmt man die Bewegungsgleichungen kleiner Fluktuationen um den Grundzustand bis zur linearen Ordnung.

In der folgenden Darstellung konzentriere ich mich auf Typ - II - Stringtheorien. Die in dieser Arbeit durchzuführenden Rechnungen wären auch für heterotische Strings interessant, sind aber für den Typ - II - String einfacher und stellen sich dennoch als hinreichend kompliziert heraus.

Die einzige bekannte Möglichkeit, die Existenz masseloser geladener Skalarfelder zu erklären, ist die Annahme, daß die vierdimensionale Raumzeit supersymmetrisch ist.Damit die vierdimensionale Theorie wenigstens $N = 1$ supersymmetrisch ist (Raum - Zeit - Supersymmetrie), muß die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit K $SU(3)$-Holonomie (siehe Anhang B.7) haben. $SU(3)$-Holonomie impliziert, daß die Metrik auf K Ricci - flach ist (der Ricci - Tensor verschwindet identisch, zu dessen Definition siehe Anhang A) und eine Kählermetrik ist (siehe Anhang B.4). Eine Ricci - flache Kählermannigfaltigkeit wird als Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit bezeichnet (siehe Anhang B.7).

Komplex eindimensionale Calabi - Yau - Mannigfaltigkeiten sind topologisch äquivalent einem Torus T^2, die komplex zweidimensionalen Calabi - Yau - Mannigfaltigkeiten sind alle topologisch äquivalent einem Torus T^4 oder der $K3$ - Fläche, in der komplexen Dimension drei gibt es zahlreiche verschiedene.

Ist die Holonomiegruppe von K genau $SU(3)$, so ist K eine dreidimensionale Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit CY_3, es liegt (bei Typ - II - Theorien) $N = 2$ - Supersymmetrie vor. Hat K die Holonomiegruppe $SU(2)$, dies entspricht dem Produkt der (komplex) zweidimensionalen $K3$ - Fläche mit einem Torus T^2, so erhält man eine $N = 4$ - Supersymmetrie.

Die Massenskala der massiven Zustände des Teilchenspektrums der Stringtheorien ist von der Größenordnung der Planckmasse, die massiven Moden können deshalb experimentell nicht angeregt werden. Bei niedrigen Energien kann man demzufolge die Stringtheorie als effektive Quantenfeldtheorie der masselosen Anregungen beschreiben, die als Potenzreihe in der Zahl der Schleifen der massiven Moden aufgefaßt werden kann.

Die exakte effektive Wirkung für die masselosen Felder ist kompliziert, brauchbare Formeln kann man aber durch Entwicklung nach der Anzahl der Raum - Zeit - Ableitungen erhalten, weil jede solche Ableitung einen Faktor $\frac{E}{M_{Pl}}$ zur Wirkung beiträgt, wobei M_{Pl} die Planckmasse und E die charakteristische Energieskala einer Wechselwirkung ist.

Terme bis zu zwei Raum - Zeit - Ableitungen sind durch Symmetrien wie die Forderung nach ungebrochener $N = 2$ - Supersymmetrie in der vierdimensionalen Minkowski - Raumzeit oft so stark eingeschränkt, daß eine niederenergetische effektive Wirkung berechnet werden kann.

Diese Wirkungen enthalten stets einen Term proportional der Einstein - Hilbert - Wirkung

$$S_R = \int_M \sqrt{-g_{10}} R_{10} d^{10} X, \tag{1.8}$$

wobei g_{10} die Determinante der Metrik und R_{10} die skalare Krümmung (siehe Anhang A) in zehn Dimensionen sind.

Durch Integration über die kompakte Mannigfaltigkeit K erhält man dann eine dimensional reduzierte niederenergetische effektive Wirkung in vier Dimensionen.

Im folgenden Kapitel wird das Verfahren der Kompaktifizierung auf einer Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit am Beispiel von (1.8) vorgestellt. Ziel dieser Arbeit ist die Kompaktifizierung des in der Typ - IIA - Theorie auftretenden Terms $B \wedge X_8$ (zur Definition siehe Abschnitt 3.1) auf einer allgemeinen Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit CY_3, dies erfolgt im dritten Kapitel. Entwickelt wird dabei bis zu Termen mit zwei Raum - Zeit - Ableitungen und bis zur zweiten Ordnung in den Modulifeldern. An eine Zusammenfassung schließt sich dann ein Anhang an, in dem die hier benutzten Konventionen aus der allgemeinen Relativitätstheorie zusammengefaßt sind. Im folgenden Anhang sind Grundlagen der Differentialgeometrie zusammengestellt. Drei weitere Anhänge enthalten die Details der Rechnungen der Kapitel zwei und drei.

Kapitel 2

Calabi - Yau - Kompaktifizierung von Stringtheorien

Wenn nicht anders angegeben, folge ich in diesem Kapitel der Darstellung in [13]. Betrachtet wird nun eine zehndimensionale Minkowskiraumzeit der Form $M^4 \times CY_3$, wobei M^4 der vierdimensionale Minkowskiraum und CY_3 eine (komplex) dreidimensionale Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit sind.

Lateinische Großbuchstaben $A, B, \dots, M, N = 1, \dots, 10$ bezeichnen im folgenden die zehndimensionalen Indizes, griechische Buchstaben $\lambda, \mu, \nu = 1, \dots, 4$ die Indizes des vierdimensionalen Minkowskiraums und lateinische Kleinbuchstaben mit „Hut" $\hat{a}, \hat{b}, \dots, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \dots = 5, \dots, 10$ Calabi-Yau-Indizes, gequerte und ungequerte lateinische Kleinbuchstaben deren Aufspaltung bezüglich komplexer Koordinaten. Die Koordinaten von M^4 werden mit x^μ bezeichnet, $\mu = 1, \dots, 4$, die Koordinaten von CY_3 mit $y^{\hat{k}}$, $\hat{k} = 5, \dots, 10$, die zehndimensionalen Koordinaten durch X^M, $M = 1, \dots, 10$.

Der metrische Tensor g_{MN} spaltet auf in den vierdimensionalen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, Spin - 1 - Felder $g_{\mu,\hat{k}}$ und Spin - 0 - Felder $g_{\hat{m}\hat{n}}$. Man kann zeigen, daß diese Felder genau dann masselose Anregungen in vier Dimensionen haben, wenn ihr Calabi - Yau - Anteil (die Felder werden in eine Summe über Funktionen abhängig von den vierdimensionalen Koordinaten multipliziert mit einer vollständigen Menge von Funktionen der Koordinaten der Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit entwickelt) in harmonische Differentialformen (siehe Anhang B.4, Gleichung (B.34)) auf der Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit entwickelt werden kann.

Die Anzahl der harmonischen Differentialformen vom Grad (p, q) ist durch die Hodgezahl $h^{p,q}_{CY_3}$ gegeben (siehe Anhänge B.5, B.7). Da $h^{0,0}_{CY_3} = 1$ ist (siehe (B.80)), gibt es nur eine masselose Anregung des Typs $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, das masselose Graviton.

$h^{1,0}_{CY_3}$ verschwindet (siehe (B.80)), masselose Eichbosonen als masselose Moden der gemischten Komponenten $g_{\mu\hat{\imath}}$ des metrischen Tensors treten bei $SU(3)$ - Holonomie also nicht auf.

Im folgenden sollen die masselosen Moden des metrischen Tensors $g_{\hat{i}\hat{j}}$ von CY_3 bestimmt werden. Jede Metrikdeformation $g_{\hat{i}\hat{j}} \rightarrow g_{\hat{i}\hat{j}} + \delta g_{\hat{i}\hat{j}}$, die die $SU(3)$ - Holonomie erhält,entspricht einer masselosen Mode der Vakuum - Einsteingleichungen und damit einem masselosen Teilchen in der vierdimensionalen Raumzeit.

Die Metrik $g_{\hat{i}\hat{j}}$ genüge den Vakuum - Einsteingleichungen

$$R_{\hat{i}\hat{j}}(g_{\hat{l}\hat{k}}) = 0. \tag{2.1}$$

Entwickelt man

$$g_{\hat{i}\hat{j}} = g^0_{\hat{i}\hat{j}} + h_{\hat{i}\hat{j}} \tag{2.2}$$

um eine Ricci - flache Hintergrundmetrik $g^0_{\hat{i}\hat{j}}$ mit der Deformation $h_{\hat{i}\hat{j}}$, so folgt mit der Eichbedingung

$$g^{\hat{i}\hat{k}} D_{\hat{k}} h_{\hat{i}\hat{j}} = \frac{1}{2} g^{\hat{i}\hat{k}} D_{\hat{j}} h_{\hat{k}\hat{i}} \tag{2.3}$$

durch Linearisierung daraus die Lichnerowicz-Gleichung

$$0 \doteq \frac{1}{2} D^{\hat{r}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - g^{0\,\hat{l}\hat{r}} R^{0\,\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} \tag{2.4}$$

(die Herleitung findet sich im Anhang C.1).
$\doteq$ bedeutet dabei Gleichheit bis auf Terme höherer Ordnung.

Aufgrund der Eigenschaften einer Kählermetrik genügen die Deformationen mit gemischten holomorphen und antiholomorphen Indizes ($h_{i\bar{j}}$) und diejenigen mit reinen Indizes ($h_{ij}, h_{\bar{i}\bar{j}}$) dieser Gleichung jeweils separat (siehe (C.18), (C.19)). Die Metrikdeformationen mit gemischten Indizes entsprechen den harmonischen (1,1) - Formen, die mit reinen Indizes lassen sich eineindeutig den harmonischen (2,1) - Formen der Mannigfaltigkeit zuordnen (vergleiche Anhang C.2).

Die inäquivalenten harmonischen Deformationen der Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit entsprechen also masselosen Skalarfeldern. Man entwickelt folglich

$$\begin{aligned} g_{ij} &= z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{ij}(y), \ \mathrm{A} = 1, \ldots, h^{1,2}_{CY_3}, & (2.5)\\ g_{i\bar{j}} &= g^0_{i\bar{j}} + \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{i\bar{j}}(y), \ \mathrm{a} = 1, \ldots, h^{1,1}_{CY_3}, & (2.6)\\ g_{\bar{i}\bar{j}} &= \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{i}\bar{j}}(y), \ \mathrm{A} = 1, \ldots, h^{1,2}_{CY_3}, & (2.7) \end{aligned}$$

wobei $\omega^{\mathrm{a}}_{i\bar{j}}(y)$ harmonische (1,1) - Formen und $\chi^{\mathrm{A}}_{ij}(y)$ harmonischen (1,2) - Formen zugeordnet sind. $h^{1,1}_{CY_3}$ und $h^{1,2}_{CY_3}$ sind dabei die Hodgezahlen der Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit (siehe Anhang B.5 und Anhang B.7), $\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)$, $\mathrm{a} = 1, \ldots, h^{1,1}_{CY_3}$ und $z^{\mathrm{A}}(x)$, $\mathrm{A} = 1, \ldots, h^{1,2}_{CY_3}$ sind die skalaren Moduli.

Nun soll (1.8) kompaktifiziert werden. Dazu wird die zehndimensionale Metrik g_{MN} zerlegt in den vierdimensionalen Raumzeitanteil und einen sechsdimensionalen Calabi - Yau - Anteil $g_{\hat{i}\hat{j}}$,

$$g_{MN}((x,y)) = \begin{pmatrix} g^{(4)}_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{\hat{i}\hat{j}}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Der zehndimensionale Ricciskalar R_{10} wird dadurch zerlegt in

$$R_{10} = R_4 + 2g^{\mu\nu} R^{\hat{k}}{}_{\mu\hat{k}\nu} + 2g^{i\bar{j}} R^{\hat{k}}{}_{i\hat{k}\bar{j}} \tag{2.9}$$

(siehe Gleichung E.2), wobei R_4 der Ricciskalar der vierdimensionalen Raumzeit und R^L_{KMN} der Riemanntensor sind.

Die Calabi - Yau - Metrik $g_{\hat{i}\hat{j}}$ wird gemäß (2.5) - (2.7) um eine Calabi - Yau - Hintergrundmetrik $g^0_{\hat{i}\hat{j}}$ entwickelt. Durch Vernachlässigung höherer Potenzen von ω^{a} und $z^{\mathrm{A}}(x)$ erhält man (siehe Anhang E)

$$\begin{aligned}
R_{10} &\doteq R_4 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{0 i\bar{l}} g^{0 m\bar{k}} \omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}} \omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \left(\partial_\nu \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \\
&\quad + \frac{3}{2} g^{\mu\nu} g^{0 i\bar{k}} g^{0 \bar{j}k} \chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}} \chi^{\mathrm{A}_2}_{ki} \left(\partial_\mu \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x) \\
&\quad - g^{\mu\nu} g^{0 i\bar{j}} g^{0 l\bar{k}} \omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}} \omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}} \left(\partial_\nu \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Für die Determinante g_{10} der zehndimensionalen Metrik gilt

$$g_{10} = g_4 \cdot g_6, \tag{2.11}$$

wobei g_4 die Determinante der vierdimensionalen Metrik und g_6 diejenige der Calabi - Yau -Metrik sind.

Durch Definition der Metriken

$$G_{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2} = - \int\limits_{CY_3} \left(\frac{1}{2} g^{0 i\bar{l}} g^{0 m\bar{k}} \omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}} \omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} + g^{0 i\bar{j}} g^{0 l\bar{k}} \omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}} \omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}} \right) \sqrt{g^0{}_6}\, d^6 y, \tag{2.12}$$

$$G_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \int\limits_{CY_3} \frac{3}{2} g^{0 i\bar{k}} g^{0 \bar{j}k} \chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}} \chi^{\mathrm{A}_2}_{ki} \sqrt{g^0{}_6}\, d^6 y, \tag{2.13}$$

erhält man aus (1.8) unter Verwendung von (2.10) und (2.11)

$$\begin{aligned}
S_R &= \int\limits_{M^4 \times CY_3} \sqrt{-g_{10}} R_{10} d^{10} X \\
&\doteq \int\limits_{M^4 \times CY_3} \sqrt{-g_{10}} R_4(x) d^{10} X \\
&\quad + \int\limits_{M^4} \sqrt{-g_4} g^{\mu\nu} \Big(G_{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2} \left(\partial_\nu \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \\
&\qquad + G_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} \left(\partial_\mu \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x) \partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \Big) d^4 x,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

die Metrik G auf dem Moduliraum spaltet auf gemäß

$$G = \begin{pmatrix} G_{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2} & 0 \\ 0 & G_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

der Calabi - Yau - Moduliraum bildet ein direktes Produkt.

Kapitel 3

Kompaktifizierung von $B \wedge X_8$ auf CY_3

3.1 Einleitung

In der Typ IIA - Stringtheorie tritt in zehn Dimensionen in der ersten Schleifenordnung der Streuamplitude ein Wechselwirkungsterm der Form

$$\delta S = - \int\limits_{M^4 \times CY_3} B \wedge X_8(R) \tag{3.1}$$

auf, wobei B die im Spektrum der Theorie vorkommende Zweiform und $X_8(R)$ eine Achtform, konstruiert als Polynom vierten Grades in der Krümmung sind [26, 27],

$$X_8(R) = \frac{1}{192}\left(\mathrm{tr}R^4 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{tr}R^2\right)^2\right). \tag{3.2}$$

$B \wedge X_8(R)$ wird mit dem zehndimensionalen Epsilontensor ϵ_{10} kontrahiert, es gilt [14, 20]

$$\begin{aligned} B \wedge X_8 &= \sqrt{-g_{10}}\epsilon_{10} B X_8 \\ &= \frac{1}{192}\sqrt{-g_{10}}\epsilon_{10} B \left(\mathrm{tr}R^4 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{tr}R^2\right)^2\right) \\ &= \sqrt{-g_{10}}\frac{1}{192}\epsilon^{A_1 \ldots A_{10}} B_{A_1 A_2} \Bigg(R_{A_3 A_4 A}{}^{B} R_{A_5 A_6 C}{}^{A} R_{A_7 A_8 B}{}^{D} R_{A_9 A_{10} D}{}^{C} \\ &\quad - \frac{1}{4} R_{A_3 A_4 A}{}^{B} R_{A_5 A_6 B}{}^{A} R_{A_7 A_8 C}{}^{D} R_{A_9 A_{10} D}{}^{C} \Bigg). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dieser Term soll in der vorliegenden Arbeit auf einer dreidimensionalen Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit kompaktifiziert werden, wobei nur Terme bis zu zwei Raum

- Zeit - Ableitungen berücksichtigt werden sollen und bis zur zweiten Ordnung in den Modulifeldern entwickelt wird.

3.2 Kompaktifizierung auf CY_3.

Die zehndimensionale Metrik wird gemäß (2.8) aufgespalten, die Calabi - Yau - Metrik wird gemäß (2.5) bis (2.7) um eine Calabi - Yau - Hintergrundmetrik entwickelt.

Die Einzelheiten der Rechnung finden sich in Anhang D, als Ergebnis erhält man

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{10} B X_8 \doteq\; & \frac{1}{6} B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Bigg(\\
& g^{0b\bar{k}_1} g^{0o\bar{j}}\Bigg(\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}_1\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{oa}\left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \\
& +\omega^{\mathrm{a}_1}_{o\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{j}}\left(\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\right)\Bigg) \\
& \left(R^{0}_{i\bar{l}c}{}^{a} R^{0}_{j\bar{m}b}{}^{d} R^{0}_{k\bar{n}d}{}^{c} - \frac{1}{2} R^{0}_{i\bar{l}b}{}^{a} R^{0}_{j\bar{m}c}{}^{d} R^{0}_{k\bar{n}d}{}^{c}\right) \\
& +g^{0b\bar{k}_1} g^{0a\bar{k}_2}\Bigg[\\
& \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right) D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\Bigg) \\
& + \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\Bigg(\left(\partial_c\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right) D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} + \left(\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\right) D_c\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\Bigg) \\
& - \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_c\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right)\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\Bigg) \\
& - \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\Bigg(\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right) D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar{l}} + \left(D_c\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right) D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\Bigg) \\
& \Bigg] R^{0}_{j\bar{m}b}{}^{d} R^{0}_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +\frac{1}{2} g^{0b\bar{k}_2} g^{0c\bar{k}_1}\Bigg[\\
& \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right) D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}} \\
& -2\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Bigg) \\
& + \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\Bigg(\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\right) D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i} + \left(\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right) D_d\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}
\end{aligned}
$$

$$-2\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\Big)$$

$$-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\bigg(\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}+\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right)\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}$$

$$-2\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\Big)$$

$$-\left(\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\bigg(\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}+\left(D_d\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}$$

$$-2\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Big)$$

$$\Big]R^0_{j\bar{m}c}{}^a R^0_{k\bar{n}b}{}^d$$

$$-2\frac{1}{4}g^{0b\bar{k}_1}g^{0a\bar{k}_2}\Big[$$

$$\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}$$

$$+\left(\partial_\sigma\bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\left(\partial_b\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}$$

$$-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_b\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}$$

$$-\left(\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}$$

$$\Big]R^0_{j\bar{m}c}{}^d R^0_{k\bar{n}d}{}^c\bigg). \tag{3.4}$$

Durch Definition von

$$G_{A_1A_2}=\int\limits_{CY_3}\sqrt{g^0{}_6}\,\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\bigg($$

$$g^{0b\bar{k}_1}g^{0o\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_1}_{oa}\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{j}}\left(R^0_{i\bar{l}c}{}^a R^0_{j\bar{m}b}{}^d R^0_{k\bar{n}d}{}^c-\frac{1}{2}R^0_{i\bar{l}b}{}^a R^0_{j\bar{m}c}{}^d R^0_{k\bar{n}d}{}^c\right)$$

$$-g^{0b\bar{k}_1}g^{0a\bar{k}_2}\left[\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_c\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}+\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right)\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\right]R^0_{j\bar{m}b}{}^d R^0_{k\bar{n}d}{}^c$$

$$-\frac{1}{2}g^{0b\bar{k}_2}g^{0c\bar{k}_1}\bigg[\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}+\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right)\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}$$

$$-2\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\bigg]R^0_{j\bar{m}c}{}^a R^0_{k\bar{n}b}{}^d$$

$$+\frac{1}{2}g^{0b\bar{k}_1}g^{0a\bar{k}_2}\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_b\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}R^0_{j\bar{m}c}{}^d R^0_{k\bar{n}d}{}^c\bigg)d^6y, \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
G_{a_1a_2} = \int\limits_{CY_3} \quad & \sqrt{g^0{}_6}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Bigg(\\
& g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,o\bar{j}}\omega^{\mathrm{a}_1}_{a\bar{j}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{o\bar{k}_1}\left(R^0_{i\bar{l}c}{}^{a}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} - \frac{1}{2}R^0_{i\bar{l}b}{}^{a}R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\right) \\
& -g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\left[\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar{l}} + \left(D_c\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\right]R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_2}g^{0\,c\bar{k}_1}\Bigg(\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}} + \left(D_d\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}} \\
& -2\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Bigg)R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} \\
& +\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\Bigg)d^6y, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{A_1a_2} = \int\limits_{CY_3} \quad & \sqrt{g^0{}_6}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Bigg(\\
& g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\left[\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\right]R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_2}g^{0\,c\bar{k}_1}\Bigg[\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}} \\
& -2\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Bigg]R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} \\
& -\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\Bigg)d^6y, \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{a_1A_2} = \int\limits_{CY_3} \quad & \sqrt{g^0{}_6}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Bigg(\\
& g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\left[\left(\partial_c\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} + \left(\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\right)D_c\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right]R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_2}g^{0\,c\bar{k}_1}\Bigg[\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i} + \left(\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_d\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} \\
& -2\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\Bigg]R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} \\
& -\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\left(\partial_b\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\Bigg)d^6y \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

erhält man aus (3.1) und (3.4)

$$\delta S = -\int\limits_{M^4} \frac{1}{6} B_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sqrt{-g_4} \Big(G_{A_1 A_2} \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right) + G_{a_1 a_2} \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \left(\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\right) + G_{A_1 a_2} \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) + G_{a_1 A_2} \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x) \Big) d^4 x. \tag{3.9}$$

Im Gegensatz zur Kompaktifizierung des R-Terms in Kapitel zwei treten hier auch Ableitungen der harmonischen Formen auf, und der Calabi - Yau - Moduliraum faktorisiert nicht in ein direktes Produkt, (3.7) und (3.8) mischen die (1,1) und die (1,2) - Formen. Dies steht im Widerspruch zur $N = 2$-Supersymmetrie, die eine Faktorisierung verlangt [9, 22, 25, 29]. Dies kann bedeuten, daß entweder neben (3.1) weitere Korrekturen der Wirkung berücksichtigt werden müßten, oder (3.7) und (3.8) durch geschickte Umformungen zum Verschwinden gebracht werden können.

Es ist mir jedoch nicht gelungen, die Ausdrücke durch Techniken wie partielle Integration, die Ausnutzung der Eigenschaften von Calabi - Yau - Mannigfaltigkeiten und der Identitäten des Riemanntensors oder der Eigenschaften der harmonischen Formen (siehe Anhang C.3) zu vereinfachen. Es gibt auch keinen Grund anzunehmen, daß die harmonischen Formen kovariant konstant sein könnten [7], und für die $K3$-Fläche weiß man auch, daß sie es nicht sind [21].

Um die Konsistenz dieses Ergebnisses zu prüfen, wird nun der Spezialfall einer $K3 \times T^2$ - Mannigfaltigkeit betrachtet. Da er in der Typ - II - Stringtheorie zu einer $N = 4$ - Supersymmetrie führt und bekannt ist, daß die kinetischen Terme der Modulifelder keine Quantenkorrekturen erfahren, ist zu erwarten, daß der Korrekturterm verschwindet[12, 18].

3.3 $K3 \times T^2$

Betrachtet werde nun der Spezialfall, daß die dreidimensionale Calabi - Yau Mannigfaltigkeit gleich $K3 \times T^2$ ist. Die Metrik spaltet in diesem Fall gemäß

$$g_{MN}\left((x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} g^{(4)}_{\mu\nu}(x) & 0 & 0 \\ 0 & g^K_{\hat{a}_K \hat{b}_K}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & g^T_{\hat{a}_T \hat{b}_T}(x,z) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

auf, die $K3$- und T^2- Metriken werden gemäß

$$
\begin{aligned}
g^K_{\hat{a}_K \hat{b}_K}(x_\rho, y_{\hat{c}_K}) &= g^{0K}_{\hat{a}_K \hat{b}_K}(y_{\hat{c}_K}) + \delta g^K_{\hat{a}_K \hat{b}_K}(x_\rho, y_{\hat{c}_K}), && (3.11)\\
g^T_{\hat{a}_T \hat{b}_T}(x_\rho, z_{\hat{c}_T}) &= g^{0T}_{\hat{a}_T \hat{b}_T}(z_{\hat{c}_T}) + \delta g^T_{\hat{a}_T \hat{b}_T}(x_\rho, z_{\hat{c}_T}) && (3.12)
\end{aligned}
$$

um Calabi - Yau - Hintergrundmetriken g^{0K} auf einer $K3$-Fläche bzw. g^{0T} auf einem Torus T^2 entwickelt. Die Aufspaltung der Calabi-Yau-Indizes in $K3$- und T^2-Indizes wird durch tiefgestellte K und T erreicht, die $K3$-Indizes laufen hier von 5 bis 8, die T^2-Indizes von 9 bis 10. Die Koordinaten auf der $K3$-Fläche werden mit y und diejenigen auf dem Torus mit z bezeichnet.

Aus (D.3) bis (D.7) folgt: Christoffelsymbole, die sowohl einen $K3$- als auch einen T^2-Index haben, verschwinden.
Aus (D.9) bis (D.19) folgt damit: Komponenten des Krümmungstensors R mit einem oder zwei Raumzeitindizes und gemischten $K3$- und T^2-Indizes verschwinden, ebenso die Komponenten von R^0 mit gemischten $K3$- und T^2-Indizes.
Außerdem verschwinden die Komponenten des Krümmungstensors des Torus.
Damit ergibt sich aus (D.62)

$$
\begin{aligned}
6\epsilon_{10} B X_8 \doteq\; & B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{j_K k_K}\epsilon^{\bar{m}_K \bar{n}_K}\\
& \Big(R_{\rho\sigma a}{}^{b}\Big(-2 R^0_{i_T \bar{l}_T c}{}^{a} R^0_{j_K \bar{m}_K b}{}^{d} R^0_{k_K \bar{n}_K d}{}^{c} + R^0_{i_T \bar{l}_T b}{}^{a} R^0_{j_K \bar{m}_K c}{}^{d} R^0_{k_K \bar{n}_K d}{}^{c}\Big)\\
& +4\left(R_{\rho i_T a}{}^{b} R_{\sigma \bar{l}_T c}{}^{a} + R_{\sigma \bar{l}_T a}{}^{b} R_{\rho i_T c}{}^{a}\right) R^0_{j_K \bar{m}_K b}{}^{d} R^0_{k_K \bar{n}_K d}{}^{c}\\
& +2\left(R_{\rho i_T a}{}^{b} R_{\sigma \bar{l}_T d}{}^{c} + R_{\sigma \bar{l}_T a}{}^{b} R_{\rho i_T d}{}^{c} - 2 R_{\rho i_T a}{}^{c} R_{\sigma \bar{l}_T d}{}^{b}\right) R^0_{j_K \bar{m}_K c}{}^{a} R^0_{k_K \bar{n}_K b}{}^{d}\\
& -2 R_{\rho i_T a}{}^{b} R_{\sigma \bar{l}_T b}{}^{a} R^0_{j_K \bar{m}_K c}{}^{d} R^0_{k_K \bar{n}_K d}{}^{c}\Big)\\
=\; & -2 B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{j_K k_K}\epsilon^{\bar{m}_K \bar{n}_K} R_{\rho i_T a_T}{}^{b_T} R_{\sigma \bar{l}_T b_T}{}^{a_T} R^0_{j_K \bar{m}_K c_K}{}^{d_K} R^0_{k_K \bar{n}_K d_K}{}^{c_K},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

mit (D.68) folgt unter Berücksichtigung von (B.78) (es existieren bis auf Vielfache nur eine (1,1)-Form und keine (2,1)-Formen und demzufolge keine χ)

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{10} B X_8 \doteq\; & -\frac{1}{3} B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{j_K k_K}\epsilon^{\bar{m}_K \bar{n}_K} \cdot \frac{1}{4} g^{0 b_T \bar{k}_{T_1}} g^{0 a_T \bar{k}_{T_2}}\\
& \cdot\Big[-\left(\partial_\rho \hat{v}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}(x)\left(D_{a_T}\omega_{\bar{k}_{T_1} i_T}\right) D_{\bar{k}_{T_2}}\omega_{b_T \bar{l}_T}\Big] R^0_{j_K \bar{m}_K c_K}{}^{d_K} R^0_{k_K \bar{n}_K d_K}{}^{c_K}\\
=\; & 0,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

die rechte Seite verschwindet, weil in der eckigen Klammer ein in ρ und σ symmetrischer Ausdruck steht, der mit dem Epsilontensor kontrahiert wird. Dieses Ergebnis bestätigt die Konsistenz der Rechnungen.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Korrektur der Einstein - Hilbert - Wirkung, ein Krümmungsterm höherer Ordnung, der in der Typ - IIA - Stringtheorie auftritt, kompaktifiziert. Es zeigte sich, daß im Gegensatz zur Kompaktifizierung des Ricciskalars hier auch gemischte Produkte der harmonischen $(1, 1)$- und $(1, 2)$-Formen auftreten, die aufgrund der aus der $N = 2$-Supersymmetrie folgenden Faktorisierung des Calabi - Yau - Moduliraumes verschwinden sollten, aber nicht zum Verschwinden gebracht werden konnten.

Eine Ursache dafür könnte sein, daß weitere Korrekturen der Wirkung berücksichtigt werden müssen. Eine weitere mögliche Ursache ist, daß Ricci - flache Hintergründe und damit Calabi - Yau - Mannigfaltigkeiten nur näherungsweise Lösungen der Bewegungsgleichungen sind. Nichtstörungstheoretische Rechnungen könnten das Ergebnis modifizieren.

Anhang A

Zusammenstellung der in der allgemeinen Relativitätstheorie verwendeten Konventionen

Mit der symmetrischen Metrik g_{MN} und $g_{KL}g^{LM} := \delta_K^M$ sind die Christoffelsymbole definiert durch

$$\Gamma^K_{LM} = \frac{1}{2} g^{KN} \left(\partial_L g_{NM} + \partial_M g_{NL} - \partial_N g_{LM} \right). \tag{A.1}$$

Für den Riemanntensor gilt

$$R^K{}_{LMN} = \partial_M \Gamma^K_{LN} - \partial_N \Gamma^K_{LM} + \Gamma^P_{LN}\Gamma^K_{PM} - \Gamma^P_{LM}\Gamma^K_{PN}. \tag{A.2}$$

Für den Riccitensor ergibt sich

$$R_{KL} = R^M{}_{KML}, \tag{A.3}$$

der Ricciskalar oder Krümmungsskalar schließlich ist definiert durch

$$R = g^{KL} R_{KL}. \tag{A.4}$$

Anhang B

Grundlagen der Differentialgeometrie

In diesem Anhang sind grundlegende Begriffe und Zusammenhänge der Differentialgeometrie zusammengestellt. Ich habe dabei auf die Darstellungen in [1, 4, 5, 10, 13, 15, 16, 19, 20, 23] zurückgegriffen.

B.1 Topologische Räume und Mannigfaltigkeiten

Sei X eine beliebige Menge. Ein System S von Teilmengen von X, das den Bedingungen

a) $\emptyset \in S$,

b) mit $O_1 \in S$, $O_2 \in S$ ist $O_1 \cap O_2 \in S$,

c) die Vereinigung $\cup_\iota O_\iota$ beliebig vieler Mengen $O_\iota \in S$ gehört zu S

genügt, heißt eine Topologie über X. Sie charakterisiert Lagebeziehungen der Elemente in X. $Z = (X, S)$ heißt topologischer Raum. Die Elemente von S heißen S-offene Mengen von X beziehungsweise offene Mengen von Z.

Ein System B von offenen Mengen des topologischen Raumes Z heißt eine Basis von Z oder Basis der Topologie von Z, wenn jede offene Menge aus Z als Vereinigung von Mengen aus B darstellbar ist.

Seien (X, S), (Y, T) topologische Räume. Eine Abbildung $f : (X, S) \to (Y, T)$ heißt in einem Punkt $x \in X$ mit dem Bild $y = f(x)$ (lokal) stetig, wenn es zu jeder Umgebung $V(y) \subseteq T$ von y eine Umgebung $U(x) \subseteq S$ von x gibt, für die $f(U(x)) \subseteq V(y)$ gilt. f heißt in (X, S) (global) stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Eine stetige Abbildung $f : (X, S) \to (Y, T)$ heißt topologisch oder Homöomorphismus, wenn es eine stetige Umkehrabbildung

$$g : (Y, T) \to (X, S) \tag{B.1}$$

gibt mit $gf = fg =$id.

(X, S) und (Y, T) heißen homöomorph, wenn es eine topologische Abbildung

$$f : (X, S) \to (Y, T) \tag{B.2}$$

gibt.

Ein n-dimensionaler topologischer Raum M heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn er

- n-dimensional lokal euklidisch ist (das heißt, jeder Punkt $x \in M$ besitzt eine offene Umgebung U, die zu einer offenen Teilmenge V des euklidischen $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, $h : U \to V$ heißt Kartenabbildung, (U, h) Karte oder lokales Koordinatensystem von M um x, $x_h := h(x)$ lokale Koordinate des Punktes x in der Karte (U, h), $h^{-1} : V \to U$ lokale Parametrisierung von M um x, eine Menge von Karten von M heißt Atlas, wenn ihre Kartengebiete M überdecken),
- das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt ist (das heißt, zu je zwei Punkten $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gibt es stets fremde Umgebungen $U(x)$ und $V(y)$, $U(x) \cap V(y) = \emptyset$),
- eine abzählbare Basis für seine Topologie besitzt.

Sind (U_1, h_1, V_1), (U_2, h_2, V_2) Karten von M, so erhält man auf dem Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ zwei Karten durch Einschränkung, die sich um eine Koordinatentransformation (Kartenwechsel)

$$h_2 h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2) \tag{B.3}$$

unterscheiden (Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$). Sind $h_2 h_1^{-1}$ und $h_1 h_2^{-1}$ C^k-Abbildungen, so heißen (U_1, h_1, V_1), (U_2, h_2, V_2) C^k-verbunden.

Sind je zwei Karten eines Atlas C^k-verbunden, so heißt er ein C^k-Atlas.

Ist A ein differenzierbarer Atlas von M, so bildet die Gesamtheit der Karten von M, die mit Karten von A differenzierbar verbunden sind, einen differenzierbaren Atlas $D(A)$ (eindeutig bestimmter maximaler differenzierbarer Atlas, der A enthält).

Eine differenzierbare Struktur auf M ist ein maximaler differenzierbarer Atlas D auf M. (M, D) heißt n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. $f : M \to N$ heißt differenzierbar in $x \in M$, wenn f in x stetig ist und für eine (also jede) Karte (U, h, U') um x, (V, k, V') um $f(x)$ kfh^{-1} in $h(x)$ differenzierbar ist, f heißt differenzierbar, wenn f in jedem Punkt von M differenzierbar ist. Eine differenzierbare Abbildung $f : M \to$ N heißt Diffeomorphismus, falls es eine differenzierbare Umkehrabbildung gibt. M, N heißen diffeomorph, wenn es einen Diffeomorphismus $f : M \to N$ gibt. Zwei differenzierbare Strukturen D_1, D_2 heißen gleich, wenn (M, D_1) und (M, D_2) diffeomorph sind. Werden nur Kartenwechsel mit eingeschränkten Eigenschaften zugelassen, so lassen sich weitere Strukturen auf Mannigfaltigkeiten definieren, z. B. komplexe Mannigfaltigkeiten durch komplex-differenzierbare Kartenwechsel. Eine komplex 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit heißt Riemannsche Fläche.

Zwei differenzierbare Atlanten von M heißen äquivalent, falls sie den gleichen maximalen Atlas besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas von M ist.

Seien $x_\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ und $x_\psi = (x'^1, \ldots, x'^n)$ lokale Koordinaten von $x \in M$ mit den Karten (U, ϕ) und (V, ψ). M heißt orientierbar, falls ein äquivalenter Atlas A von M existiert, so daß alle Funktionaldeterminanten

$$J(x_\phi) = \frac{\partial(x'^1, \ldots, x'^n)}{\partial x^1, \ldots, x^n}(x_\phi) \tag{B.4}$$

für alle Kartenpunkte x_ϕ von A und alle Kartentransformationen positiv sind. A heißt dann orientierter Atlas, (M, A) orientierte Mannigfaltigkeit.

Analog zu n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert man Mannigfaltigkeiten mit Rand. Hier fordert man jedoch, daß sich die Kartenbilder U_ϕ als Durchschnitt zwischen einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ und dem abgeschlossenen Halbraum $H\mathbb{R}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$ darstellen lassen. $x \in M$ heißt Randpunkt, wenn x_ϕ Randpunkt von $H\mathbb{R}^n$ ist, also $x^1_\phi = 0$. Jede Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit (leerem) Rand. Ist M orientiert bezüglich des Atlas A mit den Kartenbildern U_ϕ, so erzeugt A einen Atlas A_0 des Randes ∂M mit den Kartenbildern

$$V_\phi = \partial U_\phi \cap \partial(H\mathbb{R}^n), \tag{B.5}$$

∂M heißt dann korientorientierte $(n-1)$-dimensionale Randmannigfaltigkeit.

B.2 Differentialformen

Ein Tangentenvektor an M im Punkt x ist die Gesamtheit aller Kurven $y = y(t)$ durch x, die in einer festen Karte (U, ϕ) zu x den gleichen Tangentenvektor v_ϕ im Kartenpunkt x_ϕ besitzen ($y_\phi(0) = x_\phi$, $v_\phi = \dot{y}_\phi(0)$ heißt Repräsentant des Tangentenvektors v bezüglich der Karte (U, ϕ)). Besitzt y_ϕ in x_ϕ den Tangentenvektor $(e_j)_\phi := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, so ist $(e_j)_\phi$ Repräsentant von e_j.

Die Gesamtheit aller Tangentenvektoren von M im Punkt x bildet den (linearen) n-dimensionalen Tangentialraum TM_x. Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ bilden die natürliche Basis von TM_x bezüglich der Karte (U, ϕ), für $v \in TM_x$ gilt $v = v^j e_j$. Die Komponenten v^j von v bilden einen kontravarianten Tensor im Punkt x, d.h., wenn (U, ϕ) und (V, ψ) zwei Karten zur Beschreibung des Punktes x sind und die lokalen Koordinaten die Form $x_\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ und $x_\psi = (x'^1, \ldots, x'^n)$ haben, so gilt

$$v'^j = \frac{\partial x'^j(x_\phi)}{\partial x^k} v^k. \tag{B.6}$$

Die Basisvektoren e_j transformieren sich unter einem Kartenwechsel wie ein kovarianter Tensor:

$$e'_j = \frac{\partial x^i(x_\phi)}{\partial x'^j} e_i. \tag{B.7}$$

Da für partielle Ableitungen gilt

$$\partial_j f' = \frac{\partial f}{\partial x'^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \partial_i f, \tag{B.8}$$

kann für e_j die formale Bezeichnung ∂_j eingeführt werden, in diesem Sinn identifiziert man Tangentenvektoren mit linearen Differentialoperatoren.

Den Dualraum des Tangentialraums TM_x einer Mannigfaltigkeit M im Punkt x bezeichnet man als Kotangentialraum $TM_x^\star$. Sei (U, ϕ) eine feste Karte für den Punkt x von M. Für alle Tangentenvektoren $v = v^j e_j$ im Punkt x wird definiert $dx^j(v) = v^j, j = 1, \ldots, n$ (Basiskotangentenvektoren). Für $w \in TM_x^\star$ folgt damit $w = w_j dx^j$ mit $w_j = w(e_j)$.

Ein Tensor A vom Typ (p, q) im Punkt $x \in M$ ist eine multilineare Abbildung

$$A : TM_x \times \ldots \times TM_x^\star \to \mathrm{I\!R}, \tag{B.9}$$

wobei TM_x p-fach und $TM_x^\star$ q-fach auftreten. Also gilt: Jeder Tangentenvektor ist Tensor vom Typ (1,0), jeder Kotangentenvektor ist Tensor vom Typ (0,1). Sei (U, ϕ) Karte für $x \in M$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bzw. $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ die natürlichen Basen im Tangentialraum TM_x bzw. im Kotangentialraum $TM_x^\star$ bezüglich (U,ϕ). Für einen Tensor A vom Typ (p,q) im Punkt x gilt dann

$$A(v^{i_1}e_{i_1},\ldots,v^{i_p}e_{i_p},v_{j_1}dx^{j_1},\ldots,v_{j_q}dx^{j_q}) = v^{i_1}\ldots v^{i_p}v_{j_1}\ldots v_{j_q}A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \tag{B.10}$$

mit den Komponenten

$$A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} := A(e_{i_1},\ldots,e_{i_p},dx^{j_1},\ldots,dx^{j_q}), \tag{B.11}$$

die sich bei Kartenwechsel wie ein q-fach kontravarianter und p-fach kovarianter Tensor transformieren. Es gilt

$$A = A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\otimes\ldots dx^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}. \tag{B.12}$$

Ist $A = A(x)$ eine Abbildung, die jedem $x\in M$ einen Tensor $A(x)$ vom Typ (p,q) zuordnet, dessen Komponenten $A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ C^k-Funktionen sind, so heißt A C^k-Tensorfeld vom Typ (p,q) der Mannigfaltigkeit M. Ein schiefsymmetrischer Tensor vom Typ $(p,0)$ wird als alternierende Differentialform vom Grade p (kurz: p-Form) bezeichnet. Ist ω p-Form und θ q-Form, so wird die $(p+q)$-Form $\omega\wedge\theta$ durch

$$(\omega\wedge\theta)(a_1,\ldots,a_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\Pi(a_1,\ldots,a_{p+q})}(\mathrm{sign}\Pi)\Pi[\omega(a_1,\ldots,a_p)\theta(a_{p+1},\ldots,a_{p+q})] \tag{B.13}$$

definiert, diese alternierende Multiplikation ist assoziativ und distributiv, es gilt

$$\omega\wedge\theta = (-1)^{pq}\theta\wedge\omega. \tag{B.14}$$

Ist $dx^1,\ldots,dx^n$ die natürliche Basis von $TM_x^\star$ bezüglich der Karte (U,ϕ) für den Punkt $x\in M$, dann läßt sich jede p-Form ω in x eindeutig darstellen als

$$\omega = \frac{1}{p}a_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}, \tag{B.15}$$

wobei $a_{i_1\ldots i_p}$ schiefsymmetrisch bezüglich aller Indizes ist und sich bei Kartenwechsel wie ein p-fach kovarianter Tensor transformiert.

B.3 Alternierende Differentiation, Integration von Differentialformen

Seien M und N Mannigfaltigkeiten. $f: M\to N$ heißt glatt, falls für alle $x\in M$ und $f(x)\in N$ Karten (U,ϕ) von M und (V,ψ) von N existieren, so daß die durch f in den Karten induzierte Abbildung $f_{\phi\psi} = \psi f \phi^{-1}$ partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt.

Ist $f : M \to N$ glatt, so existiert für alle $x \in M$ die Tangentialabbildung

$$T_x f : TM_x \to TN_{f(x)} : \tag{B.16}$$

Ist $y = y(t)$ Kurve auf M durch x mit dem Tangentialvektor v, dann ist $z = f(y(t))$ Kurve auf N mit dem Tangentialvektor ω im Punkt $f(x)$, $(T_x f)v := \omega$.

Ein p-Formenfeld der Glattheit C^k auf M (p-C^k-Form) ist eine Abbildung $\omega = \omega(x) =: \omega_x$, die jedem $x \in M$ eine p-Form $\omega(x)$ zuordnet, wobei die Komponenten von ω ein schiefsymmetrisches, p-fach kovariantes C^k-Tensorfeld auf M bilden.

Zu jedem $p \geq 0$ gibt es eine eindeutig bestimmte Operation „d" („alternierende Differentiation"), die jede p-C^k-Form ω auf M $(k \geq 2)$ in eine $(p+1)-C^{k-1}$-Form $d\omega$ auf M überführt und die Eigenschaften hat:

- Ist f eine 0-Form, dann gilt $df = Tf$, d.h. $df_x = T_x f \; \forall x \in M$.
- Sind ω und θ p-Formen, so gilt $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$.
- Ist ω p-Form und θ q-Form, dann gilt $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$.
- $d(d\omega) = 0$.

Ist (U, ϕ) Karte zu $x \in M$, so gilt für eine p-Form ω auf M in x mit $p \geq 1$

$$\omega_x = \frac{1}{p} a_{i_1 \ldots i_p}(x_\phi) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \tag{B.17}$$

$$d\omega_x = \frac{1}{p} da_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \tag{B.18}$$

mit

$$da_{i_1 \ldots i_p} = \partial_j a_{i_1 \ldots i_p}(x_\phi) dx^j. \tag{B.19}$$

Für p=0 ist ω reelle Funktion auf M, es gilt $d\omega_x = \partial_j a(x_\phi) dx^j$ mit $a(x_\phi) = \omega_x$.

Sei M eine n-dimensionale reelle kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, Θ eine stetige n-Form. Da M kompakt ist, existieren aus dem zugehörigen orientierten Atlas endlich viele Karten $(U_j, \phi_j), j = 1, \ldots, J$, so daß $M \subset \bigcup_{j=1}^{J} U_j$.

Sei $\{f_j\}$ eine Zerlegung der 1: $\sum\limits_{j=1}^{J} f_j(x) = 1 \,\forall x \in M$ mit $f_j : M \to \mathbb{R}$ stetig, $f_j = 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von U_j, $0 \leq f_j(x) \leq 1 \,\forall x \in M$. Dann wird das Integral $\int\limits_M \Theta$ definiert durch

$$\int\limits_M \Theta := \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{U_j} f_j \Theta, \tag{B.20}$$

wobei

$$\int\limits_{U_j} f_j \Theta = \int\limits_{\phi_j(U_j)} a(x_{\phi_j}) dx^1 \ldots dx^n, \tag{B.21}$$

wenn $f_j\Theta = a dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Diese Integraldefinition ist unabhängig von der gewählten Überdeckung und der Partition der 1.

Ist M komplexe Mannigfaltigkeit, so gilt für

$$\omega_z^{r,s} = a_{i_1 \ldots i_r \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_s} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_s} \tag{B.22}$$

(als reelle $(r+s)$-Form auffaßbar)

$$\begin{aligned} d\omega_z^{r,s} &= \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_r \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_s}}{\partial z^{i_{r+1}}} dz^{i_{r+1}} \wedge dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_s} \\ &+ \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_r \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_s}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}_{s+1}}} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_{s+1}} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \ldots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_s}, \end{aligned} \tag{B.23}$$

kurz:

$$d\omega_z^{r,s} = \partial \omega^{r,s} + \bar{\partial} \omega^{r,s}. \tag{B.24}$$

(als reelle $(r+s+1)$-Form auffaßbar).

Es gelten:

Satz von Stokes: Ist ω eine $(n-1)-C^1$-Form auf einer n-dimensionalen reellen orientierten kompakten Mannigfaltigkeit M mit kohärent orientiertem Rand $\partial M, n \geq 1$, so gilt

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega. \tag{B.25}$$

Satz von Poincaré: Ist α eine $p - C^1$-Form auf einer n-dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M mit $d\alpha = 0$, $1 \leq p \leq n$, so ist α lokal exakt, zu jedem $x \in M$

existieren eine offene Menge O mit $x \in O$ und eine Differentialform ω auf O, so daß $d\omega = \alpha$ auf O.

Satz von de Rham: Ist α $n - C^1$-Form, $n \geq 1$, auf der n-dimensionalen zusammenhängenden kompakten reellen Mannigfaltigkeit M, so ist α exakt, d.h., $d\omega = \alpha$ auf M hat eine Lösung ω genau dann, falls $\int\limits_M \alpha = 0$ gilt.

Falls auf M eine stetige n-Form ω existiert, die in keinem Punkt von M identisch verschwindet, d.h., $\forall x \in M \exists \alpha \in TM_x$ mit $\omega(\alpha) \neq 0$, so ist M orientierbar.

B.4 Riemannsche, fast-komplexe und Kählermannigfaltigkeiten

Eine n-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn auf M ein symmetrisches nichtentartetes Tensorfeld g vom Typ (2,0) gegeben ist, d.h., $\forall x \in M$ existiert eine quadratische Form g_x mit

- $g_x(v,w) = g_x(w,v) \, \forall v, w \in TM_x$,
- Aus $g_x(v,w) = 0 \, \forall v \in TM_x$ folgt w=0.

Durch $(v|w) := g_x(v,w) \, \forall v, w \in TM_x$ wird ein inneres Produkt definiert auf allen Tangentialräumen TM_x. M heißt eigentlich, wenn aus $(v|v) = 0$ stets $v = 0$ folgt. Dann ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt, die Tangentialräume werden damit zu reellen Hilberträumen.

Ist in einer Karte $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die natürliche Basis, so gilt mit $g_{ij} := g(e_i, e_j)$

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j. \tag{B.26}$$

Sei $g_{ik}g^{kj} := \delta_i^j$. Die Christoffelsymbole sind definiert durch $\Gamma_{ij}^k := g^{km}\Gamma_{ij,m}$ mit

$$\Gamma_{ij,m} := \frac{1}{2}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}). \tag{B.27}$$

Es gelten $\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}$, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ und $\Gamma_{kj}^k = \partial_j \ln|\det(g_{i,j})|^{\frac{1}{2}}$.

Ist $a_{j_1 \ldots j_m}^{i_1 \ldots i_k}$ ein Tensorfeld, so ist die kovariante Ableitung

$$D_i a_{j_1 \ldots j_m}^{i_1 \ldots i_k} := \partial_i a_{j_1 \ldots j_m}^{i_1 \ldots i_k} + \sum_{\alpha=1}^{k} \Gamma_{is}^{i_\alpha} a_{j_1 \ldots j_m}^{i_1 \ldots s \ldots i_k} - \sum_{\alpha=1}^{m} \Gamma_{ij_\alpha}^{s} a_{j_1 \ldots s \ldots j_m}^{i_1 \ldots i_k} \tag{B.28}$$

(der Summationsindex s steht an α-ter Stelle) ein k-fach kontravariantes und $(m+1)$-fach kovariantes Tensorfeld.

Die kovariante Ableitung in Richtung eines Vektorfeldes v^j wird durch $D_v := v^j D_j$ definiert, die absolute Ableitung entlang einer Kurve $x^j = x^j(\sigma)$ $\frac{D}{d\sigma}$ durch $\frac{D}{d\sigma} := D_{\dot{x}}$. Ein Tensorfeld $t^{\cdots}_{\cdots}$ heißt parallel längs der Kurve C, falls $\frac{Dt^{\cdots}_{\cdots}}{d\sigma} = 0$ längs C gilt.

Für $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ sei

$$*\omega := \frac{1}{p!(n-p)!}\epsilon_{i_1 \dots i_n}\sqrt{|\det g|}g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p}\omega_{j_1 \dots j_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \quad \text{(B.29)}$$

der Hodge-$*$-Operator. Für $p = 0, \dots, n$ ist der lineare Operator

$$* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M) \quad \text{(B.30)}$$

bijektiv. Dabei ist $\Lambda^p(M)$ der lineare Raum aller p-Formen auf der n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann für eine p-Form ω durch

$$d^+ : \omega \to d^+\omega = -\frac{1}{(p-1)!}D^k \omega_{k m_2 \dots m_p} dx^{m_2} \wedge \dots \wedge dx^{m_p} \quad \text{(B.31)}$$

die adjungierte Operation zur alternierenden Differentiation „d" definiert werden, sie bildet p-Formen auf $p-1$-Formen ab. Es gelten

$$d^+\left(d^+\omega\right) = 0, \quad d^+ = (-1)^{np} * d * . \quad \text{(B.32)}$$

Der Laplaceoperator auf p-Formen (Hodge - de Rham - Operator) wird definiert durch

$$\Delta = d^+ d + d d^+. \quad \text{(B.33)}$$

Eine p-Form ω heißt harmonisch, wenn gilt

$$\Delta\omega = 0. \quad \text{(B.34)}$$

Dies ist äquivalent zu

$$d\omega = 0 = d^+\omega. \quad \text{(B.35)}$$

Eine $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M heißt fast-komplex, wenn jedem Punkt $x \in M$ eine lineare bijektive Abbildung $J : TM_x \to TM_x$ des Tangentialraumes zugeordnet ist mit $J^2 = -id$. Fast-komplexe Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.

Eine Riemannsche Metrik g auf einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit M mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$g_x(Ju, Jv) = g_x(u, v) \, \forall u, v \in TM_x, \forall x \in M \tag{B.36}$$

heißt hermitesche Metrik.

Die 2-Form

$$\Phi : \quad \Phi_x(u, v) := g_x(u, Jv) \, \forall u, v \in TM_x, \forall x \in M \tag{B.37}$$

heißt Fundamentalform der hermiteschen Metrik. Gilt $d\Phi = 0$, so heißt g Kählermetrik, M heißt fast-Kählermannigfaltigkeit.

Ist M eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, so besitzen die lokalen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ von M in einer Karte die Darstellung

$$z_j = x_j + iy_j, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n. \tag{B.38}$$

Durch Zuordnung der $2n$ reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ zu den n komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ erhält man mit

$$J(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (-y_1, \ldots, -y_n, x_1, \ldots, x_n) \tag{B.39}$$

eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit, bei welcher die so zugeordnete fast-komplexe Mannigfaltigkeit eine fast-Kählermannigfaltigkeit ist, heißt Kählermannigfaltigkeit. In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{jk} dz^j d\overline{z}^k, & \text{(B.40)} \\ g_{jk} &= g_{kj}, & \text{(B.41)} \\ \Phi &= -i g_{jk} dz^j \wedge \overline{z}^k, & \text{(B.42)} \\ d\Phi &= 0, & \text{(B.43)} \end{aligned}$$

für die Christoffelsymbole in komplexen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} \Gamma^l_{jk} &= g^{l\overline{s}} \frac{\partial g_{k\overline{s}}}{\partial z^j}, & \text{(B.44)} \\ \Gamma^{\overline{l}}_{\overline{jk}} &= g^{\overline{l}s} \frac{\partial g_{\overline{k}s}}{\partial \overline{z}^{\overline{j}}}, & \text{(B.45)} \end{aligned}$$

alle anderen verschwinden.

Für den Riemanntensor folgt

$$\begin{aligned} R_{i\overline{j}k\overline{l}} &= g_{i\overline{s}} \partial_k \Gamma^{\overline{s}}_{\overline{j}\overline{l}} = R_{k\overline{j}i\overline{l}} = R_{i\overline{l}k\overline{j}} \\ &= -R_{\overline{j}ik\overline{l}} = R_{\overline{j}i\overline{l}k} = -R_{i\overline{j}\overline{l}k}, \end{aligned} \tag{B.46}$$

alle anderen Komponenten verschwinden.

Die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Ricci - Tensors sind damit

$$R_{\bar{i}j} = R^{\bar{k}}{}_{\bar{i}\bar{k}j} = -\partial_j \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{k}} = R_{j\bar{i}}. \tag{B.47}$$

Ist M eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, so daß die zugehörige $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit $M_{\mathbb{R}}$ eine eigentliche Riemannsche Metrik g besitzt, so ist M genau dann eine Kählermannigfaltigkeit, wenn der durch g auf M erzeugte Paralleltransport von Vektoren die komplexe Hilbertraumstruktur der Tangentialräume respektiert, d.h. das Skalarprodukt invariant läßt.

Aus

$$d\Phi = -(\partial + \overline{\partial}) i g_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^{\overline{k}} = 0 \tag{B.48}$$

folgen

$$\frac{\partial g_{j\overline{k}}}{\partial z^l} = \frac{\partial g_{l\overline{k}}}{\partial z^j} \text{ und } \frac{\partial g_{j\overline{k}}}{\partial \overline{z}^{\overline{l}}} = \frac{\partial g_{j\overline{l}}}{\partial \overline{z}^{\overline{k}}}. \tag{B.49}$$

$g_{j\overline{k}}$ kann deshalb dargestellt werden als

$$g_{j\overline{k}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^j \partial \overline{z}^{\overline{k}}}, \tag{B.50}$$

K wird als Kählerpotential bezeichnet, $\Phi = -i\partial\overline{\partial}K$.

B.5 Betti- und Hodgezahlen

Sei μ eine q-Form auf der reellen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, $1 \leq n$. Gilt $d\mu = 0$ auf M, so heißt μ Kozyklus. $Z^q(M)$ sei die Menge aller q-Kozyklen auf M. Existiert eine (q-1)-Form ω mit $\mu = d\omega$ auf M, so wird μ q-Korand genannt, $R^q(M)$ sei die Menge aller q-Koränder von M, $R^0(M) := \{0\}$.

Es gilt: $R^q(M)$ ist linearer Teilraum von $Z^q(M)$. Der Faktorraum

$$H^q_d(M) := Z^q(M)/R^q(M) \tag{B.51}$$

heißt q-ter de Rhamscher Kohomologieraum von M. Die Dimension

$$\beta_q(M) = \dim H^q_d(M) \tag{B.52}$$

heißt q-te Bettische Zahl von M.

$$\chi(M) := \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \beta_q \tag{B.53}$$

heißt Eulersche Zahl. Für $q > n$ wird $H_d^q(M) = \{0\}$ definiert.

Zwei Kozyklen heißen kohomolog, wenn sie sich nur um einen Korand unterscheiden.

$H_d^0(M)$ besteht aus allen glatten Funktionen $\mu : M \to \mathbb{R}$ mit $d\mu = 0$, μ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant. Daraus folgt: $\beta_0(M)$ ist gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M.

Für eine kompakte reelle Mannigfaltigkeit M sind alle Bettischen Zahlen endlich.

Ist M zusätzlich orientiert, dann gilt $\beta_q(M) = \beta_{n-q}(M)$ für $q = 1, \ldots, n$ (Poincarésche Dualität, der $*$-Operator induziert für $[\omega] \in H_d^q(M)$ durch $*[\omega] := [*\omega]$ einen Isomorphismus von $H_d^q(M)$ auf $H_d^{n-q}(M)$).

Ist M eine komplexe n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so wird mit dem $\overline{\partial}$-Operator anstelle des d-Operators analog zur de Rham-Kohomologiegruppe die Dolbeaut Kohomologiegruppe $H_{\overline{\partial}}^{r,s}(M)$ definiert:

$$H_{\overline{\partial}}^{r,s}(M) = \frac{\{\omega^{r,s} | \overline{\partial}\omega^{r,s} = 0\}}{\{\alpha^{r,s} | \alpha^{r,s} = \overline{\partial}\beta^{r,s-1}\}}. \tag{B.54}$$

Die komplexe Dimension $h_M^{r,s}$ von $H_{\overline{\partial}}^{r,s}(M)$ wird als Hodgezahl bezeichnet.

In jeder Kohomologieklasse von $H_{\overline{\partial}}^{r,s}(M)$ existiert genau eine harmonische (r,s)-Form. Damit ist die Hodgezahl $h_M^{r,s}$ gleich der Dimension des Vektorraums harmonischer (r,s)-Formen über M.

Der (komplexe) Hodge-$*$-Operator induziert $h_M^{r,s} = h_M^{n-r,n-s}$.

Für eine kompakte Kählermannigfaltigkeit M gelten

$$H_d^p(M) \cong \oplus_{r+s=p} H_{\overline{\partial}}^{r,s}(M) \tag{B.55}$$

und

$$H_{\overline{\partial}}^{p,q}(M) = \overline{H_{\overline{\partial}}^{q,p}(M)}, \tag{B.56}$$

also

$$\beta_p(M) = \sum_{r+s=p} h_M^{r,s} \tag{B.57}$$

und

$$h_M^{r,s} = h_M^{s,r}. \tag{B.58}$$

Also ist $h_M^{0,0}$ gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M.

B.6 Chernklassen

Es seien $\mathfrak{V}$ und M glatte Mannigfaltigkeiten, Y ein endlichdimensionaler Raum. Ein Vektorraumbündel $\mathfrak{V}$ mit der typischen Faser Y ist eine surjektive Abbildung $\pi : \mathfrak{V} \to M$, wobei gilt:

(a) Es gibt eine Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch offene Mengen U_j, zu jedem j existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi_j : \ \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times Y, \tag{B.59}$$

so daß für $b \in \mathfrak{V}$ gilt $\varphi_j(b) = (x, \psi_j)$ mit $x = \pi(b)$ und $\psi_j \in Y$. $\psi_j(b)$ heißt lokale Bündelkoordinate des Bündelpunktes b.

(b) Ist $x \in U_j \cap U_k$, so existiert eine lineare bijektive Abbildung

$$\mathfrak{L}_{jk}(x) : \ Y \to Y, \tag{B.60}$$

so daß für $b \in \mathfrak{V}$ mit $\pi(b) = x$ und den zugehörigen lokalen Koordinaten (x, ψ_j) und (x, ψ_k) gilt $\psi_j = \mathfrak{L}_{jk}(x)\psi_k$.

$\mathfrak{V}$ heißt Bündel-, M Basismannigfaltigkeit.

Es seien $\mathfrak{X}$ und M glatte Mannigfaltigkeiten, G eine Liegruppe. Ein Hauptfaserbündel $\mathfrak{X}$ mit der Strukturgruppe G ist eine surjektive Abbildung $\pi_1 : \mathfrak{X} \to M$, wobei gilt:

(a) Es gibt eine Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch offene Mengen U_j, zu jedem j existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi_j : \ \pi_1^{-1}(U_j) \to U_j \times G, \tag{B.61}$$

so daß für $b \in \mathfrak{X}$ gilt $\varphi_j(b) = (x, g_j)$ mit $x = \pi(b)$ und $g_j \in G$. $g_j(b)$ heißt lokale Bündelkoordinate des Bündelpunktes b.

(b) Ist $x \in U_j \cap U_k$, so existiert $\mathfrak{G}_{jk}(x) \in G$, so daß für $b \in \mathfrak{X}$ mit $\pi_1(b) = x$ und den zugehörigen lokalen Koordinaten (x, g_j) und (x, g_k) gilt $g_j = \mathfrak{G}_{jk}(x)g_k$.

$\mathfrak{X}$ heißt Bündel-, M Basismannigfaltigkeit.

Sei X ein komplexer linearer Raum. Dann bildet die Menge GL(X) aller linearen bijektiven Operatoren A: $X \to X$ eine Gruppe (Automorphismengruppe von X). Unter einer Darstellung φ der Gruppe G auf dem linearen Raum X versteht man einen Morphismus $\varphi : G \to$GL(X). Ist φ injektiv, so heißt die Darstellung φ treu.

Sei γ : G$\rightarrow$GL(Y) eine Darstellung von G auf Y. Das Vektorraumbündel π : $\mathfrak{V} \rightarrow M$ heißt assoziiert zu dem Hauptfaserbündel $\pi_1 : \mathfrak{X} \rightarrow M$ (bezüglich der Darstellung γ) genau dann, wenn

$$\mathfrak{L}_{jk}(x) = \gamma(\mathfrak{G}_{jk}(x)) \tag{B.62}$$

gilt.

Liegen alle $\mathfrak{L}_{jk}(x)$ in einer Untergruppe $\mathfrak{G}$ von GL(Y), so heißt $\mathfrak{G}$ Strukturgruppe von $\mathfrak{V}$.

Zu jedem Vektorraumbündel $\pi : \mathfrak{V} \rightarrow M$ kann kanonisch ein zu $\mathfrak{V}$ assoziiertes Hauptfaserbündel konstruiert werden mit G=GL(Y), γ=id.

Sei $H^q(M)$ die q-te de Rhamsche Kohomologiegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Sei $H^*(M)$ die Menge aller endlichen Summen

$$a_o + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \ldots \text{ mit } a_j \in \mathbb{R},\ \sigma_j \in H^j(M), \tag{B.63}$$

also $\sigma_j = [w_j] := \{w_j + d\mu\}$ mit: ω_j ist j-Form auf M, $d\omega_j = 0$, μ ist eine beliebige $(j-1)$-Form auf M. Für σ_j, σ_k sei $\sigma_j \wedge \sigma_k$ erklärt durch

$$[\omega_j] \wedge [\omega_k] := [\omega_j \wedge \omega_k]. \tag{B.64}$$

$\wedge$ ist für Elemente aus $H^*(M)$ assoziativ. Die Algebra $(H^*(M), \wedge)$ nennt man Kohomologiealgebra von M.

Sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraumbündel mit der Strukturgruppe $\mathfrak{G}$ über einer glatten Mannigfaltigkeit M. $\mathfrak{G}$ sei eine abgeschlossene Untergruppe von GL(m,$\mathbb{K}$), $\mathbb{K}$ = $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, also ist $\mathfrak{G}$ Liegruppe, $\mathfrak{L}\mathfrak{G}$ sei die zugehörige Liealgebra. $\mathfrak{P}_k(\mathfrak{L}\mathfrak{G})$ sei die Menge aller symmetrischen k-linearen Abbildungen

$$f : \mathfrak{L}\mathfrak{G} \times \ldots \times \mathfrak{L}\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R} \tag{B.65}$$

mit

$$f(GB_1G^{-1}, \ldots, GB_kG^{-1}) = f(B_1, \ldots, B_k)\, \forall G \in \mathfrak{G},\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{L}\mathfrak{G}. \tag{B.66}$$

$\mathfrak{P}(\mathfrak{L}\mathfrak{G})$ sei die Menge aller endlichen reellen Linearkombinationen

$$a_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots \text{ mit } f_k \in \mathfrak{P}_k(\mathfrak{L}\mathfrak{G}). \tag{B.67}$$

$f \wedge g$ sei definiert durch

$$(f \wedge g)(B_1, \ldots, B_{j+m}) := \frac{1}{(j+m)!} \sum f(B_{i_1}, \ldots, B_{i_j}) g(B_{i_{j+1}}, \ldots, B_{i_{j+m}}), \tag{B.68}$$

wobei über alle Permutationen von $1, \ldots, j+m$ summiert wird. Die Algebra $(\mathfrak{P}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}), \wedge)$ nennt man Algebra der $Ad\mathfrak{G}$-invarianten Polynome.

Nach dem Hauptsatz der Theorie der charakteristischen Klassen existiert eine lineare Abbildung

$$W : \mathfrak{P}(\mathfrak{L}\mathfrak{G}) \to H^*(M) \text{ (Weil – Morphismus)}, \tag{B.69}$$

die $\wedge$-Produkte in $\wedge$-Produkte abbildet. Genau die Bilder $W(f)$ heißen charakteristische Klassen des Vektorraumbündels $\mathfrak{V}$ mit der Basismannigfaltigkeit M und der Strukturgruppe $\mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraumbündel mit der typischen Faser $\mathbb{C}^m$ über einer reellen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann ist

$$\mathfrak{G} := GL(m, \mathbb{C}) \tag{B.70}$$

die Strukturgruppe von $\mathfrak{V}$. Die sich durch den Weil-Morphismus W ergebenden charakteristischen Klassen heißen charakteristische Klassen des Vektorraumbündels $\mathfrak{V}$.

Die durch

$$\det(\lambda\mathfrak{E} - \frac{1}{2\pi i}B) = \sum_{k=0}^{m} f_k(B, \ldots, B)\lambda^{m-k} \quad \forall B \in \mathbb{C}^{m,n} \tag{B.71}$$

definierten f_k gehören zu $\mathfrak{P}_k(\mathfrak{L}\mathfrak{G})$. Die Kohomologieklassen

$$c_k(\mathfrak{V}) := W(f_k) \tag{B.72}$$

heißen k-te Chernklassen des Vektorraumbündels $\mathfrak{V}$, $c_k(\mathfrak{V}) \in H^{2k}(M)$, $k = 1, \ldots, m$. Nach dem Produktsatz gilt für zwei komplexe Vektorraumbündel $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ über der gleichen Basismannigfaltigkeit

$$c_k(\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}) = c_k(\mathfrak{V}) \wedge c_k(\mathfrak{W}) =: c_k(\mathfrak{V})c_k(\mathfrak{W}). \tag{B.73}$$

Die Chernklassen $c_1, \ldots, c_m$ erzeugen die Algebra aller charakteristischen Klassen bezüglich $GL(M, \mathbb{C})$. Die Summe aller Chernklassen

$$c(\mathfrak{V}) = 1 + c_1(\mathfrak{V}) + c_2(\mathfrak{V}) + \ldots \tag{B.74}$$

wird als totale Chernklasse bezeichnet.

Die Vereinigung $\bigcup\limits_{p \in M} TM_p$ aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit M wird als Tangentialbündel TM bezeichnet. Ist M Untermannigfaltigkeit von X, so definiert

$$\mathbb{N}_{X/M} := TX/TM \tag{B.75}$$

das Normalbündel der Einbettung $M \hookrightarrow X$.

Ist M eine glatte n-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit und $TM_{\mathbb{C}}$ das komplexifizierte Tangentialbündel von M (typische Faser $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt), so heißt

$$c_k(M) := c_k(TM_{\mathbb{C}}) \tag{B.76}$$

die k-te Chernklasse von M.

Nach dem Satz von Gauß-Bonet gilt für die Eulernummer

$$\chi_E(M) = \int\limits_M c_n(M), \; n = \mathrm{dim} M. \tag{B.77}$$

B.7 Calabi - Yau - Mannigfaltigkeiten

Sei $C_p : x = x(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq 1$ ein stetiger geschlossener Weg in einer differenzierbaren reellen Mannigfaltigkeit M, der im Punkt p beginnt und endet, $v \in TM_p$. Durch den Paralleltransport von v längs C_p erhält man einen Vektor v'. Dieser ist mit v durch eine SO(n)-Transformation A_{C_p} verbunden: $v' = A_{C_p} v$.

Die Menge $\{A_{C_p} | p \in M, \, C_p \text{ wie oben}\}$ bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die als Holonomiegruppe bezeichnet wird.

Ist M d-dimensionale Kählermannigfaltigkeit, so ist die Holonomiegruppe eine Untergruppe von U(d).

Eine kompakte d-dimensionale Kählermannigfaltigkeit mit der Holonomiegruppe SU(d) wird als Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Die Holonomie SU(d) ist gleichbedeutend damit, daß die Mannigfaltigkeit M mit einer Ricci - flachen ($R_{ij} = 0$ auf M) Metrik versehen werden kann.

Nach dem Satz von Yau existiert auf einer glatten komplexen Mannigfaltigkeit M genau dann eine Ricci - flache Kählermetrik, wenn die erste Chernklasse verschwindet ($c_1(M) = 0$).

Für Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten kann man zeigen, daß es bis auf eine Konstante genau eine holomorphe d-Form (also $h^{0,0} = h^{d,0} = 1$) und keine stetigen Isomorphismen ($h^{1,0} = \ldots = h^{d-1,0} = 0$) gibt.

Für d=1,2,3,4 ergeben sich mit $h^{r,s} = h^{s,r} = h^{d-r,d-s}$ folgende Hodgezahlen, angeordnet in Hodgediamanten:

$$d=1: \qquad \begin{array}{ccc} & h^{0,0} & \\ h^{1,0} & & h^{0,1} \\ & h^{1,1} & \end{array} = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{array} \tag{B.78}$$

$$d=2: \qquad \begin{array}{ccccc} & & h^{0,0} & & \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\ & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\ & & h^{2,2} & & \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & h^{1,1} & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \tag{B.79}$$

$$d=3: \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & & & h^{3,3} & & & \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \tag{B.80}$$

$$d=4: \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & h^{0,0} & & & & \\ & & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & & \\ & & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & & \\ & h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} & \\ h^{4,0} & & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & & h^{0,4} \\ & h^{4,1} & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & h^{1,4} & \\ & & h^{4,2} & & h^{3,3} & & h^{2,4} & & \\ & & & h^{4,3} & & h^{3,4} & & & \\ & & & & h^{0,0} & & & & \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 0 & \\
= \quad 1 & & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{3,1} & & 1 \\
 & 0 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}
\tag{B.81}
$$

B.8 Projektiver Raum und K3-Flächen

Auf $\mathbb{C}^{n+1}$ sei durch

$$
\sim: \; z_1 \sim z_2 \iff z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \; z_1 = \lambda z_2, \; \lambda \in \mathbb{C} \tag{B.82}
$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Dann wird die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{C}^{n+1}/\sim$ als komplexer projektiver n-dimensionaler Raum $\mathbb{C}P^n$ bezeichnet.

Sei

$$
U_j = \{[z] | z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_j \neq 0\}, \tag{B.83}
$$

$$
h_j : \; U_j \to \mathbb{C}^n, \; h_j(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}). \tag{B.84}
$$

Dann bildet die Menge der Karten $\{(U_j, h_j) : j = 1, \ldots, n+1\}$ einen Atlas von $\mathbb{C}P^n$.

Sei $K_j : U_j \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
K_j((z_1, \ldots, z_{n+1})) = \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} \left| \frac{z_i}{z_j} \right|^2 . \tag{B.85}
$$

Mit diesem Kählerpotential wird $\mathbb{C}P^n$ zu einer Kählermannigfaltigkeit.

$\mathbb{C}P^n$ und alle seine komplexen Untermannigfaltigkeiten sind kompakt. Es gilt der Satz von Chow: Jede Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}P^n$ kann dargestellt werden als Menge aller gemeinsamen Nullstellen endlich vieler homogener Polynome.

Eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit der (komplexen) Dimension zwei wird als K3-Fläche bezeichnet. Je zwei K3-Flächen sind diffeomorph zueinander, es genügt deshalb, eine spezielle zu finden, um alle topologischen Invarianten zu bestimmen, z. B. als komplexe Fläche, eingebettet in einen komplexen projektiven Raum der Dimension n=3.

Wir betrachten die durch

$$f = z_0^m + z_1^m + z_2^m + \ldots + z_n^m = 0 \tag{B.86}$$

im projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$ definierte Hyperfläche. Es gilt

$$c(\mathbb{C}P^n) = (1+J)^{n+1}, \tag{B.87}$$

wobei J die Kählerform der Kählermannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^n$ ist.

Sei X Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}P^n$. Dann gilt:

$$T\mathbb{C}P^n_{|X} = TX \oplus NX \tag{B.88}$$

und deshalb

$$c(T\mathbb{C}P^n_{|X}) = c(TX) \wedge c(NX). \tag{B.89}$$

Ist $X = \{[z] \in \mathbb{C}P^n : f(z) = 0\}$, so kann gezeigt werden, daß $c(NX) = (1 + mJ)$ gilt. Daraus folgt

$$c(TX) = \frac{c(T\mathbb{C}P^n_{|X})}{c(NX)} = \frac{(1+J)^{n+1}}{1+mJ} = \sum_r \sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} (-m)^{r-k} J^r, \tag{B.90}$$

$$c_r = \sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} (-q)^{r-k} J^r. \tag{B.91}$$

Aus der Forderung $c_1 = 0$ folgt wegen $c_1 = (-q + n + 1)J$ $q = n + 1$.

Für eine K3-Fläche ($n = 3$) folgt

$$c_2 = \left((-4)^2 + 4(-4) + 6\right) J^2 = 6J^2. \tag{B.92}$$

Daraus folgt für die Eulernummer

$$\chi_E(S) = \int\limits_S c_d = \int\limits_{\mathbb{C}P^d} (dJ) \wedge c_d = \int\limits_{\mathbb{C}P^3} 24 J^3 = 24. \tag{B.93}$$

Aus

$$\chi_E(S) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \beta_q = \sum_{q=0}^{n} \sum_{r+s=q} h^{r,s} = 2h^{0,0} - 4h^{0,1} + 2h^{0,2} + h^{1,1} = 4 + h^{1,1} \tag{B.94}$$

folgt: $h^{1,1} = 20$ für zweidimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Ihr Hodgediamant hat damit folgende Form:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} . \tag{B.95}$$

Anhang C

Eigenschaften der Metrikdeformationen

C.1 Lichnerowicz-Gleichung

Seien $g^0_{\hat{m}\hat{n}}$ und $g_{\hat{m}\hat{n}} = g^0_{\hat{m}\hat{n}} + h_{\hat{m}\hat{n}}$ zwei Ricci - flache Kählermetriken. Seien Γ^0 und R^0 das zu g^0 gehörige Christoffelsymbol und der Riemanntensor, mit D werde die zugehörige kovariante Ableitung bezeichnet.
Nach [24] gilt

$$\delta g^{\hat{a}\hat{b}} \doteq -g^{\hat{a}\hat{c}} g^{\hat{d}\hat{b}} \delta g_{\hat{c}\hat{d}}. \tag{C.1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}} &= \frac{1}{2} g^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{m}} g_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} g_{\hat{r}\hat{m}} - \partial_{\hat{r}} g_{\hat{m}\hat{n}} \right) && \text{(C.2)} \\
&= {\Gamma^0}^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}} + \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{m}} - \partial_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{n}} \right) && \text{(C.3)} \\
&\quad - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{a}} {g^0}^{\hat{r}\hat{b}} h_{\hat{a}\hat{b}} \left(\partial_{\hat{m}} g^0_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} g^0_{\hat{r}\hat{m}} - \partial_{\hat{r}} g^0_{\hat{m}\hat{n}} \right) + O\left(h^2\right). && \text{(C.4)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}} &\doteq \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{m}} - \partial_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{n}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} {g^0}^{\hat{u}\hat{s}} h_{\hat{r}\hat{s}} \left(\partial_{\hat{m}} g^0_{\hat{u}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} g^0_{\hat{u}\hat{m}} - \partial_{\hat{u}} g^0_{\hat{m}\hat{n}} \right) && \text{(C.5)} \\
&= \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{m}} - \partial_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{n}} \right) - {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} h_{\hat{r}\hat{s}} {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{m}\hat{n}} \\
&= \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{m}} - \partial_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{n}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left[{\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{m}\hat{r}} h_{\hat{s}\hat{n}} + {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{m}\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{s}} + {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{n}\hat{r}} h_{\hat{s}\hat{m}} + {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{n}\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{s}} - {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{r}\hat{m}} h_{\hat{n}\hat{s}} - {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{r}\hat{n}} h_{\hat{s}\hat{m}} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \left(D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{n}} + D_{\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{m}} - D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{n}} \right). \tag{C.6}$$

Es gelten

$$R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}} = \partial_{\hat{n}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{k}} - \partial_{\hat{k}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}} + \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{m}\hat{k}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{n}\hat{e}} - \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{m}\hat{n}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{e}}, \tag{C.7}$$

$$\delta R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}} = \partial_{\hat{n}} \delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{k}} - \partial_{\hat{k}} \delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}} + \left(\delta\Gamma^{\hat{e}}_{\hat{m}\hat{k}}\right) \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{n}\hat{e}} + \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{m}\hat{k}} \delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{n}\hat{e}} - \left(\delta\Gamma^{\hat{e}}_{\hat{m}\hat{n}}\right) \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{e}} - \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{m}\hat{n}} \delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{e}}. \tag{C.8}$$

Da $\delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}}$ ein Tensor ist, folgt daraus

$$\delta R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}} = D_{\hat{n}} \left(\delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{k}}\right) - D_{\hat{k}} \left(\delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{n}}\right), \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{\hat{m}\hat{k}} &= D_{\hat{l}} \left(\delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{k}}\right) - D_{\hat{k}} \left(\delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{l}}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \left(D_{\hat{l}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{k}} + D_{\hat{l}} D_{\hat{k}} h_{\hat{r}\hat{m}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} \right. \\
&\quad \left. - D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} - D_{\hat{k}} D_{\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{m}} + D_{\hat{k}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{l}} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \left(D_{\hat{l}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{k}} + D_{\hat{l}} D_{\hat{k}} h_{\hat{r}\hat{m}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} \right).
\end{aligned} \tag{C.10}$$

(Palatini-Identität).

Es werde die Eichbedingung

$$g^{\hat{i}\hat{k}} D_{\hat{k}} h_{\hat{i}\hat{j}} = \frac{1}{2} g^{\hat{i}\hat{k}} D_{\hat{j}} h_{\hat{k}\hat{i}} \tag{C.11}$$

verwendet [13].

Weiter gilt für jeden Tensor T

$$\begin{aligned}
& D_{\hat{k}} D_{\hat{n}} T_{\hat{a}\hat{m}} - D_{\hat{n}} D_{\hat{k}} T_{\hat{a}\hat{m}} \\
= \; & D_{\hat{k}} \left(\partial_{\hat{n}} T_{\hat{a}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{a}} T_{\hat{l}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{m}} T_{\hat{a}\hat{l}} \right) - D_{\hat{n}} \left(\partial_{\hat{k}} T_{\hat{a}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{a}} T_{\hat{l}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{m}} T_{\hat{a}\hat{l}} \right) \\
= \; & \partial_{\hat{k}} \partial_{\hat{n}} T_{\hat{a}\hat{m}} - \left(\partial_{\hat{k}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{a}} \right) T_{\hat{l}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{a}} \partial_{\hat{k}} T_{\hat{l}\hat{m}} - \left(\partial_{\hat{k}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{m}} \right) T_{\hat{a}\hat{l}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{m}} \partial_{\hat{k}} T_{\hat{a}\hat{l}} \\
& - \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{k}\hat{a}} \left(\partial_{\hat{n}} T_{\hat{p}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{p}} T_{\hat{l}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{m}} T_{\hat{p}\hat{l}} \right) - \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{k}\hat{m}} \left(\partial_{\hat{n}} T_{\hat{a}\hat{p}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{a}} T_{\hat{l}\hat{p}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{p}} T_{\hat{a}\hat{l}} \right) \\
& - \partial_{\hat{n}} \partial_{\hat{k}} T_{\hat{a}\hat{m}} + \left(\partial_{\hat{n}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{a}} \right) T_{\hat{l}\hat{m}} + \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{a}} \partial_{\hat{n}} T_{\hat{l}\hat{m}} + \left(\partial_{\hat{n}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{m}} \right) T_{\hat{a}\hat{l}} + \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{m}} \partial_{\hat{n}} T_{\hat{a}\hat{l}} \\
& + \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{n}\hat{a}} \left(\partial_{\hat{k}} T_{\hat{p}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{p}} T_{\hat{l}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{m}} T_{\hat{p}\hat{l}} \right) + \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{n}\hat{m}} \left(\partial_{\hat{k}} T_{\hat{a}\hat{p}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{a}} T_{\hat{l}\hat{p}} - \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{p}} T_{\hat{a}\hat{l}} \right) \\
= \; & - \left(\partial_{\hat{k}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{a}} - \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{k}\hat{a}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{p}} - \partial_{\hat{n}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{a}} + \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{n}\hat{a}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{p}} \right) T_{\hat{l}\hat{m}} \\
& - \left(\partial_{\hat{k}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{m}} - \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{k}\hat{m}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{p}} - \partial_{\hat{n}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{m}} + \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{n}\hat{m}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{p}} \right) T_{\hat{a}\hat{l}} \\
& + \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{k}\hat{a}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{m}} T_{\hat{p}\hat{l}} + \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{k}\hat{m}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{n}\hat{a}} T_{\hat{l}\hat{p}} - \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{n}\hat{a}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{m}} T_{\hat{p}\hat{l}} - \Gamma^{0\hat{p}}{}_{\hat{n}\hat{m}} \Gamma^{0\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{a}} T_{\hat{l}\hat{p}} \\
= \; & R^{0\hat{l}}{}_{\hat{a}\hat{n}\hat{k}} T_{\hat{l}\hat{m}} + R^{0\hat{l}}{}_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}} T_{\hat{a}\hat{l}}.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Damit folgt unter Berücksichtigung der Ricciflachheit von g^0, d.h.

$$g^{0\hat{a}\hat{c}} R^0{}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0 = g^{0\hat{a}\hat{c}} R^0{}_{\hat{b}\hat{a}\hat{d}\hat{c}}, \tag{C.13}$$

und

$$\begin{aligned} R^{\hat{s}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}} + R^{\hat{s}}{}_{\hat{l}\hat{k}\hat{m}} &= \partial_{\hat{m}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{l}} - \partial_{\hat{l}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{m}} + \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{k}\hat{l}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{m}\hat{e}} - \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{k}\hat{m}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{l}\hat{e}} \\ &\quad + \partial_{\hat{k}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{l}\hat{m}} - \partial_{\hat{m}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{l}\hat{k}} + \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{l}\hat{m}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{e}} - \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{l}\hat{k}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{m}\hat{e}} \\ &= -\partial_{\hat{l}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{m}} - \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{k}\hat{m}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{l}\hat{e}} + \partial_{\hat{k}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{l}\hat{m}} + \Gamma^{\hat{e}}_{\hat{l}\hat{m}}\Gamma^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{e}} \\ &= R^{\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned} \delta R_{\hat{m}\hat{k}} &= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \left(D_{\hat{l}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{k}} + D_{\hat{l}} D_{\hat{k}} h_{\hat{r}\hat{m}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \Big(D_{\hat{m}} D_{\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{k}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{r}\hat{m}\hat{l}} h_{\hat{s}\hat{k}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} \\ &\quad + D_{\hat{k}} D_{\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{m}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{r}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{s}\hat{m}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \Big(\frac{1}{2} D_{\hat{m}} D_{\hat{k}} h_{\hat{r}\hat{l}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \Big(\frac{1}{2} D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} + \frac{1}{2} R^{0\hat{s}}{}_{\hat{r}\hat{k}\hat{m}} h_{\hat{s}\hat{l}} + \frac{1}{2} R^{0\hat{s}}{}_{\hat{l}\hat{k}\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{s}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - D_{\hat{k}} D_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{l}} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \Big(R^{0\hat{s}}{}_{\hat{l}\hat{k}\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{s}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} + R^{0\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{0\hat{l}\hat{r}} \Big(2 R^{0\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}} - D_{\hat{l}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} \Big) . \end{aligned} \tag{C.15}$$

Aus

$$\delta R_{\hat{m}\hat{k}} = 0 \tag{C.16}$$

folgt damit die Lichnerowicz - Gleichung (2.4)

$$0 = \frac{1}{2} D^{\hat{r}} D_{\hat{r}} h_{\hat{m}\hat{k}} - g^{0\hat{l}\hat{r}} R^{0\hat{s}}{}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}} h_{\hat{r}\hat{s}}. \tag{C.17}$$

Da R^0 der Riemanntensor einer Calabi - Yau - Metrik ist, folgt nach Aufspaltung der Calabi - Yau - Indizes bezüglich komplexer Koordinaten, daß Deformationen h_{ij} mit reinen Indizes und Deformationen $h_{i\bar{j}}$ mit gemischten Indizes diese Gleichung jeweils getrennt erfüllen,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} D^{\hat{r}} D_{\hat{r}} h_{i\bar{j}} - g^{0 l \bar{r}} R^{0\,s}{}_{i\bar{j}l} h_{\bar{r}s}, && \text{(C.18)} \\
0 &= \frac{1}{2} D^{\hat{r}} D_{\hat{r}} h_{ij} - g^{0 \bar{l} r} R^{0\,s}{}_{ij\bar{l}} h_{rs}. && \text{(C.19)}
\end{aligned}
$$

C.2 Harmonizität der Metrikdeformationen

Sei

$$
\omega = \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} dx^{\hat{m}_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\hat{m}_p} \tag{C.20}
$$

eine p-Form. Dann gelten

$$
\begin{aligned}
d^+ \omega &= -p g^{\hat{j}\hat{k}} D_{\hat{j}} \omega_{\hat{k}\hat{m}_2 \ldots \hat{m}_p} dx^{\hat{m}_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\hat{m}_p}, && \text{(C.21)} \\
d\omega &= \frac{1}{p+1} \left(D_{\hat{k}} \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{k}\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} dx^{\hat{k}} \wedge dx^{\hat{m}_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\hat{m}_p}, && \text{(C.22)}
\end{aligned}
$$

wobei im folgenden mit $(\ldots)_{<\ldots>}$ gemeint ist, daß die Indizes in den spitzen Klammern im vorherigen Ausdruck zyklisch vertauscht werden unter Berücksichtigung des Vorzeichens, das heißt zum Beispiel

$$
\left(D_{\hat{k}} \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{k}\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} = D_{\hat{k}} \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} + (-1)^p D_{\hat{m}_1} \omega_{\hat{m}_2 \ldots \hat{m}_p \hat{k}} + \ldots . \tag{C.23}
$$

Es folgen

$$
\begin{aligned}
dd^+ \omega &= -g^{\hat{j}\hat{k}} \left(D_{\hat{m}_1} D_{\hat{j}} \omega_{\hat{k}\hat{m}_2 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} dx^{\hat{m}_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\hat{m}_p}, && \text{(C.24)} \\
d^+ d\omega &= -g^{\hat{j}\hat{k}} \left(D_{\hat{j}} D_{\hat{k}} \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{k}\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} dx^{\hat{m}_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\hat{m}_p}. && \text{(C.25)}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(\Delta\omega)_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} &= -g^{\hat{j}\hat{k}} \left\{ \left(D_{\hat{m}_1} D_{\hat{j}} \omega_{\hat{k}\hat{m}_2 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} + \left(D_{\hat{j}} D_{\hat{k}} \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{k}\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} \right\} \\
&= -g^{\hat{j}\hat{k}} \left\{ \left(D_{\hat{m}_1} D_{\hat{j}} \omega_{\hat{k}\hat{m}_2 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} + \left(D_{\hat{j}} D_{\hat{k}} \omega_{\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p} \right)_{<\hat{k}\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_p>} \right\} .
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

Da $\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p}$ schiefsymmetrisch bezüglich aller Indizes ist, gilt

$$\begin{aligned}
\left(D_{\hat{j}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{k}\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} &= D_{\hat{j}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} + (-1)^p D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_1}\omega_{\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p\hat{k}} \\
&\quad + D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_2}\omega_{\hat{m}_3\ldots\hat{m}_p\hat{k}\hat{m}_1} + \ldots + (-1^p)D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_p}\omega_{\hat{k}\hat{m}_1\ldots\hat{m}_{p-1}} \\
&= D_{\hat{j}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} - D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p} \\
&\quad -(-1)^{p-1}D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_2}\omega_{\hat{m}_3\ldots\hat{m}_p\hat{k}\hat{m}_1} - \ldots \\
&\quad -(-1^{p-1})D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_p}\omega_{\hat{k}\hat{m}_1\ldots\hat{m}_{p-1}} \\
&= D_{\hat{j}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} - \left(D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \qquad \text{(C.27)}
\end{aligned}$$

und damit

$$(\Delta\omega)_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} = -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} - g^{\hat{j}\hat{k}}\left(\left(D_{\hat{m}_1}D_{\hat{j}} - D_{\hat{j}}D_{\hat{m}_1}\right)\omega_{\hat{k}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>}. \qquad \text{(C.28)}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
(\Delta\omega)_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} &= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} \\
&\quad -g^{\hat{j}\hat{k}}\left(R^{\hat{l}}{}_{\hat{k}\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{l}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p} + R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_2\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_3\ldots\hat{m}_p} + \ldots \right. \qquad \text{(C.29)} \\
&\quad \left. + R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_p\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_{p-1}l}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \\
&= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} + \left(R^{\hat{j}\hat{l}}{}_{\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{l}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \\
&\quad -g^{\hat{j}\hat{k}}\left(R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_2\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_3\ldots\hat{m}_p} - R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_3\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_2\hat{m}_4\ldots\hat{m}_p}\right. \\
&\quad +R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_4\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_2\hat{m}_3\hat{m}_5\ldots\hat{m}_p} \mp \ldots \qquad \text{(C.30)} \\
&\quad \left.+(-1)^p R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_p\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_{p-1}}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \\
&= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} + \left(R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_1}\omega_{\hat{l}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \\
&\quad -g^{\hat{j}\hat{k}}\left(R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_2\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_3\ldots\hat{m}_p} - (-1)^{p-1}R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_3\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_4\ldots\hat{m}_p\hat{m}_2}\right. \\
&\quad \left.+R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_4\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_5\ldots\hat{m}_p\hat{m}_2\hat{m}_3} \mp \ldots\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \\
&= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p} + \left(R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_1}\omega_{\hat{l}\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>} \\
&\quad -g^{\hat{j}\hat{k}}\left(R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_2\hat{j}\hat{m}_1}\omega_{\hat{k}\hat{l}\hat{m}_3\ldots\hat{m}_p}\right)_{<\hat{m}_2\ldots\hat{m}_p><\hat{m}_1\ldots\hat{m}_p>}, \qquad \text{(C.31)}
\end{aligned}$$

dabei ist $R^{\hat{l}}{}_{\hat{m}_1}$ der Riccitensor, es gilt

$$R_{\hat{a}\hat{b}} = R^{\hat{c}}{}_{\hat{a}\hat{c}\hat{b}}. \qquad \text{(C.32)}$$

Daraus folgt für eine (1,1) - Form $\omega_{i\bar{l}}$ auf einer Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{i\bar{l}} &= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{i\bar{l}} - g^{\hat{j}\hat{k}}R^{\hat{m}}{}_{\bar{l}\hat{j}i}\omega_{\hat{k}\hat{m}} + g^{\hat{j}\hat{k}}R^{\hat{m}}{}_{i\hat{j}\bar{l}}\omega_{\hat{k}\hat{m}} \\
&= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{i\bar{l}} - g^{\bar{j}k}R^{\bar{m}}{}_{\bar{l}\bar{j}i}\omega_{k\bar{m}} + g^{j\bar{k}}R^{\bar{m}}{}_{ij\bar{l}}\omega_{\bar{k}m} \\
&= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{i\bar{l}} + g^{\bar{j}k}R^{\bar{m}}{}_{\bar{l}i\bar{j}}\omega_{k\bar{m}} - g^{m\bar{n}}R_{\bar{n}i}{}^{\bar{k}}{}_{\bar{l}}\omega_{m\bar{k}} \\
&= -D^{\hat{k}}D_{\hat{k}}\omega_{i\bar{l}} + 2g^{\bar{j}k}R^{\bar{m}}{}_{\bar{l}i\bar{j}}\omega_{k\bar{m}}.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Daraus folgt: $h_{i\bar{l}}$ erfüllt genau dann die Lichnerowicz - Gleichung (C.18), wenn die (1,1) - Form

$$\omega := ih_{i\bar{l}}dz^i \wedge dz^{\bar{l}} \tag{C.34}$$

harmonisch ist. Analog läßt sich zeigen, daß $h_{\bar{k}\bar{l}}$ genau dann die Lichnerowicz - Gleichung (C.19) erfüllt, wenn $\chi := \Omega_{ijk}g^{0k\bar{k}}h_{\bar{k}\bar{l}}dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^{\bar{l}}$ eine harmonische (2,1)-Form ist [8].

C.3 Eigenschaften der harmonischen Formen

Da $\omega := \omega_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ eine harmonische (1,1)-Form ist, gelten

$$d\omega = \frac{\partial\omega_{i\bar{j}}}{\partial z^k}dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} + \frac{\partial\omega_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^{\bar{k}}}d\bar{z}^{\bar{k}} \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} = 0, \tag{C.35}$$

$$d^+\omega = -D^k\omega_{k\bar{j}}d\bar{z}^{\bar{j}} - D^{\bar{k}}\omega_{i\bar{k}}dz^i = 0. \tag{C.36}$$

Der (2,1)-Anteil und der (1,2)-Anteil von $d\omega$ müssen beide verschwinden, daraus folgen

$$\partial_k\omega_{i\bar{j}} = \partial_i\omega_{k\bar{j}} \tag{C.37}$$

$$\partial_{\bar{k}}\omega_{i\bar{j}} = \partial_{\bar{j}}\omega_{i\bar{k}}. \tag{C.38}$$

Damit folgen

$$\partial_i g_{\bar{d}a} = \partial_a g_{\bar{d}i}, \tag{C.39}$$

$$\partial_{\bar{i}} g_{\bar{d}a} = \partial_{\bar{d}} g_{\bar{i}aa}. \tag{C.40}$$

Aus dem Verschwinden des (0,1)- und des (1,0)-Anteils von $d^+\omega$ folgen

$$g^{0k\bar{l}}D_{\bar{l}}\omega_{k\bar{j}} = 0, \tag{C.41}$$

$$g^{0\bar{k}l}D_l\omega_{i\bar{k}} = 0. \tag{C.42}$$

Da $\chi := \Omega_{ijk} g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^{\bar{l}}$ eine harmonische (2,1)-Form ist, gelten

$$
\begin{aligned}
d\chi &= \partial_m \left(\Omega_{ijk} g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) dz^m \wedge dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^{\bar{l}} \\
&\quad + \Omega_{ijk} \partial_{\bar{m}} \left(g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) d\bar{z}^{\bar{m}} \wedge dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^{\bar{l}} = 0, && \text{(C.43)} \\
d^+\chi &= D^i \left(\Omega_{ijk} g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) dz^j \wedge d\bar{z}^{\bar{l}} + D^{\bar{l}} \left(\Omega_{ijk} g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) dz^i \wedge dz^j = 0. \\
& && \text{(C.44)}
\end{aligned}
$$

Aus dem Verschwinden des (2,2)-Anteils von $d\chi$ folgt

$$
(\Omega_{ijk} - \Omega_{jik}) \left(\partial_{\bar{m}} \left(g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) - \partial_{\bar{l}} \left(g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{m}} \right) \right) = 0. \tag{C.45}
$$

Nach [6] gilt $\Omega_{ijk} = f(z) \epsilon_{ijk}$, deshalb folgt durch Multiplikation mit ϵ_{ijm} und Summation wegen

$$
\epsilon_{ijm} \epsilon_{ijk} = 2\delta_{mk} \tag{C.46}
$$

$$
\partial_{\bar{m}} \left(g^{0^{m\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) - \partial_{\bar{l}} \left(g^{0^{m\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{m}} \right) = 0 \tag{C.47}
$$

und daraus erhält man

$$
D_{\bar{m}} \left(g^{0^{m\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) = D_{\bar{l}} \left(g^{0^{m\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{m}} \right), \tag{C.48}
$$

$$
g^{0^{m\bar{k}}} D_{\bar{m}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} = g^{0^{m\bar{k}}} D_{\bar{l}} \chi_{\bar{k}\bar{m}}, \tag{C.49}
$$

durch Kontraktion mit $g^0_{m\bar{n}}$ ergibt sich

$$
D_{\bar{m}} \chi_{\bar{n}\bar{l}} = D_{\bar{l}} \chi_{\bar{n}\bar{m}}. \tag{C.50}
$$

Durch Einführung von

$$
D'_{\bar{k}} \chi_{\bar{c}\bar{s}} = \partial_{\bar{k}} \chi_{\bar{c}\bar{s}} - {\Gamma^0}^{\bar{l}}_{\bar{s}\bar{k}} \chi_{\bar{c}\bar{l}} \tag{C.51}
$$

erhält man

$$
D'_{\bar{k}} \chi_{\bar{c}\bar{s}} = D'_{\bar{c}} \chi_{\bar{k}\bar{s}}. \tag{C.52}
$$

Durch komplexe Konjugation erhält man

$$D_m \chi_{nl} = D_l \chi_{nm} \tag{C.53}$$

und mit

$$D'_k \chi_{cs} = \partial_k \chi_{cs} - \Gamma^{0}{}^{l}_{sk} \chi_{cl} \tag{C.54}$$

ergibt sich

$$D'_k \chi_{cs} = D_c \chi_{ks}. \tag{C.55}$$

Aus dem Verschwinden des (3,1)-Anteils von $d\chi$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_m \left(\left(\Omega_{ijk} - \Omega_{jik} \right) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) + \partial_i \left(\left(\Omega_{jmk} - \Omega_{mjk} \right) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) \\ &\quad + \partial_j \left(\left(\Omega_{mik} - \Omega_{imk} \right) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) \\ &= 2 \left[\epsilon_{ijk} \partial_m \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) + \epsilon_{jmk} \partial_i \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) + \epsilon_{mik} \partial_j \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{C.56}$$

Durch Multiplikation mit ϵ_{mij} und Summation erhält man daraus

$$\delta_{mk} \partial_m \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) + \delta_{ik} \partial_i \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) + \delta_{jk} \partial_j \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) = 0, \tag{C.57}$$

$$\partial_k \left(f(z) g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) = 0. \tag{C.58}$$

Aus dem Verschwinden des (1,1)-Anteils von $d^+\chi$ folgt

$$g^{0^{i\bar{n}}} D_{\bar{n}} \left(\Omega_{ijk} g^{0^{k\bar{k}}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) = 0 \tag{C.59}$$

und daraus

$$\epsilon_{ijk} g^{0^{i\bar{n}}} g^{0^{k\bar{k}}} D_{\bar{n}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} = 0. \tag{C.60}$$

Durch Multiplikation mit ϵ_{jrs} und Summation ergibt sich

$$\left(g^{0^{s\bar{n}}} g^{0^{r\bar{k}}} - g^{0^{r\bar{n}}} g^{0^{s\bar{k}}} \right) D_{\bar{n}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} = 0. \tag{C.61}$$

Kontraktion mit $g^0_{s\bar{i}} g^0_{r\bar{j}}$ führt auf Gleichung (C.50).

Aus dem Verschwinden des (2,0)-Anteils von $d^+\chi$ folgt mit der nach [6] geltenden kovarianten Konstanz der Volumenform

$$\begin{aligned} 0 &= g^{0\bar{l}m} D_m \left((\Omega_{ijk} - \Omega_{jik})\, g^{0k\bar{k}} \chi_{\bar{k}\bar{l}} \right) \\ &= 2\epsilon_{ijk} f(z) g^{0\bar{l}m} g^{0k\bar{k}} D_m \chi_{\bar{k}\bar{l}}. \end{aligned} \tag{C.62}$$

Durch Multiplikation mit ϵ_{ijr} und Summation ergibt sich

$$2g^{0\bar{l}m} g^{0r\bar{k}} D_m \chi_{\bar{k}\bar{l}} = 0, \tag{C.63}$$

Kontraktion mit $g^0_{r\bar{n}}$ führt auf

$$g^{0\bar{l}m} D_m \chi_{\bar{n}\bar{l}} = 0, \tag{C.64}$$

durch komplexe Konjugation erhält man

$$g^{0l\bar{m}} D_{\bar{m}} \chi_{nl} = 0. \tag{C.65}$$

Aus der Eichbedingung (C.11) folgt mit den Gleichungen (C.41), (C.42), (C.64) und (C.65),

$$g^{i\bar{k}} D_{\hat{j}} \omega_{i\bar{k}} = g^{i\bar{k}} D_{\bar{k}} h_{i\hat{j}} + g^{\bar{i}k} D_k h_{\bar{i}\hat{j}} = 0, \tag{C.66}$$

also

$$\begin{aligned} g^{i\bar{k}} D_j \omega_{i\bar{k}} &= 0, & \text{(C.67)} \\ g^{i\bar{k}} D_{\bar{j}} \omega_{i\bar{k}} &= 0, & \text{(C.68)} \end{aligned}$$

$g^{i\bar{k}} \omega_{i\bar{k}}$ ist kovariant konstant.

C.4 Kovariante Konstanz der Metrik

Es gilt

$$D_{\hat{k}} g^0_{\hat{m}\hat{n}} = \partial_{\hat{k}} g^0_{\hat{m}\hat{n}} - \Gamma^{0\hat{l}}_{\hat{k}\hat{m}} g^0_{\hat{l}\hat{n}} - \Gamma^{0\hat{l}}_{\hat{k}\hat{n}} g^0_{\hat{m}\hat{l}} = 0. \tag{C.69}$$

Daraus folgt mit (C.5)

$$
\begin{aligned}
\left(D_{\hat{k}}+\delta D_{\hat{k}}\right) g_{\hat{m}\hat{n}} &= \partial_{\hat{k}} g_{\hat{m}\hat{n}} - \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{m}} g_{\hat{l}\hat{n}} - \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{n}} g_{\hat{m}\hat{l}} \\
&= D_{\hat{k}} g^0_{\hat{m}\hat{n}} + D_{\hat{k}} h_{\hat{m}\hat{n}} - \delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{m}} g^0_{\hat{l}\hat{n}} - \delta\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{n}} g^0_{\hat{l}\hat{m}} \\
&\doteq D_{\hat{k}} h_{\hat{m}\hat{n}} - g^0_{\hat{l}\hat{n}} \left(\frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{k}} h_{\hat{r}\hat{m}} + \partial_{\hat{m}} h_{\hat{r}\hat{k}} - \partial_{\hat{r}} h_{\hat{k}\hat{m}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} {g^0}^{\hat{u}\hat{s}} h_{\hat{r}\hat{s}} \left(\partial_{\hat{k}} g^0_{\hat{u}\hat{m}} + \partial_{\hat{m}} g^0_{\hat{u}\hat{k}} - \partial_{\hat{u}} g^0_{\hat{k}\hat{m}}\right) \right) \\
&\quad - g^0_{\hat{l}\hat{m}} \left(\frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} \left(\partial_{\hat{k}} h_{\hat{r}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} h_{\hat{r}\hat{k}} - \partial_{\hat{r}} h_{\hat{k}\hat{n}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{l}\hat{r}} {g^0}^{\hat{u}\hat{s}} h_{\hat{r}\hat{s}} \left(\partial_{\hat{k}} g^0_{\hat{u}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} g^0_{\hat{u}\hat{k}} - \partial_{\hat{u}} g^0_{\hat{k}\hat{n}}\right) \right) \\
&= D_{\hat{k}} h_{\hat{m}\hat{n}} - \frac{1}{2} \left(\partial_{\hat{k}} h_{\hat{n}\hat{m}} + \partial_{\hat{m}} h_{\hat{n}\hat{k}} - \partial_{\hat{n}} h_{\hat{k}\hat{m}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{u}\hat{s}} h_{\hat{n}\hat{s}} \left(\partial_{\hat{k}} g^0_{\hat{u}\hat{m}} + \partial_{\hat{m}} g^0_{\hat{u}\hat{k}} - \partial_{\hat{u}} g^0_{\hat{k}\hat{m}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\partial_{\hat{k}} h_{\hat{m}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} h_{\hat{m}\hat{k}} - \partial_{\hat{m}} h_{\hat{k}\hat{n}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} {g^0}^{\hat{u}\hat{s}} h_{\hat{m}\hat{s}} \left(\partial_{\hat{k}} g^0_{\hat{u}\hat{n}} + \partial_{\hat{n}} g^0_{\hat{u}\hat{k}} - \partial_{\hat{u}} g^0_{\hat{k}\hat{n}}\right) \\
&= D_{\hat{k}} h_{\hat{m}\hat{n}} - \partial_{\hat{k}} h_{\hat{m}\hat{n}} - {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{m}} h_{\hat{n}\hat{s}} - {\Gamma^0}^{\hat{s}}_{\hat{k}\hat{n}} h_{\hat{m}\hat{s}} \\
&= 0, \qquad \text{(C.70)}
\end{aligned}
$$

das heißt, zur ersten Ordnung liefert die Konstanz von g unter der zugehörigen kovarianten Ableitung keine Bedingung an δg.

Anhang D

Kompaktifizierung von $B \wedge X_8$ auf CY_3

Es soll $B \wedge X_8$ auf einer komplex dreidimensionalen Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit kompaktifiziert werden. Es wird die Bezeichnungsweise aus Kapitel 3 verwendet. Es galt

$$\begin{aligned} \epsilon_{10} B X_8 &= \frac{1}{192} \epsilon^{A_1 \ldots A_{10}} B_{A_1 A_2} \Big(R_{A_3 A_4 A}{}^B R_{A_5 A_6 C}{}^A R_{A_7 A_8 B}{}^D R_{A_9 A_{10} D}{}^C \\ &\quad - \frac{1}{4} R_{A_3 A_4 A}{}^B R_{A_5 A_6 B}{}^A R_{A_7 A_8 C}{}^D R_{A_9 A_{10} D}{}^C \Big). \end{aligned} \tag{D.1}$$

Aufgrund der Eigenschaften des ϵ-Symbols müssen unter $A_1 \ldots A_{10}$ genau vier Raumzeitindizes vorkommen, unter $A_3 \ldots A_{10}$ kommen also mindestens zwei vor. Es gelten

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\partial_\sigma g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\lambda g_{\sigma\nu} \right), \tag{D.2}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\hat{a}\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\partial_{\hat{a}} g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\hat{a}} - \partial_\lambda g_{\hat{a}\nu} \right) = 0, \tag{D.3}$$

$$\Gamma^{\hat{a}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\hat{a}\hat{c}} \left(\partial_\mu g_{\hat{c}\nu} + \partial_\nu g_{\hat{c}\mu} - \partial_{\hat{c}} g_{\mu\nu} \right) = 0, \tag{D.4}$$

$$\Gamma^{\hat{a}}_{\mu\hat{b}} = \frac{1}{2} g^{\hat{a}\hat{c}} \left(\partial_\mu g_{\hat{c}\hat{b}} + \partial_{\hat{b}} g_{\hat{c}\mu} - \partial_{\hat{c}} g_{\mu\hat{b}} \right) = \frac{1}{2} g^{\hat{a}\hat{c}} \partial_\mu g_{\hat{c}\hat{b}}, \tag{D.5}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_{\hat{a}} g_{\nu\hat{b}} + \partial_{\hat{b}} g_{\nu\hat{a}} - \partial_\nu g_{\hat{a}\hat{b}} \right) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{\hat{a}\hat{b}}, \tag{D.6}$$

$$\Gamma^{\hat{c}}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2} g^{\hat{c}\hat{d}} \left(\partial_{\hat{a}} g_{\hat{d}\hat{b}} + \partial_{\hat{b}} g_{\hat{d}\hat{a}} - \partial_{\hat{d}} g_{\hat{a}\hat{b}} \right). \tag{D.7}$$

Daraus folgen

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} = \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} + \Gamma^{M}_{\rho\mu} \Gamma^{\sigma}_{M\nu} - \Gamma^{M}_{\rho\nu} \Gamma^{\sigma}_{M\mu}$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}, && \text{(D.8)}\\
R_{\rho\sigma\hat{k}}{}^{\mu} &= \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\hat{k}\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\hat{k}\sigma} + \Gamma^M_{\hat{k}\rho}\Gamma^\mu_{M\sigma} - \Gamma^M_{\hat{k}\sigma}\Gamma^\mu_{M\rho} = 0, && \text{(D.9)}\\
R_{\rho\sigma\mu}{}^{\hat{k}} &= g^{\hat{k}\hat{l}} R_{\rho\sigma\mu\hat{l}} = - g^{\hat{k}\hat{l}} R_{\rho\sigma\hat{l}\mu} = -g^{\hat{k}\hat{l}} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma\hat{l}}{}^{\nu} = 0, && \text{(D.10)}\\
R_{\rho\hat{k}\mu}{}^{\sigma} &= g^{\sigma\nu} R_{\rho\hat{k}\mu\nu} = g^{\sigma\nu} R_{\mu\nu\rho\hat{k}} = g^{\sigma\nu} g_{\hat{k}\hat{l}} R_{\mu\nu\rho}{}^{\hat{l}} = 0, && \text{(D.11)}\\
R_{\rho\sigma\hat{k}}{}^{\hat{l}} &= \partial_\sigma \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\sigma} + \Gamma^M_{\hat{k}\rho}\Gamma^{\hat{l}}_{M\sigma} - \Gamma^M_{\hat{k}\sigma}\Gamma^{\hat{l}}_{M\rho} &&\\
&= \partial_\sigma \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\sigma} + \Gamma^{\hat{m}}_{\hat{k}\rho}\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\sigma} - \Gamma^{\hat{m}}_{\hat{k}\sigma}\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\rho} && \text{(D.12)}\\
&\quad \text{(proportional zwei Raumzeitableitungen)}, &&\\
R_{\hat{m}\hat{n}\rho}{}^{\sigma} &= g^{\mu\sigma} R_{\hat{m}\hat{n}\rho\mu} = g^{\mu\sigma} R_{\rho\mu\hat{m}\hat{n}} = g^{\mu\sigma} g_{\hat{k}\hat{n}} R_{\rho\mu\hat{m}}{}^{\hat{k}} && \text{(D.13)}\\
&\quad \text{(proportional zwei Raumzeitableitungen)}, &&\\
R_{\rho\hat{k}\sigma}{}^{\hat{m}} &= \partial_{\hat{k}} \Gamma^{\hat{m}}_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\hat{m}}_{\sigma\hat{k}} + \Gamma^M_{\sigma\rho}\Gamma^{\hat{m}}_{M\hat{k}} - \Gamma^M_{\sigma\hat{k}}\Gamma^{\hat{m}}_{M\rho} &&\\
&= -\partial_\rho \Gamma^{\hat{m}}_{\sigma\hat{k}} + \Gamma^\lambda_{\sigma\rho}\Gamma^{\hat{m}}_{\lambda\hat{k}} - \Gamma^{\hat{l}}_{\sigma\hat{k}}\Gamma^{\hat{m}}_{\hat{l}\rho} && \text{(D.14)}\\
&\quad \text{(proportional zwei Raumzeitableitungen)}, &&\\
R_{\rho\hat{k}\hat{m}}{}^{\sigma} &= g^{\mu\sigma} R_{\rho\hat{k}\hat{m}\mu} = -g^{\mu\sigma} R_{\rho\hat{k}\mu\hat{m}} = -g^{\mu\sigma} g_{\hat{m}\hat{l}} R_{\rho\hat{k}\mu}{}^{\hat{l}} && \text{(D.15)}\\
&\quad \text{(proportional zwei Raumzeitableitungen)}, &&\\
R_{\rho\hat{k}\hat{m}}{}^{\hat{n}} &= \partial_{\hat{k}} \Gamma^{\hat{n}}_{\rho\hat{m}} - \partial_\rho \Gamma^{\hat{n}}_{\hat{k}\hat{m}} + \Gamma^M_{\hat{m}\rho}\Gamma^{\hat{n}}_{M\hat{k}} - \Gamma^M_{\hat{m}\hat{k}}\Gamma^{\hat{n}}_{M\rho} &&\\
&= \partial_{\hat{k}} \Gamma^{\hat{n}}_{\rho\hat{m}} - \partial_\rho \Gamma^{\hat{n}}_{\hat{k}\hat{m}} + \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\rho}\Gamma^{\hat{n}}_{\hat{l}\hat{k}} - \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{m}\hat{k}}\Gamma^{\hat{n}}_{\hat{l}\rho} && \text{(D.16)}\\
&\quad \text{(proportional einer Raumzeitableitung)}, &&\\
R_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}{}^{\rho} &= g^{\rho\sigma} R_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}\sigma} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\hat{k}\hat{n}\hat{m}} = g^{\rho\sigma} g_{\hat{m}\hat{l}} R_{\sigma\hat{k}\hat{n}}{}^{\hat{l}} && \text{(D.17)}\\
&\quad \text{(proportional einer Raumzeitableitung)}, &&\\
R_{\hat{m}\hat{n}\rho}{}^{\hat{k}} &= g^{\hat{k}\hat{l}} R_{\hat{m}\hat{n}\rho\hat{l}} = g^{\hat{k}\hat{l}} R_{\rho\hat{l}\hat{m}\hat{n}} = g^{\hat{k}\hat{l}} g_{\hat{n}\hat{v}} R_{\rho\hat{l}\hat{m}}{}^{\hat{v}} && \text{(D.18)}\\
&\quad \text{(proportional einer Raumzeitableitung)}, &&\\
R_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}{}^{\hat{l}} &= \partial_{\hat{n}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{m}} - \partial_{\hat{m}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{n}} + \Gamma^M_{\hat{k}\hat{m}}\Gamma^{\hat{l}}_{M\hat{n}} - \Gamma^M_{\hat{k}\hat{n}}\Gamma^{\hat{l}}_{M\hat{m}} &&\\
&= \partial_{\hat{n}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{m}} - \partial_{\hat{m}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{k}\hat{n}} + \Gamma^{\hat{o}}_{\hat{k}\hat{m}}\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{o}\hat{n}} - \Gamma^{\hat{o}}_{\hat{k}\hat{n}}\Gamma^{\hat{l}}_{\hat{o}\hat{m}} + \Gamma^{\mu}_{\hat{k}\hat{m}}\Gamma^{\hat{l}}_{\mu\hat{n}} - \Gamma^{\mu}_{\hat{k}\hat{n}}\Gamma^{\hat{l}}_{\mu\hat{m}} && \text{(D.19)}\\
&\quad \text{(Calabi} - \text{Yau} - \text{Anteil proportional null Raumzeitableitungen)}. &&
\end{aligned}
$$

Da die nicht verschwindenden $R_{\mu\nu A}{}^{B}$ proportional zwei Raumzeitableitungen und die nicht verschwindenden $R_{\mu\hat{k}A}{}^{B}$ mindestens einer Raumzeitableitung proportional sind, aber die Entwicklung nur bis zu Termen mit zwei Raumzeitableitungen berechnet werden soll, brauchen nur Terme mit zwei Raumzeitindizes am antisymmetrischen Tensor B betrachtet zu werden. Jeder R-Faktor darf nur so viele Raumzeitableitungen beisteuern, wie Raumzeitindizes unter den ersten zwei seiner Indizes sind. R-Faktoren, deren erste zwei Indizes Calabi-Yau-Indizes sind, dürfen deshalb keine Raumzeitindizes haben, nur der Calabi-Yau-Anteil muß berücksichtigt werden, nur $R^0_{i\bar{l}j}{}^{k}$, $R^0_{i\bar{l}\bar{m}}{}^{\bar{n}}$, $R^0_{\bar{l}ij}{}^{k}$, $R^0_{\bar{l}i\bar{m}}{}^{\bar{n}}$ verschwinden nicht. Es werden also nur die Terme betrachtet, die in jedem Summanden an den Komponenten des Krümmungstensors genau zwei Raumzeitindizes enthalten, die Kontraktionen innerhalb der $\mathrm{tr}R^4$- und $\mathrm{tr}R^2$-Terme erfolgen nur über Calabi-Yau-Indizes. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{10} B \mathrm{tr} R^4 \doteq\ & B_{\mu\nu}\Big(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\hat a_1\ldots\hat a_6} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\sigma\hat a_3\ldots\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R_{\rho\sigma\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\ldots\hat a_4\rho\sigma\hat a_5\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat a} R_{\rho\sigma\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\ldots\hat a_6\rho\sigma} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat b}{}^{\hat d} R_{\rho\sigma\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\sigma\hat a_2\ldots\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \cdot 4 \\
& + \epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\sigma\hat a_4\hat a_5\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} R_{\sigma\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \cdot 4 \\
& + \epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\hat a_4\hat a_5\sigma\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_4\hat a_5\hat b}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \cdot 4 \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\hat a_3\sigma\hat a_4\hat a_5\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R_{\rho\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} R_{\sigma\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \cdot 4 \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\hat a_3\hat a_4\hat a_5\sigma\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R_{\rho\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_4\hat a_5\hat b}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \cdot 4 \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\hat a_3\hat a_4\rho\hat a_5\sigma\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat a} R_{\rho\hat a_5\hat b}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \cdot 4 \Big) \\
=\ & B_{\mu\nu}\Big(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\hat a_1\ldots\hat a_6} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_3\hat a_4\rho\sigma\hat a_5\hat a_6\hat a_1\hat a_2} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\hat a_5\hat a_6\rho\sigma\hat a_3\hat a_4} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_5\hat a_6\hat a_3\hat a_4\hat a_1\hat a_2\rho\sigma} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} \\
& + 4\Big[\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\sigma\hat a_2\ldots\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\sigma\hat a_2\hat a_5\hat a_6\rho\hat a_1\hat a_3\hat a_4} R_{\sigma\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\hat a_4\hat a_5\sigma\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_4\hat a_5\hat b}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_4\hat a_5\rho\hat a_1\sigma\hat a_6\hat a_2\hat a_3} R_{\hat a_4\hat a_5\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\hat a_2\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_3\hat a_4\rho\hat a_1\hat a_5\hat a_6\sigma\hat a_2} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\sigma\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\hat a_5\hat a_6\hat a_3\hat a_4\sigma\hat a_2\rho\hat a_1} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} \Big]\Big) \\
=\ & 4B_{\mu\nu}\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\hat a_1\ldots\hat a_6}\Big(R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& - 4 R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& - 2 R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat c}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_4\hat a_5\hat b}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad 4B_{\mu\nu} \quad & \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(\epsilon^{i\bar{l}j\bar{m}k\bar{n}}R_{\rho\sigma\hat{a}}{}^{\hat{b}}R^0_{i\bar{l}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{j\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}}\cdot 8 \\
& -4\epsilon^{i\bar{l}j\bar{m}k\bar{n}}R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}}R_{\sigma\bar{l}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{j\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}}\cdot 4 \\
& -4\epsilon^{\bar{l}ij\bar{m}k\bar{n}}R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}}R_{\sigma i\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{j\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}}\cdot 4 \\
& -2\epsilon^{ij\bar{m}k\bar{n}\bar{l}}R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}}R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R_{\sigma\bar{l}\hat{d}}{}^{\hat{c}}\cdot 4 \\
& -2\epsilon^{\bar{l}j\bar{m}k\bar{n}i}R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}}R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R_{\sigma i\hat{d}}{}^{\hat{c}}\cdot 4\Big) \\
= \quad 32B_{\mu\nu} \quad & \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Big(-R_{\rho\sigma\hat{a}}{}^{\hat{b}}R^0_{i\bar{l}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{j\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
& +2R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}}R_{\sigma\bar{l}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{j\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
& -2R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}}R_{\sigma i\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{j\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
& +R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}}R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R_{\sigma\bar{l}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
& -R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}}R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}}R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}}R_{\sigma i\hat{d}}{}^{\hat{c}}\Big) \\
= \quad 32B_{\mu\nu} \quad & \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Big(-R_{\rho\sigma a}{}^{b}R^0_{i\bar{l}c}{}^{a}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -R_{\rho\sigma\bar{a}}{}^{\bar{b}}R^0_{i\bar{l}\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \\
& +2R_{\rho ia}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}c}{}^{a}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +2R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +2R_{\rho ia}{}^{\bar{b}}R_{\sigma\bar{l}\bar{c}}{}^{a}R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \\
& +2R_{\rho i\bar{a}}{}^{\bar{b}}R_{\sigma\bar{l}\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \\
& -2R_{\rho\bar{l}a}{}^{b}R_{\sigma ic}{}^{a}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -2R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{b}R_{\sigma ic}{}^{\bar{a}}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -2R_{\rho\bar{l}a}{}^{\bar{b}}R_{\sigma i\bar{c}}{}^{a}R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \\
& -2R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{\bar{b}}R_{\sigma i\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \\
& +R_{\rho ia}{}^{b}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}R_{\sigma\bar{l}d}{}^{c} \\
& +R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}R_{\sigma\bar{l}d}{}^{\bar{c}} \\
& +R_{\rho ia}{}^{\bar{b}}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{c} \\
& +R_{\rho i\bar{a}}{}^{\bar{b}}R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \\
& -R_{\rho\bar{l}a}{}^{b}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}R_{\sigma id}{}^{c} \\
& -R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{b}R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}R_{\sigma id}{}^{\bar{c}} \\
& -R_{\rho\bar{l}a}{}^{\bar{b}}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R_{\sigma i\bar{d}}{}^{c}
\end{aligned}
$$

$$-R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma i\bar{d}}{}^{\bar{c}}\Big). \tag{D.20}$$

Aus (D.12) und (D.5) folgt

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\hat{k}}{}^{\hat{l}} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma g^{\hat{l}\hat{c}}\right)\partial_\rho g_{\hat{c}\hat{k}} - \frac{1}{2}\left(\partial_\rho g^{\hat{l}\hat{c}}\right)\partial_\sigma g_{\hat{c}\hat{k}} + \frac{1}{4} g^{\hat{m}\hat{c}} g^{\hat{l}\hat{d}} \left(\partial_\rho g_{\hat{c}\hat{k}}\right)\partial_\sigma g_{\hat{d}\hat{m}} \\ &\quad -\frac{1}{4} g^{\hat{m}\hat{c}} g^{\hat{l}\hat{d}} \left(\partial_\sigma g_{\hat{c}\hat{k}}\right)\partial_\rho g_{\hat{d}\hat{m}}, \end{aligned} \tag{D.21}$$

es gilt also nach (2.5) bis (2.7) sowie (C.1)

$$R_{\rho\sigma\hat{k}}{}^{\hat{l}} \sim \{\omega,\chi\}^2. \tag{D.22}$$

Aus (D.16), (D.5) und (D.7) folgt

$$R_{\rho\hat{k}\hat{m}}{}^{\hat{n}} \sim \{\omega,\chi\}. \tag{D.23}$$

Es gelten deshalb zur zweiten Ordnung in $\{\omega,\chi\}$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\sigma\bar{a}}{}^{\bar{b}} R^0_{i\bar{l}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{s\bar{b}} g^{t\bar{a}} g^{u\bar{d}} g^{v\bar{c}} R_{\rho\sigma\bar{a}s} R^0_{i\bar{l}\bar{c}t} R^0_{j\bar{m}\bar{b}u} R^0_{k\bar{n}\bar{d}v} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{s\bar{b}} g^{t\bar{a}} g^{u\bar{d}} g^{v\bar{c}} R_{\rho\sigma s\bar{a}} R^0_{i\bar{l}t\bar{c}} R^0_{j\bar{m}u\bar{b}} R^0_{k\bar{n}v\bar{d}} \\ &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\sigma s}{}^{t} R^0_{i\bar{l}t}{}^{v} R^0_{j\bar{m}u}{}^{s} R^0_{k\bar{n}v}{}^{u} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{jik}\epsilon^{\bar{m}\bar{l}\bar{n}} R_{\rho\sigma a}{}^{b} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{i\bar{l}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\sigma a}{}^{b} R^0_{i\bar{l}c}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}, \end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}a}{}^{b} R_{\sigma ic}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{\bar{s}b} g^{\bar{t}a} g^{\bar{u}d} g^{\bar{v}c} R_{\rho\bar{l}a\bar{s}} R_{\sigma ic\bar{t}} R^0_{j\bar{m}b\bar{u}} R^0_{k\bar{n}d\bar{v}} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{\bar{s}b} g^{\bar{t}a} g^{\bar{u}d} g^{\bar{v}c} R_{\rho\bar{l}\bar{s}a} R_{\sigma i\bar{t}c} R^0_{j\bar{m}\bar{u}b} R^0_{k\bar{n}\bar{v}d} \\ &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\bar{s}}{}^{\bar{t}} R_{\sigma i\bar{t}}{}^{\bar{v}} R^0_{j\bar{m}\bar{u}}{}^{\bar{s}} R^0_{k\bar{n}\bar{v}}{}^{\bar{u}} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{ikj}\epsilon^{\bar{l}\bar{n}\bar{m}} R_{\sigma\bar{l}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{\bar{b}} R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}} \\ &= -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{\bar{b}} R_{\sigma\bar{l}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}}, \end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{\bar{b}} R_{\sigma i\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} &\doteq -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho ia}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}a}{}^{\bar{b}} R_{\sigma i\bar{c}}{}^{a} R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{s\bar{b}} g^{\bar{t}a} g^{u\bar{d}} g^{v\bar{c}} R_{\rho\bar{l}as} R_{\sigma i\bar{c}\bar{t}} R^0_{j\bar{m}\bar{b}u} R^0_{k\bar{n}\bar{d}v} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{s\bar{b}} g^{\bar{t}a} g^{u\bar{d}} g^{v\bar{c}} R_{\rho\bar{l}sa} R_{\sigma i\bar{t}\bar{c}} R^0_{j\bar{m}u\bar{b}} R^0_{k\bar{n}v\bar{d}} \\ &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}s}{}^{\bar{t}} R_{\sigma i\bar{t}}{}^{v} R^0_{j\bar{m}u}{}^{s} R^0_{k\bar{n}v}{}^{u} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{ikj}\epsilon^{\bar{l}\bar{n}\bar{m}} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{v} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} \\ &= -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}, \end{aligned} \tag{D.26}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho ia}{}^{\bar{b}} R_{\sigma\bar{l}\bar{c}}{}^{a} R^0_{j\bar{m}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R^0_{k\bar{n}\bar{d}}{}^{\bar{c}} \doteq -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{b} R_{\sigma ic}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}, \tag{D.27}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}a}{}^{b} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma id}{}^{c} \doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{\bar{s}b} g^{\bar{t}a} g^{\bar{u}d} g^{\bar{v}c} R_{\rho\bar{l}a\bar{s}} R^0_{j\bar{m}c\bar{t}} R^0_{k\bar{n}b\bar{u}} R_{\sigma id\bar{v}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{\bar{s}b} g^{\bar{t}a} g^{\bar{u}d} g^{\bar{v}c} R_{\rho\bar{l}\bar{s}a} R^0_{j\bar{m}\bar{t}c} R^0_{k\bar{n}\bar{u}b} R_{\sigma i\bar{v}d} \\
&\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\bar{s}}{}^{\bar{t}} R^0_{j\bar{m}\bar{t}}{}^{\bar{v}} R^0_{k\bar{n}\bar{u}}{}^{\bar{s}} R_{\sigma i\bar{v}}{}^{\bar{u}} \\
&= \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{\bar{c}} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{\bar{b}} \\
&= -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{\bar{c}}, \qquad \text{(D.28)}
\end{aligned}
$$

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma i\bar{d}}{}^{\bar{c}} \doteq -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho ia}{}^{b} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{c}, \qquad \text{(D.29)}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}a}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma i\bar{d}}{}^{c} &\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{s\bar{b}} g^{\bar{t}a} g^{u\bar{d}} g^{\bar{v}c} R_{\rho\bar{l}as} R^0_{j\bar{m}c\bar{t}} R^0_{k\bar{n}\bar{b}u} R_{\sigma i\bar{d}\bar{v}} \\
&= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} g^{s\bar{b}} g^{\bar{t}a} g^{u\bar{d}} g^{\bar{v}c} R_{\rho\bar{l}sa} R^0_{j\bar{m}\bar{t}c} R^0_{k\bar{n}u\bar{b}} R_{\sigma i\bar{v}\bar{d}} \\
&\doteq \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}s}{}^{\bar{t}} R^0_{j\bar{m}\bar{t}}{}^{\bar{v}} R^0_{k\bar{n}u}{}^{s} R_{\sigma i\bar{v}}{}^{u} \\
&= \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{\bar{c}} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} \\
&= -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{\bar{c}}, \qquad \text{(D.30)}
\end{aligned}
$$

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{b} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma id}{}^{\bar{c}} \doteq -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho ia}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{c}. \qquad \text{(D.31)}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{10} B \mathrm{tr} R^4 \doteq\ & 32 B_{\mu\nu}\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Big(-2 R_{\rho\sigma a}{}^{b} R^0_{i\bar{l}c}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +4 R_{\rho ia}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +4 R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -4 R_{\rho\bar{l}\bar{a}}{}^{b} R_{\sigma ic}{}^{\bar{a}} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -4 R_{\rho\bar{l}a}{}^{b} R_{\sigma ic}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +2 R_{\rho ia}{}^{b} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{c} \\
& +2 R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{\bar{c}} \\
& +2 R_{\rho ia}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{c} \\
& -2 R_{\rho\bar{l}a}{}^{b} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma id}{}^{c} \Big) \\
=\ & 32 B_{\mu\nu}\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Big(-2 R_{\rho\sigma a}{}^{b} R^0_{i\bar{l}c}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +4 (R_{\rho ia}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{a} + R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}} \\
& + R_{\sigma\bar{l}\bar{a}}{}^{b} R_{\rho ic}{}^{\bar{a}} + R_{\sigma\bar{l}a}{}^{b} R_{\rho ic}{}^{a}) R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +2 \left(R_{\rho ia}{}^{b} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{c} + R_{\sigma\bar{l}a}{}^{b} R_{\rho id}{}^{c} \right) R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} \\
& +2 R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}} R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} R_{\sigma\bar{l}d}{}^{\bar{c}} \\
& +2 R_{\rho ia}{}^{\bar{b}} R^0_{j\bar{m}c}{}^{a} R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}} R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{c} \Big). \qquad \text{(D.32)}
\end{aligned}
$$

Weiter ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{10} B \left(\mathrm{tr} R^2\right)^2 \doteq\ & B_{\mu\nu}\Big(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\hat a_1\ldots\hat a_6} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\sigma\hat a_3\ldots\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R_{\rho\sigma\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\ldots\hat a_4\rho\sigma\hat a_5\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat a} R_{\rho\sigma\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\ldots\hat a_6\rho\sigma} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat c}{}^{\hat d} R_{\rho\sigma\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\sigma\hat a_2\ldots\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\cdot 4 \\
& +\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\sigma\hat a_4\hat a_5\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\cdot 4 \\
& +\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\hat a_4\hat a_5\sigma\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_4\hat a_5\hat c}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\cdot 4 \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\hat a_3\sigma\hat a_4\hat a_5\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R_{\rho\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\cdot 4 \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\hat a_3\hat a_4\hat a_5\sigma\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R_{\rho\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_4\hat a_5\hat c}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\cdot 4 \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\hat a_3\hat a_4\rho\hat a_5\sigma\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat b}{}^{\hat a} R_{\rho\hat a_5\hat c}{}^{\hat d} R_{\sigma\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\cdot 4\Big) \\
=\ & B_{\mu\nu}\Big(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\hat a_1\ldots\hat a_6} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_1\hat a_2\rho\sigma\hat a_3\ldots\hat a_6} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_3\hat a_4\hat a_5\hat a_6\rho\sigma\hat a_1\hat a_2} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_3\hat a_4\hat a_5\hat a_6\hat a_1\hat a_2\rho\sigma} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} \\
& +4\Big[\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\sigma\hat a_2\ldots\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\sigma\hat a_4\hat a_5\hat a_6} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\rho\hat a_1\hat a_2\hat a_3\hat a_5\hat a_6\sigma\hat a_4} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_2\hat a_3\rho\hat a_1\sigma\hat a_4\hat a_5\hat a_6} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_2\hat a_3\rho\hat a_1\hat a_5\hat a_6\sigma\hat a_4} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} \\
& +\epsilon^{\mu\nu\hat a_3\hat a_4\hat a_5\hat a_6\rho\hat a_1\sigma\hat a_2} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} R^0_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat b}{}^{\hat a}\Big]\Big) \\
=\ & 4B_{\mu\nu}\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\hat a_1\ldots\hat a_6}\Big(R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_1\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& -2R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R_{\sigma\hat a_2\hat b}{}^{\hat a} R^0_{\hat a_3\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c} \\
& -4R_{\rho\hat a_1\hat a}{}^{\hat b} R^0_{\hat a_2\hat a_3\hat b}{}^{\hat a} R_{\sigma\hat a_4\hat c}{}^{\hat d} R^0_{\hat a_5\hat a_6\hat d}{}^{\hat c}\Big) \\
=\ & 4B_{\mu\nu}\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(\epsilon^{i\bar l j\bar m k\bar n} R_{\rho\sigma\hat a}{}^{\hat b} R^0_{i\bar l\hat b}{}^{\hat a} R^0_{j\bar m\hat c}{}^{\hat d} R^0_{k\bar n\hat d}{}^{\hat c}\cdot 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\epsilon^{i\bar{l}j\bar{m}k\bar{n}} R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \cdot 4 \\
&-2\epsilon^{\bar{l}ij\bar{m}k\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma i\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \cdot 4 \\
&-4\epsilon^{ij\bar{l}\bar{m}k\bar{n}} R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{j\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \cdot 4 \\
&-4\epsilon^{\bar{l}i\bar{m}jk\bar{n}} R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{i\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma j\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \cdot 4 \Big) \\
= \quad 32 B_{\mu\nu} \quad &\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Big(- R_{\rho\sigma\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{i\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&-R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma i\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&-2R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{j\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+2R_{\rho\bar{l}\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{i\bar{m}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma j\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \Big) \\
= \quad 32 B_{\mu\nu} \quad &\Big(- \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho\sigma\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{i\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&-\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{ijk\bar{l}\bar{m}\bar{n}} R_{\sigma\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&-2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk\bar{m}\bar{l}\bar{n}} R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{c}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma\bar{l}\hat{d}}{}^{\hat{b}} R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}} \\
&+2\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{kij\bar{l}\bar{n}\bar{m}} R_{\sigma\bar{l}\hat{d}}{}^{\hat{b}} R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}} R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{c}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}} \Big) \\
= \quad 32 B_{\mu\nu} \quad &\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Big(- R_{\rho\sigma\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{i\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+2R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+4R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{c}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma\bar{l}\hat{d}}{}^{\hat{b}} R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}} \Big) \\
= \quad 32 B_{\mu\nu} \quad &\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Big(- R_{\rho\sigma\hat{a}}{}^{\hat{b}} R^0_{i\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+2R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{b}} R_{\sigma\bar{l}\hat{b}}{}^{\hat{a}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{d}} R^0_{k\bar{n}\hat{d}}{}^{\hat{c}} \\
&+4R_{\rho i\hat{a}}{}^{\hat{c}} R^0_{j\bar{m}\hat{c}}{}^{\hat{a}} R_{\sigma\bar{l}\hat{d}}{}^{\hat{b}} R^0_{k\bar{n}\hat{b}}{}^{\hat{d}} \Big). \qquad \text{(D.33)}
\end{aligned}
$$

Zur niedrigsten Ordnung in $\{\omega, \chi\}$ gilt

$$R_{MN\bar{a}}{}^{\bar{b}} R_{PQ\bar{b}}{}^{\bar{a}} \doteq g^{s\bar{b}} g^{t\bar{a}} R_{MN\bar{a}s} R_{PQ\bar{b}t} = g^{s\bar{b}} g^{t\bar{a}} R_{MNs\bar{a}} R_{PQt\bar{b}} \doteq R_{MNs}{}^{t} R_{PQt}{}^{s}. \qquad \text{(D.34)}$$

Damit folgt

$$\epsilon_{10} B \left(\mathrm{tr} R^2\right)^2 \doteq \quad 32 B_{\mu\nu} \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Big(- R_{\rho\sigma a}{}^{b} R^0_{i\bar{l}b}{}^{a} \cdot 2 \cdot R^0_{j\bar{m}c}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \cdot 2$$

$$
\begin{aligned}
& +2\Big[2R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}b}{}^{a} + R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}b}{}^{\bar{a}} + R_{\rho i a}{}^{\bar{b}}R_{\sigma\bar{l}\bar{b}}{}^{a}\Big] R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\cdot 2 \\
& +4R_{\rho i a}{}^{c}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}\cdot 2\cdot R_{\sigma\bar{l}d}{}^{b}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}\cdot 2\Big) \\
= \quad 128B_{\mu\nu} \quad & \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Big(-R_{\rho\sigma a}{}^{b}R^0_{i\bar{l}b}{}^{a}R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +\Big[2R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}b}{}^{a} + R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}b}{}^{\bar{a}} + R_{\rho i a}{}^{\bar{b}}R_{\sigma\bar{l}\bar{b}}{}^{a}\Big] R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +4R_{\rho i a}{}^{c}R_{\sigma\bar{l}d}{}^{b}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}\Big). \qquad \text{(D.35)}
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt

$$
\begin{aligned}
192\epsilon_{10}BX_8 \doteq 32B_{\mu\nu} \quad & \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}\Big(-2R_{\rho\sigma a}{}^{b}R^0_{i\bar{l}c}{}^{a}R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +4\Big(R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}c}{}^{a} + R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}} \\
& +R_{\sigma\bar{l}\bar{a}}{}^{b}R_{\rho i c}{}^{\bar{a}} + R_{\sigma\bar{l}a}{}^{b}R_{\rho i c}{}^{a}\Big)R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& +2\left(R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}d}{}^{c} + R_{\sigma\bar{l}a}{}^{b}R_{\rho i d}{}^{c} - 2R_{\rho i a}{}^{c}R_{\sigma\bar{l}d}{}^{b}\right)R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d} \\
& +2R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R^0_{j\bar{m}\bar{c}}{}^{\bar{a}}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}R_{\sigma\bar{l}d}{}^{\bar{c}} \\
& +2R_{\rho i a}{}^{\bar{b}}R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}\bar{b}}{}^{\bar{d}}R_{\sigma\bar{l}\bar{d}}{}^{c} \\
& +R_{\rho\sigma a}{}^{b}R^0_{i\bar{l}b}{}^{a}R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \\
& -\Big[2R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}b}{}^{a} + R_{\rho i\bar{a}}{}^{b}R_{\sigma\bar{l}b}{}^{\bar{a}} + R_{\rho i a}{}^{\bar{b}}R_{\sigma\bar{l}\bar{b}}{}^{a}\Big] R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\Big).
\end{aligned}
\qquad \text{(D.36)}
$$

Aus (C.1) folgen

$$
\begin{aligned}
g^{ij} &\doteq -g^{0i\bar{l}}g^{0j\bar{m}}\bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{l}\bar{m}}, & \text{(D.37)}\\
g^{i\bar{j}} &\doteq g^{0i\bar{j}} - g^{0i\bar{l}}g^{0\bar{j}k}\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{k\bar{l}}, & \text{(D.38)}\\
g^{\bar{i}\bar{j}} &\doteq -g^{0\bar{i}m}g^{0\bar{j}n}z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{mn}. & \text{(D.39)}
\end{aligned}
$$

Mit (D.5) und (D.6) ergeben sich damit

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{j}_{\mu i} &= \frac{1}{2}g^{jk}\partial_\mu g_{ki} + \frac{1}{2}g^{j\bar{k}}\partial_\mu g_{\bar{k}i} \\
&\doteq -\frac{1}{2}g^{0j\bar{l}}g^{0k\bar{m}}\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}}\partial_\mu z^{\mathrm{A}_2}(x)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(g^{0j\bar{k}} - g^{0j\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}, \qquad \text{(D.40)}\\
\Gamma^{\bar{j}}_{\mu i} &= \frac{1}{2}g^{\bar{j}k}\partial_\mu g_{ki} + \frac{1}{2}g^{\bar{j}\bar{k}}\partial_\mu g_{\bar{k}i}
\end{aligned}
$$

$$\doteq \frac{1}{2}\left(g^{0\bar{j}k} - g^{0k\bar{l}} g^{0m\bar{j}} \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{m\bar{l}}\right) \partial_\mu z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{ki} - \frac{1}{2} g^{0\bar{j}m} g^{0\bar{k}n} z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{mn}\partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{i\bar{k}}, \tag{D.41}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{i}_{\mu\bar{j}} &= \frac{1}{2} g^{ik}\partial_\mu g_{k\bar{j}} + \frac{1}{2} g^{i\bar{k}}\partial_\mu g_{\bar{k}\bar{j}} \\
&\doteq -\frac{1}{2} g^{0i\bar{l}} g^{0k\bar{m}} \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{l}\bar{m}}\partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{k\bar{j}} + \frac{1}{2}\left(g^{0i\bar{k}} - g^{0i\bar{l}} g^{0m\bar{k}} \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{m\bar{l}}\right) \partial_\mu \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{k}\bar{j}},
\end{aligned} \tag{D.42}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\bar{i}}_{\mu\bar{j}} &= \frac{1}{2} g^{\bar{i}k}\partial_\mu g_{k\bar{j}} + \frac{1}{2} g^{\bar{i}\bar{k}}\partial_\mu g_{\bar{k}\bar{j}} \\
&\doteq \frac{1}{2}\left(g^{0\bar{i}k} - g^{0\bar{i}l} g^{0k\bar{m}} \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{l\bar{m}}\right) \partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{k\bar{j}} \\
&\quad -\frac{1}{2} g^{0\bar{i}m} g^{0\bar{k}n} z^{\mathrm{A}_2}(x)\chi^{\mathrm{A}_2}_{mn}\partial_\mu \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}},
\end{aligned} \tag{D.43}$$

$$\Gamma^{\mu}_{ij} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{ij} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{ij}, \tag{D.44}$$

$$\Gamma^{\mu}_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{i\bar{j}}, \tag{D.45}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\bar{i}\bar{j}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{\bar{i}\bar{j}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{i}\bar{j}}. \tag{D.46}$$

Mit (D.12) ergibt sich

$$\begin{aligned}
R_{\rho\sigma a}{}^{b} &= \partial_\sigma \Gamma^{b}_{a\rho} - \partial_\rho \Gamma^{b}_{a\sigma} + \Gamma^{i}_{a\rho}\Gamma^{b}_{i\sigma} + \Gamma^{\bar{j}}_{a\rho}\Gamma^{b}_{\bar{j}\sigma} - \Gamma^{i}_{a\sigma}\Gamma^{b}_{i\rho} - \Gamma^{\bar{j}}_{a\sigma}\Gamma^{b}_{\bar{j}\rho} \\
&\doteq -\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}} g^{0k\bar{j}} \partial_\sigma \left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\partial_\rho z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ka} + \frac{1}{2} g^{0b\bar{k}}\partial_\sigma\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{a\bar{k}} \\
&\quad -\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}} g^{0i\bar{k}} \partial_\sigma \left(\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\right) \omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{k}} \\
&\quad +\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}} g^{0k\bar{j}} \partial_\rho \left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\partial_\sigma z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ka} - \frac{1}{2} g^{0b\bar{k}}\partial_\rho\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{a\bar{k}} \\
&\quad +\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}} g^{0i\bar{k}} \partial_\rho \left(\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\right) \omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{k}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} g^{0i\bar{k}}\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{k}}\right)\left(\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}}\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{l}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} g^{0\bar{j}k}\partial_\rho z^{\mathrm{A}_2}(x)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ka}\right)\left(\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}}\partial_\sigma \bar{z}(x)^{\mathrm{A}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{j}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} g^{0i\bar{k}}\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{k}}\right)\left(\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}}\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{l}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} g^{0\bar{j}k}\partial_\sigma z^{\mathrm{A}_2}(x)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ka}\right)\left(\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}}\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{j}}\right) \\
&= \chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ka}\Bigg(-\frac{1}{2} g^{0b\bar{l}} g^{0k\bar{j}} \left[\left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) - \left(\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\left(\partial_\sigma z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{4} g^{0k\bar{j}} g^{0b\bar{l}} \left[\left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) - \left(\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\left(\partial_\sigma z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\right] \Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\omega^{a_1}_{i\bar l}\omega^{a_2}_{a\bar k}\Bigg(-\frac{1}{2}g^{0b\bar l}g^{0i\bar k}\Big[\left(\partial_\sigma \hat v^{a_1}(x)\right)\left(\partial_\rho \hat v^{a_2}(x)\right) - \left(\partial_\rho \hat v^{a_1}(x)\right)\Big(\partial_\sigma \hat v^{A_2}(x)\Big)\Big]\\
&+\frac{1}{4}g^{0b\bar l}g^{0i\bar k}\left[\left(\partial_\sigma \hat v^{a_1}(x)\right)\left(\partial_\rho \hat v^{a_2}(x)\right) - \left(\partial_\rho \hat v^{a_1}(x)\right)\left(\partial_\sigma \hat v^{a_2}(x)\right)\right]\Bigg)\\
=\;& -\frac{1}{4}g^{0b\bar l}g^{0k\bar j}\Bigg(\chi^{A_1}_{\bar l\bar j}\chi^{A_2}_{ka}\Big[\Big(\partial_\sigma \bar z^{A_1}(x)\Big)\Big(\partial_\rho z^{A_2}(x)\Big) - \Big(\partial_\rho \bar z^{A_1}(x)\Big)\Big(\partial_\sigma z^{A_2}(x)\Big)\Big]\\
&+\omega^{a_1}_{k\bar l}\omega^{a_2}_{a\bar j}\left[\left(\partial_\sigma \hat v^{a_1}(x)\right)\left(\partial_\rho \hat v^{a_2}(x)\right) - \left(\partial_\rho \hat v^{a_1}(x)\right)\left(\partial_\sigma \hat v^{a_2}(x)\right)\right]\Bigg). \qquad \text{(D.47)}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\rho\sigma a}{}^{b} \;\doteq\;& -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}g^{0b\bar l}g^{0k\bar j}\Bigg(\chi^{A_1}_{\bar l\bar j}\chi^{A_2}_{ka}\Big(\partial_\sigma \bar z^{A_1}(x)\Big)\Big(\partial_\rho z^{A_2}(x)\Big)\\
&+\omega^{a_1}_{k\bar l}\omega^{a_2}_{a\bar j}\left(\partial_\sigma \hat v^{a_1}(x)\right)\left(\partial_\rho \hat v^{a_2}(x)\right)\Bigg). \qquad \text{(D.48)}
\end{aligned}
$$

Bis zur ersten Ordnung in $\{\omega, \chi\}$ gelten

$$
\begin{aligned}
\Gamma^b_{ia} =\;& \frac{1}{2}g^{bd}\left(\partial_i g_{da} + \partial_a g_{di} - \partial_d g_{ia}\right) + \frac{1}{2}g^{b\bar d}\left(\partial_i g_{\bar d a} + \partial_a g_{\bar d i} - \partial_{\bar d} g_{ia}\right)\\
\doteq\;& \frac{1}{2}\left(-g^{0b\bar l}g^{0d\bar m}\bar z^{A_1}(x)\chi^{A_1}_{\bar l\bar m}\right)\left(z^{A_2}(x)\partial_i\chi^{A_2}_{da} + z^{A_2}(x)\partial_a\chi^{A_2}_{di} - z^{A_2}(x)\partial_d\chi^{A_2}_{ia}\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(g^{0b\bar d} - g^{0b\bar l}g^{0\bar d m}\hat v^{a_2}(x)\omega^{a_2}_{m\bar l}\right)\left(2\partial_i g^0_{\bar d a} + 2\hat v^{a_1}(x)\partial_i\omega^{a_1}_{\bar d a} - z^{A}(x)\partial_{\bar d}\chi^{A}_{ia}\right)\\
\doteq\;& \Gamma^{0b}{}_{ia} + g^{0b\bar d}\left(\hat v^{a_1}(x)\partial_i\omega^{a_1}_{\bar d a} - \frac{1}{2}z^{A}(x)\partial_{\bar d}\chi^{A}_{ia}\right) - g^{0b\bar l}g^{0\bar d m}\hat v^{a_1}(x)\omega^{a_1}_{m\bar l}\partial_i g^0_{\bar d a},
\end{aligned}
$$

(D.49)

$$
\begin{aligned}
\Gamma^a_{c\bar l} =\;& \frac{1}{2}g^{ad}\left(\partial_c g_{d\bar l} + \partial_{\bar l} g_{dc} - \partial_d g_{c\bar l}\right) + \frac{1}{2}g^{a\bar d}\left(\partial_c g_{\bar d\bar l} + \partial_{\bar l} g_{\bar d c} - \partial_{\bar d} g_{c\bar l}\right)\\
=\;& \frac{1}{2}g^{ad}\partial_{\bar l} g_{dc} + \frac{1}{2}g^{a\bar d}\partial_c g_{\bar d\bar l}\\
\doteq\;& \frac{1}{2}\left(-g^{0a\bar m}g^{0d\bar n}\bar z^{A_1}(x)\chi^{A_1}_{\bar m\bar n}\right)z^{A_2}(x)\partial_{\bar l}\chi^{A_2}_{dc}\\
&+\frac{1}{2}\left(g^{0a\bar d} - g^{0a\bar m}g^{0\bar d k}\hat v^{a}(x)\omega^{a}_{\bar m k}\right)\bar z^{A}(x)\partial_c\chi^{A}_{\bar d\bar l}\\
\doteq\;& \frac{1}{2}g^{0a\bar d}\bar z^{A}(x)\partial_c\chi^{A}_{\bar d\bar l}, \qquad \text{(D.50)}\\
\Gamma^{\bar a}_{\bar l c} =\;& \frac{1}{2}g^{\bar a d}\left(\partial_{\bar l} g_{dc} + \partial_c g_{d\bar l} - \partial_d g_{c\bar l}\right) + \frac{1}{2}g^{\bar a\bar d}\left(\partial_{\bar l} g_{\bar d c} + \partial_c g_{\bar d\bar l} - \partial_{\bar d} g_{c\bar l}\right)\\
=\;& \frac{1}{2}g^{\bar a d}\partial_{\bar l} g_{dc} + \frac{1}{2}g^{\bar a\bar d}\partial_c g_{\bar d\bar l}\\
\doteq\;& \frac{1}{2}\left(g^{0\bar a d} - g^{0\bar a k}g^{0\bar m d}\hat v^{a}(x)\omega^{a}_{k\bar m}\right)z^{A}(x)\partial_{\bar l}\chi^{A}_{dc}\\
&-\frac{1}{2}g^{0\bar a m}g^{0\bar d n}z^{A}(x)\chi^{A}_{mn}\bar z^{A}(x)\partial_c\chi^{A}_{\bar d\bar l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\doteq \frac{1}{2} g^{0\bar{a}d} z^{\mathrm{A}}(x) \partial_{\bar{l}} \chi^{\mathrm{A}}_{dc}, && \text{(D.51)}\\
\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{m}\bar{l}} &= \frac{1}{2} g^{\bar{a}d}\left(\partial_{\bar{m}} g_{d\bar{l}} + \partial_{\bar{l}} g_{d\bar{m}} - \partial_d g_{\bar{m}\bar{l}}\right) + \frac{1}{2} g^{\bar{a}\bar{d}}\left(\partial_{\bar{m}} g_{\bar{d}\bar{l}} + \partial_{\bar{l}} g_{\bar{d}\bar{m}} - \partial_{\bar{d}} g_{\bar{m}\bar{l}}\right)\\
&= \frac{1}{2} g^{\bar{a}d}\left(2\partial_{\bar{m}} g_{d\bar{l}} - \partial_d g_{\bar{m}\bar{l}}\right) + \frac{1}{2} g^{\bar{a}\bar{d}} \partial_{\bar{m}} g_{\bar{d}\bar{l}}\\
&\doteq \frac{1}{2}\left(g^{0\bar{a}d} - g^{0\bar{a}k} g^{0d\bar{n}} \hat{v}^{\mathrm{a}}(x) \omega^{\mathrm{a}}_{k\bar{n}}\right)\left(2\partial_{\bar{m}} g^0_{d\bar{l}} + 2\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\partial_{\bar{m}}\omega^{\mathrm{a}}_{d\bar{l}} - \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\partial_d \chi^{\mathrm{A}}_{\bar{m}\bar{l}}\right)\\
&\doteq \Gamma^{0\bar{a}}{}_{\bar{m}\bar{l}} + g^{0\bar{a}d}\left(\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\partial_{\bar{m}}\omega^{\mathrm{a}}_{d\bar{l}} - \frac{1}{2}\bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\partial_{\bar{d}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{m}\bar{l}}\right) - g^{0\bar{a}k} g^{0d\bar{n}} \hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{k\bar{n}}\partial_{\bar{m}} g^0_{d\bar{l}},\\
& && \text{(D.52)}\\
\Gamma^{\bar{b}}_{ia} &= \frac{1}{2} g^{\bar{b}d}\left(\partial_i g_{da} + \partial_a g_{di} - \partial_d g_{ia}\right) + \frac{1}{2} g^{\bar{b}\bar{d}}\left(\partial_i g_{\bar{d}a} + \partial_a g_{\bar{d}i} - \partial_{\bar{d}} g_{ia}\right)\\
&\doteq \frac{1}{2}\left(g^{0\bar{b}d} - g^{0\bar{b}m} g^{0d\bar{l}} \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)\left(z^{\mathrm{A}}(x)\partial_i\chi^{\mathrm{A}}_{da} + z^{\mathrm{A}}(x)\partial_a\chi^{\mathrm{A}}_{di} - z^{\mathrm{A}}(x)\partial_d\chi^{\mathrm{A}}_{ia}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-g^{0\bar{b}m} g^{0\bar{d}n} z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{mn}\right)\left(2\partial_i g^0{}_{\bar{d}a} + 2\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\partial_i\omega^{\mathrm{a}}_{\bar{d}a} - z^{\mathrm{A}}(x)\partial_{\bar{d}}\chi^{\mathrm{A}}_{ia}\right)\\
&\doteq \frac{1}{2} g^{0\bar{b}d} z^{\mathrm{A}}(x)\left(\partial_i\chi^{\mathrm{A}}_{da} + \partial_a\chi^{\mathrm{A}}_{di} - \partial_d\chi^{\mathrm{A}}_{ia}\right)\\
&\quad - g^{0\bar{b}m} g^{0\bar{d}n} z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{mn}\partial_i g^0{}_{\bar{d}a}, && \text{(D.53)}\\
\Gamma^{a}_{\bar{c}\bar{l}} &= \frac{1}{2} g^{ad}\left(\partial_{\bar{c}} g_{d\bar{l}} + \partial_{\bar{l}} g_{d\bar{c}} - \partial_d g_{\bar{c}\bar{l}}\right) + \frac{1}{2} g^{a\bar{d}}\left(\partial_{\bar{c}} g_{\bar{d}\bar{l}} + \partial_{\bar{l}} g_{\bar{d}\bar{c}} - \partial_{\bar{d}} g_{\bar{c}\bar{l}}\right)\\
&\doteq -\frac{1}{2} g^{0a\bar{m}} g^{0d\bar{n}} \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{m}\bar{n}} \cdot 2\partial_{\bar{c}} g^0_{d\bar{l}} + \frac{1}{2} g^{0a\bar{d}} \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\left(\partial_{\bar{c}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{d}\bar{l}} + \partial_{\bar{l}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{d}\bar{c}} - \partial_{\bar{d}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{c}\bar{l}}\right)\\
&= \frac{1}{2} g^{0a\bar{d}} \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\left(\partial_{\bar{c}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{d}\bar{l}} + \partial_{\bar{l}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{d}\bar{c}} - \partial_{\bar{d}}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{c}\bar{l}}\right) - g^{0a\bar{m}} g^{0d\bar{n}} \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{m}\bar{n}}\partial_{\bar{c}} g^0_{d\bar{l}}. && \text{(D.54)}
\end{aligned}
$$

Damit und (D.5), (D.16) gilt bis zur ersten Ordnung in $\{\omega, \chi\}$ unter Benutzung von

$$
\begin{aligned}
g^{b\bar{s}} g^{n\bar{k}} \partial_i g_{n\bar{s}} &= g^{b\bar{s}}\left(\partial_i\left(g^{n\bar{k}} g_{n\bar{s}}\right) - \left(\partial_i g^{n\bar{k}}\right) g_{n\bar{s}}\right)\\
&= g^{b\bar{s}}\partial_i\left(\delta^{\bar{k}}_{\bar{s}} - g^{\bar{n}\bar{k}} g_{\bar{n}\bar{s}}\right) - \left(\partial_i g^{n\bar{k}}\right)\left(\delta^b_n - g^{bs} g_{ns}\right) \doteq -\partial_i g^{b\bar{k}} && \text{(D.55)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i a}{}^{b} &= \partial_i\Gamma^b_{a\rho} - \partial_\rho\Gamma^b_{ia} + \Gamma^{\hat{l}}_{a\rho}\Gamma^b_{\hat{l}i} - \Gamma^{\hat{l}}_{ai}\Gamma^b_{\hat{l}\rho}\\
&\doteq \partial_i\Gamma^b_{a\rho} - \partial_\rho\Gamma^b_{ia} + \Gamma^{l}_{a\rho}\Gamma^b_{li} - \Gamma^{l}_{ai}\Gamma^b_{l\rho}\\
&\doteq \partial_i\frac{1}{2}\left(g^{0b\bar{k}}\left(\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}}_{a\bar{k}}\right)\\
&\quad -\partial_\rho\left(g^{0b\bar{d}}\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\partial_i\omega^{\mathrm{a}}_{\bar{d}a} - \frac{1}{2} g^{0b\bar{d}} z^{\mathrm{A}}(x)\partial_{\bar{d}}\chi^{\mathrm{A}}_{ia} - g^{0b\bar{l}} g^{0\bar{d}m}\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{m\bar{l}}\partial_i g^0_{\bar{d}a}\right)\\
&\quad +\frac{1}{2} g^{0l\bar{k}}\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{a\bar{k}} g^{0b\bar{d}}\partial_i g^0_{\bar{d}l} - g^{0l\bar{d}}(\partial_i g^0_{\bar{d}a})\frac{1}{2} g^{0b\bar{k}}\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}}(x)\omega^{\mathrm{a}}_{l\bar{k}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\doteq \frac{1}{2}g^{0^{b\bar{k}}}\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\partial_{\bar{k}}\chi^{\mathrm{A}}_{ia} - \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\left(\partial_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}i} - \Gamma^{0\,l}{}_{ai}\omega^{\mathrm{a}_1}_{l\bar{k}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{0^{b\bar{k}}}\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\partial_{\bar{k}}\chi^{\mathrm{A}}_{ia} - \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)D_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}i}\right), \qquad \text{(D.56)}\\
R_{\sigma\bar{l}c}{}^{a} &= \partial_{\bar{l}}\Gamma^a_{c\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^a_{c\bar{l}} + \Gamma^{\hat{n}}_{c\sigma}\Gamma^a_{\hat{n}\bar{l}} - \Gamma^{\hat{n}}_{c\bar{l}}\Gamma^a_{\hat{n}\sigma} \\
&\doteq \partial_{\bar{l}}\Gamma^a_{c\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^a_{c\bar{l}} \\
&\doteq \partial_{\bar{l}}\left(\frac{1}{2}g^{0^{a\bar{k}}}\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{c\bar{k}}\right) - \frac{1}{2}g^{0^{a\bar{k}}}\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\partial_c\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{k}\bar{l}} \\
&\doteq \frac{1}{2}g^{0^{a\bar{k}}}\left(\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)D_{\bar{k}}\omega^{\mathrm{a}_1}_{c\bar{l}} - \partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\partial_c\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{k}\bar{l}}\right), \qquad \text{(D.57)}\\
R_{\rho i\bar{a}}{}^{b} &= \partial_i\Gamma^b_{\bar{a}\rho} - \partial_\rho\Gamma^b_{\bar{a}i} + \Gamma^{\hat{l}}_{\bar{a}\rho}\Gamma^b_{\hat{l}i} - \Gamma^{\hat{l}}_{\bar{a}i}\Gamma^b_{\hat{l}\rho} \\
&\doteq \partial_i\Gamma^b_{\bar{a}\rho} - \partial_\rho\Gamma^b_{i\bar{a}} + \Gamma^l_{\bar{a}\rho}\Gamma^b_{li} \\
&\doteq \partial_i\frac{1}{2}\left(g^{0^{b\bar{k}}}\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{a}\bar{k}}\right) - \frac{1}{2}g^{0^{b\bar{k}}}\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\partial_i\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{k}\bar{a}} \\
&\quad +\frac{1}{2}g^{0^{l\bar{k}}}\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{a}\bar{k}}g^{0^{b\bar{d}}}\partial_l g^0_{\bar{d}i} \\
&\doteq \frac{1}{2}\left(\partial_i g^{0^{b\bar{k}}}\right)\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{a}\bar{k}} + \frac{1}{2}g^{0^{l\bar{k}}}\partial_\rho \bar{z}^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar{a}\bar{k}}g^{0^{b\bar{d}}}\partial_i g^0_{\bar{d}l} \\
&\doteq 0, \qquad \text{(D.58)}\\
R_{\sigma\bar{l}c}{}^{\bar{a}} &= \partial_{\bar{l}}\Gamma^{\bar{a}}_{\sigma c} - \partial_\sigma\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{l}c} + \Gamma^{\hat{m}}_{c\sigma}\Gamma^{\bar{a}}_{\hat{m}\bar{l}} - \Gamma^{\hat{m}}_{c\bar{l}}\Gamma^{\bar{a}}_{\hat{m}\sigma} \\
&\doteq \partial_{\bar{l}}\Gamma^{\bar{a}}_{\sigma c} - \partial_\sigma\Gamma^{ba}_{\bar{l}c} + \Gamma^{\bar{a}}_{c\sigma}\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{m}\bar{l}} \\
&\doteq \partial_{\bar{l}}\frac{1}{2}\left(g^{0^{\bar{a}k}}\partial_\sigma z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{kc}\right) - \frac{1}{2}g^{0^{\bar{a}k}}\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\partial_{\bar{l}}\chi^{\mathrm{A}}_{kc} \\
&\quad +\frac{1}{2}g^{0^{\bar{m}k}}\partial_\sigma z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{kc}g^{0^{\bar{a}d}}\partial_{\bar{m}} g^0_{d\bar{l}} \\
&\doteq \frac{1}{2}\left(\partial_{\bar{l}} g^{0^{\bar{a}k}}\right)\partial_\sigma z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{kc} + \frac{1}{2}g^{0^{\bar{m}k}}\partial_\sigma z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{ki}g^{0^{\bar{a}d}}\partial_{\bar{l}} g^0_{d\bar{m}} \\
&\doteq 0, \qquad \text{(D.59)}\\
R_{\rho ia}{}^{\bar{b}} &= \partial_i\Gamma^{\bar{b}}_{a\rho} - \partial_\rho\Gamma^{\bar{b}}_{ai} + \Gamma^{\hat{l}}_{a\rho}\Gamma^{\bar{b}}_{\hat{l}i} - \Gamma^{\hat{l}}_{ai}\Gamma^{\bar{b}}_{\hat{l}\rho} \\
&\doteq \partial_i\Gamma^{\bar{b}}_{a\rho} - \partial_\rho\Gamma^{\bar{b}}_{ia} - \Gamma^l_{ai}\Gamma^{\bar{b}}_{l\rho} \\
&\doteq \frac{1}{2}\partial_i\left(g^{0^{\bar{b}l}}\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{al}\right) - \frac{1}{2}g^{0^{\bar{b}k}}\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\left(\partial_i\chi^{\mathrm{A}}_{ka} + \partial_a\chi^{\mathrm{A}}_{ki} - \partial_k\chi^{\mathrm{A}}_{ia}\right) \\
&\quad +g^{0^{\bar{b}k}}g^{0^{\bar{d}l}}\left(\partial_i g^0_{\bar{d}a}\right)\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{kl} - g^{0^{l\bar{d}}}\left(\partial_i g^0_{\bar{d}a}\right)\cdot\frac{1}{2}g^{0^{\bar{b}k}}\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{kl} \\
&\doteq \frac{1}{2}g^{0^{\bar{b}k}}\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\left(-\Gamma^{0\,l}{}_{ki}\chi^{\mathrm{A}}_{la} + \partial_i\chi^{\mathrm{A}}_{ak} - \left(\partial_i\chi^{\mathrm{A}}_{ka} + \partial_a\chi^{\mathrm{A}}_{ki} - \partial_k\chi^{\mathrm{A}}_{ia}\right) + \Gamma^{0\,l}{}_{ia}\chi^{\mathrm{A}}_{kl}\right) \\
&\doteq \frac{1}{2}g^{0^{\bar{b}k}}\partial_\rho z^{\mathrm{A}}(x)\left(D'_k\chi^{\mathrm{A}}_{ia} - D'_a\chi^{\mathrm{A}}_{ki}\right) \\
&= 0, \qquad \text{(D.60)}\\
R_{\sigma\bar{l}\bar{c}}{}^{a} &= \partial_{\bar{l}}\Gamma^a_{\sigma\bar{c}} - \partial_\sigma\Gamma^a_{\bar{l}\bar{c}} + \Gamma^{\hat{m}}_{\bar{c}\sigma}\Gamma^a_{\hat{m}\bar{l}} - \Gamma^{\hat{m}}_{\bar{l}\bar{c}}\Gamma^a_{\hat{m}\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\doteq \partial_{\bar l}\Gamma^{a}_{\sigma\bar c} - \partial_\sigma\Gamma^{a}_{\bar l\bar c} - \Gamma^{\bar m}_{\bar l\bar c}\Gamma^{a}_{\bar m\sigma} \\
&\doteq \frac{1}{2}\partial_{\bar l}\left(g^{0a\bar d}\partial_\sigma \bar z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar d\bar c}\right) - \frac{1}{2}g^{0a\bar d}\partial_\sigma \bar z^{\mathrm{A}}(x)\left(\partial_{\bar c}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar d\bar l} + \partial_{\bar l}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar d\bar c} - \partial_{\bar d}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar c\bar l}\right) \\
&\quad + g^{0a\bar m}g^{0d\bar n}\left(\partial_{\bar c}g^{0}_{d\bar l}\right)\partial_\sigma \bar z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar m\bar n} - g^{0\bar n d}\left(\partial_{\bar c}g^{0}_{d\bar l}\right)\cdot\frac{1}{2}g^{0a\bar m}\partial_\sigma \bar z^{\mathrm{A}}(x)\chi^{\mathrm{A}}_{\bar m\bar n} \\
&\doteq \frac{1}{2}g^{0a\bar k}\partial_\sigma \bar z^{\mathrm{A}}(x)\left(-\Gamma^{0\bar m}_{\bar k\bar l}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar m\bar c} + \partial_{\bar l}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar k\bar c} - \left(\partial_{\bar c}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar k\bar l} + \partial_{\bar l}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar k\bar c} - \partial_{\bar k}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar c\bar l}\right) + \Gamma^{0\bar m}_{\bar c\bar l}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar m\bar k}\right) \\
&\doteq \frac{1}{2}g^{0a\bar k}\partial_\sigma \bar z^{\mathrm{A}}(x)\left(D'_{\bar k}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar c\bar l} - D'_{\bar c}\chi^{\mathrm{A}}_{\bar k\bar l}\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.61}
$$

Damit folgen

$$
\begin{aligned}
6\epsilon_{10}BX_8 \doteq B_{\mu\nu}\ &\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{ijk}\epsilon^{\bar l\bar m\bar n}\Bigg(R_{\rho\sigma a}{}^{b}\left(-2R^{0}_{i\bar l c}{}^{a}R^{0}_{j\bar m b}{}^{d}R^{0}_{k\bar n d}{}^{c} + R^{0}_{i\bar l b}{}^{a}R^{0}_{j\bar m c}{}^{d}R^{0}_{k\bar n d}{}^{c}\right) \\
&+4\left(R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar l c}{}^{a} + R_{\sigma\bar l a}{}^{b}R_{\rho i c}{}^{a}\right)R^{0}_{j\bar m b}{}^{d}R^{0}_{k\bar n d}{}^{c} \\
&+2\left(R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar l d}{}^{c} + R_{\sigma\bar l a}{}^{b}R_{\rho i d}{}^{c} - 2R_{\rho i a}{}^{c}R_{\sigma\bar l d}{}^{b}\right)R^{0}_{j\bar m c}{}^{a}R^{0}_{k\bar n b}{}^{d} \\
&-2R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar l b}{}^{a}R^{0}_{j\bar m c}{}^{d}R^{0}_{k\bar n d}{}^{c}\Bigg),
\end{aligned} \tag{D.62}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar l d}{}^{c} &= \frac{1}{2}g^{0b\bar k_1}\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia} - \partial_\rho\hat v^{\mathrm{a}_1}(x)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar k_1 i}\right) \\
&\quad\cdot\frac{1}{2}g^{0c\bar k_2}\left(\partial_\sigma\hat v^{\mathrm{a}_2}(x)D_{\bar k_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar l} - \partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l}\right) \\
&= \frac{1}{4}g^{0b\bar k_1}g^{0c\bar k_2}\Big[\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat v^{\mathrm{a}_2}(x)\left(\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar k_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar l} \\
&\quad+\left(\partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho\hat v^{\mathrm{a}_1}(x)\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar k_1 i} \\
&\quad-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\left(\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l} \\
&\quad-\left(\partial_\rho\hat v^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat v^{\mathrm{a}_2}(x)\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar k_1 i}\right)D_{\bar k_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar l}\Big],
\end{aligned} \tag{D.63}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i a}{}^{b}R_{\sigma\bar l c}{}^{a} &= \frac{1}{4}g^{0b\bar k_1}g^{0a\bar k_2}\Big[\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat v^{\mathrm{a}_2}(x)\left(\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar k_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar l} \\
&\quad+\left(\partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho\hat v^{\mathrm{a}_1}(x)\left(\partial_c\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar k_1 i} \\
&\quad-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\left(\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_c\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l} \\
&\quad-\left(\partial_\rho\hat v^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat v^{\mathrm{a}_2}(x)\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar k_1 i}\right)D_{\bar k_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar l}\Big],
\end{aligned} \tag{D.64}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i c}{}^{a}R_{\sigma\bar l a}{}^{b} &= \frac{1}{4}g^{0a\bar k_1}g^{0b\bar k_2}\Big[\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\hat v^{\mathrm{a}_2}(x)\left(\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right)D_{\bar k_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar l} \\
&\quad+\left(\partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho\hat v^{\mathrm{a}_1}(x)\left(\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l}\right)D_c\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar k_1 i} \\
&\quad-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma\bar z^{\mathrm{A}_2}(x)\left(\partial_{\bar k_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right)\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar k_2\bar l}
\end{aligned}
$$

$$
- \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(D_c \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\Big], \tag{D.65}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i d}{}^{c} R_{\sigma \bar{l} a}{}^{b} \quad = \quad & \frac{1}{4} g^{0\, c\bar{k}_1} g^{0\, b\bar{k}_2} \Big[\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}} \\
& + \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x) \left(\partial_a \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}}\right) D_d \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} \\
& - \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x) \left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right) \partial_a \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}} \\
& - \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(D_d \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\Big],
\end{aligned} \tag{D.66}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i a}{}^{c} R_{\sigma \bar{l} d}{}^{b} \quad = \quad & \frac{1}{4} g^{0\, c\bar{k}_1} g^{0\, b\bar{k}_2} \Big[\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}} \\
& + \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x) \left(\partial_d \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}}\right) D_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} \\
& - \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x) \left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) \partial_d \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}} \\
& - \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(D_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Big],
\end{aligned} \tag{D.67}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rho i a}{}^{b} R_{\sigma \bar{l} b}{}^{a} \quad = \quad & \frac{1}{4} g^{0\, b\bar{k}_1} g^{0\, a\bar{k}_2} \Big[\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}} \\
& + \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x) \left(\partial_b \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}}\right) D_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} \\
& - \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x) \left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) \partial_b \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}} \\
& - \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \left(D_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}\Big],
\end{aligned} \tag{D.68}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{10} B X_8 \quad \doteq \quad & \frac{1}{6} B_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{ijk} \epsilon^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \Bigg(\\
& g^{0\, b\bar{k}_1} g^{0\, o\bar{j}} \Bigg(\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}_1 \bar{j}} \chi^{\mathrm{A}_2}_{oa} \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \\
& + \omega^{\mathrm{a}_1}_{o\bar{k}_1} \omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{j}} \left(\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right) \left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\right) \Bigg) \\
& \left(R^0_{i\bar{l}c}{}^{a} R^0_{j\bar{m}b}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} - \frac{1}{2} R^0_{i\bar{l}b}{}^{a} R^0_{j\bar{m}c}{}^{d} R^0_{k\bar{n}d}{}^{c} \right) \\
& + g^{0\, b\bar{k}_1} g^{0\, a\bar{k}_2} \Big[\\
& \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) D_{\bar{k}_2} \omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_2} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right) D_{\bar{k}_1} \omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}} \Bigg) \\
& + \left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x) \Bigg(\left(\partial_c \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}}\right) D_a \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i} + \left(\partial_a \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1 \bar{l}}\right) D_c \omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i} \Bigg) \\
& - \left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right) \partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x) \Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_1} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right) \partial_c \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2 \bar{l}} + \left(\partial_{\bar{k}_2} \chi^{\mathrm{A}_1}_{ic}\right) \partial_a \chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1 \bar{l}} \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\Bigg(\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{c\bar{l}}+\left(D_c\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\Bigg)\\
&\Bigg]R^0_{j\bar{m}b}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\\
&+\frac{1}{2}g^{0\,b\bar{k}_2}g^{0\,c\bar{k}_1}\Bigg[\\
&\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}+\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\\
&-2\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Bigg)\\
&+\left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\Bigg(\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}+\left(\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_d\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\\
&-2\left(\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\Bigg)\\
&-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\Bigg(\left(\partial_{\bar{k}_2}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_1\bar{l}}+\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{id}\right)\partial_a\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\\
&-2\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_d\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\Bigg)\\
&-\left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\Bigg(\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_2 i}\right)D_{\bar{k}_1}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}+\left(D_d\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{a\bar{l}}\\
&-2\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{d\bar{l}}\Bigg)\\
&\Bigg]R^0_{j\bar{m}c}{}^{a}R^0_{k\bar{n}b}{}^{d}\\
&-2\frac{1}{4}g^{0\,b\bar{k}_1}g^{0\,a\bar{k}_2}\Bigg[\\
&\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}\\
&+\left(\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\left(\partial_b\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\right)D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\\
&-\left(\partial_\rho z^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\sigma \bar{z}^{\mathrm{A}_2}(x)\left(\partial_{\bar{k}_1}\chi^{\mathrm{A}_1}_{ia}\right)\partial_b\chi^{\mathrm{A}_2}_{\bar{k}_2\bar{l}}\\
&-\left(\partial_\rho \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\sigma \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\left(D_a\omega^{\mathrm{a}_1}_{\bar{k}_1 i}\right)D_{\bar{k}_2}\omega^{\mathrm{a}_2}_{b\bar{l}}\\
&\Bigg]R^0_{j\bar{m}c}{}^{d}R^0_{k\bar{n}d}{}^{c}\Bigg).
\end{aligned}
\tag{D.69}
$$

Anhang E

Kompaktifizierung des Ricciskalars auf CY_3

Für den zehndimensionalen Ricciskalar R_{10} gilt mit dem Riccitensor R_{MN}

$$\begin{aligned} R_{10} &= g^{MN} R_{MN} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\hat{k}\hat{l}} R_{\hat{k}\hat{l}} \\ &= g^{\mu\nu}\left(R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} + R^{\hat{k}}{}_{\mu\hat{k}\nu}\right) + g^{\hat{k}\hat{l}}\left(R^{\rho}{}_{\hat{k}\rho\hat{l}} + R^{\hat{m}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}}\right). \end{aligned} \tag{E.1}$$

Damit folgt aus den Gleichungen (D.8) und (D.2)

$$\begin{aligned} R_{10} &= R_4 + 2g^{\mu\nu} R^{\hat{k}}{}_{\mu\hat{k}\nu} + g^{\hat{k}\hat{l}} R^{\hat{m}}{}_{\hat{k}\hat{m}\hat{l}} \\ &= R_4 + 2g^{\mu\nu} R^{\hat{k}}{}_{\mu\hat{k}\nu} + 2g^{i\bar{j}} R^{\hat{k}}{}_{i\hat{k}\bar{j}}, \end{aligned} \tag{E.2}$$

wobei R_4 der Ricciskalar der vierdimensionalen Raumzeit ist. Dies ist Gleichung (2.9).

Daraus folgt mit (D.40) bis (D.43)

$$\begin{aligned} \Gamma^{\hat{k}}_{\mu\hat{k}} &= \Gamma^{i}_{\mu i} + \Gamma^{\bar{i}}_{\mu\bar{i}} \\ &\doteq \left(g^{0\,i\bar{k}} - g^{0\,i\bar{l}} g^{0\,m\bar{k}} \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right) \partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\ &\quad -\frac{1}{2} g^{0\,i\bar{l}} g^{0\,k\bar{m}} \chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}} \chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\partial_\mu \left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x) z^{\mathrm{A}_2}(x)\right), \end{aligned} \tag{E.3}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\hat{l}}_{\mu\hat{k}}\Gamma^{\hat{k}}_{\hat{l}\nu} &= \Gamma^{l}_{\mu k}\Gamma^{k}_{l\nu} + \Gamma^{\bar{l}}_{\mu\bar{k}}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{l}\nu} + \Gamma^{i}_{\mu\bar{j}}\Gamma^{\bar{j}}_{i\nu} + \Gamma^{\bar{j}}_{\mu i}\Gamma^{i}_{\bar{j}\nu} \\ &\doteq \frac{1}{2} g^{0\,l\bar{k}} \left(\partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{k\bar{k}} \cdot \frac{1}{2} g^{0\,k\bar{m}} \partial_\nu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{m}} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{0\,\bar{l}k} \left(\partial_\mu \hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{k\bar{k}} \cdot \frac{1}{2} g^{0\,\bar{k}m} \partial_\nu \hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{m\bar{l}} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{0\,i\bar{k}} \left(\partial_\mu \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}} \cdot \frac{1}{2} g^{0\,\bar{j}k} \partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}g^{0i\bar{k}}\left(\partial_\nu \bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\cdot\frac{1}{2}g^{0\bar{j}k}\partial_\mu z^{\mathrm{A}_2}(x)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki},\\
=\;& \frac{1}{2}g^{0l\bar{k}}g^{0k\bar{m}}\left(\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{k\bar{k}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{m}}\\
&+\frac{1}{4}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\left(\partial_\nu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\mu z^{\mathrm{A}_2}(x)+\left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\right).
\end{aligned}
\tag{E.4}
$$

Zusammen mit (D.3), (D.4) folgt daraus

$$
\begin{aligned}
R^{\hat{k}}{}_{\mu\hat{k}\nu} =\;& \partial_{\hat{k}}\Gamma^{\hat{k}}_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^{\hat{k}}_{\mu\hat{k}}+\Gamma^{M}_{\mu\nu}\Gamma^{\hat{k}}_{M\hat{k}}-\Gamma^{M}_{\mu\hat{k}}\Gamma^{\hat{k}}_{M\nu}\\
=\;& -\partial_\nu\Gamma^{\hat{k}}_{\mu\hat{k}}+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\hat{k}}_{\rho\hat{k}}-\Gamma^{\hat{l}}_{\mu\hat{k}}\Gamma^{\hat{k}}_{\hat{l}\nu}\\
\doteq\;& -\left(g^{0i\bar{k}}-g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)\partial_\nu\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}\\
&+g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}\\
&+\frac{1}{2}g^{0i\bar{l}}g^{0k\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\partial_\nu\partial_\mu\left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\\
&+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\left(g^{0i\bar{k}}-g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)\partial_\rho\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}\\
&-\frac{1}{2}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0k\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\partial_\rho\left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\\
&-\frac{1}{2}g^{0l\bar{k}}g^{0k\bar{m}}\left(\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{k\bar{k}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{m}}\\
&+\frac{1}{4}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\left(\partial_\nu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\mu z^{\mathrm{A}_2}(x)+\left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\right).\\
=\;& -\left(g^{0i\bar{k}}-g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)D_\nu\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}\\
&+\frac{1}{2}g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}\\
&+\frac{1}{2}g^{0i\bar{l}}g^{0k\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}D_\nu\partial_\mu\left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\\
&+\frac{1}{4}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\left(\partial_\nu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\mu z^{\mathrm{A}_2}(x)+\left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\right).
\end{aligned}
\tag{E.5}
$$

Da eine Calabi - Yau - Mannigfaltigkeit Ricci - flach ist, gilt weiter unter Verwendung von (D.42) bis (D.45)

$$
\begin{aligned}
R^{\hat{k}}{}_{i\hat{k}\bar{j}} =\;& \Gamma^{\mu}_{i\bar{j}}\Gamma^{\hat{k}}_{\mu\hat{k}}-\Gamma^{\mu}_{i\hat{k}}\Gamma^{\hat{k}}_{\mu\bar{j}}\\
\doteq\;& -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}}g^{0l\bar{k}}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}}\\
&+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ik}\cdot\frac{1}{2}g^{0k\bar{k}}\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\\
&+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{k}}\cdot\frac{1}{2}g^{0\bar{k}l}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{j}}.
\end{aligned}
\tag{E.6}
$$

Damit folgt aus (E.2), (E.5) und (E.6)

$$\begin{aligned}
R_{10} &\doteq R_4 - 2g^{\mu\nu}\left(g^{0i\bar{k}} - g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)D_\nu\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\
&\quad + g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\
&\quad + g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0k\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}D_\nu\partial_\mu\left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\left(\partial_\nu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\mu z^{\mathrm{A}_2}(x) + \left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \\
&\quad - g^{0i\bar{j}}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}}g^{0l\bar{k}}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{0i\bar{j}}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x)\right)\chi^{\mathrm{A}_2}_{ik}g^{0k\bar{k}}\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{0i\bar{j}}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{k}}g^{0\bar{k}l}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{j}} \\
&= R_4 - 2g^{\mu\nu}\left(g^{0i\bar{k}} - g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\right)D_\nu\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\
&\quad + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\
&\quad + g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0k\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{l}\bar{m}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}D_\nu\partial_\mu\left(\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)z^{\mathrm{A}_2}(x)\right) \\
&\quad + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x) \\
&\quad - g^{0i\bar{j}}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}}g^{0l\bar{k}}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}}.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Mittels partieller Integration erhält man daraus

$$\begin{aligned}
R_{10} &\doteq R_4 - 2g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\
&\quad + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}} \\
&\quad + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x) \\
&\quad - g^{0i\bar{j}}g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}}g^{0l\bar{k}}\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x)\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}} \\
&= R_4 - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{l}}g^{0m\bar{k}}\omega^{\mathrm{a}_1}_{m\bar{l}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{i\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x) \\
&\quad + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}g^{0i\bar{k}}g^{0\bar{j}k}\chi^{\mathrm{A}_1}_{\bar{k}\bar{j}}\chi^{\mathrm{A}_2}_{ki}\left(\partial_\mu\bar{z}^{\mathrm{A}_1}(x)\right)\partial_\nu z^{\mathrm{A}_2}(x) \\
&\quad - g^{\mu\nu}g^{0i\bar{j}}g^{0l\bar{k}}\omega^{\mathrm{a}_1}_{i\bar{j}}\omega^{\mathrm{a}_2}_{l\bar{k}}\left(\partial_\nu\hat{v}^{\mathrm{a}_1}(x)\right)\partial_\mu\hat{v}^{\mathrm{a}_2}(x).
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Literaturverzeichnis

[1] P. S. Aspinwall: K3 Surfaces and String Duality. hep-th/9611137. In: Yau, S.T. (ed.): Differential geometry inspired by string theory. 1-95. SERIES: Surveys in differential geometry ; v. 5. International Press. Cambridge, Mass. 1999.

[2] R. Böhm, H. Günther, C. Herrmann, J. Louis: Compactification of Type IIB String Theory on Calabi-Yau Threefolds. Nucl.Phys.B569:229-246,2000. hep-th/9908007.

[3] D. Bailin, A. Love: Supersymmetric gauge field theory and string theory. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia. 1994.

[4] S. Brehmer, H. Blaar: Differentialformen und Vektoranalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin. 1973.

[5] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Grosche, E. Zeidler: Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teil 1 und 2. Stuttgart. 1995.

[6] P. Candelas: Lectures on Complex Manifolds. Trieste 1987, Proceedings, Superstrings '87. 1-88. University of Texas report UTTG-21-87.

[7] P. Candelas: Persönliche Mitteilung.

[8] P. Candelas and X. C. de la Ossa: Moduli Space of Calabi-Yau-Manifolds. Nucl.Phys.B355:455-481,1991. University of Texas report UTTG-07-1990.

[9] S.Cecotti, S.Ferrara, L.Girardello: Geometry Of Type II Superstrings And The Moduli Of Superconformal Field Theories. Phys.Lett.B213:443,1988.

[10] T. tom Dieck: Topologie. de Gruyter. Berlin. 1991.

[11] H. G. Dosch: Teilchen, Felder und Symmetrien: Quantenfeldtheorie und die Einheit der Naturgesetze. Spektrum Akademischer Verlag. 2. Auflage.

[12] M. J. Duff: Strong / weak coupling duality from the dual string. Nucl.Phys.B442:47-63,1995. hep-th/9501030.

[13] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten: Superstring theory. 2 Volumes. Cambridge University Press. 1987.

[14] M. B. Green, P. Vanhove: D-Instantons, Strings and M-Theory. Phys.Lett.B408:122-134,1997. hep-th/9704145.

[15] B. R. Greene: String Theory on Calabi-Yau Manifolds. Lectures given at Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96): Fields, Strings, and Duality, Boulder, CO, 2-28 Jun 1996. hep-th/9702155.

[16] P. Griffiths, J. Harris: Principles of Algebraic Geometry. Wiley classics libr. ed.. New York. 1994.

[17] H. Günther: Quantenkorrekturen im Hypermultiplett von Typ II Stringtheorien. Dissertation. Martin - Luther - Universität Halle - Wittenberg. 2000.

[18] J. A. Harvey, A. Strominger: The heterotic string is a soliton. Nucl.Phys.B449:535-552,1995. hep-th/9504047.

[19] T. Hübsch: Calabi - Yau - Manifolds, A Bestiary for Physicists. World Scientific. Singapore. 1992.

[20] A. Klemm, B. Lian, S-S. Roan, S-T.Yau: Calabi-Yau fourfolds for M-and F-Theory compactifications. Nucl.Phys.B518:515-574,1998. hep-th/9609239.

[21] I. V. Lavrinenko, H. Lü, C. N. Pope: From Topology to Generalised Dimensional Reduction. Nucl.Phys.B492:278-300,1997. hep-th/9611134.

[22] J. Louis, K. Förger: Holomorphic Couplings in String Theory. Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 55B (1997) 33-64.

[23] H. von Mangoldt, K. Knopp: Höhere Mathematik: eine Einführung für Studierende und zum Selbststudium. Bd. 1 - 4. S. Hirzel Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart. 1990.

[24] M. Nakahara: Geometry, Topology and Physics. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia. 1990.

[25] N.Seiberg: Observations On The Moduli Space Of Superconformal Field Theories. Nucl.Phys.B303:286,1988.

[26] S. Sethi, C. Vafa, E. Witten: Constraints on Low-Dimensional String Compactifications. Nucl.Phys. B480 (1996) 213-224. hep-th/9606122.

[27] C. Vafa, E. Witten: A One-Loop Test of String Duality. Nucl.Phys.B447:261-270, 1995. hep-th/9505053.

[28] S. Weinberg: Gravitation and Cosmology. The General Theory of Relativity. John Wiley & Sons, New York. 1972.

[29] B.de Wit, P.G.Lauwers, A.Van Proeyen: Lagrangians Of N=2 Supergravity - Matter Systems. Nucl.Phys.B255:569, 1985.

[30] B. de Wit, J. Louis: Supersymmetry and Duality in various dimensions. Talk given at NATO Advanced Study Institute on Strings, Branes and Dualities, Cargese, France, 26 May - 14 Jun 1997. In: Cargese 1997, Strings, branes and dualities. 33-101. hep-th/9801132.

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Halle an der Saale im Februar 2001