

# **N=2 Strukturen in zehndimensionaler Typ IIA Supergravitation**

DIPLOMARBEIT AM II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK,  
UNIVERSITÄT HAMBURG

vorgelegt von  
Christian Hambrock

1. Dezember 2006

Gutachter der Diplomarbeit: Prof. Dr. Jan Louis  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Volker Schomerus

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Zugrundeliegende Konzepte</b>	<b>8</b>
2.1	Supersymmetrie in $D = 4$ . . . . .	8
2.2	Supersymmetrie in $D = 10$ . . . . .	11
2.3	Zerlegung der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{1,9}$ in $\mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6$ . . . . .	16
2.3.1	Zerlegung von $SO(8)$ in $U(1) \times SU(4)$ . . . . .	16
2.3.2	Bestimmung der $N = 2, D = 4$ Struktur . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Berechnung der <math>N = 2</math> Struktur der Typ IIA Wirkung</b>	<b>23</b>
3.1	Methoden der Tensorzerlegung . . . . .	23
3.2	Tensorzerlegung der Typ IIA Wirkung . . . . .	27
3.3	Bestimmung der Matrix der Eichkopplungen . . . . .	31
3.4	Quaternionische Struktur des universellen Hypermultipletts . . . . .	36
3.5	Zusammenstellung der Ergebnisse . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzende Rechnungen</b>	<b>41</b>
A.1	Weyl-Reskalierung und Tensorzerlegung des kinetischen Dilaton Terms und des Krümmungsskalars . . . . .	41
A.2	Herleitung zu Gleichung (3.40) . . . . .	46
A.3	Dualisierung von $B_2$ . . . . .	47
A.4	Herleitung zu Gleichung (3.66) . . . . .	49
A.5	Zusatz zu Abschnitt 3.4 . . . . .	50
<b>B</b>	<b>Quaternionische Struktur des universellen Hypermultipletts</b>	<b>54</b>
B.1	Quaternionische Kählermannigfaltigkeiten . . . . .	54
B.2	Beweis zur fast quaternionischen Struktur des universellen Hypermultipletts . . . . .	58
<b>C</b>	<b>Gruppentheorie</b>	<b>63</b>
C.1	Einführung in Notation und Konvention . . . . .	63
C.2	Dynkin Diagramme . . . . .	65
C.3	Erzeugung von Gewichtsdiagrammen irreduzibler Darstellungen . . . . .	66

C.4	Bildung von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen . . . . .	68
C.5	Bestimmung von Untergruppen . . . . .	69
C.6	Darstellungstheorie einiger Gruppen . . . . .	70
C.6.1	Darstellungstheorie der $SU(3)$ . . . . .	70
C.6.2	Darstellungstheorie der $SO(6) \simeq SU(4)$ . . . . .	71
C.6.3	Darstellungstheorie der $SO(8)$ . . . . .	72
C.7	Konstruktion des Multipletts der Typ IIA Supergravitation . . . . .	75
C.8	$N = 2$ Supersymmetriegeneneratoren in vier Dimensionen . . . . .	77
C.9	Gewichte irreduzibler Darstellungen . . . . .	81
C.9.1	$SU(3)$ . . . . .	81
C.9.2	$SO(6) \simeq SU(4)$ . . . . .	81
C.9.3	$SO(8)$ . . . . .	82

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Bestreben der theoretischen Physik ist es, die bekannten Naturkräfte zu vereinigen. Die Gravitation spielt dabei eine besondere Rolle, denn anders als die restlichen Kräfte, wird sie als die Geometrie der physikalischen Raumzeit selbst interpretiert, und eine Vereinigung mit den anderen Kräften ist bisher nicht gelungen. Ebenfalls ist es nicht gelungen eine Quantentheorie der Gravitation zu entwickeln, was nicht zuletzt an der Schwäche der Wechselwirkung und dem daraus resultierenden Mangel an Hochpräzisionsmessungen liegt. Für die Lösung letzteren Problems, der Beschreibung einer Quantengravitation, existieren zwei vielversprechende Lösungsansätze: Die „Loop Quantum Gravity“ und die „Superstringtheorie“. Allerdings beschäftigt sich nur die Stringtheorie mit der Vereinigung aller Kräfte. Eigenschaften und Konzepte der Stringtheorie werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Sie werden beispielsweise in [6] und [13] erklärt. Hier sei nur soviel gesagt, dass Teilchen durch ausgedehnte eindimensionale Objekte beschrieben werden.

Um die Konzepte der Stringtheorie zu überprüfen, die vermutlich erst bei sehr großen Energien eine Rolle spielt, bietet es sich an nach dem Bohrschen Korrespondenzprinzip eine Möglichkeit zu suchen, in der sich die beobachtete vierdimensionale Niederenergie-Raumzeit  $\mathcal{M}_{1,3}$  als Grenzwert erhalten lässt. Dazu kann zunächst die eindimensionale Struktur der Strings ausintegriert werden. Das Ergebnis ist eine zehndimensionale Supergravitationstheorie. In dieser Arbeit wird der Niederenergie-Limes der Typ IIA Stringtheorie, die Typ IIA Supergravitation behandelt.

Um aus einer zehndimensionalen Theorie eine vierdimensionale Theorie zu erhalten, sind weitere Schritte notwendig: Da die zusätzlichen Dimensionen in der beobachteten Niederenergie-Raumzeit nicht auftreten wird angenommen, dass die zusätzlichen Dimensionen zu einer kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  gehören. Die zehndimensionale Raumzeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  lässt sich dann als Produkt der beobachteten Niederenergie-Raumzeit  $\mathcal{M}_{1,3}$  mit der kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  schreiben, also  $\mathcal{M}_{1,9} = \mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6$ .

Um aus vierdimensionaler Sicht eine  $N = 2$  Theorie zu erhalten, muss die kompakte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  weiteren Einschränkungen unterliegen. Es ist bereits bekannt, dass die Beschränkung von  $\mathcal{M}_6$  auf Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten vierdimensionale  $N = 2$  Theorien liefert. Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten, deren Holonomiegruppe der  $SU(3)$  entspricht. In [5] wurde bewiesen, dass es ausreichend ist, eine  $SU(3)$

Struktur für die kompakte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  zu fordern. Sie erlaubt die Existenz nirgends verschwindender, global definierter Spinoren, die die  $N = 2$  Struktur in vier Dimensionen beschreiben. Diese Mannigfaltigkeiten sind eine Verallgemeinerung von Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten. Zum Vergleich mit den bisher bekannten Ergebnissen für vierdimensionale  $N = 2$  Supergravitation müssen die entsprechenden Verallgemeinerungen hergeleitet werden, was die Zielsetzung dieser Arbeit ist.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Zerlegung der Felder des masselosen, bosonischen Multipletts der Typ IIA Supergravitation und ergänzt die in [5] gefundenen Ergebnisse für den Neveu-Schwarz-Sektor mit Ergebnissen für den Ramond-Sektor. Dazu wird die aus [13] entnommene Typ IIA Wirkung, die auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  definiert ist, unter der Zerlegung  $\mathcal{M}_{1,9} = \mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6$  betrachtet. Die kompakte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  trägt dabei eine  $SU(3)$  Struktur. Unter dieser Zerlegung werden die masselosen Felder der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$ , die als irreduzible Darstellungen der zehndimensionalen Lorentz-Gruppe in der Lichtkegelleichung, der  $SO(8)$ , transformieren bei der Zerlegung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  in irreduzible Darstellungen der Symmetriegruppen der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  zerlegt. Da die kompakte Mannigfaltigkeit eine  $SU(3)$  Struktur trägt, transformieren auch die Felder nach dieser Zerlegung als irreduzible  $SU(3)$  Darstellungen mit bestimmter Helizität.

Die durch die Zerlegung entstehenden Felder werden aus vierdimensionaler Sicht in Multipletts der vierdimensionalen  $N = 2$  Supergravitation angeordnet. Die Triplets der  $SU(3)$  werden [5] folgend herausprojiziert, um eine  $N = 2$  Supergravitation ohne Gravitino-Multiplett zu erhalten. Aus den übrigen Termen werden die Felder mit Helizität  $\pm 1$  zusammengefasst und die Matrix der Eichkopplungen wird bestimmt. Das universelle Hypermultiplett, das aus den als Singlet unter der  $SU(3)$  transformierenden Feldern mit Helizität 0 gebildet wird, wird zusammengefasst, und die Metrik der skalaren Kopplungen wird bestimmt. Dem Beweis aus [15] folgend wird bewiesen, dass die Felder des universellen Hypermultipletts in Übereinstimmung mit den Bedingungen für vierdimensionale  $N = 2$  Supergravitation eine quaternionische Kählermannigfaltigkeit bilden.

In dieser Arbeit findet keine Kompaktifizierung statt. Das heißt, dass das Volumen der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  nicht ausintegriert wird und daher alle auftretenden Felder noch von allen zehn Koordinaten abhängig sind. Des weiteren findet keine Entwicklung der Formen in harmonischen Formen der kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  statt, wie es beispielsweise in Kaluza-Klein-Kompaktifizierung der Fall ist.

- In Kapitel 2 werden aus der Literatur bekannte, für diese Arbeit relevante Grundlagen zusammengefasst. Zunächst wird auf masselose  $N = 2$  Supergravitation in  $D = 4$  eingegangen. Davon ausgehend werden einige allgemeine Bemerkungen zur Algebra in beliebigen geradzahligem Raumzeit-Dimensionen gemacht. Die Ergebnisse werden verwendet, um die Supersymmetrie-Algebra in  $D = 10$  zu untersuchen. Schließlich wird das Multiplett der Typ IIA Supergravitation konstruiert.

---

Das Multiplett wird über maximale Darstellungen der  $SO(8)$ , d.h. über  $SU(4)$ , in  $SU(3)$  Darstellungen zerlegt. Die resultierenden Darstellungen werden den vierdimensionalen  $N = 2$  Multipletts zugeordnet und die  $SU(3)$  Triplets werden herausprojiziert.

- Im Kapitel 3 werden die mathematischen Methoden zur Zerlegung von Termen der Wirkung der Typ IIA Supergravitation unter der Zerlegung  $SO(8) \supset U(1) \times SU(4) \supset U(1) \times SU(3)$  besprochen. Die Methoden werden auf die aus [13] entnommene Wirkung der Typ IIA Supergravitation angewendet und die tensorzerlegte Wirkung wird angegeben. Die Terme der Wirkung werden ihren Helizitäten entsprechend zusammengefasst und die als  $SU(3)$  Triplets transformierenden Felder der Typ IIA Wirkung werden aus dem Spektrum entfernt. Die Matrix der Eichkopplungen für die Felder mit Helizität  $\pm 1$  wird bestimmt und angegeben. Das universelle Hypermultiplett wird identifiziert und die Metrik der skalaren Kopplungen wird bestimmt. Dabei wird die Wirkung des universellen Hypermultipletts in einer Form geschrieben, in der sich der Beweis, dass die Felder die fast quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden, analog zu dem in [15] gegebenen Beweis führen lässt. Der Vollständigkeit halber wird dieser Beweis hier noch einmal durchgeführt.

- In Kapitel 4 werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und diskutiert.

- In Anhang A befinden sich ergänzende Rechnungen zu Kapitel 2.

- In Anhang B befindet sich neben einer kurzen Einführung über quaternionische Kählermannigfaltigkeiten der Beweis, dass die Felder des universellen Hypermultipletts die fast quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden.

- In Anhang C befindet sich eine kurze Einführung in die Gruppentheorie, einige gruppentheoretische Aspekte des Typ IIA Multipletts, sowie die Behandlung relevanter Symmetriegruppen.

# Kapitel 2

## Zugrundeliegende Konzepte

Da der Fokus dieser Arbeit die Untersuchung der vierdimensionalen  $N = 2$  Strukturen einer zehndimensionalen  $N = 2$  Supergravitationstheorie ist, wird zunächst  $N = 2$  Supersymmetrie in vier Dimensionen behandelt. Die Vorgehensweise richtet sich dabei nach [17]. Zunächst werden einige allgemeine Vorbemerkungen zum Prinzip der Supersymmetrie im Allgemeinen gemacht.

Supersymmetrie bezeichnet die Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen und ist damit eine Symmetrie von Teilchen mit ganzzahligem und halbzahligem Spin. Die Teilchen sind Vektoren  $|\text{Boson}\rangle$ , beziehungsweise  $|\text{Fermion}\rangle$  in einem Vektorraum, dem Zustandsraum. Das Vorhandensein einer Symmetrie zwischen diesen Teilchensorten bedeutet die Existenz von Symmetrieoperatoren  $Q$ , die auf den Zustandsraum in folgender Weise wirken:

$$Q |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle, \quad \text{bzw.} \quad Q |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle. \quad (2.1)$$

Die Operatoren  $Q$  werden auch Superladungen genannt.

Die Gleichung (2.1) fordert für jedes Teilchen ein supersymmetrisches Partnerteilchen. Das Auffinden eines Partnerteilchens der bisher bekannten Teilchen würde die Supersymmetrie bestätigen. Diese Entdeckung steht zum heutigen Zeitpunkt jedoch noch aus. Es besteht allerdings Grund zur Hoffnung, dass sie in den nächsten Jahren mit Hilfe des zur Zeit im Bau befindlichen Teilchenbeschleunigers LHC gefunden werden.

Im folgenden Abschnitt wird die Einbindung des Prinzips der Supersymmetrie in die bis dahin bekannten physikalischen Prinzipien in vier Dimensionen besprochen.

### 2.1 Supersymmetrie in $D = 4$

Dieser Abschnitt beruht auf der Standard-Literatur [17] zur Supersymmetrie in vier Dimensionen.

Haag, Lopuszanski und Sohnius [7] zeigten, unter verschiedenen hier nicht näher auf-



geführten Annahmen, dass die Supersymmetrie-Algebra

$$\begin{aligned}\{Q_a^I, \bar{Q}_b^J\} &= 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu \delta^{IJ}, \\ \{Q_a, Q_b\} &= \{\bar{Q}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 0, \\ [P_\mu, Q_a^I] &= [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{a}}^I] = 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

die einzig mögliche graduierte Lie-Algebra der Symmetrien der S-Matrix in Übereinstimmung mit relativistischen Quantenfeldtheorien ist. Die Indizes  $I$  und  $J$  laufen von 1 bis  $N$ .  $N$  gibt an, wie viele Superladungen existieren. Die Algebra für  $N > 1$  wird  $N$ -erweiterte Supersymmetrie-Algebra genannt. Sowohl  $a, b, \dots$  als auch  $\dot{a}, \dot{b}, \dots$  sind Spinorindizes und laufen im vierdimensionalen Fall von 1 bis 2. Die griechischen Indizes stehen für Lorentzindizes in vier Dimensionen und laufen von 0 bis 3.

Im masselosen Fall gilt  $P^2 = 0$ . Mit dem Boost in ein bestimmtes lichtartiges Bezugssystem lässt sich dadurch  $P_\mu = (E, 0, 0, E)$  erreichen. Die Wahl dieses Bezugssystems wird Lichtkegeleichung genannt. Mit den Paulimatrizen folgt für die erste Gleichung aus (2.2) in dieser Eichung:

$$\{Q_a^I, \bar{Q}_b^J\} = 2 \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{IJ}.\tag{2.3}$$

In der für diese Arbeit benutzten Konvention lauten die Paulimatrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{2.4}$$

Daraus folgt, dass für jedes  $I, J = 1, \dots, N$  nur ein Supersymmetrie-Generator (und sein konjugierter Partner) existiert, da nach Gleichung (2.3) die Hälfte der Spinorkomponenten antikommutiert und so herausprojiziert wird.

Um die Algebra (2.3) in die Standard-Form zu bringen, werden aus den Supersymmetrie-Generatoren Auf- und Absteigeoperatoren  $(a^I)^\dagger$  und  $a^I$  konstruiert:

$$a^I := \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_a^I, \quad (a^I)^\dagger := \frac{1}{2\sqrt{E}} \bar{Q}_{\dot{a}}^I.\tag{2.5}$$

Nachdem die reskalierten Operatoren in (2.3) und (2.2) eingesetzt wurden, erhält man die Algebra in ihrer kanonischen Form:

$$\begin{aligned}\{a^I, (a^J)^\dagger\} &= \delta^{IJ}, \\ \{a^I, a^J\} &= \{(a^I)^\dagger, (a^J)^\dagger\} = 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Ebenso wie die Superladungen  $Q$  verändern die Auf- und Absteigeoperatoren  $a^I$  und  $(a^I)^\dagger$  die Helizität eines Zustandes um  $\pm 1/2$ . Der niedrigste Zustand  $|\lambda\rangle$  ist dadurch definiert, dass die Absteigeoperatoren  $a^I$  ihn vernichten:  $a^I |\lambda\rangle = 0 \quad \forall I = 1, \dots, N$ . Alle möglichen Zustände, die durch Wirken der Aufsteigeoperatoren aus dem Grundzustand erreichbar

sind, heißen Multipl. Wegen der Antikommutationsrelationen (2.6) besteht ein Multipl. in vier Dimensionen aus  $2^N$  Zuständen.

Bei der Forderung einer maximalen Helizität vom Betrag 2 lässt sich auch ein maximales  $N$  für die Supersymmetrie-Algebra in vier Dimensionen angeben: Wird als Grundzustand die niedrigst mögliche Helizität  $-2$  gewählt und jeder der  $N$  Aufsteigeoperatoren genau ein Mal auf den Grundzustand angewendet, so ergibt sich die maximale Helizität zu  $(N/2 - 2)$ . Mit  $(N/2 - 2) \leq 2$  folgt  $N \leq 8$ . Die Forderung einer Obergrenze der Helizität wird als „helicity bound“ bezeichnet.

Für  $N = 1$  gibt es wegen der Bedingungen (2.6) zu jedem Grundzustand nur den Grundzustand selber und einen Zustand  $(a^I)^\dagger |\lambda\rangle$ , der durch einmaliges Wirken des Aufsteigeoperators auf den Grundzustand entsteht. Die  $2^2 = 4$  möglichen Zustände zu  $|\lambda\rangle$  für  $N = 2$  lauten:

$$|\lambda\rangle \begin{cases} \nearrow (a^1)^\dagger |\lambda\rangle \\ \searrow (a^2)^\dagger |\lambda\rangle \end{cases} \begin{cases} \nwarrow (a^1)^\dagger (a^2)^\dagger |\lambda\rangle \\ \nearrow (a^2)^\dagger (a^1)^\dagger |\lambda\rangle \end{cases} \quad (2.7)$$

In Tabelle 2.1 sind ausgehend von der Helizität des Grundzustandes die zugehörige Helizität und Anzahl der Zustände des Multipl. aufgelistet.

		Helizität von $ \lambda\rangle$						
		-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
Hel. des Multipl.	2							1
	$\frac{3}{2}$						1	2
	1					1	2	1
	$\frac{1}{2}$				1	2	1	
	0			1	2	1		
	$-\frac{1}{2}$		1	2	1			
	-1	1	2	1				
	$-\frac{3}{2}$	2	1					
	-2	1						

**Tabelle 2.1:**  $D = 4$ ,  $N = 2$  Multipl.

Dies ist im wahrsten Sinne jedoch nur die halbe Wahrheit, denn unter CPT<sup>1</sup> Konjugation ändert sich das Vorzeichen der Helizität eines Zustandes. Das einzige, von vornherein unter CPT Konjugation invariante, Multipl. ist demnach das des Grundzustandes  $|\lambda = -\frac{1}{2}\rangle$ . Da es als einziges Multipl. ohne seinen CPT konjugierten Partner existieren kann, wird es auch als „halbes“ Multipl. bezeichnet. Alle anderen Multipl. müssen um ihr negatives Pendant ergänzt werden. Dadurch entstehen vier verschiedene Typen von Multipl. Sie

<sup>1</sup>„charge parity time“

sind in Tabelle 2.2 aufgelistet. Das Graviton-Multiplett beinhaltet entsprechend seiner Bezeichnung als einziges Multiplett ein Feld mit Helizität  $\pm 2$ , das dem Graviton entsprechen muss. Jede Supergravitationstheorie muss dieses Multiplett besitzen. Wird im Folgenden nur der Betrag der Helizität angegeben, also Helizität  $\lambda$ , so bedeutet das einen Helizitätsgehalt von  $\pm\lambda$ .

Im nachfolgenden Abschnitt erfolgt die Verallgemeinerung des vierdimensionalen Falls auf zehn Dimensionen.

Bezeichnung	Kombinierte Grundzustände	Helizitäts Inhalt
Graviton-Multiplett	$ \lambda = -2\rangle \oplus  \lambda = 1\rangle$	$\pm 2, \pm \frac{3}{2}, \pm 1$
Gravitino-Multiplett	$ \lambda = -\frac{3}{2}\rangle \oplus  \lambda = \frac{1}{2}\rangle$	$\pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$
Vektor-Multiplett	$ \lambda = -1\rangle \oplus  \lambda = 0\rangle$	$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0$
$\frac{1}{2}$ Hyper-Multiplett	$ \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$	$\pm \frac{1}{2}, 0$

**Tabelle 2.2:** Auflistung konstruierbarer, CPT invarianter,  $D = 4$ ,  $N = 2$  Multipletts, die den „helicity bound“ erfüllen.

## 2.2 Supersymmetrie in $D = 10$

Dieser Abschnitt richtet sich nach [13] und [19].

Zunächst werden einige Vorbemerkungen zu den Generatoren der Clifford-Algebra in beliebigen geradzahigen Dimensionen  $D = 2K + 2$ ,  $K = 0, 1, 2, \dots$  gemacht, um anschließend die Supersymmetrie-Algebra in zehn Dimensionen zu untersuchen. Für die Behandlung ungerader Dimensionen sei auf [13] verwiesen.

Analog zur vierdimensionalen Clifford-Algebra, die durch die Paulimatrizen und die Einheitsmatrix generiert wird, werden die  $D$  dimensionalen Generatoren  $\Gamma^A$  der  $D$  dimensionalen Clifford-Algebra definiert:

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}. \quad (2.8)$$

Für die Metrik gilt  $\eta = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$  und die Indizes  $A, B, \dots$  laufen von 0 bis  $D - 1$ . Die Generatoren  $\Gamma^A$  erzeugen auf folgende Weise die Generatoren  $\Sigma^{AB}$  der verallgemeinerten Lorentz-Gruppe  $SO(1, D - 1)$ :

$$\Sigma^{AB} = \frac{1}{4}[\Gamma^A, \Gamma^B]. \quad (2.9)$$

Die Gamma-Matrizen lassen sich nach [13] auch explizit rekursiv für beliebige Dimensionen konstruieren. Dafür wird mit den Gamma-Matrizen im zweidimensionalen Fall begonnen:

$$\Gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Die Rekursion lautet mit Hilfe der Paulimatrizen aus (2.4):

$$\begin{aligned}\Gamma_{neu}^I &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_{alt}^I \otimes \sigma^3, & I = 0, \dots, D-3, \\ \Gamma_{neu}^{D-2} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1} \otimes \sigma^1, & \Gamma_{neu}^{D-1} := -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1} \otimes \sigma^2.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Es lässt sich ein Operator definieren, der mit allen anderen Operatoren vertauscht. Er ist die Verallgemeinerung von  $\Gamma_5$  in vier Dimensionen und wird analog definiert:

$$\Gamma_{D+1} := i^K \Gamma^1 \Gamma^2 \dots \Gamma^{D-1}. \quad (2.12)$$

Wegen der Antivertauschungsrelationen (2.8) der Gamma-Matrizen gilt ebenfalls analog zum vierdimensionalen Fall

$$(\Gamma_{D+1})^2 = \mathbb{1}, \quad \text{und} \quad \{\Gamma_{D+1}, \Gamma^A\} = 0, \quad (2.13)$$

und weil die Gamma-Matrizen nach Gleichung (2.9) die Lorentz-Generatoren erzeugen, gilt

$$[\Gamma_{D+1}, \Sigma^{AB}] = 0. \quad (2.14)$$

Die Eigenwerte von  $\Gamma_{D+1}$  (Chiralität) sind wegen (2.13)  $\pm 1$ . Damit lassen sich wegen der verschwindenden Antikommutationsrelationen von  $\Gamma_{D+1}$  mit den anderen Generatoren zwei unter der Algebra invariante Unterräume klassifizieren: Einen, in dem Zustände den Eigenwert  $+1$  annehmen und einen mit Eigenwerten  $-1$ . Jeder Zustand lässt sich einem dieser invarianten Unterräume zuordnen. Das führt dazu, dass die gesamte Darstellung (Dirac-Darstellung) aus zwei inäquivalenten Darstellungen (Weyl-Darstellungen) gebildet wird.

Für die Darstellungen lassen sich von der Dimension abhängig weitere Einschränkungen finden: Es gilt in der Basis (2.11), dass  $\Gamma^3, \Gamma^5, \dots, \Gamma^{D-1}$  rein komplex und die restlichen  $\Gamma^A$  rein reell sind. In dieser Basis lässt sich die komplexe Konjugation der Matrizen explizit konstruieren. Dazu werden zwei Abbildungen definiert:

$$B_1 := \Gamma^3 \Gamma^5 \dots \Gamma^{D-1}, \quad \text{und} \quad B_2 := \Gamma_{D+1} B_1. \quad (2.15)$$

Mit diesen Abbildungen lässt sich die komplexe Konjugation vermöge der Antivertauschungsrelationen (2.8) durch

$$\begin{aligned}B_1 \Gamma^A B_1^{-1} &= (-1)^K \overline{\Gamma^A}, & B_2 \Gamma^A B_2^{-1} &= -(-1)^K \overline{\Gamma^A}, \\ \text{und} & & B_{1/2} \Gamma_{D+1} B_{1/2}^{-1} &= (-1)^K \overline{\Gamma_{D+1}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

schreiben. Das bedeutet, dass die komplexe Konjugation für ungerade  $K$  eine Chiralitätsänderung zur Folge hat, dass also die Weyl-Darstellungen komplex konjugiert zueinander sind. Für gerade  $K$  sind sie selbstkonjugiert.

Nun soll untersucht werden, für welche Dimensionen sich Majorana-Bedingungen realisieren lassen. Es gibt wegen Lorentzinvarianz nach [13] nur zwei formulierbare Majorana-Bedingungen für einen Spinor  $|\psi\rangle$ :  $|\overline{\psi}\rangle = B_1 |\psi\rangle$  und  $|\overline{\psi}\rangle = B_2 |\psi\rangle$ , woraus durch komplexe Konjugation und erneutes Einsetzen der Gleichung  $|\psi\rangle = \overline{B_1} B_1 |\psi\rangle$  folgt und so schließlich  $\overline{B_1} B_1 = (-1)^{K(K+1)/2} \mathbb{1} \stackrel{!}{=} \mathbb{1}$  oder  $\overline{B_2} B_2 = (-1)^{K(K-1)/2} \mathbb{1} \stackrel{!}{=} \mathbb{1}$ . Dies sind die Bedingungen, die  $K$  erfüllen muss, damit eine Majorana Bedingung erfüllt ist. Die erhaltenen Bedingungen für die Realisierung der Supersymmetrie-Algebra sind in Tabelle 2.3 aufgelistet. Die Tabelle wurde der Vollständigkeit halber mit hier nicht hergeleiteten Ergebnissen aus [13] für ungerade Dimensionen ergänzt.

Nun lässt sich mit der Forderung einer maximalen Helizität von 2 auch eine maximale Dimension für eine supersymmetrische Theorie angeben: Das maximale  $N$  in vier Dimensionen betrug 8. Nach Tabelle 2.3 gibt es  $8 \cdot 4 = 32$  reelle Superladungen. Der Vergleich ebenfalls mit Tabelle 2.3 zeigt, dass für  $N = 1$  in 11 Dimensionen gerade 32 reelle Superladungen existieren und für  $D = 12$  64. Die maximale Dimension einer supersymmetrischen Theorie beträgt demnach 11. Ebenfalls lässt sich aus der Tabelle entnehmen, dass für  $D = 10$   $N$  maximal 2 sein kann. Die maximale Anzahl an Komponenten, die ein Spinor besitzen kann beträgt  $2^{D/2}$ , wie man an den rekursiv definierten Gamma-Matrizen (2.11) erkennt, die nach jedem Rekursionsschritt die Dimension des Spinors verdoppeln. Die Kombination zweier Weyl-Darstellungen führt zu einer Verdopplung der Komponenten, und jede  $sk$  und Majorana Bedingung, die nach Tabelle 2.3 erfüllt werden muss, halbiert die Komponenten des Spinors. Im  $D = 10$  Fall sind zwei Bedingungen zu erfüllen, demnach ist die Dimension  $\dim(Q) = 2^{5-2+1} = 2^4 = 16$ . Die Ergebnisse für Dimensionen bis  $D = 12$  sind in Tabelle 2.3 angegeben.

$D$	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	$\dim(Q)$
2	<i>Ja</i>	<i>sk</i>	<i>Ja</i>	1
3	<i>Ja</i>			2
4	<i>Ja</i>	<i>kk</i>		4
5				8
6		<i>sk</i>		8
7				16
8	<i>Ja</i>	<i>kk</i>		16
9	<i>Ja</i>			16
10	<i>Ja</i>	<i>sk</i>	<i>Ja</i>	16
11	<i>Ja</i>			32
12	<i>Ja</i>	<i>kk</i>		64

**Tabelle 2.3:** Verschiedene Bedingungen für supersymmetrische Darstellungen in verschiedenen Dimensionen. Die Abkürzungen *sk*, bzw. *kk* stehen für selbst-konjugiert, bzw. komplex-konjugiert. Bei der Angabe von  $\dim(Q)$  werden reelle Superladungen betrachtet.

Nun soll das Multiplett der zehndimensionalen Supersymmetrie-Algebra bestimmt werden. Die Algebra (2.2) lautet für die zehndimensionale  $N = 2$  Theorie [13]:

$$\begin{aligned}\{Q_a^I, \bar{Q}_b^J\} &= -2P_A (\Gamma^A)_{ab} \delta^{IJ}, \\ \{Q_a^I, Q_b^J\} &= \{\bar{Q}_a^I, \bar{Q}_b^J\} = 0, \\ [P_A, Q_a^I] &= [P_A, \bar{Q}_a^I] = 0.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Die kleinen lateinischen Indizes bezeichnen wieder die Spinorindizes. Sie laufen von 1 bis 8, wie ein Vergleich mit Tabelle 2.3 zeigt. Die großen lateinischen Indizes vom Anfang des Alphabets bezeichnen zehndimensionale Lorentzindizes, die von 0 bis 9 laufen und  $I, J$  durchlaufen die Superladungen von 1 bis 2.

In der Lichtkegelequation mit  $P^2 = 0$  lässt sich  $P_A = (E, E, 0, \dots, 0)$  wählen. Hier erweist sich die in (2.11) definierte spezielle Form der Gamma-Matrizen als sinnvoll, denn für  $\Gamma^0$  und  $\Gamma^1$  gilt:

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (\otimes^K \sigma^3), \quad \Gamma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (\otimes^K \sigma^3),\tag{2.18}$$

wobei  $\otimes^K$  für ein  $K$ -faches Tensorprodukt der Matrizen steht. Für die erste Gleichung der Algebra (2.17) folgt damit in der gewählten Lichtkegelequation:

$$\begin{aligned}(\{Q_a^I, \bar{Q}_b^J\}) &= -2E \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (\otimes^K \sigma^3) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (\otimes^K \sigma^3) \right) \delta^{IJ} \\ &= -2E \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes (\otimes^K \sigma^3) \delta^{IJ},\end{aligned}\tag{2.19}$$

womit bewiesen wurde, dass im masselosen Fall die Hälfte des Spinorraumes herausprojiziert wird, wie es bereits in Gleichung (2.3) für vier Dimensionen der Fall war. Dies ist damit die Algebra acht fermionischer Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

Die  $SO(8)$  ist die verallgemeinerte Lorentz-Gruppe für masselose Teilchen in der Lichtkegelequation unter der die Superladungen als Summe irreduzibler Darstellungen transformieren, da sie Spinorindizes tragen.<sup>2</sup> Sie besitzt einen Rang von vier, daher trägt jeder Zustandsvektor vier Quantenzahlen, im Gegensatz zur  $U(1)$ , deren Zustände nur eine Quantenzahl besitzen. Die zehndimensionale Helizität ist somit ein vierdimensionaler Vektor. Deswegen ist es nicht mehr so einfach wie im vierdimensionalen Fall den Grundzustand zu einem Multiplett zu bestimmen, der durch das Wirken der acht Aufsteiger das Multiplett definiert. Aus diesem Grund wird die explizite Konstruktion des Multipletts in Anhang C.7 nach einigen Vorbemerkungen zur Gruppentheorie durchgeführt. Das dort erhaltene Ergebnis für das Multiplett der Typ IIA Supergravitation lautet:

$$(\mathbf{1} + \mathbf{8}_v + \mathbf{28} + \mathbf{35}_v + \mathbf{56}_v)_B + (\mathbf{8}_s + \mathbf{8}_c + \mathbf{56}_s + \mathbf{56}_c)_F.\tag{2.20}$$

<sup>2</sup>Die  $SO(D-2)$  ist die masselose Lorentz-Gruppen in beliebigen Dimensionen  $D$ , sie wird auch als „kleine“ Gruppe bezeichnet. Sie ist die Gruppe, die alle nach der Eichung übrig bleibenden Komponenten rotiert, also die Gruppe räumlicher Rotationen, die den Impuls invariant lässt.

Die irreduziblen  $SO(8)$  Darstellungen werden als Tensorfelder der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  realisiert. Um die Felder identifizieren zu können, sei noch einmal daran erinnert, dass es sich um masselose Darstellungen handelt. Bei diesen Feldern fehlen in der Lichtkegeleichung zwei Polarisationsfreiheitsgrade. Im Vergleich traten in vier Dimensionen nur zwei mögliche Polarisierungen für masselose Teilchen auf.

Die Metrik  $\hat{G}_{AB}$ , die dem Graviton entspricht, hat als symmetrischer, spurfreier Tensor zweiter Stufe in der Lichtkegeleichung in zehn Dimensionen 35 Freiheitsgrade und transformiert daher unter der bosonischen 35-dimensionalen Darstellung  $\mathbf{35}_v$ . Die antisymmetrischen Tensorfelder der Stufe  $p$  besitzen die Basis  $dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_p}$ , die aus dem  $p$ -fachen antisymmetrischen Tensorprodukt  $\wedge = \otimes_{antisym.}$  des Tangentialraumes  $T\mathcal{M}_{1,9}$  gebildet wird, sie werden auch  $p$ -Formen genannt. Der aufgespannte Raum wird durch  $\Lambda^p T\mathcal{M}_{1,9}$  bezeichnet. Man beachte, dass der Tangentialraum nicht mehr zehn, sondern für masselose Felder noch achtdimensional ist. Die Basis der  $p$ -Formen besitzt demnach  $\binom{8}{p}$  Basisvektoren. Ein Tensorfeld der Stufe  $p$   $\hat{F}_p$  lässt sich in dieser Basis folgendermaßen schreiben:

$$\hat{F}_p = \frac{1}{p!} \hat{F}_{A_1 \dots A_p} dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_p}. \quad (2.21)$$

Die  $\hat{F}_{A_1 \dots A_p}$  sind die Entwicklungskoeffizienten in der Tensorbasis. Sie werden Tensorkoeffizienten genannt. Für die Dimension der Räume (die Anzahl der Basisvektoren), auf denen die Formen definiert sind gilt:

$$\begin{array}{l} \text{Stufe der Form : } 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \dim(\Lambda^p T\mathcal{M}_{1,9}) : 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \end{array} \quad (2.22)$$

Aus dem Vergleich von (2.20) mit (2.22) erhält man die Tensorfelder des bosonischen, masselosen Teils der Wirkung der Typ IIA Supergravitation. Die Bezeichnungen der antisymmetrischen Tensorfelder, die unter den entsprechenden Darstellungen (2.20) transformieren, sind in Tabelle 2.4 aufgelistet. Der Hut der Formen und der Tensorkoeffizienten bedeutet, dass es sich um eine Form handelt, die durch die antisymmetrischen Tensorprodukte des Tangentialraumes von  $\mathcal{M}_{1,9}$  definiert ist. Die Stufe der Form ist sowohl durch den Index, als auch durch den Buchstaben gegeben ( $\hat{A}$  ist eine 1-Form,  $\hat{B}$  eine 2-Form und  $\hat{C}$  eine 3-Form).

Im nachfolgenden Abschnitt werden die hier zugeordneten  $SO(8)$  Darstellungen in die Helizitätsgruppe  $U(1)$  in vier Dimensionen und die Symmetriegruppe  $SO(6)$  der kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  zerlegt.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Die  $SO(6)$  ist die maximale Untergruppe der  $SO(8)$ , das bedeutet, dass keine größere Gruppe existiert, in die die  $SO(8)$  zerlegt werden könnte.

Stufe	Bezeichnung der Form	Tensorkoeffizient	$SO(8)$ Darstellung
0	$\hat{\Phi}$	$\hat{\Phi}$	<b>1</b>
1	$\hat{A}_1$	$\hat{A}_A$	<b>8<sub>v</sub></b>
2	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_{AB}$	<b>28</b>
3	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_{ABC}$	<b>56<sub>v</sub></b>

**Tabelle 2.4:** Angabe von Stufe, Bezeichnung und  $SO(8)$  Darstellung bei Typ IIA Supergravitation relevanter Tensorfelder. Das skalare Feld  $\hat{\Phi}$  wird Dilaton genannt.

## 2.3 Zerlegung der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{1,9}$ in $\mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6$

Die Zerlegung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  in  $\mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6$  erfolgt durch eine Zerlegung des Tangentialraumes  $T\mathcal{M}_{1,9}$  in  $T\mathcal{M}_{1,3} \oplus T\mathcal{M}_6$ . Es wird vorausgesetzt, dass  $\mathcal{M}_6$  eine kompakte Mannigfaltigkeit ist und  $\mathcal{M}_{1,3}$  die physikalische Raumzeit-Mannigfaltigkeit. Die Felder sind aus  $\mathcal{M}_{1,3}$  Sicht immer noch masselos, daher treten in  $\mathcal{M}_{1,3}$  nur zwei Polarisationszustände auf, und die zu betrachtende Helizitätsgruppe ist die  $U(1)$ . Die Symmetriegruppe  $SO(8)$  zerfällt somit in einen  $U(1)$  Teil für  $\mathcal{M}_{1,3}$  (Helizitätsgruppe in D=4) und einen  $SO(6) \simeq SU(4)$  Anteil für  $\mathcal{M}_6$ .

Nun werden die irreduziblen  $SO(8)$  Darstellungen, die die Typ IIA Multipletts bilden in irreduzible Darstellungen der Untergruppen zerlegt.

### 2.3.1 Zerlegung von $SO(8)$ in $U(1) \times SU(4)$

Die Zerlegung

$$SO(8) \supset SU(4) \times U(1) \quad (2.23)$$

wird nun für jede Darstellung aus Tabelle 2.4 durchgeführt. Dies geht zum einen, indem gruppentheoretische Methoden aus Anhang C oder beispielsweise [8, 14] verwendet werden. Zum anderen lässt sich der Tangentialraum, wie oben beschrieben direkt zerlegen, und die Formen lassen sich dann wieder aus den antisymmetrischen Tensorprodukten der zerlegten Tangentialraumvektoren konstruieren. Dies soll nun durchgeführt werden. Die Basis des Tangentialraumes zerfällt in

$$dx^A = \begin{pmatrix} dx^\mu \\ dx^a \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad a = 1, \dots, 6. \quad (2.24)$$

Für ein Vektorfeld  $\hat{A}_A$  in zehn Dimensionen folgt nach der Zerlegung

$$\hat{A}_A dx^A = A_\mu dx^\mu + A_a dx^a. \quad (2.25)$$



In Erinnerung an vierdimensionale Supergravitation entspricht dies gerade einem Vektorfeld ( $A_\mu dx^\mu$ ) und sechs Skalarfeldern ( $A_a dx^a$ ) in vier Dimensionen. Ein masseloses vierdimensionales Vektorfeld besitzt zwei Helizitätsfreiheitsgrade  $\pm 1$ . Man kann also sagen: Ein masseloses zehndimensionales Vektorfeld zerfällt aus Sicht eines vierdimensionalen Beobachters in eine Komponente mit Helizität  $+1$ , eine mit  $-1$  und sechs Komponenten mit Helizität  $0$ .

Aus den antisymmetrischen Tensorprodukten des zerlegten Tangentialraumes lassen sich die zerlegten Räume der Formen konstruieren. Die Zerlegung von  $\Lambda^1 T\mathcal{M}_{1,9}$  wurde bereits in (2.25) bestimmt. Nun sind folgende antisymmetrische Tensorprodukte  $\otimes_A$  möglich, um  $\Lambda^2 T\mathcal{M}_{1,9}$  zu zerlegen:

Tangentialraumvektoren	Helizität der Vektoren	Helizität der Tensorbasis
$dx^\mu \wedge dx^\nu$	$  -1 \rangle \otimes_A   +1 \rangle$	$1 \times T$
$dx^\mu \wedge dx^a$	$  -1 \rangle \otimes_A   0 \rangle \oplus   +1 \rangle \otimes_A   0 \rangle$	$6 \times \pm 1$
$dx^a \wedge dx^b$	$  0 \rangle \otimes_A   0 \rangle$	$15 \times 0$

**Tabelle 2.5:** Bildung der antisymmetrischen Tensorprodukte nach der Zerlegung des Tangentialraums.

Das heißt, ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe, der unter  $\mathbf{28}_{SO(8)}$  transformiert, zerfällt aus Sicht eines vierdimensionalen Beobachters in:

$$\hat{B}_{AB} dx^A \wedge dx^B = B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + B_{\mu a} dx^\mu \wedge dx^a + B_{ab} dx^a \wedge dx^b. \quad (2.26)$$

Dies sind ein Helizität  $0$  Feld  $B_{\mu\nu}$ , sechs (CPT komplette)<sup>4</sup> Helizität  $1$  Felder  $B_{\mu a}$  und  $15$  Skalarfelder  $B_{ab}$ . Die Zerlegung (2.23) lautet für das unter der  $\mathbf{28}_{SO(8)}$  transformierende Feld demnach:

$$\mathbf{28}_{SO(8)} \rightarrow (\mathbf{1}_{SU(4)})_T + (\mathbf{6}_{SU(4)})_1 + (\mathbf{15}_{SU(4)})_0. \quad (2.27)$$

Der Index  $T$  bezieht sich dabei auf den antisymmetrischen Tensor  $B_{\mu\nu}$ . Die fett gedruckten Zahlen stehen für Darstellungen der  $SO(8)$ , beziehungsweise  $SU(4)$  und die Indizes für die Helizität der unter ihnen transformierenden Felder. Dabei ist zu beachten, dass die  $SU(4)$  Darstellungen unter Umständen reduzibel sind. Die Zerlegung in irreduzible Darstellungen wird in Anhang C oder beispielsweise in [8, 14] behandelt. Die anderen Tensorfelder lassen sich auf dieselbe Weise zerlegen. Die symmetrische Kombination dieser Vektoren liefert ein Feld mit Helizität  $2$ ; die Metrik  $g_{\mu\nu}$  der physikalischen Raumzeit. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.7 aufgelistet.

Die Zerlegung der Tensorfelder in  $SU(4)$  Darstellungen ist damit erfolgt. Im nachfolgenden Abschnitt wird die weitere Zerlegung in  $SU(3)$  Darstellungen erklärt, die für die Definition einer  $N = 2$ ,  $D = 4$  Struktur notwendig ist.

<sup>4</sup>Da das Multiplett maximal ist, sind die zehndimensionalen Typ IIA Felder von vornherein CPT komplett.

### 2.3.2 Bestimmung der $N = 2$ , $D = 4$ Struktur

In diesem Abschnitt werden den Ausführungen in [5] folgend notwendige Bedingungen für die Definition einer vierdimensionalen  $N = 2$  Struktur diskutiert.

Auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  existieren zwei Spinoren  $E_+^1$  und  $E_-^2$  unterschiedlicher Chiralität. Sie entsprechen den beiden achtdimensionalen fermionischen Darstellungen  $\mathbf{8}_s$  und  $\mathbf{8}_c$ , aus denen die Superladungen konstruiert wurden. Die Dekomposition der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  führt auch zu einer Dekomposition der Gamma-Matrizen  $\Gamma^A$  und damit zu einer Dekomposition der Algebra (2.17). Diese Dekomposition lässt sich durchführen, indem Tensorprodukte der Gamma-Matrizen  $\gamma^\mu$  in vier Dimensionen, die in (2.11) definiert sind, mit den Gamma-Matrizen  $\gamma^a$  in sechs Dimensionen, die die Clifford-Algebra  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = \delta^{ab}$  erfüllen, betrachtet werden. Eine mögliche Dekomposition ist:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \mathbb{1}, \quad \Gamma^a = \gamma_5 \otimes \gamma^a, \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad a = 1, \dots, 6. \quad (2.28)$$

Dies führt ebenfalls zu einer Dekomposition von  $E_+^1$  und  $E_-^2$ :

$$\begin{aligned} E_+^1 &= \epsilon_+^1 \otimes \eta_+ + \epsilon_-^1 \otimes \eta_-, \\ E_-^2 &= \epsilon_+^2 \otimes \eta_- + \epsilon_-^2 \otimes \eta_+. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dabei sind  $\epsilon_\pm^{1/2}$  Spinoren der Raumzeit-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\eta_\pm$  sind Spinoren von  $\mathcal{M}_6$ . Sie besitzen eine Chiralität, die ebenfalls durch den Index  $\pm$  angegeben ist.

Damit diese Dekomposition erlaubt ist, muss  $\eta_\pm$  global definiert sein und darf nirgends verschwinden, daraus folgt, dass  $\eta_\pm$  ein Singlet unter der Symmetriegruppe sein muss. Mannigfaltigkeiten, auf denen ein solcher Spinor definiert ist, haben eine reduzierte Strukturgruppe, die der  $SU(3)$  entspricht [11], demnach muss eine weitere Zerlegung in  $SU(3)$  Struktur stattfinden:

$$U(1) \times SU(4) \supset U(1) \times SU(3), \quad (2.30)$$

sodass aus den beiden fermionischen achtdimensionalen Darstellungen ein Singlet unter der Strukturgruppe der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$ , also ein  $SU(3)$  Singlet entsteht:

$$\begin{aligned} \mathbf{8}_c &\xrightarrow{U(1) \times SU(4)} \mathbf{4}_{\frac{1}{2}} + \bar{\mathbf{4}}_{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{U(1) \times SU(3)} (\mathbf{3} + \mathbf{1})_{\frac{1}{2}} + (\bar{\mathbf{3}} + \bar{\mathbf{1}})_{-\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{8}_s &\xrightarrow{U(1) \times SU(4)} \mathbf{4}_{-\frac{1}{2}} + \bar{\mathbf{4}}_{\frac{1}{2}} \xrightarrow{U(1) \times SU(3)} (\mathbf{3} + \mathbf{1})_{-\frac{1}{2}} + (\bar{\mathbf{3}} + \bar{\mathbf{1}})_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Herleitung erfolgt in Anhang C.6. Die Singlets definieren zwei Superladungen in vier Dimensionen und damit die gesuchte  $N = 2$ ,  $D = 4$  Struktur der Typ IIA Supergravitation, siehe dazu auch Anhang C.8. Die  $U(1)$  Struktur bleibt von der Zerlegung unbeeinflusst, da die Einschränkung sich nur auf die kompakte Mannigfaltigkeit bezieht. Also werden die  $SU(4)$  Darstellungen in irreduzible  $SU(3)$  Darstellungen zerlegt, und die Helizität ändert sich nicht.

Da Mannigfaltigkeiten mit  $SU(3)$  Struktur eine fast komplexe Struktur besitzen [11], ist es zweckmäßig die Basis des Tangentialraumes von  $\mathcal{M}_6$  als komplexe Basis zu schreiben.

Die aufgespannten Räume der Formen  $\Lambda^{p,q}T\mathcal{M}_6$  werden in dieser Basis durch zwei Zahlen  $p$  und  $q$  charakterisiert:

Basis	aufgespannter Raum	Dimension
$dz^i$	$\Lambda^{1,0}T\mathcal{M}_6$	3
$dz^{\bar{i}}$	$\Lambda^{0,1}T\mathcal{M}_6$	3
$dz^i \wedge dz^j$	$\Lambda^{2,0}T\mathcal{M}_6$	3
$dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}}$	$\Lambda^{0,2}T\mathcal{M}_6$	3
$dz^i \wedge dz^{\bar{j}}$	$\Lambda^{1,1}T\mathcal{M}_6$	9
$dz^i \wedge dz^j \wedge dz^{\bar{k}}$	$\Lambda^{2,1}T\mathcal{M}_6$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Tabelle 2.6:** Auflistung der komplexe Basen der Formen von  $\mathcal{M}_6$ .

Die Indizes  $i, j, \dots$  und  $\bar{i}, \bar{j}, \dots$  laufen von 1 bis 3. Analog zum vorangegangenen Kapitel und insbesondere Gleichung (2.26) lassen sich die Formen in diese Struktur zerlegen. Als Beispiel sei das  $(\mathbf{15}_{SU(4)})_0$  Tensorfeld  $B_{ab}$  angegeben:

$$B_{ab}dx^a \wedge dx^b = B_{ij}dz^i \wedge dz^j + B_{i\bar{j}}dz^i \wedge dz^{\bar{j}} + B_{\bar{i}\bar{j}}dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}}. \quad (2.32)$$

Der Vergleich mit Tabelle 2.6 liefert die unter Umständen reduzierbaren  $SU(3)$  Darstellungen, in die  $B_{ab}$  zerfällt.<sup>5</sup>

$$(\mathbf{15}_{SU(4)})_0 \rightarrow (\mathbf{3}_{SU(3)} + \bar{\mathbf{3}}_{SU(3)} + \mathbf{9}_{SU(3)})_0. \quad (2.33)$$

Die Zerlegung der anderen Tensorfelder erfolgt analog. Die Ergebnisse der Zerlegung (2.30) für alle Tensorfelder zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.3.1 sind in Tabelle 2.7 zusammengestellt. Sie sind bereits aus [5] bekannt.

---

<sup>5</sup>Die  $\mathbf{9}_{SU(3)}$  Darstellung ist reduzibel und zerfällt in  $\mathbf{1}_{SU(3)} + \mathbf{8}_{SU(3)}$ . Die Herleitung befindet sich in Anhang C.

Tensor	SO <sub>8</sub>	Tensor	SU <sub>4</sub> × U <sub>1</sub>	Tensor	SU <sub>3</sub> × U <sub>1</sub>
$\hat{\Phi}$	<b>1</b>	$\Phi$	<b>1</b> <sub>0</sub>	$\Phi$	<b>1</b> <sub>0</sub>
$\hat{A}_M$	<b>8</b> <sub>v</sub>	$A_\mu$ $A_a$	<b>1</b> <sub>1</sub> <b>6</b> <sub>0</sub>	$A_\mu$ $A_i + A_{\bar{i}}$	<b>1</b> <sub>1</sub> <b>(3 + 3)</b> <sub>0</sub>
$\hat{G}_{MN}$	<b>35</b> <sub>v</sub>	$g_{\mu\nu}$ $g_{\mu a}$ $g_{ab}$	<b>1</b> <sub>2</sub> <b>6</b> <sub>1</sub> <b>(20 + 1)</b> <sub>0</sub>	$g_{\mu\nu}$ $g_{\mu i} + g_{\mu \bar{i}}$ $g_{ij} + g_{\bar{i}j} + g_{\bar{i}\bar{j}}$	<b>1</b> <sub>2</sub> <b>(3 + 3)</b> <sub>1</sub> <b>(1 + 6 + 6 + 8)</b> <sub>0</sub>
$\hat{B}_{MN}$	<b>28</b>	$B_{\mu\nu}$ $B_{\mu a}$ $B_{ab}$	<b>1</b> <sub>T</sub> <b>6</b> <sub>1</sub> <b>15</b> <sub>0</sub>	$B_{\mu\nu}$ $B_{\mu i} + B_{\mu \bar{i}}$ $B_{ij} + B_{\bar{i}j} + B_{\bar{i}\bar{j}}$	<b>1</b> <sub>T</sub> <b>(3 + 3)</b> <sub>1</sub> <b>(1 + 3 + 3 + 8)</b> <sub>0</sub>
$\hat{C}_{MNP}$	<b>56</b> <sub>v</sub>	$C_{\mu\nu a}$ $C_{\mu ab}$ $C_{abc}$ $C_{\bar{a}bc}$	<b>6</b> <sub>T</sub> <b>15</b> <sub>1</sub> <b>10</b> <sub>0</sub> <b>10</b> <sub>0</sub>	$C_{\mu\nu i} + C_{\mu\nu \bar{i}}$ $C_{\mu ij} + C_{\mu \bar{i}j} + C_{\mu \bar{i}\bar{j}}$ $C_{ijk} + C_{ij\bar{k}}$ $C_{i\bar{j}\bar{k}} + C_{\bar{i}j\bar{k}}$	<b>(3 + 3)</b> <sub>T</sub> <b>(1 + 3 + 3 + 8)</b> <sub>1</sub> <b>(1 + 3 + 6)</b> <sub>0</sub> <b>(1 + 3 + 6)</b> <sub>0</sub>

**Tabelle 2.7:** Auflistung aller relevanten bosonischen, masselosen Felder der Typ IIA Supergravitation mit den zugehörigen Darstellungen.

Um den Überblick über die vollständige Struktur der Multipletts zu bekommen, werden die Dekompositionen der fermionischen Darstellungen des Typ IIA Multipletts aus Gleichung (2.20) in Tabelle 2.8 angegeben. Die Herleitung erfolgt in Anhang C.6, oder in [8, 14].

Tensor	SO(8)	U(1) × SU(4)	U(1) × SU(3)
$\lambda$	<b>8</b> <sub>s</sub>	$\bar{4}$ <sub>1/2</sub>	<b>(1 + 3)</b> <sub>1/2</sub>
	<b>8</b> <sub>c</sub>	$4$ <sub>1/2</sub>	<b>(1 + 3)</b> <sub>1/2</sub>
$\Psi_A$	<b>56</b> <sub>s</sub>	<b>(20 + 4)</b> <sub>1/2</sub>	<b>(3 + 3 + 6 + 8)</b> <sub>1/2</sub> + <b>(1 + 3)</b> <sub>1/2</sub>
		$\bar{4}$ <sub>3/2</sub>	<b>(1 + 3)</b> <sub>3/2</sub>
	<b>56</b> <sub>c</sub>	<b>(20 + 4)</b> <sub>1/2</sub>	<b>(3 + 3 + 6 + 8)</b> <sub>1/2</sub> + <b>(1 + 3)</b> <sub>1/2</sub>
		$4$ <sub>3/2</sub>	<b>(1 + 3)</b> <sub>3/2</sub>

**Tabelle 2.8:** Auflistung aller fermionischen Darstellungen

Um eine „Standard“  $N = 2$  Theorie zu erhalten, werden [5] folgend alle Triplets aus dem Teilchenspektrum entfernt. „Standard“ bedeutet in diesem Fall, dass zu den bereits im Graviton-Multiplett vorhandenen Gravitinos keine Zusätzlichen auftreten. Mit anderen

Worten, dass kein Gravitino-Multiplett existiert. In diesem Fall gibt es nach [5] genau eine mögliche Einordnung in  $D = 4$ ,  $N = 2$  Multipletts. Sie ist in Tabelle 2.9 angegeben und wird in Anhang C.8 erläutert.<sup>6</sup>

Multiplett	Konstituenten
Graviton-Multiplett	$(\mathbf{1}_2^g, \mathbf{1}_{3/2}^\Psi, \mathbf{1}_1^A)$
Vektor-Multiplett	$(\mathbf{8}_1^C, \mathbf{8}_{1/2}^\Psi, \mathbf{8}_0^B, \mathbf{8}_0^g)$
Vektor-Multiplett	$(\mathbf{1}_1^C, \mathbf{1}_{1/2}^\Psi, \mathbf{1}_0^B, \mathbf{1}_0^g)$
Hypermultiplett	$(\mathbf{6}_{1/2}^\Psi, (\mathbf{6} + \mathbf{6})_0^C, (\mathbf{6} + \overline{\mathbf{6}})_0^g)$
universelles Hypermultiplett	$(\mathbf{1}_{1/2}^\lambda, \mathbf{1}_0^\Phi, \mathbf{1}_T^B, \mathbf{1}_0^C, \mathbf{1}_0^C)$

**Tabelle 2.9:** konstruierbare Multipletts für  $D = 4$  und  $N = 2$

Die Einträge dieser Tabelle sind folgendermaßen zu verstehen: Die fett gedruckte Zahl steht für die  $SU(3)$  Darstellung und der untere Index für den Helizitätsgehalt. Der Index  $T$  bedeutet nach Tabelle 2.5 einen Helizitätsgehalt von Null. Der obere Index steht für die Bezeichnung des Feldes, das unter der entsprechenden Darstellung transformiert. Die fermionischen Darstellungen wurden mit den jeweils konjugierten Darstellungen in einer Zahl zusammengefasst; dies sind die Teilchen- beziehungsweise Antiteilchen-Darstellungen. Das Graviton-Multiplett wird hier zur Veranschaulichung von Tabelle 2.9 noch einmal vollständig angegeben:<sup>7</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbf{1}_{+3/2}^\Psi & & \mathbf{1}_{-3/2}^\Psi & \\
 \mathbf{1}_{+2}^g & & \mathbf{1}_{+1}^A & \xleftrightarrow{\text{CPT}} & \mathbf{1}_{-1}^A & & \mathbf{1}_{-2}^g. \\
 & \overline{\mathbf{1}}_{+3/2}^\Psi & & & \overline{\mathbf{1}}_{-3/2}^\Psi & & 
 \end{array} \quad (2.34)$$

Die daraus resultierenden bosonischen Anteile der Multipletts sind in Tabelle 2.10 angegeben. Damit ist der in dieser Arbeit betrachtete Feldinhalt bestimmt.

Das nachfolgende Kapitel gibt schließlich Aufschluss über die Auswirkung der bisher behandelten gruppentheoretischen Zerlegung auf die Wirkung der Typ IIA Supergravitation.

<sup>6</sup>Die verschiedenen Typen der  $N = 2$ ,  $D = 4$  Multipletts sind in Tabelle 2.2 angegeben.

<sup>7</sup>Dies entspricht Gleichung (C.46).

Multiplett	$SU(3)$ Darstellung	Feldinhalt
Graviton-Multiplett	<b>1</b>	$g_{\mu\nu}, A_\mu$
universelles Hypermultiplett	<b>1</b>	$B_{\mu\nu}, \Phi, C_{abc}$
Vektor-Multiplett	<b>1 + 8</b>	$C_{\mu ab}, g_{ab}, B_{ab}$
Hypermultiplett	<b>6</b>	$g_{ab}, C_{abc}$

**Tabelle 2.10:** Auflistung bosonischer Anteile der Multipletts nach Streichung aller  $SU(3)$  Triplets.

# Kapitel 3

## Berechnung der $N = 2$ Struktur der Typ IIA Wirkung

In diesem Kapitel werden die  $N = 2$  Strukturen der Typ IIA Wirkung aus vierdimensionaler Sicht berechnet. Dazu werden zunächst die Methoden der Tensorzerlegung besprochen, um die Felder der Typ IIA Wirkung in  $U(1) \times SU(4)$  Darstellungen zu zerlegen. Die Ergebnisse werden verwendet, um die in [13] gegebene Typ IIA Wirkung zu zerlegen. Dann wird die Matrix der Eichkopplungen und die Matrix der skalaren Kopplungen des universellen Hypermultipletts bestimmt.

### 3.1 Methoden der Tensorzerlegung

In diesem Abschnitt werden die mathematischen Methoden und Rechenregeln für die Auswirkung der Zerlegung  $SO(8) \supset U(1) \times SU(4)$  auf Terme der Wirkung besprochen. Dazu wird ein allgemeiner kinetischer Term der zehndimensionalen Wirkung  $S_{10}$  betrachtet. In solchen Termen tritt die äußere zehndimensionale Ableitung  $d$  auf. Terme der Form lauten für zwei  $p$ -Formen  $\hat{F}_p$  und  $\hat{H}_p$  der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$ :

$$S_{10} = \int_{\mathcal{M}} d\hat{F}_p \wedge *d\hat{H}_p. \quad (3.1)$$

Die äußere Ableitung ist durch

$$d\hat{F}_p = (p+1)\partial_{[A_0} F_{A_1 \dots A_p]} dx^{A_0} \wedge \dots \wedge dx^{A_p} \quad (3.2)$$

definiert. Der Stern  $*$  steht für das zehndimensionale Hodge-Dual, das durch

$$*\hat{F}_p = \frac{1}{(10-p)!} \hat{F}_{A_1 \dots A_p} \epsilon^{A_1 \dots A_p B_{p+1} \dots B_{10}} dx^{B_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{B_{10}} \quad (3.3)$$

definiert ist. Das Hodge-Dual bildet  $p$ -Formen in deren Dualraum ab und definiert damit ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{M}_{1,9}$ , bei dem zwei Formen  $\hat{F}_p$  und  $\hat{H}_q$  für  $p \neq q$  orthogonal sind:

$$\langle d\hat{F}_p, d\hat{H}_q \rangle_{\mathcal{M}} \equiv \int_{\mathcal{M}} d\hat{F}_p \wedge *d\hat{H}_q = \begin{cases} \int_{\mathcal{M}} d\hat{F}_p \wedge *d\hat{H}_p & \text{für } p = q \\ \text{und } 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.4)$$

Für das Quadrat des Hodge-Duals gilt

$$*^2 \hat{F}_p = (-1)^{n_-} (-1)^{p(dim(\mathcal{M})-p)} \hat{F}_p, \quad (3.5)$$

dabei ist  $n_-$  der Index der Metrik, das heißt die Anzahl der negativen Vorzeichen der Signatur. Wird eine Basis gewählt und die Definition des Hodge-Duals eingesetzt, so lässt sich das Skalarprodukt umschreiben:

$$\langle d\hat{F}_p, d\hat{H}_p \rangle_{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{M}} d\hat{F}_p \wedge (*d\hat{H}_p) = \int_{\mathcal{M}} \partial_{[A_0} \hat{F}_{A_1 \dots A_p]} \partial^{[A_0} \hat{H}^{A_1 \dots A_p]} \sqrt{-\hat{G}} d^{10}x. \quad (3.6)$$

Für Indizes in eckigen Klammern  $[\dots]$  gilt die Konvention

$$F_{[I_1, \dots, I_p]} := \frac{1}{p!} \sum_{\pi} \sigma(\pi) F_{\pi(I_1), \dots, \pi(I_p)}. \quad (3.7)$$

Dabei wird über alle Permutationen  $\pi$  der  $I_1, \dots, I_p$  summiert und der Summand mit dem Signum  $\sigma(\pi)$  der Permutation  $\pi$  multipliziert. Sie wurde so gewählt, dass für einen bereits in allen Indizes antisymmetrischer Tensor  $p$ -ter Stufe  $T_p$   $T_{[A_1 \dots A_p]} = T_{A_1 \dots A_p}$  gilt. Für die Kontraktionen der Indizes gilt in allen Formeln die Konvention

$$\partial_{[A_0} \hat{F}_{A_1 \dots A_p]} \partial^{[A_0} \hat{H}^{A_1 \dots A_p]} := \partial_{[A_0} \hat{F}_{A_1 \dots A_p]} \hat{G}^{A_0 B_0} \dots \hat{G}^{A_p B_p} \partial_{[B_0} \hat{H}_{B_1 \dots B_p]}. \quad (3.8)$$

Die Zerlegung  $SO(8) \supset U(1) \times SU(4)$  und die damit verbundene Zerlegung des Tangentialraumes äußert sich, wie bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben in einer Umstrukturierung der Summationsindizes  $(A, B, \dots) \rightarrow (\alpha, \beta, \dots \text{ und } a, b, \dots)$ . Es gibt damit eine äußere Ableitung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,3}$  ( $d^{(4)} = dx^\mu \partial_\mu$ ) und eine äußere Ableitung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  ( $d^{(6)} = dx^a \partial_a$ ). Für die äußere zehndimensionale Ableitung folgt damit  $d \rightarrow d^{(4)} + d^{(6)}$  und für eine Form nach der Zerlegung ergibt sich

$$\hat{F}_p \longrightarrow \sum_{r=0}^p F_{r, p-r}, \quad (3.9)$$

wobei  $F_{r, p-r}$  eine Form aus  $\Lambda^{r,s} := \Lambda^r T\mathcal{M}_{1,3} \wedge \Lambda^s T\mathcal{M}_6$  ist, für die

$$F_{r,s} = F_{\mu_1 \dots \mu_r a_1 \dots a_s} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_s} \quad (3.10)$$

gilt. Damit ergibt sich insgesamt für die Tensorzerlegung

$$d\hat{F}_p = \sum_{r=0}^p \left( d^{(4)} F_{r, p-r} + d^{(6)} F_{p-r, r} \right). \quad (3.11)$$



Die Gleichung (3.1) lautet mit diesen Relationen:

$$S_{10} = \int_{\mathcal{M}} \sum_{r=0}^p \left( d^{(4)} F_{r,p-r} + d^{(6)} F_{p-r,r} \right) \wedge * \sum_{r=0}^p \left( d^{(4)} H_{r,p-r} + d^{(6)} H_{p-r,r} \right). \quad (3.12)$$

Die Wirkung des zehndimensionalen Hodge-Duals auf die zerlegten Formen lässt sich durch die Hodge-Duale  $*^{(4)}$  und  $*^{(6)}$  der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  ersetzen. Die Definition lautet analog zur Definition des 10 dimensionalen Hodge-Duals (3.3):

$$\begin{aligned} *^{(4)} F_{p,q} &= \frac{1}{(4-p)!} F_{\mu_1 \dots \mu_p a_1 \dots a_q} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\mu_{p+1} \dots \mu_4} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_4} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_q}, \\ *^{(6)} F_{p,q} &= \frac{1}{(6-q)!} F_{\mu_1 \dots \mu_p a_1 \dots a_q} \epsilon^{a_1 \dots a_q}_{a_{q+1} \dots \mu_6} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{a_{q+1}} \wedge \dots \wedge dx^{a_6}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mit diesen Definitionen und den äußeren Ableitungen  $d^{(4)}$  und  $d^{(6)}$  der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  lassen sich die Kommutationsrelationen der Operatoren angeben:

$$[*^{(6)}, *^{(4)}] = [*^{(6)}, d^{(4)}] = [*^{(4)}, d^{(6)}] = [d^{(6)}, d^{(4)}] = 0. \quad (3.14)$$

Das Produkt der Stern Operatoren  $*^{(6)} *^{(4)}$  ersetzt den Sternoperator  $*$  in (3.12), es wird jedoch durch  $*$  abgekürzt. Diese Schreibweise sollte nicht zu Verwechslungen mit dem zehndimensionalen Stern Operator führen, da dieser nur auftritt, wenn Formen in zehn Dimensionen betrachtet werden, die immer durch einen Hut gekennzeichnet sind. Es gilt damit die Regel: Tragen die Formen keinen Hut, so gilt  $*$  =  $*^{(6)} *^{(4)}$ .

Wegen der Linearität der Operatoren folgt für (3.12):

$$\begin{aligned} &= \sum_{r,s=0}^p \int_{\mathcal{M}} \left( d^{(4)} F_{r,p-r} \wedge * d^{(4)} H_{s,p-s} + d^{(6)} F_{p-r,r} \wedge * d^{(4)} H_{s,p-s} \right. \\ &\quad \left. + d^{(4)} F_{r,p-r} \wedge * d^{(6)} H_{p-s,s} + d^{(6)} F_{p-r,r} \wedge * d^{(6)} H_{p-s,s} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung werden zunächst die einzelnen Terme in (3.15), die die Form

$$S_{10} = \int_{\mathcal{M}} X_{p,q} \wedge * Y_{r,s} \quad (3.16)$$

haben betrachtet. Das Skalarprodukt (3.16) lässt sich analog zu Gleichung (3.6) in einer Basis schreiben:

$$\int_{\mathcal{M}} X_{p,q} \wedge * Y_{r,s} = \int_{\mathcal{M}} X_{[\mu_1 \dots \mu_p][a_1 \dots a_q]} Y^{[\mu_1 \dots \mu_p][a_1 \dots a_q]} \sqrt{-\hat{G}} d^{10}x, \quad (3.17)$$

wobei die Kontraktion der Indizes mit allen möglichen Metrik-Kombinationen  $g^{ab}, g^{\mu a}, g^{ab}$  erfolgt. Für  $X_{p,q} = X_{1,1}$  und  $Y_{r,s} = Y_{2,0}$  lautet die Kontraktion beispielsweise  $X_{\mu a}(g^{\mu\alpha}g^{a\beta} + g^{\mu\beta}g^{a\alpha})Y_{\alpha\beta}$ .

Nach Voraussetzung sind die  $(\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  Darstellungen gestrichen. Demzufolge gilt  $g^{\mu a} = 0$  und für Gleichung (3.17) folgt, dass  $p = r$  und  $q = s$  gelten muss, oder mit anderen Worten, dass bezüglich des Skalarproduktes (3.17)  $(p, q)$ -Formen zu  $(r, s)$ -Formen für  $p \neq r$  und  $q \neq s$  nach Streichung der Triplets orthogonal sind:

$$\int_{\mathcal{M}} X_{p,q} \wedge *Y_{r,s} = \begin{cases} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{-g|_4 g|_6} X_{[\mu_1 \dots \mu_p][a_1 \dots a_q]} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_q b_q} Y_{[\nu_1 \dots \nu_p][b_1 \dots b_q]} & \text{für } p = r, q = s \\ \text{und } 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.18)$$

wobei für die Determinanten  $g|_4 = \det(g_{\mu\nu})$  und  $g|_6 = \det(g_{ab})$  gilt. Die Determinante  $\hat{G}$  der zehndimensionalen Metrik lässt sich nach der Tensorzerlegung als Produkt der Metriken der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  schreiben, da sie durch Streichen der Triplets in Blockdiagonalgestalt zerfällt:

$$(\hat{G}_{AB}) \longrightarrow \begin{pmatrix} (g_{ab}) & (g_{a\mu}) \\ (g_{\nu b}) & (g_{\mu\nu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_{ab}) & 0 \\ 0 & (g_{\mu\nu}) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Mit der Orthogonalitätsbedingung lässt sich eine der Summationen in Gleichung (3.15) ausführen und man erhält unter Berücksichtigung, dass  $d^{(4)} : \Lambda^{p,q} \rightarrow \Lambda^{p+1,q}$  und  $d^{(6)} : \Lambda^{p,q} \rightarrow \Lambda^{p,q+1}$  gilt:

$$S_{10} = \sum_{r=0}^p \int_{\mathcal{M}} \left( d^{(4)} F_{r,p-r} \wedge *d^{(4)} H_{r,p-r} + d^{(6)} F_{p-r,r} \wedge *d^{(4)} H_{r-1,p-r+1} \right. \\ \left. + d^{(4)} F_{r,p-r} \wedge *d^{(6)} H_{r+1,p-r-1} + d^{(6)} F_{p-r,r} \wedge *d^{(6)} H_{p-r,r} \right). \quad (3.20)$$

Dabei wird die Konvention verwendet, dass Summanden in denen Tensoren  $F_{r,s}$  mit  $r > p$  und oder  $s > p$  auftreten identisch Null sind.

Als Beispiel für die Tensorzerlegung wird nun die Tensorzerlegung des kinetischen Terms der 1-Form  $\hat{A}_1$  angegeben. Sie lautet nach Gleichung (3.20), und weil  $\langle, \rangle_{\mathcal{M}}$  ein symmetrisches Skalarprodukt ist:

$$\int_{\mathcal{M}_{1,9}} d\hat{A} \wedge *d\hat{A} = \int_{\mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6} \left( d^{(4)} A_{1,0} \wedge *d^{(4)} A_{1,0} \right. \\ \left. + d^{(4)} A_{0,1} \wedge *d^{(4)} A_{0,1} + 2d^{(4)} A_{0,1} \wedge *d^{(6)} A_{1,0} \right. \\ \left. + d^{(6)} A_{1,0} \wedge *d^{(6)} A_{1,0} + d^{(6)} A_{0,1} \wedge *d^{(6)} A_{0,1} \right). \quad (3.21)$$

Die  $(0,1)$ -Form  $A_{0,1} = A_a dx^a$  transformiert nach Tabelle 2.7 unter  $\mathbf{6}_{SU(4)} \rightarrow (\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  und lässt sich demnach bereits nach der Zerlegung in  $SU(4)$  Symmetrie zu Null setzen.

Die Tensorzerlegung für den kinetischen Term der  $\mathbf{8}_v$  Darstellung  $\hat{A}_1$  in  $SU(4)$  Symmetrie lautet somit:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_{1,9}} d\hat{A} \wedge *d\hat{A} &= \int_{\mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6} \left( d^{(4)}A_{1,0} \wedge *d^{(4)}A_{1,0} + d^{(6)}A_{1,0} \wedge *d^{(6)}A_{1,0} \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6} dx^{10} \sqrt{-g|_4 g|_6} \left( \partial_{[\mu} A_{\nu]} g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \partial_{[\sigma} A_{\rho]} + \partial_a A_\nu g^{ab} g^{\nu\rho} \partial_b A_\rho \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Stufe  $(r, s)$  der Formen  $F_{r,s}$  wird im Folgenden nur durch ihre Stufe bezüglich  $\mathcal{M}_{1,3}$  angegeben ( $F_{r,s} \stackrel{\wedge}{=} F_r$ ). Dies ist möglich, da die Stufe der Formen in zehn Dimensionen durch Index und Buchstaben gegeben ist, sodass Buchstabe und Index nach der Tensorzerlegung beide Stufen charakterisieren. Für die 3-Form  $\hat{C}_3$  auf  $\mathcal{M}_{1,9}$  lautet die Zerlegung mit Gleichung (3.9) beispielsweise

$$\hat{C}_3 \longrightarrow C_{3,0} + C_{2,1} + C_{1,2} + C_{0,3}. \quad (3.23)$$

Für die eingeführte Konvention lautet diese Zerlegung

$$\hat{C}_3 \longrightarrow C_3 + C_2 + C_1 + C_0, \quad (3.24)$$

mit  $C_3 = C_{3,0}$ ,  $C_2 = C_{2,1}$ ,  $C_1 = C_{1,2}$  und  $C_0 = C_{0,3}$ .

## 3.2 Tensorzerlegung der Typ IIA Wirkung

In diesem Abschnitt wird die Tensorzerlegung des masselosen, bosonischen Teils der Typ IIA Wirkung von der  $SO(8)$  zur  $SU(4) \times U(1)$  Symmetrie durchgeführt. Sechsdimensionale Darstellungen  $\mathbf{6}_{SU(4)}$ , die unter  $SU(3)$  Symmetrie in Triplets zerfallen, werden dabei bereits vor der Zerlegung in  $SU(3)$  Symmetrie zu Null gesetzt.

Die bosonische, masselose Typ IIA Wirkung lautet nach [13]:

$$S_{IIA} = S_{NS} + S_R + S_{CS}. \quad (3.25)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{NS} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{-\hat{G}} e^{-2\hat{\Phi}} \left( \hat{R} + 4\partial_M \Phi \partial^M \Phi - \frac{1}{2} \partial_{[M} \hat{B}_{NP]} \partial^{[M} \hat{B}^{NP]} \right), \\ S_R &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{-\hat{G}} \left( \partial_{[M} \hat{A}_{N]} \partial^{[M} \hat{A}^{N]} \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{[M} \hat{C}_{NPQ]} - \hat{A}_{[M} \partial_N \hat{B}_{PQ]}) (\partial^{[M} \hat{C}^{NPQ]} - \hat{A}^{[M} \partial^N \hat{B}^{PQ]}) \right), \\ S_{CS} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \hat{B}_2 \wedge (d\hat{C}_3) \wedge (d\hat{C}_3). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Gleichung (3.25) wird jetzt tensorzerlegt, dafür bietet es sich an, die Schreibweise zu wechseln und die Tensoren als Formen der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$  aufzufassen, um die Rechenregeln aus Abschnitt 3.1 anwenden zu können. Für das Skalarprodukt zweier  $p$ -Formen  $\hat{F}_{M_1 \dots M_p}$  und  $\hat{H}_{M_1 \dots M_p}$  einer Mannigfaltigkeit gilt Gleichung (3.6), vermöge der aus den Gleichungen (3.26)

$$\begin{aligned}
S_{NS} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( \hat{R} * 1 + 4d\hat{\Phi} \wedge *(d\hat{\Phi}) - \frac{1}{2}d\hat{B}_2 \wedge *(d\hat{B}_2) \right), \\
S_R &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( d\hat{A}_1 \wedge *(d\hat{A}_1) + (d\hat{C}_3 - \hat{A}_1 \wedge d\hat{B}_2) \wedge *(d\hat{C}_3 - \hat{A}_1 \wedge d\hat{B}_2) \right), \\
S_{CS} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \hat{B}_2 \wedge (d\hat{C}_3) \wedge (d\hat{C}_3). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

folgt. Die Tensorzerlegung lässt sich nun für alle Formen durchführen, wie sie in Abschnitt 3.1 behandelt wurde. Dort wird auch die Notation nach der Tensorzerlegung erklärt. Der Krümmungsskalar  $\hat{R}$  lässt sich allerdings nicht auf diese Weise tensorzerlegen. Er wird nun gesondert behandelt. Seine Definition lautet:

$$\hat{R} = \hat{G}^{AB} \left( \partial_C \Gamma^C_{AB} - \partial_B \Gamma^C_{AC} + \Gamma^C_{DC} \Gamma^D_{AB} - \Gamma^C_{DB} \Gamma^D_{AC} \right). \tag{3.28}$$

Die  $\Gamma^C_{AC}$  sind die Zusammenhangskoeffizienten der zehndimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9}$ . Nach Umstrukturierung der Indizes in  $SO(8) \supset U(1) \times SU(4)$  Struktur  $(A, B, \dots) \rightarrow (\alpha, \beta, \dots$  und  $a, b, \dots)$  zerfällt er in eine Summe:

$$\hat{R} = R|_4 + R_{gemischt} + R|_6, \tag{3.29}$$

wobei  $R|_4$  alle Terme bezeichnet, die aus den Zusammenhängen, die nur Lorentzindizes tragen, wie beispielsweise  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ , etc. gebildet werden und  $R|_6$  all jene, die ausschließlich durch  $\Gamma^a_{bc}$  gebildet werden. Sie sind die Krümmungsskalare der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  beziehungsweise  $\mathcal{M}_6$ . Allgemein treten jedoch auch Mischterme  $R_{gemischt}$  auf, wie beispielsweise durch Terme, in denen  $\Gamma^a_{\mu\nu}$  auftritt. Unter der Annahme verschwindender Torsion für die Terme  $R|_4$  und  $R_{gemischt}$  lassen sie sich nach dem Fundamentalsatz der Riemannschen Geometrie (A.7) durch die Metriken  $g_{\mu\nu}$  und  $g_{ab}$  ausdrücken.<sup>1</sup> Die Berechnungen für die Zerlegung des Krümmungsskalars befinden sich in Anhang A.1.

Die Tensorzerlegung der  $\mathcal{M}_{1,9}$  Formen ist durch Gleichung (3.20) gegeben, mit ihr folgt

---

<sup>1</sup>Die Metrik Anteile  $g^{\mu a}$  transformieren unter  $\mathbf{6}_{SU(4)} \rightarrow (\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  Darstellungen und werden daher nicht berücksichtigt.

für die Wirkung (3.27) nach der Tensorzerlegung:

$$\begin{aligned}
S_{NS} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} e^{-2\Phi} \hat{R} * 1 \\
&+ \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int e^{-2\Phi} \left( + 2d^{(4)}\phi \wedge *(d^{(4)}\phi) - \frac{1}{4}d^{(4)}B_2 \wedge *(d^{(4)}B_2) - \frac{1}{4}d^{(4)}B_0 \wedge *(d^{(4)}B_0) \right. \\
&\left. + 2d^{(6)}\Phi \wedge *(d^{(6)}\Phi) - \frac{1}{4}d^{(6)}B_2 \wedge *(d^{(6)}B_2) - \frac{1}{4}d^{(6)}B_0 \wedge *(d^{(6)}B_0) \right), \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_R &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \left( d^{(4)}A_1 \wedge *(d^{(4)}A_1) + d^{(4)}C_3 \wedge *(d^{(4)}C_3) + d^{(4)}C_1 \wedge *(d^{(4)}C_1) \right. \\
&+ d^{(4)}C_0 \wedge *(d^{(4)}C_0) + A_1 \wedge d^{(4)}B_2 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_2) + A_1 \wedge d^{(4)}B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) \\
&+ 2d^{(4)}C_3 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_2) + 2d^{(4)}C_1 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) \\
&+ d^{(6)}A_1 \wedge *(d^{(6)}A_1) + d^{(6)}C_3 \wedge *(d^{(6)}C_3) + d^{(6)}C_1 \wedge *(d^{(6)}C_1) \\
&+ d^{(6)}C_0 \wedge *(d^{(6)}C_0) + 2d^{(4)}C_0 \wedge *(d^{(6)}C_1) + A_1 \wedge d^{(6)}B_2 \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_2) \\
&+ A_1 \wedge d^{(6)}B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_0) + 2(d^{(4)}C_0 + d^{(6)}C_1) \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_0) \\
&\left. + 2d^{(6)}C_3 \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_2) \right), \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{CS} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( B_2 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(4)}C_0 + B_0 \wedge d^{(4)}C_1 \wedge d^{(4)}C_1 \right. \\
&+ B_2 \wedge d^{(6)}C_1 \wedge d^{(6)}C_1 + B_0 \wedge d^{(6)}C_3 \wedge d^{(6)}C_1 + B_2 \wedge d^{(4)}C_1 \wedge d^{(6)}C_0 \\
&\left. + B_2 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(6)}C_1 + 2B_0 \wedge d^{(4)}C_3 \wedge d^{(6)}C_0 + B_0 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(6)}C_3 \right). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Das Hodge-Dual  $*$  steht, wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, von nun an als Abkürzung für  $* = *^{(6)}*^{(4)}$ .

Für nachfolgende Rechnungen bietet es sich an, die Wirkung auf eine Standard-Form zu bringen, die sich dadurch auszeichnet, dass der Krümmungsskalar  $R|_4$  der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,3}$  ohne Dilaton-Vorfaktor auftritt. Das Bezugssystem, in dem diese Bedingung realisiert wird heißt „Einstein frame“. Die notwendigen Reskalierungen und Umeichungen der Felder, um diese Form zu erhalten lauten:

$$\Phi^{(4)} := \Phi - \frac{1}{4} \ln(\det g_{ab}), \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu}^{(4)} := e^{-2\Phi^{(4)}} g_{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

Die Reskalierung der Metrik  $g_{\mu\nu}$  nennt sich Weyl-Reskalierung. Die Berechnung der durch die Redefinitionen (3.33) auftretenden zusätzlichen Terme des Krümmungsskalars  $\hat{R}$  und des kinetischen Dilaton-Terms befinden sich in Anhang A.1.

Um die Reskalierung für die Terme der Felder  $A_p$ ,  $B_p$  und  $C_p$  durchzuführen, ist es sinnvoll Gleichung (3.18) zu verwenden. Mit ihr lässt sich die Reskalierung für die basisfreie Schreibweise berechnen, denn wegen

$$\begin{aligned} & \int F_{[\mu_1 \dots \mu_p][a_1 \dots a_q]} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_q b_q} H_{[\nu_1 \dots \nu_p][b_1 \dots b_q]} \sqrt{-g^{(4)} g^{(6)}} d^{10}x \xrightarrow{\text{reskal}} \\ & \int e^{2(2-p)\Phi^{(4)}} F_{[\mu_1 \dots \mu_p][a_1 \dots a_q]} g^{(4)\mu_1 \nu_1} \dots g^{(4)\mu_p \nu_p} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_q b_q} H_{[\nu_1 \dots \nu_p][b_1 \dots b_q]} \sqrt{-g^{(4)} g^{(6)}} d^{10}x \end{aligned} \quad (3.34)$$

folgt auch

$$\int F_{p,q} \wedge *H_{p,q} \xrightarrow{\text{reskal}} \int e^{2(2-p)\Phi^{(4)}} F_{p,q} \wedge *H_{p,q}. \quad (3.35)$$

Da das Hodge-Dual der Metrik entspricht, entspricht der reskalierten Metrik auch ein reskaliertes Hodge-Dual. Um die Notation jedoch nicht unnötig unübersichtlich werden zu lassen, wird auf die Kenntlichmachung des reskalierten Hodge-Duals verzichtet, und Gleichungen der Form (3.35) sind immer im Sinne von Gleichung (3.34) zu verstehen. Bei allen Termen der Felder  $A_p$ ,  $B_p$  und  $C_p$  tritt durch die Reskalierung also nach Gleichung (3.35) nur ein Dilaton und Stufen abhängiger Vorfaktor  $e^{2(2-p)\Phi^{(4)}}$  auf.

Die Wirkung (3.30) bis (3.32) lautet mit den Redefinitionen (3.33) mit (3.35) und den Rechnungen für  $\hat{R}$  und  $\hat{\Phi}$  aus Anhang A.1:

$$\begin{aligned} S_{NS} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ R^{(4)} + R^{(6)} - 2\partial^\sigma \Phi^{(4)} \partial_\sigma \Phi^{(4)} - \frac{1}{4} g^{mn} g^{pq} \partial^\sigma g_{np} \partial_\sigma g_{mq} \right] \\ &+ \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int \left( -\frac{1}{4} e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)} B_2 \wedge *(d^{(4)} B_2) - \frac{1}{4} d^{(4)} B_0 \wedge *(d^{(4)} B_0) \right) \\ &+ \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ e^{-2\Phi^{(4)}} \left( -\frac{1}{4} g^{(4)\mu\alpha} g^{(4)\nu\beta} \partial^s g_{(4)\alpha\beta} \partial_s g_{\mu\nu}^{(4)} \right. \right. \\ &+ \frac{1}{4} g^{(4)\alpha\beta} g^{(4)\mu\nu} \partial^s g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_s g_{\alpha\beta}^{(4)} - 2g^{mn} \partial^s g_{mn} \partial_s \Phi^{(4)} - 16\partial^s \Phi^{(4)} \partial_s \Phi^{(4)} \\ &\left. \left. - g^{(4)\alpha\beta} \partial^s \Phi^{(4)} \partial_s g_{\alpha\beta}^{(4)} - \frac{1}{2} g^{(4)\mu\nu} g^{ab} \partial^s g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_s g_{ab} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int \left( -\frac{1}{4} e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(6)} B_2 \wedge *(d^{(6)} B_2) - \frac{1}{4} e^{2\Phi^{(4)}} d^{(6)} B_0 \wedge *(d^{(6)} B_0) \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
S_R = & -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \left( d^{(4)}A_1 \wedge *(d^{(4)}A_1) + e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_3 \wedge *(d^{(4)}C_3) + d^{(4)}C_1 \wedge *(d^{(4)}C_1) \right. \\
& + e^{-4\Phi^{(4)}} A_1 \wedge d^{(4)}B_2 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_2) + A_1 \wedge d^{(4)}B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) \\
& + 2e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_3 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_2) + 2d^{(4)}C_1 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) \\
& \left. + e^{2\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_0 \wedge *(d^{(4)}C_0) \right. \\
& + e^{2\Phi^{(4)}} d^{(6)}A_1 \wedge *(d^{(6)}A_1) + e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(6)}C_3 \wedge *(d^{(6)}C_3) + e^{2\Phi^{(4)}} d^{(6)}C_1 \wedge *(d^{(6)}C_1) \\
& + e^{4\Phi^{(4)}} d^{(6)}C_0 \wedge *(d^{(6)}C_0) + e^{-2\Phi^{(4)}} A_1 \wedge d^{(6)}B_2 \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_2) \\
& + e^{2\Phi^{(4)}} A_1 \wedge d^{(6)}B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_0) + 2e^{2\Phi^{(4)}} (d^{(4)}C_0 + d^{(6)}C_1) \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_0) \\
& \left. + 2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(6)}C_3 \wedge *(A_1 \wedge d^{(6)}B_2) + 2e^{2\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_0 \wedge *(d^{(6)}C_1) \right), \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{CS} = & -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( B_2 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(4)}C_0 + B_0 \wedge d^{(4)}C_1 \wedge d^{(4)}C_1 \right. \\
& + B_2 \wedge d^{(6)}C_1 \wedge d^{(6)}C_1 + B_0 \wedge d^{(6)}C_3 \wedge d^{(6)}C_1 + B_2 \wedge d^{(4)}C_1 \wedge d^{(6)}C_0 \\
& \left. + B_2 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(6)}C_1 + 2B_0 \wedge d^{(4)}C_3 \wedge d^{(6)}C_0 + B_0 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(6)}C_3 \right). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Die gemischte Schreibweise des Skalarproduktes (3.18) der Mannigfaltigkeit in diesen Ausdrücken mag umständlich erscheinen, ist jedoch zweckmäßig, da zum einen die Metrik ein symmetrischer Tensor und damit keine Form ist, wodurch sich die basisfreie Schreibweise nicht verwenden lässt, zum anderen aber die Tensorzerlegung der antisymmetrischen Tensoren ohne Basis übersichtlicher und kürzer ist.

Die Terme wurden so geordnet, dass Terme, in denen ausschließlich  $d^{(4)}$  auftritt jeweils an vorderster Stelle stehen. Dies sind die Terme, die im Folgenden betrachtet werden, da durch sie die Kinematik der physikalischen Raumzeit  $\mathcal{M}_{1,3}$  bestimmt wird. Die Anderen werden von nun an weggelassen und durch Punkte angedeutet.

Die Terme der Wirkung (3.36) bis (3.38), die Felder der Helizität 1 beinhalten, werden in folgendem Kapitel zusammengefasst und die Matrix der Eichkopplungen wird bestimmt. Anschließend wird die Matrix der skalaren Kopplungen der Felder des universellen Hypermultipletts, bestimmt. Dies sind die Felder mit Helizität 0, die als Singlet unter  $SU(3)$  transformieren. Die Wirkung des universellen Hypermultipletts wird dabei in einer Form geschrieben, in der [15] folgend bewiesen werden kann, dass der Moduli Raum der Felder des universellen Hypermultipletts eine quaternionische Kählermannigfaltigkeit ist.

### 3.3 Bestimmung der Matrix der Eichkopplungen

Ziel dieses Abschnitts ist es, die kinetischen Terme der Helizität 1 Felder  $d^{(4)}C_1$  und  $d^{(4)}A_1$  in einem Feldstärkevektor  $F$  zusammenzufassen. Dazu werden beide Feldstärken in ihre

$SU(3)$  Struktur zerlegt.  $d^{(4)}C_1$  transformiert nach Tabelle 2.7 unter  $\mathbf{15}_{SU(4)}$  und kann damit durch einen 15 dimensionalen Vektor dargestellt werden. Dieser Vektor zerfällt unter  $SU(3)$  Symmetrie ebenfalls nach Tabelle 2.7 in  $(\mathbf{1} + \mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}} + \mathbf{8})_{SU(3)}$  Darstellungen. Beide dreidimensionalen Darstellungen werden nach Voraussetzung herausprojiziert. Es bleiben neun Vektorkomponenten übrig. Diese werden mit der Feldstärke  $d^{(4)}A_1$ , die unter  $\mathbf{1}_{SU(3)}$  transformiert und damit einkomponentig ist, zusammengefasst. Die zehn Feldstärken werden die Komponenten des Feldstärkevektors  $F$ . In dieser Notation wird sich die Kopplung der einzelnen Felder als Matrix  $\eta$  darstellen lassen, die hier bestimmt werden soll.

Mit den Feldredefinitionen

$$\tilde{C}_1 := C_1 - B_0 \wedge A_1, \quad \text{und} \quad \tilde{A}_1 := A_1 \quad (3.39)$$

gilt:

$$\begin{aligned} S_{2(R)} : &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \begin{pmatrix} \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \\ \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu][ab]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + (B)^2 & B^{cd} \\ B^{ab} & g^{ac} g^{bd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} \\ \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu]}_{[cd]} \end{pmatrix} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{(4)}C_1 \wedge *(d^{(4)}C_1) + 2d^{(4)}C_1 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) \\ &\quad + A_1 \wedge d^{(4)}B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) + d^{(4)}A_1 \wedge *(d^{(4)}A_1). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Die Rechnung hierzu befindet sich in Anhang A.2. Alle Terme aus  $S_R$ , die die zu betrachtenden Felder enthalten, lassen sich mit (3.40) zusammenfassen, wie der Vergleich mit (3.37) zeigt. Dort lassen die Terme sich daran erkennen, dass sie keinen Dilaton Vorfaktor tragen.

Um die  $SU(3)$  Symmetrie aus der  $SU(4)$  Symmetrie zu erhalten und die  $(\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  Darstellungen zu streichen, müssen die Tensorfelder  $B_0$  und  $C_1$  tensorzerlegt und die daraus entstehenden Formen ihren Darstellungen zugeordnet werden. Aus Tabelle 2.7 lässt sich entnehmen, dass  $B_0$  und  $C_1$  unter  $(\mathbf{1} + \mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}} + \mathbf{8})_{SU(3)}$  Darstellungen transformieren. Die Formen zerfallen demnach in einen für diese Arbeit interessanten  $(\mathbf{1} + \mathbf{8})_{SU(3)}$  Teil und einen zu streichenden  $(\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  Teil. Offensichtlich lässt sich durch das Verhalten unter komplexer Konjugation der Felder die Darstellung zuordnen, da die dreidimensionalen Darstellungen komplex konjugiert zueinander sind. Dies wird in der komplexen Basis ersichtlich, denn dort gilt:

$$B_0 = B_{ab} dx^a \wedge dx^b = B_{\bar{i}j} dz^{\bar{i}} \wedge dz^j + B_{\bar{i}\bar{j}} dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}} + B_{ij} dz^i \wedge dz^j. \quad (3.41)$$

Der erste Summand verändert sich unter komplexer Konjugation nicht. Die letzten beiden sind komplex konjugiert zueinander. Die Dimensionen der Vektorräume  $\Lambda^{1,1}T\mathcal{M}_6$ ,  $\Lambda^{2,0}T\mathcal{M}_6$  und  $\Lambda^{0,2}T\mathcal{M}_6$ , die durch die Basen  $\{dz^{\bar{i}} \wedge dz^j\}$ ,  $\{dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}}\}$  und  $\{dz^i \wedge dz^j\}$  aufgespannt werden sind dementsprechend neun-, drei- und dreidimensional, wie man es ihnen leicht durch Abzählen der möglichen antisymmetrischen Indexkombinationen ansieht. Das bedeutet, dass  $B_{\bar{i}\bar{j}}$  und  $B_{ij}$  zu den  $(\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  Darstellungen gehören und identisch Null



sind. Analog gilt für  $C_1$ , dass die Tensorkoeffizienten  $C_{\mu ij}$  und  $C_{\mu \bar{i} \bar{j}}$  verschwinden und der Koeffizient  $C_{\mu \bar{i} j}$  übrig bleibt. Die Metrik  $g_{ab}$ , die unter  $(\mathbf{20} + \mathbf{1})_{SU(4)}$  transformiert, lässt sich ebenfalls in der komplexen Basis darstellen, wobei  $g_{ij}$  der  $(\mathbf{6})_{SU(3)}$ ,  $g_{\bar{i} \bar{j}}$  der  $(\overline{\mathbf{6}})_{SU(3)}$  und  $g_{i \bar{j}}$  der  $(\mathbf{1} + \mathbf{8})_{SU(3)}$  Darstellung entspricht. Dies lässt sich wie bei der Bestimmung der zu den Formen gehörigen Darstellungen durch das Verhalten unter komplexer Konjugation und Abzählen der möglichen, dieses mal symmetrischen, Indexkombinationen ermitteln. Da  $g_{ab}$  ein symmetrischer Tensor ist, sind die komplex konjugierten Darstellungen  $6 + 6$  dimensional, statt wie bei den antisymmetrischen Tensoren  $3 + 3$  dimensional und werden nicht herausprojiziert. Unter  $SU(3)$  Symmetrie folgt mit dem eben Gesagten für (3.40):

$$S_{2(R)} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{-g^{(4)}g^{(6)}} \begin{pmatrix} \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \\ \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu][i\bar{j}]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + (B)^2 & B_{m\bar{n}}(g^{mk}g^{\bar{n}l} + g^{i\bar{l}}g^{k\bar{j}}) \\ B_{m\bar{n}}(g^{im}g^{\bar{j}n} + g^{i\bar{l}}g^{k\bar{j}}) & g^{ik}g^{\bar{j}l} + g^{i\bar{l}}g^{k\bar{j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} \\ \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu]}_{[\bar{k}\bar{l}]} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Für eine kompaktere Schreibweise ist es zweckmäßig folgende Definition einzuführen:

$$K^{i\bar{j}k\bar{l}} := g^{ik}g^{\bar{j}l} + g^{i\bar{l}}g^{k\bar{j}}. \quad (3.43)$$

Da die vierdimensionale Struktur der Lagrangedichte von Interesse ist, ist es sinnvoll die Felder auch aus vierdimensionaler Sicht, wie bereits Anfangs des Abschnitts angekündigt, zu interpretieren. Aus dieser Sicht stehen in der Lagrangedichte zehn Feldstärken, die durch eine Metrik koppeln. Das ist zum einen die Feldstärke  $\partial_{[\mu} A_{\nu]}$  und sind zum Anderen die  $8 + 1$  Feldstärken  $\partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu][i\bar{j}]}$ . Diese Interpretation ist zulässig, da die Indexstruktur in  $\mu$  und  $\nu$  identisch ist, was der identischen Helizität entspricht. Die Notation lässt sich dieser Gegebenheit ebenfalls anpassen, indem ein Index definiert wird, der über alle zehn Felder läuft. Dieser lässt sich explizit wie folgt konstruieren: Die antisymmetrischen Tensoren werden in der koordinatenunabhängigen Matrizenbasis<sup>2</sup>  $\{(\Sigma_{\bar{i}j}^{\bar{I}})\}_{\bar{I}=1,\dots,9}$  entwickelt:<sup>3</sup>

$$\partial_{[\mu} C_{\nu]\bar{i}j} = \partial_{[\mu} C_{\nu]\bar{I}} \Sigma_{\bar{i}j}^{\bar{I}} \quad \text{und} \quad B_{\bar{i}j} = B_{\bar{I}} \Sigma_{\bar{i}j}^{\bar{I}}. \quad (3.44)$$

<sup>2</sup>Für die Formen bedeutet dies eine Entwicklung in der Basis  $E^{\bar{I}} := \Sigma_{\bar{i}j}^{\bar{I}} dz^{\bar{i}} \wedge dz^j$ , das bedeutet beispielsweise  $B_{\bar{i}j} dz^{\bar{i}} \wedge dz^j \rightarrow B_{\bar{I}} E^{\bar{I}}$ .

<sup>3</sup>Dies ist der Teil ohne  $\mathbf{3} + \overline{\mathbf{3}}$  Anteil der Basis der antisymmetrischen Matrizen. Wie dieser Anteil aussieht hängt von der expliziten Wahl der Basis ab.

Nun lässt sich Gleichung (3.42) zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
S_{2(R)} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}g^{(6)}} \begin{pmatrix} \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \\ \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu]\tilde{I}} \Sigma_{\tilde{K}\tilde{L}}^{\tilde{I}} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 + (B)^2 & B_{\tilde{K}} \Sigma_{\tilde{I}\tilde{J}}^{\tilde{K}} K^{i\tilde{j}m\tilde{n}} \\ B_{\tilde{K}} \Sigma_{\tilde{I}\tilde{J}}^{\tilde{K}} K^{i\tilde{j}k\tilde{l}} & K^{k\tilde{l}m\tilde{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} \\ \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu]\tilde{J}} \Sigma_{\tilde{M}\tilde{N}}^{\tilde{J}} \end{pmatrix} \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}g^{(6)}} \begin{pmatrix} \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \\ \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu]\tilde{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + (B)^2 & B_{\tilde{K}} K^{\tilde{K}\tilde{J}} \\ B_{\tilde{K}} K^{\tilde{K}\tilde{I}} & K^{\tilde{I}\tilde{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} \\ \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu]\tilde{J}} \end{pmatrix}, \tag{3.45}
\end{aligned}$$

dabei gilt für  $K^{\tilde{I}\tilde{J}}$  die Definition:

$$K^{\tilde{I}\tilde{J}} := \Sigma_{\tilde{I}\tilde{J}}^{\tilde{I}} K^{i\tilde{j}k\tilde{l}} \Sigma_{\tilde{k}\tilde{l}}^{\tilde{J}}. \tag{3.46}$$

Da  $K^{i\tilde{j}k\tilde{l}}$  symmetrisch unter Vertauschung des ersten mit dem letzten Indexpaar ist, das heißt dass  $K^{i\tilde{j}k\tilde{l}} = K^{k\tilde{l}i\tilde{j}}$  gilt, ist auch  $K^{\tilde{I}\tilde{J}}$  symmetrisch in den Indizes. Die Matrix der Eichkopplungen ist somit eine symmetrische  $10 \times 10$  Matrix  $\eta$  und die Feldstärken lassen sich in einem zehndimensionalen Feldstärkevektor  $F$  zusammenfassen. Die Definitionen beider Objekte lauten

$$(F_{\mu\nu I}) := \begin{pmatrix} \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \\ \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu]\tilde{I}} \end{pmatrix}, \quad (\eta^{IJ}) := \begin{pmatrix} 1 + (B)^2 & B_{\tilde{K}} K^{\tilde{K}\tilde{J}} \\ B_{\tilde{K}} K^{\tilde{K}\tilde{I}} & K^{\tilde{I}\tilde{J}} \end{pmatrix}, \quad I, J = 0, \dots, 9. \tag{3.47}$$

Mit den Definitionen (3.47) folgt für (3.45):

$$S_{2(R)} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}g^{(6)}} F_{\mu\nu I} \eta^{IJ} F_J^{\mu\nu}. \tag{3.48}$$

Die Feldredefinitionen (3.39) werden jetzt in den restlichen Termen der Wirkung durchgeführt. Dies betrifft ausschließlich den zweiten Term in  $S_{CS}$ , der lautet:

$$\begin{aligned}
S_{2(CS)} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} B_0 \wedge d^{(4)}C_1 \wedge d^{(4)}C_1 \\
&= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} B_0 \wedge \left( d^{(4)}\tilde{C}_1 + \frac{1}{2} B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{C}_1 \wedge d^{(4)}\tilde{A}_1 + \frac{1}{12} B_0 \wedge B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{A}_1 \wedge d^{(4)}\tilde{A}_1 \right) \\
&= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} d^{(4)}\tilde{A}_1 \\ d^{(4)}\tilde{C}_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{12} B_0 \wedge B_0 \wedge B_0 & \frac{1}{4} B_0 \wedge B_0 \\ \frac{1}{4} B_0 \wedge B_0 & B_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d^{(4)}\tilde{A}_1 \\ d^{(4)}\tilde{C}_1 \end{pmatrix}. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

In Analogie zu den Rechnungen für  $S_{2(R)}$  wird auch  $S_{2(CS)}$  in einer Basis geschrieben. Die Vorgehensweise wird exemplarisch an dem Term  $d^{(4)}\tilde{C}_1 \wedge B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{C}_1$  durchgeführt:

$$\int_{\mathcal{M}} d^{(4)}\tilde{C}_1 \wedge B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{C}_1 = \int_{\mathcal{M}} B_{ab} \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu]cd} \partial_{[\rho} \tilde{C}_{\sigma]ef} dx^\mu \wedge \dots \wedge dx^\sigma \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^f. \quad (3.50)$$

Durch die Dualisierung mit  $*^{(6)}*^{(4)}$  erhält man eine Gleichung der Form (3.42), in der explizit das invariante zehndimensionale Volumenelement auftritt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^{(4)}\tilde{C}_1 \wedge B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{C}_1 &= \int_{\mathcal{M}} *^{(6)} *^{(4)} (d^{(4)}\tilde{C}_1 \wedge B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{C}_1) \wedge *^{(6)} *^{(4)} 1 \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{-g^{(4)}g^{(6)}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abcdef} B_{ab} \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu]cd} \partial_{[\rho} \tilde{C}_{\sigma]ef}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Jetzt lassen sich die  $(\mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}})_{SU(3)}$  Darstellungen streichen und die Entwicklungen der Tensoren in der Basis  $\{(\Sigma_{\tilde{i}\tilde{j}}^{\tilde{I}})\}_{\tilde{I}=1,\dots,9}$  wie gehabt durchführen:

$$\int_{\mathcal{M}} d^{(4)}\tilde{C}_1 \wedge B_0 \wedge d^{(4)}\tilde{C}_1 = \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}g^{(6)}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{k}} B_{\tilde{I}} \Sigma_{\tilde{i}\tilde{i}}^{\tilde{I}} \Sigma_{\tilde{j}\tilde{j}}^{\tilde{J}} \Sigma_{\tilde{k}\tilde{k}}^{\tilde{K}} \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu]\tilde{j}} \partial_{[\rho} \tilde{C}_{\sigma]\tilde{K}}. \quad (3.52)$$

Dies lässt sich für jeden Term in Gleichung (3.49) durchführen, und es folgt:

$$S_{2(CS)} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}g^{(6)}} \epsilon^{\mu\nu\omega\sigma} F_{I\mu\nu} F_{J\omega\sigma} \rho^{IJ}. \quad (3.53)$$

Der Feldstärkevektor  $F$  ist derselbe, wie er in Gleichung (3.47) bereits definiert wurde und  $\rho$  eine  $10 \times 10$  Matrix mit

$$(\rho^{IJ}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \epsilon^{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}} B_{\tilde{I}} B_{\tilde{J}} B_{\tilde{K}} & \frac{1}{4} \epsilon^{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}} B_{\tilde{J}} B_{\tilde{K}} \\ \frac{1}{4} \epsilon^{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}} B_{\tilde{I}} B_{\tilde{K}} & \epsilon^{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}} B_{\tilde{K}} \end{pmatrix}, \quad I, J, K = 0, \dots, 9, \quad (3.54)$$

dabei gilt

$$\epsilon^{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}} = \epsilon^{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{k}} \Sigma_{\tilde{i}\tilde{i}}^{\tilde{I}} \Sigma_{\tilde{j}\tilde{j}}^{\tilde{J}} \Sigma_{\tilde{k}\tilde{k}}^{\tilde{K}}. \quad (3.55)$$

$\epsilon^{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}$  ist ebenfalls antisymmetrisch in den Indizes. Die Matrix der Eichkopplungen wurde damit bestimmt.

### 3.4 Quaternionische Struktur des universellen Hypermultipletts

In diesem Kapitel wird die Metrik des universellen Hypermultipletts aus Tabelle 2.10 bestimmt. Die Wirkung wird in einer Form angegeben, in der der Beweis, dass der Moduli Raum der Felder des universellen Hypermultipletts eine quaternionische Kählermannigfaltigkeit ist, analog zu dem in [15] angegebenen Beweis, geführt werden kann. Dafür werden zunächst die entsprechenden  $SU(3)$  Darstellungen zugeordnet. Dann werden die Felder so umgeschrieben, dass die Kopplungsmetrik koordinatenunabhängig und insbesondere von der Form (B.1) ist.

Das universelle Hypermultiplett besteht nach Tabelle 2.10 aus den vier unter der  $\mathbf{1}_{SU(3)}$  Darstellung transformierenden Spin 0 Felder  $\Phi^{(4)}$ ,  $a$ ,  $C$  und  $\bar{C}$ . Dabei ist  $a$  das zu  $B_2$  duale Skalarfeld<sup>4</sup> und  $C$  und  $\bar{C}$  die  $\mathbf{1}_{SU(3)}$  beziehungsweise  $\bar{\mathbf{1}}_{SU(3)}$  Darstellungen, in die die  $(\mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})_{SU(4)}$  Darstellung  $C_0$  unter  $SU(3)$  Symmetrie zerfällt. Die Tensorzerlegung in die  $SU(3)$  Struktur für  $C_0$  lautet

$$C_0 = C + \bar{C} + \mathcal{C} + \bar{\mathcal{C}}, \quad (3.56)$$

mit:

$$\begin{aligned} C &= C_{ijk} dz^i \wedge dz^j \wedge dz^k, \\ \bar{C} &= C_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^{\bar{k}}, \\ \mathcal{C} &= C_{ij\bar{k}} dz^i \wedge dz^j \wedge dz^{\bar{k}}, \\ \bar{\mathcal{C}} &= C_{\bar{i}j\bar{k}} dz^{\bar{i}} \wedge dz^j \wedge dz^{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Das Abzählen der Basisvektoren liefert, dass  $C$  unter  $\mathbf{1}_{SU(3)}$ ,  $\bar{C}$  unter  $\bar{\mathbf{1}}_{SU(3)}$ ,  $\mathcal{C}$  unter  $(\mathbf{3} + \mathbf{6})_{SU(3)}$  und  $\bar{\mathcal{C}}$  unter  $(\bar{\mathbf{3}} + \bar{\mathbf{6}})_{SU(3)}$  transformiert. Damit sind die relevanten Felder, für die die quaternionische Struktur gezeigt werden soll, identifiziert. Der relevante Teil der Wirkung (3.36)-(3.38) ist also bekannt und lautet:

$$\begin{aligned} S_Q &:= \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( -d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge *(d^{(4)}\Phi^{(4)}) - \frac{1}{4} e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}B_2 \wedge *(d^{(4)}B_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} e^{2\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_0 \wedge *(d^{(4)}C_0) - \frac{1}{4} B_2 \wedge d^{(4)}C_0 \wedge d^{(4)}C_0 \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Zerlegung in die  $SU(3)$  Struktur aus Gleichung (3.56) wird in (3.58) eingesetzt. Die Darstellungen  $\mathcal{C}$  und  $\bar{\mathcal{C}}$  werden herausprojiziert, das heißt  $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} = 0$ .

Damit alle Formen im selben Raum, dem Raum der (1,6)-Formen, liegen, wird  $B_2$  dualisiert. Das bedeutet, dass die Gegebenheit ausgenutzt wird, dass ein Vektorraum und sein Dualraum isomorph sind. In diesem Fall sind dies  $\Lambda^3(T\mathcal{M}_{1,9})$  und  $\Lambda^7(T\mathcal{M}_{1,9})$ . Dadurch wird die (3,0)-Form  $d^{(4)}B_2$  in der Lagrangedichte durch eine gleichberechtigte (1,6)-Form

<sup>4</sup>Die Dualisierung von  $B_2$  erfolgt in Anhang A.3.

ersetzt. Die Rechnung wird in Anhang A.3 ausgeführt. Das duale bezüglich  $\mathcal{M}_{1,3}$  skalare Feld wird mit  $a$  bezeichnet. Dieses Vorgehen ist notwendig, da für eine quaternionische Struktur symplektische Abbildungen definiert sein müssen, die die quaternionischen Koordinaten aufeinander abbilden. Dafür müssen die Koordinaten, das heißt die Formen, im selben Raum liegen. Mit Anhang A.3 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 S_Q &= \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( -d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge *(d^{(4)}\Phi^{(4)}) - \frac{1}{2}e^{2\Phi^{(4)}} d^{(4)}C \wedge *(d^{(4)}\bar{C}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}e^{4\Phi^{(4)}} (d^{(4)}a - \frac{1}{2}(C \wedge d^{(4)}\bar{C} + \bar{C} \wedge d^{(4)}C)) \right. \\
 &\quad \left. \wedge *(d^{(4)}a - \frac{1}{2}(C \wedge d^{(4)}\bar{C} + \bar{C} \wedge d^{(4)}C)) \right). \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Um die Rechnungen zu vereinfachen werden zwei zueinander konjugierte Basisvektoren  $\epsilon$  und  $\bar{\epsilon}$  definiert:

$$\epsilon := \epsilon_{ijk} dz^i \wedge dz^j \wedge dz^k, \quad \bar{\epsilon} := \epsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^{\bar{k}}. \tag{3.60}$$

Die betrachteten Formen lassen sich in dieser Basis entwickeln. Da es sich ausschließlich um eindimensionale Darstellungen handelt, liefert die Entwicklung jeweils nur einen Entwicklungskoeffizienten, im Gegensatz zur Verallgemeinerung in Anhang A.5. Sie werden durch

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ijk\bar{i}\bar{j}\bar{k}}^{(4)} dz^i \wedge dz^j \wedge dz^k \wedge dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^{\bar{k}} &= \Phi^{(4)} \epsilon \wedge \bar{\epsilon}, \\
 a_{ijk\bar{i}\bar{j}\bar{k}} dz^i \wedge dz^j \wedge dz^k \wedge dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^{\bar{k}} &= a \epsilon \wedge \bar{\epsilon}, \\
 C_{ijk} dz^i \wedge dz^j \wedge dz^k \wedge &= C \epsilon, \\
 C_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} dz^{\bar{i}} \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^{\bar{k}} &= \bar{C} \bar{\epsilon} \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

definiert. Um die Bezeichnungen nicht zu umständlich werden zu lassen, tragen die Entwicklungskoeffizienten denselben Buchstaben, wie die zugehörigen Formen. Dies sollte nicht zu Verwirrungen führen, da im Folgenden ausschließlich die Entwicklungskoeffizienten auftreten. Die Definitionen (3.61) werden in (3.59) eingesetzt, woraus

$$\begin{aligned}
 S_Q &= \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( -d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \wedge *(d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}) - \frac{1}{2}e^{2\Phi^{(4)}} d^{(4)}C \wedge \epsilon \wedge *(d^{(4)}\bar{C} \wedge \bar{\epsilon}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}e^{4\Phi^{(4)}} (id^{(4)}a - \frac{1}{2}(-Cd^{(4)}\bar{C} + \bar{C}d^{(4)}C)) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \wedge \right. \\
 &\quad \left. *(id^{(4)}a - \frac{1}{2}(-Cd^{(4)}\bar{C} + \bar{C}d^{(4)}C) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}) \right) \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

folgt. Dabei wurde berücksichtigt, dass relative Vorzeichen beachtet werden müssen, die auftreten, wenn Basisvektoren der Tangentialräume durchkommutiert werden, wie beispielsweise bei  $C \epsilon \wedge d^{(4)}\bar{C} \wedge \bar{\epsilon} = -Cd^{(4)}\bar{C} \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}$ .

Nun werden vier Formen definiert, in der die Metrik sich erheblich vereinfacht:

$$\begin{aligned}
\tilde{v} &:= \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C} \right) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}, \\
\bar{\tilde{v}} &= -\frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} - ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - \bar{C}d^{(4)}C \right) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}, \\
\tilde{u} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi^{(4)}} d^{(4)}C \wedge \epsilon, \\
\bar{\tilde{u}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi^{(4)}} d^{(4)}\bar{C} \wedge \bar{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Dadurch vereinfacht sich (3.62) zu

$$S_Q = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( \tilde{v} \wedge *(\bar{\tilde{v}}) + \tilde{u} \wedge *(\bar{\tilde{u}}) \right) \tag{3.64}$$

(siehe Anhang A.4). Dies können jedoch noch nicht die gesuchten quaternionischen Koordinaten sein, weil sie in unterschiedlichen Vektorräumen definiert sind und keine Addition erklärt ist, denn es ist  $\tilde{v} \in \Lambda^{1,3,3}$ , aber  $\tilde{u} \in \Lambda^{1,3,0}$ .<sup>5</sup> Zur Behebung dieses Problems wird  $\tilde{u}$  mit  $\bar{\epsilon}$  in  $\Lambda^{1,3,3}$  abgebildet. Die Abbildung lautet  $\tilde{u} \rightarrow \tilde{u} \wedge \bar{\epsilon}$ . Danach werden alle Formen mit  $*^{(6)}$  dualisiert. Dadurch werden vier  $(1, 0, 0)$ -Formen definiert:

$$\begin{aligned}
v &= *^{(6)}\tilde{v} = \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C} \right), \\
\bar{v} &= -*^{(6)}\bar{\tilde{v}} = \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} - ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - \bar{C}d^{(4)}C \right), \\
u &= *^{(6)}(\tilde{u} \wedge \bar{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi^{(4)}} d^{(4)}C, \\
\bar{u} &= *^{(6)}(\bar{\tilde{u}} \wedge \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi^{(4)}} d^{(4)}\bar{C}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Die Wirkung des universellen Hypermultipletts lässt sich nun durch diese Formen ausdrücken:

$$S_Q = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( v \wedge *(\bar{v}) + u \wedge *(\bar{u}) \right). \tag{3.66}$$

Die Herleitung von Gleichung (3.66) aus (3.62) erfolgt in Anhang A.4.

Das die Formen des universellen Hypermultipletts die quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden, wird in Anhang B.2 nach einigen allgemeinen Vorbemerkungen zu quaternionischen Kählermannigfaltigkeiten bewiesen. In Anhang

<sup>5</sup>Die erste Zahl bezieht sich auf die Stufe bezüglich  $\mathcal{M}_{1,3}$ , während die letzten beiden Zahlen die Stufen bezüglich  $\mathcal{M}_6$  bezeichnen. Da es sich um eine fast komplexe Mannigfaltigkeit handelt, lässt sich die Stufe durch zwei Zahlen angeben:  $\Lambda^{i,j,k} = \Lambda^i T\mathcal{M}_{1,3} \wedge \Lambda^{j,k} T\mathcal{M}_6$ .

A.5 werden Vorbereitung zur Einbindung des unter  $\mathfrak{6}_{SU(3)}$  transformierenden Hypermultipletts in die quaternionische Struktur gemacht. Leider ließ der Zeitliche Rahmen dieser Arbeit die Einbindung der  $\mathfrak{6}_{SU(3)}$  Darstellungen in den Beweis nicht mehr zu.

### 3.5 Zusammenstellung der Ergebnisse

Die Wirkung (3.36)-(3.38) lässt sich unter Verwendung der Ergebnisse aus den Abschnitten 3.3 und 3.4 zusammenfassen. Sie lautet:

$$\begin{aligned}
S_{IIA} = & \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ \mathbb{R}^{(4)} + \mathbb{R}^{(6)} - \frac{1}{4} g^{ab} g^{cd} \partial^\sigma g_{bd} \partial_\sigma g_{ac} \right] + S_{2(R)} + S_{2(CS)} + S_Q \\
& - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \left( d^{(4)}B_0 \wedge *(d^{(4)}B_0) + e^{-4\Phi^{(4)}} A_1 \wedge d^{(4)}B_2 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_2) \right. \\
& \left. + e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_3 \wedge *(d^{(4)}C_3) + 2e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}C_3 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_2) \right) + \dots \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Die  $4_{\mathcal{M}_{1,3}}$ -Formen lassen sich noch kompakter schreiben:

$$\begin{aligned}
S_{IIA} = & \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ \mathbb{R}^{(4)} + \mathbb{R}^{(6)} - \frac{1}{4} g^{ab} g^{cd} \partial^\sigma g_{bd} \partial_\sigma g_{ac} \right] + S_{2(R)} + S_{2(CS)} + S_Q \\
& - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \left( d^{(4)}B_0 \wedge *(d^{(4)}B_0) \right. \\
& \left. + e^{-4\Phi^{(4)}} (d^{(4)}C_3 + A_1 \wedge d^{(4)}B_2) \wedge *(d^{(4)}C_3 + A_1 \wedge d^{(4)}B_2) \right) + \dots \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Die Punkte deuten alle Terme, in denen äußere Ableitungen  $d^{(6)}$  der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  stehen an. Die Summanden sind durch folgende Gleichungen gegeben:  $S_{2(R)}$  in (3.48),  $S_{2(CS)}$  in (3.53) und  $S_Q$  in (3.66). Die  $4_{\mathcal{M}_{1,3}}$ -Formen lassen sich dualisieren, wodurch eine Kosmologische-Konstante auftritt. Die Dualisierung wurde in [12] durchgeführt. Der kinetische Term der Metrik  $g_{ab}$  der kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  lässt sich mit dem kinetischen Termen des  $B_0$  Feldes zusammenfassen, dies ist in [5] geschehen.

# Kapitel 4

## Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit war die Zerlegung der masselosen, bosonischen Typ IIA Wirkung, die aus [13] entnommen wurde, für die Produktmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{1,9} = \mathcal{M}_{1,3} \times \mathcal{M}_6$  durchzuführen. Dabei wurde angenommen, dass  $\mathcal{M}_6$  eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, die eine  $SU(3)$  Struktur besitzt, sodass, wie in [5] gezeigt wurde, eine vierdimensionale  $N = 2$  Supergravitation definiert werden kann. Die Tensorreduktion unter  $SU(3)$  Struktur wurde für die Typ IIA Wirkung durchgeführt und die  $SU(3)$  Triplets wurden [5] folgend aus dem Spektrum entfernt, um eine vierdimensionale Standard  $N = 2$  Theorie ohne Gravitino-Multiplett zu erhalten. Diese Bedingung führte insbesondere dazu, dass die zehndimensionale Metrik in Blockdiagonalgestalt zerfiel. Die Ergebnisse, die in [5] für den Neveu-Schwarz-Sektor hergeleitet wurden konnten mit folgenden Ergebnissen des Ramond-Sektors ergänzt werden. Die nach der Zerlegung entstehenden Terme wurden ihren vierdimensionalen Helizitäten nach zusammengefasst und die Matrix der Eichkopplungen der Felder mit Helizität 1 konnte bestimmt werden. Dabei wurde ersichtlich, dass der Helizitäts 0 Anteil  $B_0$  des unter der  $\mathbf{28}_{SO(8)}$  Darstellung transformierenden Feldes  $\hat{B}_2$  die Eichkopplungen neben der Metrik  $g_{ab}$  der kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  in Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen für vierdimensionale  $N = 2$  Supergravitation mitbestimmt. Die  $SU(3)$  Singlets mit Helizität 0, die das universelle Hypermultiplett bilden, konnten in einer Form geschrieben werden, in der sich analog zu [15] der Beweis führen ließ, dass die Felder des universellen Hypermultipletts, in Übereinstimmung mit den Bedingungen für vierdimensionale  $N = 2$  Supergravitation, die fast quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden. Der Beweis wurde hier der Vollständigkeit halber noch einmal durchgeführt.

Leider ließ der zeitliche Rahmen dieser Arbeit nicht mehr zu, den Beweis für die fast quaternionische Struktur des universellen Hypermultipletts unter Einbindung des unter  $\mathbf{6}_{SU(3)}$  transformierenden Hypermultipletts zu verallgemeinern. Einige Vorbemerkungen zu diesem Thema wurden jedoch in Anhang A.5 ausgeführt.



# Anhang A

## Ergänzende Rechnungen

### A.1 Weyl-Reskalierung und Tensorzerlegung des kinetischen Dilaton Terms und des Krümmungsskalars

Zu Abschnitt 3.2 werden hier die Rechnungen zur Tensorzerlegung des zehndimensionalen Krümmungsskalars  $\hat{R}$  und des kinetischen Dilaton Terms, sowie die Redefinitionen (3.33):

$$\Phi^{(4)} = \Phi - \frac{1}{4} \ln(g^{(6)}), \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu}^{(4)} = e^{-\lambda\Phi^{(4)}} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

für diese Terme durchgeführt. Der hier behandelte Teil der Wirkung lautet:

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-\hat{G}} e^{-2\hat{\Phi}} \left[ \hat{R} + 4(\partial\hat{\Phi})^2 \right]. \quad (\text{A.2})$$

Durch Einsetzen von (A.1) in (A.2) folgt:

$$\begin{aligned} S &= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \sqrt{g^{(6)}} e^{-4\Phi^{(4)}} e^{2\lambda\Phi^{(4)}} e^{-2\Phi^{(4)} + \ln(g^{(6)})} \left[ \hat{R} + 4(\partial\hat{\Phi})^2 \right] \\ &= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} e^{2(\lambda-3)\Phi^{(4)}} \left[ \hat{R} + 4(\partial\hat{\Phi})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Dabei wurde die Determinante  $\hat{G}$  der Metrik bereits tensorzerlegt, denn mit

$$(\hat{G}_{AB}) \longrightarrow \begin{pmatrix} (g_{ab}) & (g_{a\mu}) \\ (g_{\nu b}) & (g_{\mu\nu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_{ab}) & 0 \\ 0 & (g_{\mu\nu}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

folgt  $\sqrt{-\hat{G}} \rightarrow \sqrt{-g|_4 g|_6}$ , wobei für die Determinanten  $g|_4 = \det(g_{\mu\nu})$ , und  $g|_6 = \det(g_{ab})$  gilt, und nach den Redefinitionen (A.1) gilt  $g^{(4)} = \det(g_{\mu\nu}^{(4)})$ , und  $g^{(6)} = \det(g_{ab})$ .

Für den Krümmungsskalar gilt allgemein:

$$\hat{R} = \hat{G}^{AB} \left( \partial_C \Gamma^C_{AB} - \partial_B \Gamma^C_{AC} + \Gamma^C_{DC} \Gamma^D_{AB} - \Gamma^C_{DB} \Gamma^D_{AC} \right). \quad (\text{A.5})$$

Die Indizes  $A, B, \dots$  laufen von 1 bis 10, die Indizes  $a, b, \dots$  laufen von 1 bis 6 und die Indizes  $\alpha, \beta, \dots$  laufen von 0 bis 4. Mit dieser Gleichung lässt sich die Tensorzerlegung für den Krümmungsskalar durchführen. Dabei erhält man folgende Terme:

$$\hat{R} = R|_4 + \text{gemischte Terme} + R|_6, \quad (\text{A.6})$$

dabei wird  $R|_4$  aus den Termen mit rein griechischen Indizes und  $R|_6$  aus denen mit rein kleinen lateinischen Indizes gebildet. Die gemischten Terme sind jene, in denen alle auftretenden gemischten Indexkombinationen vertreten sind.

Da die Torsion nach Voraussetzung für  $R|_4$  und die gemischten Terme verschwinden soll, lässt sich nach dem Fundamentalsatz der Riemannschen Geometrie der Zusammenhang für diese Summanden eindeutig durch die Metrik ausdrücken:

$$\Gamma^C_{DE} = \frac{1}{2} \hat{G}^{CF} \left( -\partial_F \hat{G}_{DE} + \partial_D \hat{G}_{FP} + \partial_E \hat{G}_{DF} \right), \quad \text{für } R|_4 \text{ und } R|_{\text{gemischt}}. \quad (\text{A.7})$$

Für die Ableitung des Dilatons folgt:

$$\begin{aligned} \partial_A \Phi &= \partial_A \Phi^{(4)} + \frac{1}{4} \partial_A \ln(\det g|_6) \\ &= \partial_A \Phi^{(4)} + \frac{1}{4} \frac{1}{\det g|_6} \partial_A \det g|_6 \\ &= \partial_A \Phi^{(4)} + \frac{1}{4} g^{ab} \partial_A g_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Es ergibt sich für  $R|_4$  nach der Tensorzerlegung:

$$R|_4 = g^{\alpha\beta} \left( \partial_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\mu} + \Gamma^\mu_{\omega\mu} \Gamma^\omega_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\omega\beta} \Gamma^\omega_{\alpha\mu} \right). \quad (\text{A.9})$$

Die Berechnung von  $R|_4$  in Abhängigkeit der Metrik  $g|_4$  liefert für den ersten Term aus (A.9):

$$g^{\alpha\beta} \partial_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu (g^{\mu\omega} (-\partial_\omega g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\omega} + \partial_\beta g_{\alpha\omega})). \quad (\text{A.10})$$

Wegen der Symmetrie in  $\alpha$  und  $\beta$  folgt:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \partial_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu (g^{\mu\omega} (-\partial_\omega g_{\alpha\beta} + 2\partial_\alpha g_{\beta\omega})) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g^{\mu\omega} (-\partial_\omega g_{\alpha\beta} + 2\partial_\alpha g_{\beta\omega}) + g^{\mu\omega} \partial_\mu (-\partial_\omega g_{\alpha\beta} + 2\partial_\alpha g_{\beta\omega})), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

und mit

$$\partial_\alpha g^{\beta\gamma} = -g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.12})$$

folgt

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \partial_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial^\sigma g_{\sigma\omega} \partial^\omega g_{\alpha\beta} - g^{\omega\omega} \partial^\sigma g_{\sigma\omega} \partial^\beta g_{\beta\omega} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial^\omega \partial_\omega g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \partial^\omega \partial_\alpha g_{\beta\omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Ebenso errechnen sich die restlichen Summanden und man erhält:

$$\begin{aligned}
 R|_4 &= -g^{\alpha\beta}\partial^\omega\partial_\omega g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial_\beta g_{\mu\alpha} + g^{\alpha\beta}\partial^\mu g_{\gamma\mu}\partial^\gamma g_{\alpha\beta} \\
 &\quad -\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial^\omega g_{\mu\nu}\partial_\omega g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial^\mu g_{\gamma\beta}\partial^\gamma g_{\alpha\mu} \\
 &\quad +\frac{3}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\omega}\partial^\mu g_{\gamma\beta}\partial_\mu g_{\omega\alpha} - g^{\sigma\rho}\partial^\omega g_{\rho\omega}\partial^\beta g_{\sigma\beta}.
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Die Berechnung des ersten gemischten Terms aus (A.5) liefert:

$$\hat{G}^{AB}\partial_M\Gamma^M_{AB} = \frac{1}{2}\hat{G}^{AB}\partial_M[\hat{G}^{MP}(-\partial_P\hat{G}_{AB} + \partial_A\hat{G}_{PB} + \partial_B\hat{G}_{PA})]. \tag{A.15}$$

Da aber nur echt gemischte Terme betrachtet werden, gibt es offensichtlich zwei Möglichkeiten die Indizes zu wählen, nämlich  $AB = \alpha\beta$ ,  $MP = mp$  und  $MP = \mu\nu$ ,  $AB = ab$ . Damit ergibt sich nach dem Verschwinden der letzten zwei Summanden wegen der Bedingung  $g_{m\mu} = 0$ :

$$\begin{aligned}
 g^{AB}\partial_M\Gamma^M_{AB} &= -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_m(g^{mn}\partial_n g_{\alpha\beta}) + (\alpha\beta \rightarrow ab, mn \rightarrow \mu\nu) \\
 &= \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\partial^b g_{ab}\partial^a g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial^c\partial_c g_{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. + g^{ab}\partial^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu g_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}\partial^\omega\partial_\omega g_{ab}\right).
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Die restlichen Terme folgen wieder analog und insgesamt erhält man für die gemischten Terme:

$$\begin{aligned}
 R|_{\text{gemischt}} &= -g^{mn}\partial^\omega\partial_\omega g_{mn} + g^{ab}\partial^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu g_{ab} + \frac{3}{4}g^{mn}g^{pq}\partial^\omega g_{np}\partial_\omega g_{mq} \\
 &\quad -\frac{1}{4}g^{ab}g^{mn}\partial^\omega g_{mn}\partial_\omega g_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g^{\mu\nu}\partial^\omega g_{\mu\nu}\partial_\omega g_{ab} \\
 &\quad -g^{\mu\nu}\partial^c\partial_c g_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}\partial^p g_{pq}\partial^q g_{\alpha\beta} + \frac{3}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial^c g_{\alpha\beta}\partial_c g_{\mu\nu} \\
 &\quad -\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial^c g_{\mu\nu}\partial_c g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{ab}g^{\mu\nu}\partial^c g_{\mu\nu}\partial_c g_{ab}.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Jetzt muss noch  $g_{\mu\nu}$  durch  $g_{\mu\nu}^{(4)}$  ersetzt werden. Dabei werden  $e^{\lambda\Phi^{(4)}}$  Vorfaktoren zunächst weggelassen, da man sie den Termen am Ende der Rechnung leicht ansehen kann, denn es gilt: Treten zwei Vierer-Ableitungen  $\partial_\mu$  auf, so muss ein Faktor  $e^{-\lambda\Phi^{(4)}}$  berücksichtigt werden. Desweiteren werden alle Terme, die das reskalierte  $R|_{(4)}$  ergeben weggelassen, das betrifft die Terme, in denen in der Definition von  $R|_4$   $g_{\mu\nu}$  durch  $g_{\mu\nu}^{(4)}$  ersetzt wurde. Die reskalierten Krümmungstensoren der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  werden durch  $R^{(4)}$  beziehungsweise  $R^{(6)}$  bezeichnet, wobei in diesem Fall  $R^{(6)} = R|_{(6)}$  gilt, da nur die vierdimensionale Metrik reskaliert wird. Die Reskalierung wird für  $R|_4$  aus Gleichung (A.14) am

vierten Summanden durchgeführt:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial^\omega g_{\alpha\beta}\partial_\omega g_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}g^{(4)\alpha\beta}g^{(4)\mu\nu}(\lambda\partial^\omega\Phi^{(4)}g_{\alpha\beta}^{(4)} + \partial^\omega g_{\alpha\beta}^{(4)})(\lambda\partial_\omega\Phi^{(4)}g_{\mu\nu}^{(4)} + \partial_\omega g_{\mu\nu}^{(4)}) \\
&= -\frac{1}{4}(4\lambda\partial^\omega\Phi^{(4)} + g^{(4)\alpha\beta}\partial^\omega g_{\alpha\beta}^{(4)})(4\lambda\partial_\omega\Phi^{(4)} + g^{(4)\mu\nu}\partial_\omega g_{\mu\nu}^{(4)}) \\
&= -4\lambda^2\partial^\omega\Phi^{(4)}\partial_\omega\Phi^{(4)} - \lambda g^{(4)\alpha\beta}\partial^\omega\Phi^{(4)}\partial_\omega g_{\alpha\beta}^{(4)}. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Die Berechnung der anderen Terme folgt analog und für den Teil, der durch die Reskalierung von  $R|_4$  zusätzlich zu  $R^{(4)}$  auftritt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\{R|_4\}_{reskal} &= -\frac{3}{2}\lambda^2\partial^\omega\Phi^{(4)}\partial_\omega\Phi^{(4)} + 3\lambda\partial^\mu\Phi^{(4)}\partial^\nu g_{\mu\nu}^{(4)} \\
&\quad - 3\lambda\partial^\omega\partial_\omega\Phi^{(4)} - \frac{3}{2}\lambda g^{(4)\alpha\beta}\partial^\omega\Phi^{(4)}\partial_\omega g_{\alpha\beta}^{(4)}. \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Die Reskalierung der gemischten Terme werden ebenso berechnet. Für sie ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\{R|_{gemischt}\}_{reskal} &= -\lambda g^{mn}\partial^\omega g_{mn}\partial_\omega\Phi^{(4)} \\
&\quad - 5\lambda^2\partial^c\Phi^{(4)}\partial_c\Phi^{(4)} - \frac{5}{2}\lambda g^{(4)\alpha\beta}\partial^c\Phi^{(4)}\partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} - 4\lambda\partial^c\partial_c\Phi^{(4)} \\
&\quad - 2\lambda g^{mn}\partial^c g_{mn}\partial_c\Phi^{(4)} + 4\lambda\partial^b g_{ab}\partial^a\Phi^{(4)}. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Der kinetische Term des Dilatons wird mit (A.8) ebenfalls reskaliert:

$$\begin{aligned}
\partial^C\Phi\partial_C\Phi &= \partial^c\Phi\partial_c\Phi + \partial^\omega\Phi\partial_\omega\Phi \\
&= \partial^c\Phi^{(4)}\partial_c\Phi^{(4)} + \frac{1}{2}g^{ab}\partial^c\Phi^{(4)}\partial_c g_{ab} + \frac{1}{16}g^{mn}g^{ab}\partial^c g_{mn}\partial_c g_{ab} \\
&\quad + \partial^\omega\Phi^{(4)}\partial_\omega\Phi^{(4)} + \frac{1}{2}g^{ab}\partial^\omega\Phi^{(4)}\partial_\omega g_{ab} + \frac{1}{16}g^{mn}g^{ab}\partial^\omega g_{mn}\partial_\omega g_{ab}. \tag{A.21}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich für Gleichung (A.3) mit (A.14), (A.17), (A.19), (A.20) und

(A.21):

$$\begin{aligned}
S &= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} e^{-2\Phi^{(4)}} \left[ \hat{R} + 4(\partial\Phi)^2 \right] \\
&= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ R^{(4)} + e^{-2\Phi^{(4)}} R|_6 - \frac{3}{2} \lambda^2 \partial^\omega \Phi^{(4)} \partial_\omega \Phi^{(4)} + 3\lambda \partial^\mu \Phi^{(4)} \partial^\nu g_{\mu\nu}^{(4)} \right. \\
&\quad - 3\lambda \partial^\omega \partial_\omega \Phi^{(4)} - \frac{3}{2} \lambda g^{(4)\alpha\beta} \partial^\omega \Phi^{(4)} \partial_\omega g_{\alpha\beta}^{(4)} \\
&\quad - g^{mn} \partial^\omega \partial_\omega g_{mn} + g^{ab} \partial^\mu g_{\mu\nu}^{(4)} \partial^\nu g_{ab} + \frac{3}{4} g^{mn} g^{pq} \partial^\omega g_{np} \partial_\omega g_{mq} \\
&\quad - \frac{1}{4} g^{ab} g^{mn} \partial^\omega g_{mn} \partial_\omega g_{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} g^{(4)\mu\nu} \partial^\omega g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_\omega g_{ab} \\
&\quad + e^{-2\Phi^{(4)}} \left( -g^{(4)\mu\nu} \partial^c \partial_c g_{\mu\nu}^{(4)} + g^{(4)\alpha\beta} \partial^p g_{pq} \partial^q g_{\alpha\beta}^{(4)} + \frac{3}{4} g^{(4)\mu\alpha} g^{(4)\nu\beta} \partial^c g_{\alpha\beta}^{(4)} \partial_c g_{\mu\nu}^{(4)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} g^{(4)\alpha\beta} g^{(4)\mu\nu} \partial^c g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} - \frac{1}{2} g^{ab} g^{(4)\mu\nu} \partial^c g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_c g_{ab} \right) \\
&\quad - \lambda g^{mn} \partial^\omega g_{mn} \partial_\omega \Phi^{(4)} \\
&\quad + e^{-2\Phi^{(4)}} \left( -5\lambda^2 \partial^c \Phi^{(4)} \partial_c \Phi^{(4)} - \frac{5}{2} \lambda g^{(4)\alpha\beta} \partial^c \Phi^{(4)} \partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} - 4\lambda \partial^c \partial_c \Phi^{(4)} \right. \\
&\quad \left. - 2\lambda g^{mn} \partial^c g_{mn} \partial_c \Phi^{(4)} + 4\lambda \partial^b g_{ab} \partial^a \Phi^{(4)} \right) \\
&\quad + 4(e^{-2\Phi^{(4)}} \left( \partial^c \Phi^{(4)} \partial_c \Phi^{(4)} + \frac{1}{2} g^{ab} \partial^c \Phi^{(4)} \partial_c g_{ab} + \frac{1}{16} g^{mn} g^{ab} \partial^c g_{mn} \partial_c g_{ab} \right) \\
&\quad \left. + \partial^\omega \Phi^{(4)} \partial_\omega \Phi^{(4)} + \frac{1}{2} g^{ab} \partial^\omega \Phi^{(4)} \partial_\omega g_{ab} + \frac{1}{16} g^{mn} g^{ab} \partial^\omega g_{mn} \partial_\omega g_{ab} \right) \Big]. \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Zur weiteren Vereinfachung wandelt man die doppelten Ableitungen mittels folgender totaler Divergenzen um:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_M (\sqrt{|g|_4} g^{MN} g^{AB} \partial_N g_{AB}) \\
&= \sqrt{|g|_4} \left( \frac{1}{2} g^{\rho\omega} g^{AB} \partial^C g_{\rho\omega} \partial_C g_{AB} - g^{AB} \partial^P g_{PQ} \partial^Q g_{AB} \right. \\
&\quad \left. - g^{PA} g^{QB} \partial^C g_{PQ} \partial_C g_{AB} + g^{AB} \partial^C \partial_C g_{AB} \right). \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
g^{AB} \partial^C \partial_C g_{AB} &= g^{AB} \partial^c \partial_c g_{AB} + g^{AB} \partial^\omega \partial_\omega g_{AB} \\
&= -\frac{1}{2} g^{\rho\omega} g^{AB} \partial^\sigma g_{\rho\omega}^{(4)} \partial_\sigma g_{AB} + g^{AB} \partial^\gamma g_{\gamma\delta}^{(4)} \partial^\delta g_{AB} + g^{PA} g^{QB} \partial^\sigma g_{PQ} \partial_\sigma g_{AB} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{\rho\omega} g^{AB} \partial^c g_{\rho\omega}^{(4)} \partial_c g_{AB} + g^{AB} \partial^p g_{pq} \partial^q g_{AB} \\
&\quad + g^{PA} g^{QB} \partial^c g_{PQ} \partial_c g_{AB}, \tag{A.24}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial^\omega \partial_\omega \Phi^{(4)} + \partial^c \partial_c \Phi^{(4)} &= -\frac{1}{2} g^{(4)\mu\nu} \partial^\omega g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_\omega \Phi^{(4)} \\ &\quad + \partial^\alpha g_{\alpha\beta}^{(4)} \partial^\beta \Phi^{(4)} - \frac{1}{2} g^{(4)\mu\nu} \partial^c g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_c \Phi^{(4)} + \partial^a g_{ab} \partial^b \Phi^{(4)}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Damit und mit  $\lambda = 2$  folgt

$$\begin{aligned} S &= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} e^{-2\Phi^{(4)}} \left[ \hat{R} + 4(\partial\Phi)^2 \right] \\ &= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ R^{(4)} - 2\partial^\omega \Phi^{(4)} \partial_\omega \Phi^{(4)} - \frac{1}{4} g^{mn} g^{pq} \partial^\omega g_{np} \partial_\omega g_{mq} \right. \\ &\quad + e^{-2\Phi^{(4)}} \left( -g^{(4)\mu\nu} \partial^c \partial_c g_{\mu\nu}^{(4)} + g^{(4)\alpha\beta} \partial^p g_{pq} \partial^q g_{\alpha\beta}^{(4)} + \frac{3}{4} g^{(4)\mu\alpha} g^{(4)\nu\beta} \partial^c g_{\alpha\beta}^{(4)} \partial_c g_{\mu\nu}^{(4)} \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{(4)\alpha\beta} g^{(4)\mu\nu} \partial^c g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} - 2g^{mn} \partial^c g_{mn} \partial_c \Phi^{(4)} + 2\partial^b g_{ab} \partial^a \Phi^{(4)} \\ &\quad - 16\partial^c \Phi^{(4)} \partial_c \Phi^{(4)} - 2g^{(4)\alpha\beta} \partial^c \Phi^{(4)} \partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} - 2\partial^c \partial_c \Phi^{(4)} \\ &\quad \left. \left. - \partial^p g_{pq} \partial^q g_{ab} g^{ab} - g^{pa} g^{qb} \partial^c g_{pq} \partial_c g_{ab} + R^{(6)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Da die Oberflächenterme auch separat verschwinden, gilt:

$$\begin{aligned} S &= \int d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \left[ R^{(4)} + R^{(6)} - 2\partial^\omega \Phi^{(4)} \partial_\omega \Phi^{(4)} - \frac{1}{4} g^{mn} g^{pq} \partial^\omega g_{np} \partial_\omega g_{mq} \right. \\ &\quad + e^{-2\Phi^{(4)}} \left( -\frac{1}{4} g^{(4)\mu\alpha} g^{(4)\nu\beta} \partial^c g_{\alpha\beta}^{(4)} \partial_c g_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{1}{4} g^{(4)\alpha\beta} g^{(4)\mu\nu} \partial^c g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} \right. \\ &\quad - 2g^{mn} \partial^c g_{mn} \partial_c \Phi^{(4)} - 16\partial^c \Phi^{(4)} \partial_c \Phi^{(4)} - g^{(4)\alpha\beta} \partial^c \Phi^{(4)} \partial_c g_{\alpha\beta}^{(4)} \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} g^{(4)\mu\nu} g^{ab} \partial^c g_{\mu\nu}^{(4)} \partial_c g_{ab} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

## A.2 Herleitung zu Gleichung (3.40)

Gleichung (3.40) soll hier bewiesen werden, sie lautet:

$$\begin{aligned} S_{2(R)} &:= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}} \begin{pmatrix} \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \\ \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu][ab]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + (B_0)^2 & B^{cd} \\ B^{ab} & g^{ac} g^{bd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} \\ \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu]}_{[cd]} \end{pmatrix} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{(4)}C_1 \wedge *(d^{(4)}C_1) + 2d^{(4)}C_1 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) \\ &\quad + A_1 \wedge d^{(4)}B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)}B_0) + d^{(4)}A_1 \wedge *(d^{(4)}A_1), \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

mit den Feldredefinitionen

$$\tilde{C}_1 := C_1 - B_0 \wedge A_1, \quad \text{und} \quad \tilde{A}_1 := A_1. \quad (\text{A.29})$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich aus Gleichung (A.28):

$$\begin{aligned}
 -4\kappa_{10}^2 S_{2(R)} &= \int_{\mathcal{M}} d^{10}x \sqrt{g^{(4)}g^{(6)}} \left( (1 + (B_0)^2) \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} + \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]} B^{cd} \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu]} \right)_{[cd]} \\
 &\quad + \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu][ab]} B^{ab} \partial^{[\mu} \tilde{A}^{\nu]} + \partial_{[\mu} \tilde{C}_{\nu][ab]} \partial^{[\mu} \tilde{C}^{\nu][ab]} \Big). \tag{A.30}
 \end{aligned}$$

Hier bietet sich die basisfreie Schreibweise an, um die Definitionen für  $\tilde{A}_1$  und  $\tilde{C}_1$  einzusetzen. Basisfrei lautet Gleichung (A.30):

$$\begin{aligned}
 -4\kappa_{10}^2 S_{2(R)} &= \int_{\mathcal{M}} \left( (1 + (B_0)^2) d^{(4)} \tilde{A}_1 \wedge *(d^{(4)} \tilde{A}_1) \right. \\
 &\quad \left. + 2B_0 \wedge d^{(4)} \tilde{A}_1 \wedge *(d^{(4)} \tilde{C}_1) + d^{(4)} \tilde{C}_1 \wedge *(d^{(4)} \tilde{C}_1) \right), \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

und nach Einsetzen von (A.29) folgt:

$$\begin{aligned}
 S_{2(R)} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( (1 + (B_0)^2) d^{(4)} A_1 \wedge *(d^{(4)} A_1) + 2B_0 \wedge d^{(4)} A_1 \wedge *(d^{(4)} (C_1 - B_0 \wedge A_1)) \right. \\
 &\quad \left. + d^{(4)} (C_1 - B_0 \wedge A_1) \wedge *(d^{(4)} (C_1 - B_0 \wedge A_1)) \right) \\
 &= \int_{\mathcal{M}} \left( (1 + (B_0)^2) d^{(4)} A_1 \wedge *(d^{(4)} A_1) + 2B_0 \wedge d^{(4)} A_1 \wedge *(d^{(4)} C_1) \right. \\
 &\quad + 2B_0 \wedge d^{(4)} A_1 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)} B_0) - 2B_0 \wedge d^{(4)} A_1 \wedge *(B_0 \wedge d^{(4)} A_1) \\
 &\quad + 2d^{(4)} C_1 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)} B_0) - 2d^{(4)} C_1 \wedge *(B_0 \wedge d^{(4)} A_1) + d^{(4)} C_1 \wedge *(d^{(4)} C_1) \\
 &\quad + A_1 \wedge d^{(4)} B_0 \wedge *(A_1 \wedge d^{(4)} B_0) + B_0 \wedge d^{(4)} A_1 \wedge *(B_0 \wedge d^{(4)} A_1) \\
 &\quad \left. - 2A_1 \wedge d^{(4)} B_0 \wedge *(B_0 \wedge d^{(4)} A_1) \right). \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

Weil wegen der Vertauschungsrelation  $[\ast^6, \ast^4] = 0$  der Stern Operatoren der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  die Relation

$$\begin{aligned}
 B_0 \wedge d^{(4)} A_1 \wedge *(B_0 \wedge d^{(4)} A_1) &= B_0 \wedge \ast^{(6)}(B_0) \wedge d^{(4)} A_1 \wedge \ast^{(4)} d^{(4)} A_1 \\
 &= (B_0)^2 d^{(4)} A_1 \wedge *(d^{(4)} A_1) \tag{A.33}
 \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung.

### A.3 Dualisierung von $B_2$

In diesem Abschnitt wird die in Abschnitt 3.4 benötigte Dualisierung von  $B_2$  nach [12] berechnet. Die Dualisierung von  $B_2$  ist wegen des Anteils proportional  $B_2$  vom Chern-Simons-Term nicht trivial und im dualen Feld werden zusätzliche Terme auftreten. Die Terme, die bei der Dualisierung berücksichtigt werden müssen lauten:

$$S_{B_2} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)} B_2 \wedge *(d^{(4)} B_2) + B_2 \wedge d^{(4)} C_0 \wedge d^{(4)} C_0 \right). \tag{A.34}$$

Wie üblich gilt auch hier die Konvention  $* = *^{(4)}*^{(6)}$ . Unter Ausnutzung des separaten Verschwindens aller Oberflächenterme<sup>1</sup> von  $\mathcal{M}_{1,3}$  und  $\mathcal{M}_6$  folgt:

$$S_{B_2} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}B_2 \wedge *(d^{(4)}B_2) + d^{(4)}B_2 \wedge C_0 \wedge d^{(4)}C_0 \right). \quad (\text{A.35})$$

Gleichung (3.56) wird eingesetzt und die dort identifizierten  $(\mathbf{6} + \bar{\mathbf{6}})_{SU(3)}$  Darstellungen werden gestrichen:

$$S_{B_2} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( e^{-4\Phi^{(4)}} d^{(4)}B_2 \wedge *(d^{(4)}B_2) + d^{(4)}B_2 \wedge (C \wedge d^{(4)}\bar{C} + \bar{C} \wedge d^{(4)}C) \right). \quad (\text{A.36})$$

Es wird ein Feld  $H_3$  und eine  $6_{\mathcal{M}_6}$ -Form  $a$  als Lagrangemultiplikator eingeführt:

$$S_{B_2} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( e^{-4\Phi^{(4)}} H_3 \wedge *(H_3) + H_3 \wedge J_1 + 2iH_3 \wedge d^{(4)}a \right), \quad (\text{A.37})$$

wobei  $J_1 = C \wedge d^{(4)}\bar{C} + \bar{C} \wedge d^{(4)}C$  gilt. Die Bewegungsgleichungen durch Variation von  $S_{B_2}$  nach den Feldern  $H_3$  und  $a$ , d.h.  $\frac{\delta S_{H_3}}{\delta a}$  bzw.  $\frac{\delta S_{H_3}}{\delta H_3}$  liefert als Bedingung für  $a$ , dass  $H_3$  die Feldstärke<sup>2</sup> einer  $2_{\mathcal{M}_{1,3}}$ -Form sein muss:<sup>3</sup>

$$H_3 \stackrel{!}{=} d^{(4)}B_2, \quad (\text{A.38})$$

und für die Variation von  $S_{B_2}$  nach  $H_3$  folgt

$$*H_3 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} e^{4\Phi^{(4)}} (2id^{(4)}a + J_1), \quad (\text{A.39})$$

weil das Skalarprodukt eine symmetrische Bilinearform ist, weswegen  $\frac{\delta}{\delta H_3}(H_3 \wedge *(H_3)) = 2(\frac{\delta H_3}{\delta H_3}) \wedge *H_3$  gilt. Man erhält  $H_3$  durch Operation des Sternoperators  $*$ . Setzt man die Bedingungen in (A.37) ein, so ergibt sich:

$$S_{B_2} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( e^{4\Phi^{(4)}} (id^{(4)}a + \frac{1}{2}J_1) \wedge *(id^{(4)}a + \frac{1}{2}J_1) \right). \quad (\text{A.40})$$

<sup>1</sup>Die Oberflächenterme von  $\mathcal{M}_{1,3}$  verschwinden per Definition und die von  $\mathcal{M}_6$  aufgrund der Kompaktheit.

<sup>2</sup>Diese Feldstärke wird durch das äußere Differential  $d^{(4)}$  gebildet.

<sup>3</sup>Dies ist auch die Bedingung für das Verschwinden des addierten Terms



## A.4 Herleitung zu Gleichung (3.66)

Der Beweis der Äquivalenz von Gleichung (3.66) und (3.62) wird durch schrittweises Einsetzen der Definitionen (3.65) und (3.63) in (3.66) geführt. (3.66) lautet:

$$S_Q = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} (v \wedge *(\bar{v}) + u \wedge *(\bar{u})). \quad (\text{A.41})$$

Für den ersten Summanden aus (A.41) ergibt sich mit (3.65) und (3.63):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} v \wedge *(\bar{v}) &= \int_{\mathcal{M}} \frac{e^{4\Phi^{(4)}}}{4\kappa_{10}^2} \left( (d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C}) \wedge *^{(6)}(\epsilon \wedge \bar{\epsilon}) \right. \\ &\quad \left. \wedge *^{(4)} \overline{(d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C}) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Dabei wurde beachtet, dass  $[d^{(4)}, *^{(6)}] = 0$  und  $(*^{(6)})^2 \epsilon \wedge \bar{\epsilon} = \epsilon \wedge \bar{\epsilon}$  gilt. Für den nächsten Schritt werden folgende Rechenregeln benutzt:

$$\begin{aligned} d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia - \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C} &= -2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} + id^{(4)}a + \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} + Cd^{(4)}\bar{C}) \\ &\quad - Cd^{(4)}\bar{C} \\ &= -2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} + id^{(4)}a + \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} - Cd^{(4)}\bar{C}), \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

und

$$\overline{d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia - \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C}} = -2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} - id^{(4)}a - \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} - Cd^{(4)}\bar{C}), \quad (\text{A.44})$$

sowie

$$\overline{\epsilon \wedge \bar{\epsilon}} = -\epsilon \wedge \bar{\epsilon}. \quad (\text{A.45})$$

Damit folgt für (A.42):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} v \wedge *(\bar{v}) &= \int_{\mathcal{M}} \frac{-e^{4\Phi^{(4)}}}{4\kappa_{10}^2} \left( (-2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} + id^{(4)}a + \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} - Cd^{(4)}\bar{C})) \right. \\ &\quad \left. \wedge *^{(6)}(\epsilon \wedge \bar{\epsilon}) \wedge *^{(4)} \right. \\ &\quad \left. (-2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} - id^{(4)}a - \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} - Cd^{(4)}\bar{C})) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \frac{e^{4\Phi^{(4)}}}{4\kappa_{10}^2} \left( (-2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} + id^{(4)}a + \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} - Cd^{(4)}\bar{C})) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. \wedge *^{(4)} *^{(6)} \left( (-2e^{-2\Phi^{(4)}} d^{(4)}\Phi^{(4)} - id^{(4)}a - \frac{1}{2}(d^{(4)}C\bar{C} - Cd^{(4)}\bar{C})) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Der letzte Schritt lässt sich zum einen durch die Invarianz des Skalarproduktes unter der  $*^{(6)}$  Abbildung erklären, das heißt beide Einträge des Skalarproduktes  $\langle a, b \rangle = \int a \wedge *b$  werden mit  $*^{(6)}$  abgebildet. Zum anderen durch einfaches Durchkommutieren der Basis was wegen  $*^{(6)}(\epsilon \wedge \bar{\epsilon}) = 1$  und der Tatsache das  $\epsilon \wedge \bar{\epsilon}$  eine 6-Form ist, also beim Durchkommutieren kein Vorzeichen liefert, möglich ist.

Es sei hier noch einmal erwähnt, dass seit der Tensorzerlegung in Abschnitt 3.2 die Kurzschreibweise  $* = *^{(4)}*^{(6)}$  gilt. Es folgt wegen der Symmetrie von  $\langle a, b \rangle = \int a \wedge *b$  in  $a$  und  $b$ , dass der  $d^{(4)}\Phi^{(4)}$  Term ausschließlich mit sich selbst koppelt. Schematisch bedeutet diese Gegebenheit für (A.42):

$$\langle a + ib, \overline{a + ib} \rangle = \langle a + ib, a - ib \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle, \quad (\text{A.47})$$

wobei  $a$  dem  $d^{(4)}\Phi^{(4)}$  Term entspricht. Damit folgt für (A.42):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} v \wedge *(\bar{v}) &= -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( -d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \wedge *(d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}) \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{4}e^{4\Phi^{(4)}}(d^{(4)}a - \frac{1}{2}(-Cd^{(4)}\bar{C} + \bar{C}d^{(4)}C)) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon} \wedge \right. \\ &\quad \left. *(d^{(4)}a - \frac{1}{2}(Cd^{(4)}\bar{C} + \bar{C}d^{(4)}C) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

was aber genau dem ersten Teil von (3.62) entspricht.

Nun wird der zweite Teil von (A.41) berechnet, indem die Definitionen der Felder eingesetzt werden:

$$\int_{\mathcal{M}} u \wedge *(\bar{u}) = -\int_{\mathcal{M}} \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2\kappa_{10}^2} d^{(4)}C \wedge *^{(6)}(\epsilon \wedge \bar{\epsilon}) \wedge *^{(4)}(d^{(4)}\bar{C}) \wedge \epsilon \wedge \bar{\epsilon}. \quad (\text{A.49})$$

Jetzt folgt mit  $\epsilon \wedge *^{(6)}\bar{\epsilon} = \epsilon \wedge \bar{\epsilon}$  aufgrund der Selbstdualität von  $\Lambda^{0,3}$ , das bedeutet  $*^{(6)} : \Lambda^{p,q} \rightarrow \Lambda^{3-q,3-p}$ , wie sie für fast komplexe Mannigfaltigkeiten der Fall ist (und mit den bisherigen Rechenregeln), für (A.49):

$$\int_{\mathcal{M}} u \wedge *(\bar{u}) = -\int_{\mathcal{M}} \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2\kappa_{10}^2} d^{(4)}C \wedge \epsilon \wedge *^{(4)} *^{(6)}(d^{(4)}\bar{C} \wedge \bar{\epsilon}), \quad (\text{A.50})$$

was aber nichts anderes als der zweite Teil von Gleichung (3.62). Damit ist die Gleichheit von (3.66) und (3.62) bewiesen.

## A.5 Zusatz zu Abschnitt 3.4

In diesem Abschnitt soll die Wirkung des Hypermultipletts inklusive der  $\mathbf{6} + \bar{\mathbf{6}}_{SU(3)}$  Darstellungen angegeben werden. Alle beitragenden Formen wurden bereits in Abschnitt 3.4

identifiziert. Sie sind hier noch einmal zusammen mit den zugehörigen Räumen aufgelistet:

$$\begin{aligned}
C, \bar{C}, a, \Phi & : \quad \mathbf{1}_{SU(3)}, & a, \Phi & \in \Lambda^{3,3}, \\
\mathcal{C} & : \quad (\mathbf{3} + \mathbf{6})_{SU(3)}, & C & \in \Lambda^{3,0}, \quad \bar{C} \in \Lambda^{0,3}, \\
\bar{\mathcal{C}} & : \quad (\bar{\mathbf{3}} + \bar{\mathbf{6}})_{SU(3)}, & \mathcal{C} & \in \Lambda^{2,1}, \quad \bar{\mathcal{C}} \in \Lambda^{1,2}.
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Die Basis der entsprechenden Räume wird in Tabelle A.1 aufgelistet und es werden neue Basisvektoren definiert, wobei  $\hat{I}, \hat{J}, \dots = 1, \dots, 9$  gilt.

Raum	Basis	Dimension	Bez. der Basisvektoren
$\Lambda^{3,3}$	$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{\bar{i}} \wedge dx^{\bar{j}} \wedge dx^{\bar{k}}$	1	$e$
$\Lambda^{3,0}$	$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$	1	$E^0$
$\Lambda^{0,3}$	$dx^{\bar{i}} \wedge dx^{\bar{j}} \wedge dx^{\bar{k}}$	1	$\bar{E}^0$
$\Lambda^{2,1}$	$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{\bar{k}}$	9	$E^{\hat{I}}$
$\Lambda^{1,2}$	$dx^i \wedge dx^{\bar{j}} \wedge dx^{\bar{k}}$	9	$\bar{E}^{\hat{I}}$

**Tabelle A.1:** Basen der Räume der betrachteten Formen

Die Nummerierung der Basisvektoren lässt sich immer so wählen, dass für das Dachprodukt

$$E^0 \wedge \bar{E}^0 = e, \quad E^{\hat{I}} \wedge \bar{E}^{\hat{J}} = \delta^{\hat{I}\hat{J}} e \tag{A.52}$$

gilt. Wie üblich gelten in der Basis auch folgende Relationen:

$$E^0 \wedge \bar{E}^0 = -\bar{E}^0 \wedge E^0, \quad E^{\hat{I}} \wedge \bar{E}^{\hat{J}} = -\bar{E}^{\hat{J}} \wedge E^{\hat{I}}. \tag{A.53}$$

Das hat zur Folge, dass  $\bar{ie} = ie$  gilt, und somit  $ie$  reell transformiert. Für den Stern Operator  $*^{(6)}$  der fast komplexen kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  gilt allgemein [11] die Beziehung:

$$*^{(6)} : \Lambda^{a,b} \longrightarrow \Lambda^{3-b,3-a}. \tag{A.54}$$

Das bedeutet insbesondere, dass die betrachteten Vektorräume selbstdual sind, da die Stern Abbildungen  $*^{(6)} : \Lambda^{3,0} \longrightarrow \Lambda^{3,0}$ ,  $*^{(6)} : \Lambda^{2,1} \longrightarrow \Lambda^{2,1}$  und  $*^{(6)} : \Lambda^{1,2} \longrightarrow \Lambda^{1,2}$  lauten. Was wiederum zur Folge hat, dass das Hodge-Dual jeder Basis in sich selber entwickelt werden kann:

$$\begin{aligned}
*^{(6)} E^0 & = iE^0, & *^{(6)} \bar{E}^0 & = -i\bar{E}^0, \\
*^{(6)} E^{\hat{I}} & = i\alpha^{\hat{I}}_j E^{\hat{J}}, & *^{(6)} \bar{E}^{\hat{I}} & = -i\alpha^{\hat{I}}_j \bar{E}^{\hat{J}}.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Da diese Vektoren eine Basis der Räume der Formen bilden, lassen sich die Formen in ihnen entwickeln. Die Entwicklung lautet:

$$\begin{aligned}
C & = C_0 E^0, & \bar{C} & = \bar{C}_0 \bar{E}^0, \\
\mathcal{C} & = C_{\hat{I}} E^{\hat{I}}, & \bar{\mathcal{C}} & = \bar{C}_{\hat{I}} \bar{E}^{\hat{I}}.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Nach der gewählten Basis und der Entwicklungen der relevanten Formen in dieser Basis, werden die Entwicklungen in die zu betrachtende Wirkung eingesetzt. Die zu betrachtende Wirkung ist die in (3.58) gegebene, wobei  $B_2$  wieder dualisiert wird, wie in Anhang A.3 geschehen, ohne diesmal Formen herauszuprojizieren. Die Erweiterung auf zusätzlich beitragende Formen ist dabei trivial und äußert sich darin, dass im  $J_1$  Term zusätzlich  $\mathcal{C} \wedge d^{(4)}\overline{\mathcal{C}} + \overline{\mathcal{C}} \wedge d^{(4)}\mathcal{C}$  auftritt. Nachdem die Entwicklungen (A.56) in die resultierende Wirkung eingesetzt wurden ergibt sich:

$$\begin{aligned}
S_Q &= \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left( d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge *(d^{(4)}\Phi^{(4)}) \right. \\
&\quad + \frac{e^{4\Phi^{(4)}}}{4} (id^{(4)}ae - \frac{1}{2}(C_0E^0 \wedge d^{(4)}\overline{C_0E^0} + \overline{C_0E^0} \wedge d^{(4)}C_0E^0 \\
&\quad + C_{\hat{I}}E^{\hat{I}} \wedge d^{(4)}\overline{C_{\hat{I}}E^{\hat{I}}} + \overline{C_{\hat{I}}E^{\hat{I}}} \wedge d^{(4)}C_{\hat{I}}E^{\hat{I}})) \\
&\quad \wedge * (id^{(4)}ae - \frac{1}{2}(C_0E^0 \wedge d^{(4)}\overline{C_0E^0} + \overline{C_0E^0} \wedge d^{(4)}C_0E^0 \\
&\quad + C_{\hat{I}}E^{\hat{I}} \wedge d^{(4)}\overline{C_{\hat{I}}E^{\hat{I}}} + \overline{C_{\hat{I}}E^{\hat{I}}} \wedge d^{(4)}C_{\hat{I}}E^{\hat{I}})) \\
&\quad \left. - \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} d^{(4)}(C_0E^0) \wedge *d^{(4)}(\overline{C_0E^0}) - \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} d^{(4)}(C_{\hat{I}}E^{\hat{I}}) \wedge *d^{(4)}(\overline{C_{\hat{J}}E^{\hat{J}}}) \right).
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Der kinetische Term  $d^{(4)}(C_0E^0) \wedge *d^{(4)}(\overline{C_0E^0})$  entspricht dabei dem, der bereits in Kapitel 3.4 behandelt wurde. Dort galt für die Basen  $E^0 = \epsilon$ ,  $\overline{E^0} = \bar{\epsilon}$  und  $e = \epsilon \wedge \bar{\epsilon}$ .

Wichtig in dieser Betrachtung ist der neu auftretende kinetische Term:

$$-\frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} d^{(4)}(C_{\hat{I}}E^{\hat{I}}) \wedge *d^{(4)}(\overline{C_{\hat{J}}E^{\hat{J}}}) = -\frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} d^{(4)}C_{\hat{I}} \wedge *(^{(4)}d^{(4)}\overline{C_{\hat{J}}}) \wedge E^{\hat{I}} \wedge *(^{(6)}\overline{E^{\hat{J}}}). \tag{A.58}$$

Für den mit den oben angegebenen Rechenregeln folgt:

$$= \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} (\alpha^{\hat{J}}_{\hat{K}} \delta^{\hat{I}\hat{K}} d^{(4)}C_{\hat{I}} \wedge *(^{(4)}d^{(4)}\overline{C_{\hat{J}}}) \wedge ie. \tag{A.59}$$

Dabei wurde verwendet, dass  $* = *(^{(4)})*(^{(6)})$  gilt und die Antikommutationsrelationen (3.14) erfüllt sind. Dies lässt sich nun mit dem bereits berechneten Term für  $C_0$  zusammenfassen. Dazu wird zu den neun Komponenten eine Nullte hinzugefügt:

$$\alpha^I_J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha^{\hat{I}}_{\hat{J}}) \end{pmatrix}. \tag{A.60}$$

Damit hat man einen Index  $I, J, \dots$  der von 1 bis 10 läuft definiert (ebenso wird ein  $\delta^{IJ}$  definiert, mit  $\delta^{\hat{I}\hat{J}}$ , das um  $\delta^{00} = 1$  erweitert wird). Mit diesen Definitionen lässt sich (A.57)

zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
S_Q = & \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left\{ d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge *(d^{(4)}\Phi^{(4)}) \right. \\
& + \frac{e^{4\Phi^{(4)}}}{4} \left( id^{(4)}a - \frac{1}{2}(C_I d^{(4)}\overline{C}_J - \overline{C}_I d^{(4)}C_J) \delta^{IJ} \right) \\
& \wedge *(^{(4)} \left( id^{(4)}a - \frac{1}{2}(C_I d^{(4)}\overline{C}_J - \overline{C}_I d^{(4)}C_J) \delta^{IJ} \right) \\
& \left. + \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( \overline{\alpha^J_K} \delta^{IK} d^{(4)}C_I \wedge *(^{(4)}d^{(4)}\overline{C}_J \right) \right\} \wedge ie. \tag{A.61}
\end{aligned}$$

Das Wichtige hierbei ist, dass direkt die Struktur aus vierdimensionaler Sicht erkennbar ist, da das Volumenelement  $ie$  der kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_6$  ausgeklammert wurde. Es lassen sich wie in (3.65) Formen definieren:

$$\begin{aligned}
v & := \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia) - \frac{1}{2}(C_I d^{(4)}\overline{C}_J - \overline{C}_I d^{(4)}C_J) \delta^{IJ} \right), \\
u_I & := \frac{e^{\Phi^{(4)}}}{\sqrt{2}} d^{(4)}C_I, \tag{A.62}
\end{aligned}$$

womit folgt:

$$S_Q = \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} \left\{ v \wedge *(^{(4)}\overline{v} + \overline{\alpha^J_K} \delta^{IK} u_I \wedge *(^{(4)}\overline{u}_J) \right\} \wedge ie. \tag{A.63}$$

Die Metrik  $\overline{\alpha^J_K} \delta^{IK}$  ist durch die Metrik der kompakten Mannigfaltigkeit bestimmt (vergleiche (3.46)).

Der nächste Schritt wäre der Beweis, dass die in (A.62) definierten Formen des Hypermultipletts nach Streichung der Triplets ebenfalls eine quaternionische Struktur bilden, wie es für das universelle Hypermultiplett der Fall ist. Dieser Beweis konnte aus zeitlichen Gründen in dieser Arbeit leider nicht mehr geführt werden.

# Anhang B

## Quaternionische Struktur des universellen Hypermultipletts

In diesem Anhang soll [15] folgend bewiesen werden, dass die Formen des universellen Hypermultipletts eine quaternionische Kählermannigfaltigkeit bilden. Dazu folgen zunächst einige Vorbemerkungen zu allgemeinen Eigenschaften quaternionischer Kählermannigfaltigkeiten.

### B.1 Quaternionische Kählermannigfaltigkeiten

Die Holonomiegruppe der quaternionischen Kählermannigfaltigkeiten ist eine Untergruppe von  $Sp(1) \otimes Sp(n/4)$ .<sup>1</sup> Aus der flachen Metrik in Koordinaten

$$s_{aAbB} := \epsilon_{ab} E_{AB}, \quad (\text{B.1})$$

mit

$$(\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (E_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{\frac{n}{4}} \\ -\mathbb{1}_{\frac{n}{4}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

lässt sich jede Metrik  $h$  einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit durch das Vielbeinfeld  $V_\Gamma^{aA}$  erhalten, wobei die großen griechischen Buchstaben Koordinaten der Mannigfaltigkeit bezeichnen:

$$h_{\Gamma\Theta} = s_{bAcB} V_\Gamma^{aA} V_\Theta^{bB}. \quad (\text{B.3})$$

Für die Inversen gilt  $(\epsilon_{ab})^{-1} = \epsilon^{ab}$ ,  $(E_{AB})^{-1} = E^{AB}$  und  $(V_\Gamma^{aA})^{-1} = V_{aA}^\Gamma$ . In dieser Schreibweise lassen sich die Indizes mit den Matrizen  $\epsilon$  und  $E$  herauf und herunter ziehen. Die

---

<sup>1</sup>Man beachte dass die  $Sp(1)$  isomorph zur  $SU(2)$  ist, und dass die quaternionische Algebra die  $SU(2)$  erzeugt.

Metrik ist, wie für eine Metrik gefordert, symmetrisch in ihren Indizes, denn die Vertauschung der kleinen und großen lateinischen Indizes führt gerade zur Vertauschung der griechischen und liefert genau zwei Minuszeichen, damit gilt:

$$h_{\Gamma\Theta} = s_{bAcB} V_{(\Gamma}^{aA} V_{\Theta)}^{bB}. \quad (\text{B.4})$$

Die Klammer  $(a_1 \dots a_p)$  bedeutet, dass in den  $p$  Indizes symmetrisiert wird, mit der Normierung  $1/p!$ , die dazu führt, dass für einen in allen Indizes symmetrischer Tensor  $F_{(a_1 \dots a_p)} = F_{a_1 \dots a_p}$  gilt. Die Vielbeinformen sind 1-Formen, für die in der Basis gilt:

$$V^{aA} = V_{\Gamma}^{aA} dx^{\Gamma}. \quad (\text{B.5})$$

Aus ihnen lässt sich nun eine  $2 \times 2$  2-Form-Matrix definieren:

$$J^a_b := 2s_{bAcB} V^{aA} \wedge V^{cB}. \quad (\text{B.6})$$

Im Vergleich zu Gleichung (B.4) erhält man die Tensoroeffizienten  $(J^a_b)_{\Gamma\Theta}$  der Basis  $dx^{\Gamma} \wedge dx^{\Theta}$  durch Antisymmetrisierung in den Tangentialraumindizes:

$$(J^a_b)_{\Gamma\Theta} = s_{bAcB} V_{[\Gamma}^{aA} V_{\Theta]}^{bB}. \quad (\text{B.7})$$

Auf jeder quaternionischen Kählermannigfaltigkeit ist eine Konjugation erklärt. Es lässt sich für die Vielbeine immer erreichen, dass die flache Metrik die Konjugation der Vielbeine induziert:<sup>2</sup>

$$s_{aAbB} V^{bB} = \overline{V^{aA}}. \quad (\text{B.8})$$

Damit folgt für die konjugierte Matrix (B.6):

$$\begin{aligned} \overline{J^a_b} &= \overline{2V^{aA} \wedge V^{bB}} \\ &= 2\overline{V^{aA}} \wedge \overline{V^{bB}} = -J^b_a. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Das bedeutet, wird  $J^a_b$  mit einem Vorfaktor  $i$  versehen, so ist die entstehende Matrix  $iJ^a_b$  hermitisch. Des weiteren ist sie, ebenso wie  $J^a_b$  selber, spurlos:

$$\begin{aligned} J^a_a &= 2s_{aAbB} V^{aA} \wedge V^{bB} = -2s_{aAbB} V^{bB} \wedge V^{aA} \\ &= -2s_{bBaA} V^{bB} \wedge V^{aA} = -2s_{aAbB} V^{aA} \wedge V^{bB}, \\ \Rightarrow J^a_a &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Der Vektorraum der spurlosen hermitischen  $2 \times 2$  Matrizen wird durch die Paulimatrizen aufgespannt, die in (2.4) definiert sind. Die Entwicklung in diesen Matrizen definiert einen dreidimensionalen Vektor  $J^I, I = 1, 2, 3$  von 2-Formen mit

$$iJ^a_b = J^I \sigma^I a_b = \begin{pmatrix} J^3 & J^1 - iJ^2 \\ J^1 + iJ^2 & -J^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

---

<sup>2</sup>Der Beweis wird hier nicht geführt, da die Vielbeine in dieser Arbeit explizit konstruiert werden und diese Bedingung für sie gezeigt werden kann.

Nun soll gezeigt werden, dass die  $J^I$  die quaternionische Algebra erfüllen. Die Komponenten des dreidimensionalen Vektors erhält man durch Multiplikation der zugehörigen  $\sigma^I$  Matrix:

$$\begin{aligned} J^I &= i\frac{1}{2}J^a{}_b\sigma^{Ia}{}_b \\ &= -2i\overline{V^{aA}} \wedge (\sigma^{Ia}{}_b V^{aA}). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Nun wird das Produkt der  $J^I$  berechnet. Dies geschieht, indem die Tensorcoeffizienten der Formen mit den Indizes der Mannigfaltigkeit als Matrizen aufgefasst werden, die wie üblich multipliziert werden:

$$J^I{}_{\Gamma}{}^{\Theta} J^J{}_{\Theta}{}^{\Xi} = -\frac{1}{4}\sigma^I{}_{ab}\sigma^J{}_{cd}(J^{ab})_{\Gamma}{}^{\Theta}(J^{cd})_{\Theta}{}^{\Xi}. \quad (\text{B.13})$$

Dafür muss also zunächst die Multiplikation der Matrix  $J^{ab}$  berechnet werden. Dies soll nun geschehen. Mit Gleichung (B.7) folgt:

$$\begin{aligned} (J^{ab})_{\Gamma}{}^{\Theta}(J^{cd})_{\Theta}{}^{\Xi} &= E_{AB}E_{CD}(V_{\Gamma}^{aA}V^{bB\Theta})(V_{\Gamma}^{cC}V_{\Theta}^{dD}) \\ &= \epsilon^{bf}E_{CD}(V_{\Gamma}^{aA}V_{fA}^{\Theta})(V_{\Gamma}^{cC}V_{\Theta}^{dD}). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Wegen  $V^{aA\Gamma}V_{bB\Gamma} = \delta_b^a\delta_B^A$  folgt:

$$\begin{aligned} (J^{ab})_{\Gamma}{}^{\Theta}(J^{cd})_{\Theta}{}^{\Xi} &= \epsilon^{bc}E_{AD}V_{\Gamma}^{aA}V_{\Xi}^{dD} + \epsilon^{bd}E_{AC}V_{\Gamma}^{aA}V_{\Xi}^{cC} \\ &\quad \epsilon^{ac}E_{BD}V_{\Gamma}^{bB}V_{\Xi}^{dD} + \epsilon^{ad}E_{BC}V_{\Gamma}^{bB}V_{\Xi}^{cC}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Wegen Gleichung (B.4) und (B.7) gilt aber:

$$E_{AB}V_{\Gamma}^{aA}V_{\Theta}^{bB} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ab}h_{\Gamma\Theta} + \frac{1}{2}J_{\Gamma\Theta}^{ab}. \quad (\text{B.16})$$

Diese Relation wird nun für alle vier Summanden in (B.15) eingesetzt, woraus sich

$$\begin{aligned} (J^{ab})_{\Gamma}{}^{\Theta}(J^{cd})_{\Theta}{}^{\Xi} &= -(\epsilon^{ac}\epsilon^{bd} + \epsilon^{ad}\epsilon^{bc})h_{\Gamma\Xi} \\ &\quad -\frac{i}{2}(\epsilon^{ac}J_{\Gamma\Xi}^{bd} + \epsilon^{ad}J_{\Gamma\Xi}^{bc} + \epsilon^{bc}J_{\Gamma\Xi}^{ad} + \epsilon^{bd}J_{\Gamma\Xi}^{ac}) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

ergibt. Unter Beachtung, dass für die Metrik  $h_{\Gamma\Theta}h^{\Theta\Xi} = \delta_{\Gamma}^{\Xi}$  gilt, folgt damit für (B.13) schließlich:

$$\begin{aligned} J^I{}_{\Gamma}{}^{\Theta} J^J{}_{\Theta}{}^{\Xi} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{db}\epsilon^{ac}\sigma_{ba}^I\sigma_{cd}^J\delta_{\Gamma}^{\Xi} + \frac{1}{2}\sigma^{Ia}{}_b\sigma^{Jb}{}_c(J_a{}^c)_{\Gamma}{}^{\Xi} \\ &= -\delta^{IJ}\delta_{\Gamma}^{\Xi} + \epsilon^{IJK}J_{\Gamma}^K{}^{\Xi}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Die Formen  $J^I$  erfüllen damit die quaternionische Algebra.



Die lokale  $Sp(1) \otimes Sp(n/4)$  Symmetrie führt zu einem entsprechenden Zusammenhang  $W$ , der sich als

$$W^{aA}{}_{bB} = \delta_B^A p^a{}_b + \delta_b^a q^A{}_B \quad (\text{B.19})$$

schreiben lässt, wobei  $p$  der zu  $Sp(1)$  und  $q$  der zu  $Sp(n/4)$  gehörende Zusammenhang ist. Das Vielbein muss kovariant konstant unter diesen Zusammenhängen sein:

$$0 \stackrel{!}{=} \mathcal{D}V^{aA} = dV^{aA} + W^{aA}{}_{bB} \wedge V^{bB}. \quad (\text{B.20})$$

Der Zusammenhang  $W$  ist offensichtlich eine 1-Form, denn da die äußere Ableitung die Stufe um 1 erhöht, muss das Dachprodukt mit  $W$  dies ebenfalls tun. Nun lassen sich auch die kovarianten Ableitungen der quaternionischen Strukturen berechnen. Dabei wird ausgenutzt, dass mit (B.7) ein Objekt definiert wurde, das keine  $Sp(n/4)$  Struktur mehr trägt, da es keine nicht kontrahierten großen lateinischen Indizes mehr beinhaltet.  $J^{ab}$  transformiert damit als Singlet unter dem Zusammenhang  $q^A{}_B$ . Die kovariante Ableitung für  $J^{ab}$  lautet also:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}J^{ab} &= 2\mathcal{D}(E_{AB}V^{aA} \wedge V^{bB}) = 2\mathcal{D}(V^{aA} \wedge V^b{}_A) \\ &= 2\mathcal{D}V^{aA} \wedge V^b{}_B - 2V^{aA} \wedge \mathcal{D}V^b{}_A \\ &= 2(dV^{aA} + p^a{}_c \wedge V^{cA} + q^A{}_C \wedge V^{aC}) \wedge V^b{}_A \\ &\quad - 2V^{aA} \wedge (dV^b{}_A + p^b{}_c \wedge V^c{}_A + q^C{}_A \wedge V^b{}_C) \\ &= dJ^{ab} + 2(p^a{}_c \wedge V^{cA} \wedge V^b{}_A - p^b{}_c \wedge V^{aA} \wedge V^c{}_A) \\ &\quad + 2(q^A{}_C \wedge V^{aC} \wedge V^b{}_A - q^C{}_A \wedge V^{aA} \wedge V^b{}_C). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Die beiden letzten Terme heben sich gegenseitig weg, womit die Invarianz unter  $Sp(n/4)$  gezeigt wurde. Für den Rest ergibt sich nun:

$$0 = \mathcal{D}J^{ab} = dJ^{ab} + p^a{}_c \wedge J^{cb} - p^b{}_c \wedge J^{ac}. \quad (\text{B.22})$$

Nach Multiplikation mit den  $\sigma^I$  Matrizen erhält man die gewünschte kovariante Ableitung der  $J^I$  nach Definition (B.12):

$$0 = \mathcal{D}J^I = dJ^I - i\epsilon^{IJK} \sigma_{ab}^J p^{ab} \wedge J^K, \quad (\text{B.23})$$

weil aber  $Sp(1)$  isomorph zu  $SU(2)$  ist, und der  $Sp(1)$  Zusammenhang wegen seiner Indexstruktur eine  $2 \times 2$  Matrix sein muss, kann er wie  $J^{ab}$  in den  $\sigma^I$  Matrizen entwickelt werden. In Gleichung (B.23) stehen bereits die Entwicklungskoeffizienten des Zusammenhanges, denn analog zu Gleichung (B.12) lassen sie sich wie folgt definieren:

$$p^I := -\frac{i}{2} \sigma_{ab}^I p^{ab}. \quad (\text{B.24})$$

In dieser Schreibweise lautet Gleichung (B.23):

$$0 = \mathcal{D}J^I = dJ^I + 2\epsilon^{IJK} p^J \wedge J^K. \quad (\text{B.25})$$

Es lässt sich zeigen [10], dass die Feldstärketensoren  $F^I$  des  $Sp(1)$  Zusammenhanges proportional zu  $J^I$  sind, das heißt, dass mit

$$F^I = dp^I + i\epsilon^{IJK}p^J \wedge p^K \quad (\text{B.26})$$

für  $J^I$

$$F_{\mu\nu}^I \propto J_{\mu\nu}^I \quad (\text{B.27})$$

gilt.

Es gilt ebenfalls: Ist Gleichung (B.27) und Gleichung (B.18) erfüllt, so handelt es sich um eine quaternionische Kählermannigfaltigkeit. Diese Bedingungen werden im folgenden Abschnitt für das universelle Hypermultiplett gezeigt.

## B.2 Beweis zur fast quaternionischen Struktur des universellen Hypermultipletts

Der Beweis, dass die in Abschnitt 3.4 gefundenen Felder des universellen Hypermultipletts mit der dort gefundenen Metrik die fast quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden soll nun geführt werden. Die Vorgehensweise wurde aus [15] übernommen.

Für den Beweis werden die allgemeinen Konstruktionen aus vorigem Abschnitt in der in (3.65) gefundenen Basis

$$\begin{aligned} v &= *^{(6)}\tilde{v} = \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C} \right), \\ \bar{v} &= -*^{(6)}\bar{\tilde{v}} = \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2} \left( d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} - ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - \bar{C}d^{(4)}C \right), \\ u &= *^{(6)}(\tilde{u} \wedge \bar{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi^{(4)}} d^{(4)}C, \\ \bar{u} &= *^{(6)}(\bar{\tilde{u}} \wedge \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi^{(4)}} d^{(4)}\bar{C} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

konstruiert. Die Metrik in (3.66) lautet

$$S_Q = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} (v \wedge *(\bar{v}) + u \wedge *(\bar{u})). \quad (\text{B.29})$$

und entspricht der in (B.4) gegebenen. Dazu wird ein Vektor  $V$ , das Vielbein, und eine Matrix  $s$ , die flache Metrik, definiert:

$$V := \begin{pmatrix} v \\ u \\ -\bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad s := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

Dadurch lässt sich (B.29) umschreiben:

$$S_Q = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} V \wedge *(s \circ V). \quad (\text{B.31})$$

Die Matrix  $s$  ist nun aber nichts anderes, als die Fläche  $Sp(1) \otimes Sp(1)$  Metrik aus Gleichung (B.1). Um dies einzusehen, werden, wie in (B.1) Objekte mit der  $Sp(1) \otimes Sp(1)$  Indexstruktur gesucht. Genauer bedeutet das, dass die Objekte aus (B.30) einen Doppelindeks erhalten, wobei die kleinen und die großen lateinischen Buchstaben je für eine der  $Sp(1)$  Darstellungen steht. Die Fläche Metrik  $s$  lässt sich dann in der Basis schreiben als  $s = \epsilon \otimes E$ :<sup>3</sup>

$$s_{aAbB} = \epsilon_{ab} E_{AB}, \quad \text{mit } \epsilon = E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

Diese Wahl bedeutet für die Indexstruktur von  $V$ :

$$V^{aA} = \begin{pmatrix} v & u \\ -\bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

wobei  $a, b, \dots = 1, 2$  und  $A, B, \dots = 1, 2$  gilt. Mit diesen Definitionen folgt für (B.31):

$$S_Q = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} V \wedge *(s \circ V) = -\frac{1}{\kappa_{10}^2} \int_{\mathcal{M}} V^{aA} \wedge *(\epsilon_{ab} E_{AB} V^{bB}). \quad (\text{B.34})$$

Nun lässt sich die  $2 \times 2$  2-Form-Matrix (B.6) durch die Formen (B.28) des universellen Hypermultipletts definieren:

$$\begin{aligned} (J^{ab}) &= (E_{AB} V^{aA} \wedge V^{bB}) = \begin{pmatrix} 2v \wedge u & v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u} \\ v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u} & 2\bar{v} \wedge \bar{u} \end{pmatrix}, \\ \implies (J^a_b) &= \begin{pmatrix} v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u} & 2\bar{v} \wedge \bar{u} \\ -2v \wedge u & -v \wedge \bar{v} - u \wedge \bar{u} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Die Bedingung (B.9) der Antihermitizität ist wegen  $\overline{J^a_b} = -J^a_b$  ebenfalls erfüllt, ebenso wie die der Spurlosigkeit. Damit lässt sich  $iJ^a_b$  in den Paulimatrizen  $\sigma^I$  entwickeln:  $J^I = iJ^a_b \sigma^I{}^a_b$ . Der Vergleich mit (B.11) zeigt:

$$(J^I) = i \begin{pmatrix} (\bar{v} \wedge \bar{u} - v \wedge u) \\ i(\bar{v} \wedge \bar{u} + v \wedge u) \\ v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

Diese drei 2-Formen erfüllen nach Gleichung (B.18) die quaternionische Algebra. Nun bleibt zu zeigen, dass die Krümmungstensoren des  $Sp(1)$  Zusammenhanges proportional zu den

<sup>3</sup> $\epsilon$  und  $E$  sind die flachen  $Sp(1)$  Metriken aus Anhang B.1.

$J^I$  sind, das heißt dass sie Gleichung (B.27) erfüllen. Dazu wird zunächst der  $Sp(1)$  Zusammenhang  $p^a{}_b$  durch die Forderung des kovariant konstanten Vielbeins  $V^{aA}$  unter der in (B.20) definierten kovarianten Ableitung bestimmt, nach der gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \mathcal{D}V^{aA} = d^{(4)}V^{aA} + p^a{}_b \wedge V^{bA} + q^A{}_B \wedge V^{aB}. \quad (\text{B.37})$$

Koordinatenunabhängig bedeutet das:

$$-d^{(4)}V = (p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes q) \wedge V, \quad (\text{B.38})$$

wobei in diesem speziellen Fall des universellen Hypermultipletts im Vergleich zum allgemeinen Fall in Abschnitt B.1 sowohl  $p$  als auch  $q$   $Sp(1)$  Zusammenhänge sind.

Bisher wurde kein Bezug auf die spezielle Form der Formen  $u$ ,  $v$ ,  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  genommen. Dies ändert sich nun, da nach (B.37) die äußeren Ableitungen betrachtet werden müssen. Sie lassen sich mit den Definitionen der Formen (B.28) berechnen:

$$\begin{aligned} d^{(4)}v &= d^{(4)}\left(\frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2\kappa_{10}}\left(d^{(4)}(e^{-2\Phi^{(4)}} + ia + \frac{1}{2}C\bar{C}) - Cd^{(4)}\bar{C}\right)\right) \\ &= 2d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge v - \frac{e^{2\Phi^{(4)}}}{2\kappa_{10}}d^{(4)}C \wedge d^{(4)}\bar{C} \\ &= 2d^{(4)}\Phi^{(4)} \wedge v - u \wedge \bar{u}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Dabei wurde die Bedingung  $(d^{(4)})^2 = 0$  benutzt. Die Berechnung der anderen Formen folgt analog, und mit

$$d^{(4)}\Phi^{(4)} = -\frac{1}{2}(v + \bar{v}) \quad (\text{B.40})$$

lassen sich alle Ableitungen ausschließlich durch die in (B.28) definierten Formen ausdrücken:

$$\begin{aligned} d^{(4)}v &= -(v + \bar{v}) \wedge v - u \wedge \bar{u}, \\ d^{(4)}\bar{v} &= -(v + \bar{v}) \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u}, \\ d^{(4)}u &= -\frac{1}{2}(v + \bar{v}) \wedge u, \\ d^{(4)}\bar{u} &= -\frac{1}{2}(v + \bar{v}) \wedge \bar{u}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Damit lässt sich Gleichung (B.37) lösen. Die  $Sp(1)$  Zusammenhänge  $p$  und  $q$  werden dabei in den  $\sigma^I$ ,  $I = 1, 2, 3$  Matrizen entwickelt, was wegen  $Sp(1) \simeq SU(2)$  möglich ist. Die Entwicklung liefert:

$$-d^{(4)}V^{aA} = \left(\delta_{B^I}^A p^I \sigma^{Ia}{}_b + \delta_b^a q^I \sigma^{IA}{}_B\right) \wedge V^{bB}. \quad (\text{B.42})$$

Um eine Übersicht über die Rechnung zu ermöglichen, soll der Zusammenhang in einem zweidimensionalen Zahlenschema, also als Matrix angegeben werden, das heißt der Doppelindex wird zu einem einfachen Index.<sup>4</sup> Dazu wird auf die Schreibweise in (B.30) zurückgegriffen, in der  $V = (V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22})^t$  galt. Die koordinatenunabhängige Schreibweise (B.38) lautet in diesem Fall:

$$-d^{(4)}V = (p^I \sigma^I \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes q^I \sigma^I) \wedge V. \quad (\text{B.43})$$

Die Paulimatrizen in der hier benutzten Konvention sind in Gleichung (2.4) gegeben, mit ihnen folgt für Gleichung (B.43) (zusammen mit den Ergebnissen (B.30) für das Vielbein):

$$-d^{(4)} \begin{pmatrix} v \\ u \\ -\bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -(q^3 + p^3) & q^1 + iq^2 & p^1 + ip^2 & 0 \\ q^1 - iq^2 & -p^3 + q^3 & 0 & p^1 + ip^2 \\ p^1 - ip^2 & 0 & p^3 - q^3 & q^1 + iq^2 \\ 0 & p^1 - ip^2 & q^1 - iq^2 & p^3 + q^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v \\ u \\ -\bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.44})$$

In Anhang (B.22) wurde gezeigt, dass nur der Zusammenhang  $p$  für die quaternionische Struktur eine Rolle spielt. Daher können  $q^1$  und  $q^2$  frei gewählt und zu Null gesetzt werden<sup>5</sup>. Mit (B.41) lässt sich eine Lösung angeben:

$$\begin{aligned} -d^{(4)}V &= \begin{pmatrix} -\bar{v} \wedge v - u \wedge \bar{u} \\ -\frac{1}{2}(v + \bar{v}) \wedge u \\ -\frac{1}{2}(v + \bar{v}) \wedge \bar{u} \\ -v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u} \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} -v + \bar{v} & 0 & -u & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(v - \bar{v}) & 0 & -u \\ \bar{u} & 0 & \frac{1}{2}(\bar{v} - v) & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & v - \bar{v} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v \\ u \\ -\bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Der Vergleich von (B.44) mit (B.45) liefert schließlich:

$$(p^I) = i \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-\bar{u} + u) \\ i\frac{1}{2}(\bar{u} + u) \\ \frac{1}{4}(v - \bar{v}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.46})$$

Die äußeren vierer Ableitungen des Zusammenhanges  $p^I$  folgen mit (B.41), für sie ergibt sich:

$$d^{(4)}(p^I) = i \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(v + \bar{v}) \wedge (\bar{u} - u) \\ -i\frac{1}{4}(v + \bar{v}) \wedge (\bar{u} + u) \\ -\frac{1}{2}(\bar{v} \wedge v + u \wedge \bar{u}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.47})$$

<sup>4</sup>Die Berechnung mit dem Doppelindex liefert natürlich das selbe Ergebnis, aber die Rechenschritte wären schwerer nachvollziehbar.

<sup>5</sup> $q^3$  wird später gewählt, wenn eine Lösung der Gleichung angegeben wird; es wird dann durch  $p^3$  festgelegt.

Die in (B.26) gegebene Krümmung des  $Sp(1)$  Zusammenhanges lässt sich mit (B.46) und (B.47) nach der dort angegebenen Formel

$$F^I = d^{(4)}p^I + i\epsilon^{IJK}p^J \wedge p^K \quad (\text{B.48})$$

berechnen. Es folgt:

$$(F^I) = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v \wedge u + \bar{u} \wedge \bar{v}) \\ -i\frac{1}{2}(v \wedge u + \bar{v} \wedge \bar{u}) \\ -\frac{1}{2}(v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

Die Krümmung (B.49) ist proportional zu der in (B.36) gefundenen quaternionischen Struktur. Damit ist bewiesen, dass die Formen des universellen Hypermultipletts die fast quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden.

# Anhang C

## Gruppentheorie

### C.1 Einführung in Notation und Konvention

Dieses Kapitel richtet sich nach [14] und fasst daraus für diese Arbeit relevante Ergebnisse zusammen. Mit den eingeführten Begriffen werden in Abschnitt C.6 Berechnungen einiger für diese Arbeit wichtiger Darstellungen behandelt.

Im Folgenden werden ausschließlich einfache Lie-Algebren betrachtet, die mit  $G$  bezeichnet werden. Die Generatoren einer solchen Algebra  $G$  lassen sich immer in einer bestimmten Basis in folgende zwei Mengen aufteilen: Die eine besteht aus der maximalen Anzahl<sup>1</sup> untereinander vertauschender Generatoren  $H_i$ , sie bilden die **Cartan-Subalgebra**. Für die Vertauschungsrelationen der Generatoren  $E_\alpha$  der anderen gilt

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha \quad \forall i, \alpha, \end{aligned} \tag{C.1}$$

sie werden Leiteroperatoren genannt. Die so definierte Basis heißt **Cartan-Weyl-Basis**.

Mit folgenden Definition lässt sich eine Algebra genauer klassifizieren:

**Def C.1** (Dimension von  $G$  ( $\dim(G)$ )). *Die Anzahl linear unabhängiger Generatoren einer einfachen Lie Algebra  $G$  heißt Dimension von  $G$ .*

Beispielsweise ist  $\dim(SU(3))=8$ ,  $\dim(SU(4))=15$  und  $\dim(SO(8))=28$ .

**Def C.2** (Rang  $l$  von  $G$ ). *Die Dimension der Cartan-Subalgebra von  $G$  heißt Rang  $l$  von  $G$ .*

Für  $SU(3)$ ,  $SU(4)$  und  $SO(8)$  gilt  $l = 2$ ,  $l = 3$  und  $l = 4$ . Für die Indizes gilt mit diesen Definitionen:  $i, j = 1, \dots, l$  sowie  $\alpha = 1, \dots, (\dim(G) - l)$ .

Jeder Generator  $H_i$  definiert nach (C.1) für jeden Generator  $E_\alpha$  ein  $l$ -Tupel von Zahlen  $\vec{\alpha}$ , das als Vektor in einem  $l$ -dimensionalen Vektorraum aufgefasst werden kann, der **Wurzelraum** genannt wird. Entsprechend werden die  $\vec{\alpha}$  Wurzeln genannt. Man beachte,

---

<sup>1</sup>Maximal bedeutet, dass keine andere Basis mit mehr vertauschenden Generatoren existiert.

dass  $\alpha$  sowohl einen Vektor  $\vec{\alpha}$ , als auch einen Index  $\alpha$  bezeichnet. Der Index durchläuft alle Vektoren  $\vec{\alpha}$  in einer frei wählbaren, aber festen Reihenfolge.<sup>2</sup> Die Gesamtheit aller  $\vec{\alpha}$  (und die  $l$ -fach entarteten Nullvektoren) charakterisieren genau eine Gruppe, da sie zu den Kommutationsrelationen (C.1) gleichwertig sind. Die Komponenten  $\alpha_i$  der Wurzeln heißen **Strukturkonstanten** von  $G$  in der Cartan-Weyl-Basis. Physikalisch entsprechen die Generatoren  $H_i$  den Operatoren des Hilbertraums, die per Eigenwertgleichung die Eigenwerte, also die Quantenzahlen, liefern. Dies ist folgendermaßen einzusehen: Vermöge der Vertauschungsrelation (C.1) der  $H_i$  lassen sich Vektoren  $|\vec{\lambda}\rangle$  des Hilbertraumes (Repräsentationsraum) finden, auf dem die Gruppe operiert, die Eigenvektoren aller  $H_i$  (nicht jedoch zwangsläufig auch eine Basis des Hilbertraumes) sind:

$$H_i |\vec{\lambda}\rangle = \lambda_i |\vec{\lambda}\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Der Vektor  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  ist ebenfalls ein Vektor der Dimension  $l$  und wird **Gewicht** des Repräsentationsvektors  $|\vec{\lambda}\rangle$  genannt. Mit (C.1) lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} (H_i E_\alpha - E_\alpha H_i) |\vec{\lambda}\rangle &= \alpha_i E_\alpha |\vec{\lambda}\rangle, \\ \Rightarrow H_i (E_\alpha |\vec{\lambda}\rangle) &= (\lambda_i + \alpha_i) E_\alpha |\vec{\lambda}\rangle, \\ \Rightarrow E_\alpha |\vec{\lambda}\rangle &= |\vec{\lambda} + \vec{\alpha}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$E_\alpha$  erhöht oder erniedrigt also das Gewicht um den Festen Vektor  $\vec{\alpha}$ , indem  $\vec{\alpha}$  vektoriell zu  $\vec{\lambda}$  addiert wird. Da alle  $H_i$  untereinander vertauschen, entspricht ihre Operation einer Addition des Nullvektors, die Quantenzahlen werden also nicht verändert.

Was im vierdimensionalen Fall die Helizität eines Feldes war, ist allgemeinen Fall also ein Vektor. Da die Helizitätsgruppe in zehn Dimensionen nach Kapitel 2.2 der  $SO(8)$  entspricht und für die  $SO(8)$   $l = 4$  gilt, ist die Helizität in zehn Dimensionen ein vierdimensionaler Vektor.

Ist  $\vec{\alpha}$  eine Wurzel, so ist mit  $H^\dagger = H$  wegen

$$\begin{aligned} [H_i, E_\alpha]^\dagger &= \alpha_i E_\alpha^\dagger, \\ [H_i, E_\alpha^\dagger] &= -\alpha_i E_\alpha^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

auch  $-\vec{\alpha}$  Wurzel zu  $E_{-\alpha} := E_\alpha^\dagger$ . Das bedeutet, dass es zu jedem Auf- auch einen Absteigeoperator gibt, was zur Folge hat, dass  $(\dim(G) - l)$  immer eine gerade Zahl ist.

Man kann zeigen [8, 14], dass sich folgende weitere Bedingungen erfüllen lassen:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \quad (\text{C.5})$$

<sup>2</sup>Ebenso definieren die  $H_i$  Wurzeln für jedes  $H_j$ , die jedoch in der Cartan-Weyl-Basis wegen (C.1) Nullvektoren entsprechen, da sie vertauschen und daher stillschweigend bei allen Betrachtungen einbezogen werden; sie sind die einzig entarteten Wurzeln in der Cartan-Weyl-Basis.



Die  $\alpha^i$  werden aus den  $\alpha_i$  durch einen metrischen Tensor gebildet, der durch die Algebra (C.1) bestimmt ist; dieser ist beispielsweise in der  $SU_2$  wegen  $[J_+, J_-] = 2J_3$  gleich  $\frac{1}{2}$ . Die anderen  $E_\alpha$  genügen den Kommutationsrelationen

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \quad \text{mit } \alpha + \beta \neq 0. \quad (\text{C.6})$$

Die Dimension  $l$  des Wurzelraumes ist kleiner, als die Anzahl der Leiteroperatoren. Um aus den Wurzeln eine Basis des Wurzelraumes zu erhalten, werden aus ihnen  $l$  ausgewählt.<sup>3</sup> Bettet man die  $\vec{\alpha}$  in einen euklidischen Vektorraum mit kartesischer Basis ein, so lassen sich nach folgenden Prinzip  $l$  Wurzeln auswählen, die eine Basis bilden. Diese Wurzeln nennt man **einfache Wurzeln**; die Gesamtheit der einfachen Wurzeln heißt **Wurzelsystem**. Für die Auswahl der einfachen Wurzeln ist folgende Definition notwendig:

**Def C.3** (Positivität(Negativität) von  $\vec{\alpha}$ ). *Eine Wurzel  $\vec{\alpha}$  heißt positiv(negativ), wenn bei einer gewählten kartesischen Basis des Wurzelraumes die erste Komponente ungleich Null positiv(negativ) ist. (Die Anzahl der positiven entspricht der Anzahl der negativen Wurzeln.)*

Die  $l$  einfachen Wurzeln werden aus den positiven Wurzeln gewählt, so dass sie linear unabhängig sind und alle anderen Wurzeln durch Linearkombination erzeugen. Graphisch lässt sich der Wurzelraum nur bis  $l = 3$  darstellen. Für die  $SU(3)$  gilt  $l = 2$ , daher lässt sich das eben Gesagte gut an ihrem Wurzelraum veranschaulichen. Dieser ist in Abbildung C.1 angegeben.

## C.2 Dynkin Diagramme

Man kann zeigen, dass bei jeder einfachen Algebra  $G$  die Wurzeln maximal zwei unterschiedliche Längen haben können, und dass zwischen den einfachen Wurzeln nur Winkel von  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  und  $150^\circ$  vorkommen. Ist die Struktur des Wurzelraumes, also Winkel und Längen der einfachen Wurzeln, bekannt, so auch die Gruppe. Da aber nur endlich viele Winkel und Längen existieren, lässt sich diese Struktur folgendermaßen symbolisch darstellen: Jede einfache Wurzel wird durch einen Kreis  $\circ$  dargestellt. Kommen zwei unterschiedliche Längen vor, wird für die kürzeren ein ausgefüllter Kreis  $\bullet$  benutzt. Die Winkel zwischen zwei einfachen Wurzeln werden durch Linien zwischen den Punkten, die den einfachen Wurzeln entsprechen, angegeben. Ihr Längenverhältnis ergibt sich aus ihrem Winkel (Tabelle C.1). Für Beispiele siehe Abbildungen C.1 bis C.3.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Die Basis ist normalerweise nicht orthogonal.

<sup>4</sup>Eine halbeinfache Algebra besteht in dieser Schreibweise aus mehreren unzusammenhängenden Dynkin-Diagrammen einfacher Algebren.

Symbol	Winkel	Längenverhältnis
	90°	kein festes Verhältnis
—	120°	1
==	135°	$1/\sqrt{2}$
===	150°	$1/\sqrt{3}$

Tabelle C.1: Dynkin

Es lässt sich eine Matrix erstellen, die äquivalent zu den Dynkin-Diagrammen ist, da sie ebenfalls das Längen und Winkelverhältnis bestimmt. Sie ist für spätere Rechnungen von Bedeutung:

$$A_{IJ} := 2 \frac{(\vec{\alpha}_I, \vec{\alpha}_J)}{(\vec{\alpha}_J, \vec{\alpha}_J)} \quad I, J = 1, \dots, l. \quad (\text{C.7})$$

Die Klammer  $(\ , \ )$  bezeichnet das natürliche Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^l$  und die  $\vec{\alpha}_I$  die  $l$  einfachen Wurzeln. Die längeren Wurzeln sind per Konvention auf 2 normiert. Die so definierte Matrix heißt **Cartan-Matrix**. Die Cartan-Matrizen für  $SU(3)$ ,  $SU(4)$  und  $SO(8)$  sind in (C.19), (C.22) und (C.26) angegeben.

### C.3 Erzeugung von Gewichtsdiagrammen irreduzibler Darstellungen

Zur Bestimmung des Quantenzahlgehalts einer Darstellung von  $G$  wird hier die Vorgehensweise (ohne Beweise) eingeführt. Dafür sind folgende Definitionen zweckmäßig:

**Def C.4** (Dimension  $n$  einer irreduziblen Darstellung). *Können die Generatoren von  $G$  durch  $n \times n$  Matrizen dargestellt werden, die auf einem  $n$ -dimensionalen Hilbertraum operieren, so heißt  $n$  die Dimension der Darstellung (es wird nicht notwendiger Weise jede natürliche Zahl angenommen).*

**Def C.5** (Gewichtsraum  $\mathbb{W}$ ). *Durch Wirken der Leiteroperatoren auf den Grundzustand werden verschiedene mögliche Gewichtsvektoren erzeugt (siehe (C.3)), von denen die einmalige Wirkung des Leiteroperators auf den Grundzustand mit dem Operator selbst identifiziert werden kann. Der Raum aus diskreten Punkten von Gewichtsvektoren wird Gewichtsraum  $\mathbb{W}$  genannt. In ihm bilden die einfachen Wurzeln eine nicht kartesische Basis.*

Der gesamte Gewichtsraum wird durch die einfachen Wurzeln aufgespannt, also wird jeder Punkt durch Addition oder Subtraktion der einfachen Wurzeln erreicht. Die Basis, in der die diskreten Punkte durch Einheiten der einfachen Wurzeln angegeben wird heißt **duale Basis**. Eine graphische Darstellung des Wurzelraumes der  $SU(3)$  ist in Abbildung C.1 als Beispiel angegeben.

**Def C.6** (Höhe eines Gewichtes (einer Wurzel)). *Der **Stufen-Vektor**  $\vec{R}$  einer Algebra wird durch*

$$R_I := 2 \sum_J (A^{-1})_{IJ} \quad (\text{C.8})$$

definiert. Durch ihn lässt sich mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  jedem Gewichtsvektor  $\vec{\lambda}$  die Höhe  $T(\vec{\lambda})$  zuordnen:

$$T(\vec{\lambda}) := (\vec{R}, \vec{\lambda}). \quad (\text{C.9})$$

Analog folgt die Höhe einer Wurzel.

Die Stufen-Vektoren für  $SU(3)$ ,  $SU(4)$  und  $SO(8)$  sind in (C.19), (C.22) und (C.26) angegeben.

Der  $n$ -dimensionale Hilbertraum, auf dem die  $n$ -dimensionale Darstellung operiert, wird durch  $n$  Basisvektoren aufgespannt, von denen jeder per Konstruktion nach Gleichung (C.2) ein Eigenvektor aller  $H_i$  ist und daher einen Gewichtsvektor der Dimension  $l$ , der den Quantenzahlen entspricht, trägt. Man bekommt notwendiger Weise  $n$  Gewichtsvektoren  $\vec{\lambda}_i$   $i = 1, \dots, n$ , deren zugehörige Hilbertraumvektoren  $|\vec{\lambda}_i\rangle$  entartet sein können. Zu jeder Darstellung gehören also Hilbertraumvektoren mit bestimmten Quantenzahlen. Der Gehalt der Quantenzahlen einer Darstellung wird in Folgendem angegeben. Dazu folgt zunächst ein Theorem, mit dem sich alle Darstellungen erhalten lassen:

**Theorem 1** (Theorem (Dynkin)). *Zu jeder Darstellung gehört genau ein höchstes Gewicht, das durch  $\vec{\Lambda}$  gekennzeichnet wird, das heißt ein Gewicht höchster Stufe  $T(\vec{\Lambda}) > T(\vec{\lambda}_i) \forall \vec{\lambda}_i \neq \vec{\Lambda}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , aus dem alle anderen Gewichte  $\vec{\lambda}_i$  durch Subtraktion der einfachen Wurzeln gebildet werden. Dabei sind alle Kombinationen, bei denen*

$$\left| (\vec{R}, \vec{\lambda}_i) \right| \leq (\vec{R}, \vec{\Lambda}) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{C.10})$$

erfüllt ist Gewichte der Darstellung. In der Dynkin-Basis durchläuft jede Vektorkomponente des höchsten Gewichts alle natürlichen Zahlen und zu jeder Kombination gehört genau eine Darstellung.

Es ist daher äußerst zweckmäßig, die Dynkin-Basis zu verwenden, da nach dem Gesagten zu **jedem** Vektor der Form  $(m_1, \dots, m_l)$ ,  $m_k \in \mathbb{N} \forall k = 1, \dots, l$  **genau eine** Darstellung gehört, und **alle** Darstellungen durch diese Vektoren erzeugt werden. Die Dynkin-Basis ist definiert durch:

$$\alpha_I^D := \sum_J \frac{2A_{IJ}}{(\alpha_J, \alpha_J)} \alpha_J^{dual}, \quad (\text{C.11})$$

wobei  $\alpha_J^{dual}$  in der oben beschriebenen Dualen-Basis, also in Einheiten der einfachen Wurzeln, gegeben ist.

Die Gewichtsräume lassen sich damit sukzessive erzeugen, indem man aus allen möglichen höchsten Gewichten das Gewichtsdiagramm erzeugt. Die Dimension der Darstellung erhält man durch einfaches Abzählen der Gewichtsvektoren. Hilfreich dabei ist, dass das Gewichtsdiagramm Spindelstruktur hat, dass also für alle  $\vec{\lambda}_+$  und  $\vec{\lambda}_-$  für die

$$(\vec{R}, \vec{\lambda}_+) = -(\vec{R}, \vec{\lambda}_-) \quad (\text{C.12})$$

erfüllt ist auch  $\#(\vec{\lambda}_+) = \#(\vec{\lambda}_-)$  gilt (siehe Tabelle C.2).

Die Gewichtsräume einiger in dieser Arbeit wichtiger Darstellungen von Gruppen sind in Anhang C.9 in der Dynkin-Basis angegeben. Die Darstellungen, bei denen es bei den Einträgen des höchsten Gewichts nur einen Eintrag gleich eins und gleich null sonst gibt, heißen **Fundamentaldarstellungen** und die, bei der die Dimension der Dimension der Algebra entspricht heißt **adjungierte Darstellung**. Es kann vorkommen, dass die adjungierte Darstellung gleichzeitig eine Fundamentaldarstellung ist. Darstellungen werden entweder durch ihr höchstes Gewicht  $D(\vec{\Lambda})$  gekennzeichnet, oder, indem ihre Dimension als fett gedruckte Zahl **1, 2, ...** geschrieben wird. Die Kennzeichnung durch  $D(\vec{\Lambda})$  ist wegen Theorem 1 eindeutig. Es kann aber vorkommen, dass mehrere Darstellungen derselben Dimension existieren. In diesem Fall ist zusätzliche Kenntlichmachung notwendig. Es gilt also beispielsweise für eine  $SO(8)$  Darstellung:  $D((1, 0, 0, 0)) \hat{=} \mathfrak{8}_v \neq \mathfrak{8}_c \neq \mathfrak{8}_s$  (siehe Anhang C.9). Meist wird die Schreibweise durch fett gedruckte Zahlen bevorzugt, da sonst leicht der Überblick verloren geht.

## C.4 Bildung von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen

Tensorprodukte zweier irreduzibler Darstellungen  $D(\vec{\Lambda}_a)$  und  $D(\vec{\Lambda}_b)$  sind reduzierbar auf eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen:

$$D(\vec{\Lambda}_a) \times D(\vec{\Lambda}_b) = \sum_{\Gamma} D(\vec{\Lambda}_{\Gamma}). \quad (\text{C.13})$$

Die Tensorproduktbildung und die anschließende Zerlegung in irreduzible Darstellungen erfolgt schrittweise nach folgender Anleitung:

- Die Menge  $\mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_a) \times D(\vec{\Lambda}_b)}$  der Gewichte der Tensorprodukt Darstellung hat die Mächtigkeit  $\dim D(\vec{\Lambda}_a) \cdot \dim D(\vec{\Lambda}_b)$  und wird aus den Gewichtsvektoren

$$\vec{s} \in \mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_a)}, \text{ und } \vec{t} \in \mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_b)} \quad (\text{C.14})$$

durch

$$\vec{s}_m + \vec{t}_n = \vec{u}_{mn} \in \mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_a) \times D(\vec{\Lambda}_b)}, \quad m \in \{1, \dots, \dim D(\vec{\Lambda}_a)\}, n \in \{1, \dots, \dim D(\vec{\Lambda}_b)\} \quad (\text{C.15})$$

gebildet. Das höchste Gewicht  $\vec{\Lambda}_{max}$  in  $\mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_a) \times D(\vec{\Lambda}_b)}$  ist wegen der Linearität die Summe der höchsten Gewichte von  $D(\vec{\Lambda}_a)$  und  $D(\vec{\Lambda}_b)$ , es gilt also  $\vec{\Lambda}_{max} = \vec{\Lambda}_a + \vec{\Lambda}_b$ .

- Zu dem Höchsten Gewicht von  $\mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_a) \times D(\vec{\Lambda}_b)}$  lässt sich nach Abschnitt C.3 der Gewichtsraum der entsprechenden irreduziblen Darstellung bilden, der vollständig in  $\mathbb{W}_{D(\vec{\Lambda}_a) \times D(\vec{\Lambda}_b)}$  enthalten ist. Man subtrahiert die Menge der zu dem höchsten Gewicht gehörenden Gewichte und sucht sich das höchste Gewicht aus der neuen Menge. Nach sukzessiver Wiederholung bleiben keine Gewichtsvektoren übrig. Die subtrahierten irreduziblen Darstellungen sind die in Gleichung (C.13) zu Bestimmenden.

Ein Beispiel der Tensorproduktbildung ist in (C.27) gegeben.

## C.5 Bestimmung von Untergruppen

Ziel dieses Abschnitts ist es Untergruppen  $U_i$  einer Gruppe  $G$ , das heißt

$$G \supset \times_i U_i \quad (\text{C.16})$$

zu bestimmen, was in Abschnitt 2.3.1 und 2.3.2 notwendig ist. Dazu muss eine lineare Abbildung  $M$  gefunden werden, die Gruppenelemente der Gruppe  $G$  mit Gruppenelementen der Untergruppe identifiziert. Das bedeutet auch, dass für jede Darstellung eine lineare Abbildung gefunden werden muss. Da die Darstellung durch einen Vektorraum, den Wurzelraum, gegeben ist, ist die Abbildung eine Matrix. Weil aber durch Linearkombinationen aus der Basis, also den einfachen Wurzeln, alle Darstellungen erzeugt werden, reicht es wegen der Linearität die Matrix für die einfachen Wurzeln zu bestimmen. Dadurch gilt für die Zerlegung in Untergruppen für alle Darstellungen dieselbe Matrix  $M$ :

$$M \circ \vec{\lambda}_{D(\vec{\Lambda}_G)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{\lambda}_{U_i} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \forall \vec{\lambda}_G \text{ der Darstellung } D(\vec{\Lambda}_G). \quad (\text{C.17})$$

Damit eine Zerlegung in eine bestimmte Kombination von Untergruppen  $U_i$  möglich ist, müssen alle  $\dim(D(\vec{\Lambda}_G))$  erhaltenen  $\vec{\lambda}_{U_i}$  in Darstellungen von  $U_i$  aufgeteilt werden können. Eine mögliche Konvention die Matrix  $M$  in der Dynkin-Basis zu bestimmen ist die Forderung, dass das höchste Gewicht  $\vec{\Lambda}_{G_i}$  auf das höchste Gewicht der größten Darstellung  $(\vec{\Lambda}_{U_i})_{max}$  der größten Gruppe  $U_{max}$  projiziert wird, das an die oberste Stelle des Vektors geschrieben wird:

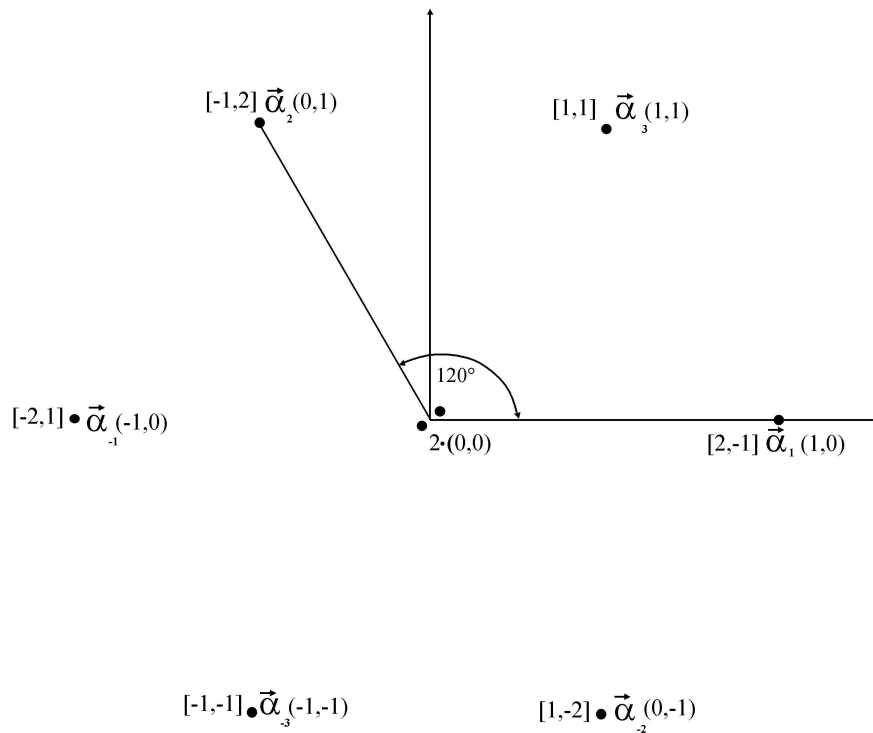
$$M \circ \vec{\Lambda}_{D(\vec{\Lambda}_G)} = \begin{pmatrix} (\vec{\Lambda}_{U_{max}})_{max} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Für Gruppen mit niedrigem Rang lässt sich die Matrix häufig durch einfaches Hinsehen bestimmen. Beispiele für die Matrix  $M$  sind in (C.23) und (C.30) gegeben.

## C.6 Darstellungstheorie einiger Gruppen

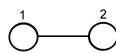
### C.6.1 Darstellungstheorie der $SU(3)$

Der Wurzelraum ist in der Dualen-Basis angegeben, das heißt in Einheiten der einfachen Wurzeln und in der Dynkin-Basis. Die beiden einfachen Wurzeln, die den Raum aufspannen sind  $\vec{\alpha}_1 = (1, 0)$  und  $\vec{\alpha}_2 = (0, 1)$ . Die beiden Generatoren der Cartan-Subalgebra der  $SU(3)$  werden durch die beiden  $\vec{0}$  Vektoren repräsentiert.



**Abbildung C.1:** Wurzelraum der  $SU(3)$ ; Die Duale-Basis der Wurzeln ist durch  $(\ , \ )$  angegeben und die Dynkin-Basis durch  $[ \ , \ ]$

In Übereinstimmung mit Tabelle C.1 beträgt der Winkel zwischen den beiden einfachen Wurzeln  $120^\circ$  und alle Wurzeln haben dieselbe Länge. Dementsprechend lautet das Dynkin-Diagramm:



**Abbildung C.2:** Dynkin Diagramm der  $SU_3$

Die in (C.7) definierte Dynkin-Matrix  $A_{IJ}$  der  $SU(3)$  und der daraus resultierende in

(C.8) definierte Stufen-Vektor  $\vec{R}$  ergeben sich damit zu:

$$(A_{IJ}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{R} = (2, 2). \quad (\text{C.19})$$

Dies lässt sich auch an Abbildung C.1 erkennen, denn beispielsweise gilt

$$A_{12} = 2 \frac{(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)}{(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2)} = -2 \cdot \cos(60^\circ) \frac{(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2)}{(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2)} = -1. \quad (\text{C.20})$$

Dadurch lässt sich der Gewichtsraum nach Abschnitt C.3 zu jedem höchsten Gewicht erstellen. Die einfachen Wurzeln der  $SU(3)$  lauten in der Dynkin-Basis nach (C.11) (und wegen der Normierung der längeren Wurzeln auf 2):

$$\alpha_1^D = A \circ \alpha_1^{dual} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \alpha_2^D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

Der Gewichtsraum zum höchsten Gewicht  $\Lambda = (1, 1)$  (in der Dynkin-Basis) wird hier als Beispiel konstruiert:

Gewicht in der Dynkin-Basis	Höhe des Gewichtes
(1, 1)	4
(-1, 2) (2, -1)	2
(0, 0) (0, 0)	0
(1, -2) (-2, 1)	-2
(-1, -1)	-4

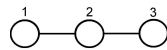
**Tabelle C.2:** Gewichtsraum der  $8_{SU(3)}$  Darstellung in der Dynkin-Basis.

Weitere Gewichtsräume der  $SU(3)$  befinden sich in Anhang C.9.

### C.6.2 Darstellungstheorie der $SO(6) \simeq SU(4)$

**Dynkin-Diagramm:**

Das Dynkin-Diagramm der  $SU(4)$  lautet:<sup>5</sup>



**Abbildung C.3:** Dynkin-Diagramm der  $SO(6) \simeq SU(4)$

<sup>5</sup>Die Äquivalenz der Gruppen  $SO(6)$  und  $SU(4)$  lässt sich auch direkt an ihren identischen Dynkin-Diagrammen erkennen.

Die in (C.7) definierte Dynkin-Matrix  $A_{IJ}$  der  $SU(4)$  und der daraus resultierende in (C.8) definierte Stufen-Vektor  $\vec{R}$  ergeben sich damit zu:

$$(A_{IJ}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{R} = (3, 4, 3). \quad (\text{C.22})$$

### Zerlegung der $SU(4)$ Darstellungen in $SU(3)$ Darstellungen:

Gleichung (C.17) für die Zerlegung  $SU(4) \supset SU(3)$  mit der in Anhang C.9 benutzten Basis der Gewichtsräume lautet:

$$M(SU(4) \supset SU(3)) \circ \vec{\lambda}_{SU(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\lambda}_{SU(4)} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_{SU(3)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.23})$$

dabei ist  $\vec{\lambda}_{SU(3)} \in \mathbb{Z}^2$ . Als Beispiel sei hier die Zerlegung der  $\mathbf{6}_{SU(4)}$  Darstellung, deren Gewichtsraum in Anhang C.9 zu finden ist, angegeben. Die Multiplikation aller Gewichtsvektoren der  $\mathbf{6}_{SU(4)}$  Darstellung mit M liefert:

$$SU(4) \quad \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare \end{matrix} . \quad (\text{C.24})$$

Die mit den offenen Quadrat  $\square$  gekennzeichneten Vektoren bilden den Gewichtsraum der  $\mathbf{3}_{SU(3)}$  Darstellung und die mit dem geschlossenen Quadrat  $\blacksquare$  gekennzeichneten die  $\bar{\mathbf{3}}_{SU(3)}$  Darstellung, wie der Vergleich mit Anhang C.9 zeigt. Das bedeutet:

$$\mathbf{6}_{SU(4)} \longrightarrow \mathbf{3}_{SU(3)} + \bar{\mathbf{3}}_{SU(3)}. \quad (\text{C.25})$$

Die Zerlegungen aller Anderen irreduziblen  $SU(4)$  Darstellungen erfolgen durch dieselbe Vorgehensweise mit derselben Matrix aus Gleichung (C.23).

### C.6.3 Darstellungstheorie der $SO(8)$

#### Dynkin-Diagramm:

Das Dynkin Diagramm der  $SO(8)$  lautet:

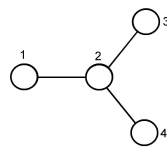


Abbildung C.4: Dynkin-Diagramm der  $SO(8)$



Die in (C.7) definierte Dynkin-Matrix  $A_{IJ}$  der  $SO(8)$  und der daraus resultierende in (C.8) definierte Stufen-Vektor  $\vec{R}$  lauten damit:

$$(A_{IJ}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{R} = (6, 10, 6, 6). \quad (\text{C.26})$$

**Positive Wurzeln der  $SO_8$ :**

Die Wurzeln sind in der Dualen-Basis angegeben.

$$\begin{array}{cccccccc} [1,0,0,0] & [0,1,0,0] & [0,0,1,0] & [0,0,0,1] & [1,1,0,0] & [0,1,1,0] & [0,1,0,1] & [1,1,1,0] \\ [1,1,0,1] & [0,1,1,1] & [1,1,1,1] & [1,2,1,1] & & & & \end{array}$$

Die Anzahl beträgt 12, was mit den negativen Wurzeln zusammen mit den Vektoren der Cartan-Subalgebra 28 ergibt, also die Dimension der  $SO(8)$ . Die positiven Wurzeln entsprechen den Aufsteigeoperatoren der  $SO(8)$ .

**Tensorprodukte der  $\mathfrak{8}_{SO(8)}$  Darstellungen:**

Hier wird das Tensorprodukt  $\mathfrak{8}_v \times \mathfrak{8}_v$  als Beispiel behandelt. Die achtdimensionalen  $SO(8)$  Darstellungen sind in C.9 angegeben, und die einzelnen Rechenschritte werden in Kapitel C.4 erläutert. Gleichung (C.15) liefert für den Gewichtsraum  $\mathbb{W}_{\mathfrak{8}_v \times \mathfrak{8}_v}$  mit Hilfe der Gewichtsräume aus Anhang C.9:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{\mathfrak{8}_v \times \mathfrak{8}_v} = & \begin{array}{cccccccccccc} \begin{matrix} \text{lx} [2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [-2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \blacksquare & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square \end{array} \\ & \begin{array}{cccccccccccc} \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{matrix} \\ \blacksquare \square & \blacksquare \mathbf{1} & \blacksquare \square & \blacksquare & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \square \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare & \square \square & \blacksquare \square \end{array} \\ & \begin{array}{cccccccccccc} \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [0 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [-1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2x} [0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{lx} [-2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare & \blacksquare \square & \blacksquare \square & \blacksquare & \blacksquare \square & \blacksquare \end{array} \end{array} \quad (\text{C.27}) \end{aligned}$$

Die zur  $\mathbf{35}_v$ ,  $\mathbf{28}$  und  $\mathbf{1}$  Darstellung gehörenden Vektoren sind mit  $\blacksquare$ ,  $\square$  und  $\mathbf{1}$  gekennzeichnet. Man sieht die Relation  $\mathfrak{8}_v \times \mathfrak{8}_v = \mathbf{35}_v + \mathbf{28} + \mathbf{1}$  unmittelbar.

Analog folgen die Tensorprodukte weiterer achtdimensionaler Darstellungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_s &= \mathbf{35}_s + \mathbf{28} + \mathbf{1}, \\
\mathbf{8}_c \times \mathbf{8}_c &= \mathbf{35}_c + \mathbf{28} + \mathbf{1}, \\
\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_s &= \mathbf{56}_c + \mathbf{8}_c, \\
\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_c &= \mathbf{56}_v + \mathbf{8}_v, \\
\mathbf{8}_c \times \mathbf{8}_v &= \mathbf{56}_s + \mathbf{8}_s.
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Mit diesen Ergebnissen sieht man, dass sich das Multipllett der Typ IIA Supergravitation aus Gleichung (2.20) auch durch

$$(\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s) \times (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c) = (\mathbf{1} + \mathbf{8}_v + \mathbf{28} + \mathbf{35}_v + \mathbf{56}_v)_B + (\mathbf{8}_s + \mathbf{8}_c + \mathbf{56}_s + \mathbf{56}_c)_F \tag{C.29}$$

schreiben lässt.

### Zerlegung der $SO(8)$ Darstellungen in $SU(4)$ Darstellungen:

Gleichung (C.17) für die Zerlegung  $SO(8) \supset SU(4) \times U(1)$  mit der in Anhang C.9 benutzten Basis der Gewichtsräume lautet:

$$M(SO(8) \supset SU(4) \times U(1)) \circ \vec{\lambda}_{SO(8)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\lambda}_{SO(8)} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_{SU(4)} \\ \vec{\lambda}_{U(1)} \end{pmatrix}, \tag{C.30}$$

dabei ist  $\vec{\lambda}_{SU(4)} \in \mathbb{Z}^3$  und  $\vec{\lambda}_{U(1)} \in \mathbb{Z}$ . Als Beispiel sei hier die Zerlegung der  $\mathbf{8}_v$  Darstellung, deren Gewichtsraum in C.9 zu finden ist angegeben. Die Multiplikation aller Gewichtsvektoren der  $\mathbf{8}_v$  mit M liefert:

$$\begin{array}{c}
SU(4) \\
\times \\
U(1)
\end{array}
\begin{array}{cccccccc}
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{array}{cccccccc}
\square & \square & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare & \square & \square
\end{array}
\end{array}. \tag{C.31}$$

Die mit den offenen Quadrat  $\square$  gekennzeichneten Vektoren bilden den Gewichtsraum der  $\mathbf{6}_{SU(4)}$  Darstellung und die mit dem geschlossenen Quadrat  $\blacksquare$  gekennzeichneten die  $\mathbf{1}_{SU(4)}$  Darstellung, wie der Vergleich mit den Gewichtsräumen aus Anhang C.9 zeigt:

$$\mathbf{8}_v \longrightarrow \mathbf{6}_{SU(4)} \times (0) + \mathbf{1}_{SU(4)} \times (-2) + \mathbf{1}_{SU(4)} \times (2). \tag{C.32}$$

Das bedeutet für die Helizität der Darstellungen:

$$\mathbf{8}_v \longrightarrow (\mathbf{6}_{SU(4)})_0 + (\mathbf{1}_{SU(4)})_1. \quad (C.33)$$

Es handelt sich also in Übereinstimmung mit Gleichung (2.24) um ein Helizität 1 Vektorfeld und sechs Helizität 0 Skalarfelder.

Als Beispiel für die Zerlegung einer fermionische Darstellung wird zum Schluss noch die Zerlegung der  $\mathbf{8}_c$  Darstellung angegeben:

$$SU(4) \begin{array}{cccccccc} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array}. \quad (C.34)$$

$$\times U(1) \begin{array}{cccccccc} \left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\square \quad \blacksquare \quad \square \quad \blacksquare \quad \square \quad \blacksquare \quad \square \quad \blacksquare$$

Die mit den offenen Quadrat  $\square$  gekennzeichneten Vektoren bilden den Gewichtsraum der  $\mathbf{4}_{SU(4)}$  Darstellung und die mit dem geschlossenen Quadrat  $\blacksquare$  gekennzeichneten die  $\bar{\mathbf{4}}_{SU(4)}$  Darstellung, wie der Vergleich mit Anhang C.9 zeigt:

$$\mathbf{8}_c \longrightarrow \mathbf{4}_{SU(4)} \times (+1) + \bar{\mathbf{4}}_{SU(4)} \times (-1). \quad (C.35)$$

Das bedeutet für die Helizität der Darstellungen:

$$\mathbf{8}_c \longrightarrow (\mathbf{4}_{SU(4)})_{+1/2} + (\bar{\mathbf{4}}_{SU(4)})_{-1/2}. \quad (C.36)$$

Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit Tabelle 2.8. Die Zahlen in den Klammern sind die Quantenzahlen der zugehörigen  $U(1)$ , die keine einfache Gruppe ist, und daher in ihrer Notation etwas abweicht. Alle anderen Zerlegungen  $SO(8) \supset SU(4) \times U(1)$  können analog berechnet werden. Da die Vektoren in der Dynkin-Basis angegeben sind, in der nur natürliche Zahlen als Einträge auftreten, erhält man den Spin, nach Division durch 2.

## C.7 Konstruktion des Multipletts der Typ IIA Supergravitation

In diesem Abschnitt soll das Multiplett der Typ IIA Supergravitation konstruiert werden.

Es gibt wegen Gleichung (2.19) insgesamt acht fermionische Aufsteigeoperatoren  $Q$ , die das Multiplett aus einem Grundzustand erzeugen. Die Generatoren sind als Spinoren direkte Summen irreduzibler Darstellungen der Lorentz-Gruppe in der Lichtkegelgleichung, also der  $SO(8)$ . Die insgesamt  $2^8 = 256$  Zustände ergeben sich durch Operation der Aufsteiger folgendermaßen:<sup>6</sup>

$$1_B \xrightarrow{Q^1} 8_F \xrightarrow{Q^2} 28_B \xrightarrow{Q^3} 56_F \xrightarrow{Q^4} 70_B \xrightarrow{Q^5} 56_F \xrightarrow{Q^6} 28_B \xrightarrow{Q^7} 8_F \xrightarrow{Q^8} 1_B. \quad (C.37)$$

<sup>6</sup>Diese Sequenz sieht bei allen maximalen Supersymmetrien, also bei allen supersymmetrischen Theorien mit acht Supersymmetrie-Generatoren, gleich aus, und in  $D = 4$  und  $N = 2$  lautet sie  $1 \xrightarrow{Q^1} 2 \xrightarrow{Q^2} 1$  (vergleiche Gleichung (2.7) und Tabelle 2.1).

Die Potenzen  $p$  der Aufsteigeoperatoren  $Q$  stehen symbolisch für alle möglichen, nicht verschwindenden Produkte von  $p$  Generatoren, und der Index  $B$ , beziehungsweise  $F$  steht für bosonische, beziehungsweise fermionische Anteile. Insgesamt gibt es damit 128 fermionische und 128 bosonische Freiheitsgrade. Obwohl die  $SO(8)$  Darstellungen mit Dimensionen 8, 28, 56, und 70 besitzt, sind die in (C.37) angegebenen Zahlen nicht mit den  $SO(8)$  Darstellungen zu verwechseln, wie in folgender Konstruktion ersichtlich wird.

Zur Identifikation der acht fermionischen Aufsteigeoperatoren muss eine Besonderheit der  $SO(8)$  in Betracht gezogen werden, die sich „Triality“ nennt: Die  $SO(8)$  besitzt drei verschiedene achtdimensionale Fundamentaldarstellungen, die durch  $\mathbf{8}_v$ ,  $\mathbf{8}_c$  und  $\mathbf{8}_s$  bezeichnet werden. Die mit  $v$  bezeichnete Darstellung lässt sich den Bosonen zuordnen, während die  $c$  und  $s$  Darstellung fermionische Darstellungen sind, wie man an ihrem Verhalten bei gruppentheoretischen Zerlegungen erkennt, wie etwa in den Gleichungen (C.31) bis (C.36).<sup>7</sup>

Für die Definition der acht fermionischen Aufsteiger lassen sich Kombinationen Darstellungen identischer Chiralität  $\mathbf{8}_{c,s} + \mathbf{8}_{c,s}$  oder Darstellungen unterschiedlicher Chiralität  $\mathbf{8}_c + \mathbf{8}_s$  betrachten. Die Supergravitation, die durch letzteren Fall entsteht wird Typ IIA Supergravitation genannt. Dies sind die einzigen Möglichkeiten aus irreduziblen, fermionischen Darstellungen der  $SO(8)$  die Supersymmetrie-Generatoren zu bilden, da alle anderen fermionischen  $SO(8)$  Darstellungen mehr als acht Aufsteiger besitzen und damit durch den „helicity bound“ ausgeschlossen sind.<sup>8</sup> Jede der Darstellungen definiert sowohl vier Aufsteigeoperatoren, als auch vier Absteigeoperatoren.

Das Multiplett lässt sich im Hinblick auf die Zerlegung in  $U(1) \times SU(3)$  Struktur erzeugen: Es ist möglich von dem Gewicht auszugehen, dass nach der Zerlegung der niedrigsten Helizität entspricht.<sup>9</sup> Dafür muss die gruppentheoretische Zerlegung der Gewichtsräume, die durch Gleichung (C.30)

$$M(SO(8) \supset SU(4) \times U(1)) \circ \vec{\lambda}_{SO(8)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\lambda}_{SO(8)} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_{SU(4)} \\ \vec{\lambda}_{U_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.38})$$

gegeben ist, betrachtet werden. Damit lässt sich aus den Gewichtsräumen der Darstellung das Gewicht mit der niedrigsten Helizität bestimmen. Man findet, dass  $[0, 2, -2, -2]$  das einzige Gewicht zur niedrigsten Helizität  $-2$  ist, dass zur  $\mathbf{35}_v$  Darstellung des Gravitons

<sup>7</sup>Die  $SO(8)$  ist die einzige Gruppe, in der die Dimension der bosonischen Darstellungen identisch mit der Dimension der fermionischen Darstellungen ist.

<sup>8</sup>Außerdem besitzen alle anderen fermionischen Darstellungen aus vierdimensionaler Sicht auch Helizitäten größer  $1/2$ .

<sup>9</sup>Es ist beispielsweise auch möglich von einem der Gewichte minimaler Höhe auszugehen und aus den fermionischen Aufsteigern die Vektoren positiver Höhe auszuwählen. Das Ergebnis ist in beiden Fällen das gleiche.

gehört, denn es gilt

$$M(SO(8) \supset SU(4) \times U(1)) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = (\mathbf{1}_{SU(4)})_{-2}. \quad (\text{C.39})$$

Die fermionischen Aufsteigeoperatoren müssen nun von der niedrigsten Helizität  $-2$  beginnend die Zustände bis Helizität  $+2$  erzeugen. Dazu müssen die Aufsteigeoperatoren aus den Gewichtsräumen der achtdimensionalen fermionischen  $SO(8)$  Darstellungen gesucht werden, die die Helizität um  $+\frac{1}{2}$  (oder  $+1$  in der Dynkin-Basis) erhöhen. Dies geschieht analog zur Rechnung in (C.39). Die acht Generatoren der Gewichtsräume der  $\mathbf{8}_c$  und  $\mathbf{8}_s$ , die diese Bedingung erfüllen sind in Tabelle C.3 angegeben.

Jetzt lassen sich durch Wirken der fermionischen Aufsteigeoperatoren auf den Grundzustand  $[0, 2, -2, -2]$  die irreduziblen Darstellungen des Typ IIA Multipletts bestimmen. Die Ergebnisse bis zur dritten Potenz sind in Tabelle C.4 angegeben. Die Buchstaben an den Gewichtsvektoren beziehen sich auf die zugehörigen Darstellung. Dabei steht  $a$  für  $\mathbf{35}_v$ ,  $b$  für  $\mathbf{56}_c$ ,  $c$  für  $\mathbf{56}_s$ ,  $d$  für  $\mathbf{56}_v$ ,  $e$  für  $\mathbf{28}$ ,  $f$  für  $\mathbf{8}_v$ ,  $g$  für  $\mathbf{8}_s$  und  $h$  für  $\mathbf{8}_c$ . Alle 256 Gewichte lassen sich mit den Gewichtsräumen aus Anhang C.9 den irreduziblen  $SO(8)$  Darstellungen zuordnen, da alle Felder des Multipletts als irreduzible  $SO(8)$  Darstellungen transformieren müssen. Das endgültige Resultat liefert das Multiplett der Typ IIA Supergravitation:

$$(\mathbf{1} + \mathbf{8}_v + \mathbf{28} + \mathbf{35}_v + \mathbf{56}_v)_B + (\mathbf{8}_s + \mathbf{8}_c + \mathbf{56}_s + \mathbf{56}_c)_F. \quad (\text{C.40})$$

Hilfreich bei der Zuordnung der Gewichtsvektoren ist, dass alle geraden Potenzen der Aufsteigeoperatoren zu bosonischen und alle ungeraden Potenzen zu fermionischen Darstellungen gehören, wie es auch zu erwarten war.

$$\begin{aligned} & 1 \times [0, 0, 1, 0] \quad 1 \times [0, 0, 0, 1] \quad 1 \times [1, -1, 0, 1] \quad 1 \times [-1, 0, 0, 1] \quad 1 \times [0, -1, 1, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, 0] \quad 1 \times [-1, 0, 1, 0] \\ & 1 \times [0, -1, 0, 1] \end{aligned}$$

**Tabelle C.3:** Auflistung der Aufsteigeoperatoren der Typ IIA Supergravitation, die jeweils die Helizität um  $+\frac{1}{2}$  erhöhen.

## C.8 $N = 2$ Supersymmetriegeratoren in vier Dimensionen

Hier wird zusammengefasst, welche physikalischen Folgen die Zerlegungen der  $SO(8)$  in  $SU(3)$  hat.

Die Abbildung (C.23) besitzt einen eindimensionalen Kern. Er wird durch  $[1, -1, 0]^t$  aufgespannt. Dadurch wird eine Quantenzahl herausprojiziert, wodurch  $SU(3)$  Singlets

entstehen. Dadurch lassen sich in der  $U(1) \times SU(4)$  Symmetrie Vektoren  $q_{1,2,3,4}$  bestimmen, die nach der Zerlegung nur den Spin eines Teilchens Verändern:

$$q_{1,2,3,4} = \pm \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.41})$$

Mit dem Inversen der in (C.30) definierten Matrix

$$(\text{M}(\text{SO}_8 \supset \text{SO}_6 \times \text{U}_1))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.42})$$

erhält man die vier Generatoren der  $SO(8)$ , die nach den gruppentheoretischen Zerlegungen die  $SU(3)$  Struktur invariant lassen und den Spin um  $\pm \frac{1}{2}$  ändern (oder in der hier gewählten Dynkin-Basis um  $\pm 1$ ). Sie lauten:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.43})$$

Dies sind gerade die Vektoren, die nach der Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{8}_c &\xrightarrow{U(1) \times SU(4)} \mathbf{4}_{\frac{1}{2}} + \bar{\mathbf{4}}_{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{U(1) \times SU(3)} (\mathbf{3} + \mathbf{1})_{\frac{1}{2}} + (\bar{\mathbf{3}} + \bar{\mathbf{1}})_{-\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{8}_s &\xrightarrow{U(1) \times SU(4)} \mathbf{4}_{-\frac{1}{2}} + \bar{\mathbf{4}}_{\frac{1}{2}} \xrightarrow{U(1) \times SU(3)} (\mathbf{3} + \mathbf{1})_{-\frac{1}{2}} + (\bar{\mathbf{3}} + \bar{\mathbf{1}})_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

den  $SU(3)$  Singlets entsprechen, wie man durch

$$\text{M}(\text{SO}(8) \supset \text{SU}(4) \times \text{U}(1)) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \quad (\text{C.45})$$

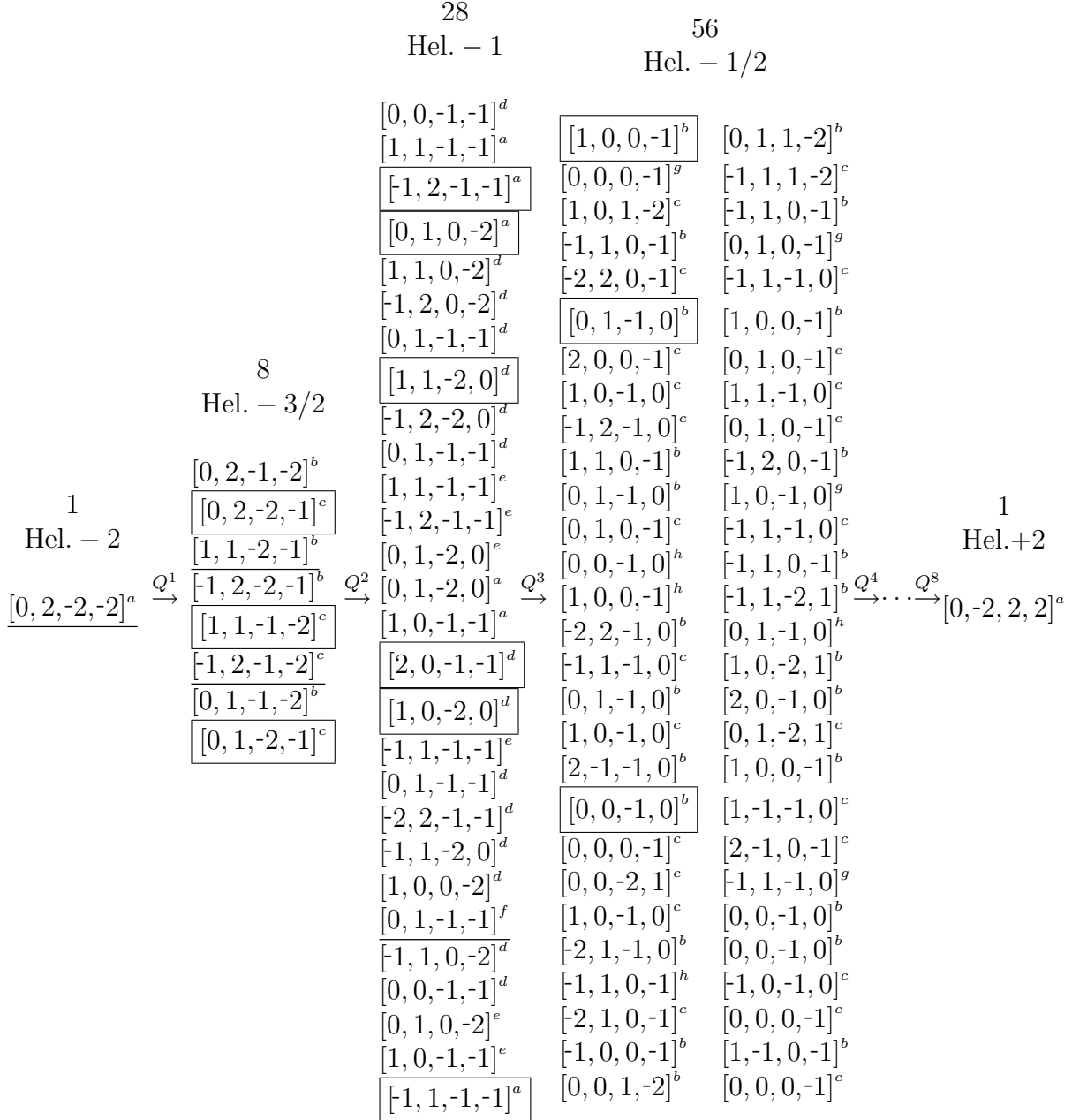
sieht. Mit den in (C.43) gefundenen Aufsteigeoperatoren  $[1, -1, 0, 1]$  und  $[-1, 0, 1, 0]$  können in Tabelle C.4 ausgehend vom Grundzustand die vierdimensionalen  $N = 2$  Multipletts gefunden werden. Der Teil des Graviton-Multipletts mit negativer Helizität entspricht dabei den unterstrichenen Gewichtsvektoren. Es lautet:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1, -1, 0, 1] \\ \nearrow \\ [1, 1, -2, -1]^b \\ \searrow \\ [-1, 0, 1, 0] \end{array} \\ \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1, 1, -2, -1]^b \\ \searrow \\ [-1, 0, 1, 0] \end{array} \\ \begin{array}{c} \begin{array}{c} [-1, 0, 1, 0] \\ \nearrow \\ [-1, 2, -1, -2]^c \\ \searrow \\ [1, -1, 0, 1] \end{array} \end{array} \end{array} \\ [0, 2, -2, -2]^a & & [0, 1, -1, -1]^f \end{array} \quad \xleftrightarrow{\text{CPT}} \quad \dots \quad (\text{C.46}) \end{array}$$

und entspricht (2.7) und (2.34). Aus den übrigen Vektoren mit Helizität  $-\frac{3}{2}$  lassen sich die Gravitino-Multipletts erzeugen. Die in Kästchen stehenden Gewichtsvektoren entsprechen einer möglichen Zuordnung der Vektoren in ein Gravitino-Multiplett.<sup>10</sup> Auf diese Weise lassen sich sukzessive alle Gewichtsvektoren in die vierdimensionalen  $N = 2$  Multipletts einordnen, indem aus den nicht zugeordneten Gewichtsvektoren wieder ein Multiplett erzeugt wird, bis keine Gewichtsvektoren übrig bleiben. Die Einordnung ohne  $SU(3)$  Triplets ist in Tabelle 2.9 angegeben.

---

<sup>10</sup>Diese Zuordnung ist nicht eindeutig, da anstelle der Gewichtsvektoren der  $\mathbf{35}_v$  mit Helizität -1 auch die der  $\mathbf{28}$  Darstellung hätten genommen werden können.



**Tabelle C.4:** Generierung des Typ IIA Multipletts. Die oberen Zahlenwerte geben die Anzahl und die Helizität der Zustände an. Der Index an den Vektoren bezeichnet die zugehörige Darstellung. Die Vektoren lassen sich mit Abschnitt C.9 ihren Darstellungen zuordnen. Dabei steht  $a$  für  $\mathbf{35}_v$ ,  $b$  für  $\mathbf{56}_c$ ,  $c$  für  $\mathbf{56}_s$ ,  $d$  für  $\mathbf{56}_v$ ,  $e$  für  $\mathbf{28}$ ,  $f$  für  $\mathbf{8}_v$ ,  $g$  für  $\mathbf{8}_s$  und  $h$  für  $\mathbf{8}_c$ . Die unterstrichenen Vektoren gehören zum Anteil des Graviton-Multipletts mit negativer Helizität und die in Kästchen Stehenden Vektoren zum negativen Helizitäts-Teil eines möglichen Gravitino-Multipletts.



## C.9 Gewichte irreduzibler Darstellungen

Die Gewichte werden in der Dynkin-Basis angegeben und das höchste Gewicht jeder Darstellung steht jeweils an erster Stelle.

### C.9.1 $SU(3)$

- fundamentale Darstellungen der  $SU(4)$

$\mathbf{3}_{SU(3)}$  Darstellung

$$1 \times [1, 0] \quad 1 \times [-1, 1] \quad 1 \times [0, -1]$$

$\bar{\mathbf{3}}_{SU(3)}$  Darstellung

$$1 \times [0, 1] \quad 1 \times [1, -1] \quad 1 \times [-1, 0]$$

### C.9.2 $SO(6) \simeq SU(4)$

- fundamentale Darstellungen der  $SU(4)$

$\mathbf{4}_{SU(4)}$  Darstellung

$$1 \times [1, 0, 0] \quad 1 \times [-1, 1, 0] \quad 1 \times [0, -1, 1] \quad 1 \times [0, 0, -1]$$

$\bar{\mathbf{4}}_{SU(4)}$  Darstellung

$$1 \times [0, 0, 1] \quad 1 \times [0, 1, -1] \quad 1 \times [1, -1, 0] \quad 1 \times [-1, 0, 0]$$

$\mathbf{6}_{SU(4)}$  Darstellung

$$1 \times [0, 1, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1] \quad 1 \times [1, 0, -1] \quad 1 \times [-1, 0, 1] \quad 1 \times [-1, 1, -1] \quad 1 \times [0, -1, 0]$$

$\mathbf{10}_{SU(4)}$  Darstellung

$$1 \times [2, 0, 0] \quad 1 \times [0, 1, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1] \quad 1 \times [-2, 2, 0] \quad 1 \times [1, 0, -1] \quad 1 \times [-1, 0, 1] \quad 1 \times [0, -2, 2] \quad 1 \times [-1, 1, -1] \quad 1 \times [0, -1, 0] \quad 1 \times [0, 0, -2]$$

$\mathbf{15}_{SU(4)}$  Darstellung

$$1 \times [1, 0, 1] \quad 1 \times [1, 1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, 1] \quad 1 \times [2, -1, 0] \quad 1 \times [0, -1, 2] \quad 1 \times [-1, 2, -1] \quad 3 \times [0, 0, 0] \quad 1 \times [1, -2, 1] \quad 1 \times [0, 1, -2] \quad 1 \times [-2, 1, 0] \quad 1 \times [1, -1, -1] \quad 1 \times [-1, -1, 1] \quad 1 \times [-1, 0, -1]$$

### C.9.3 $SO(8)$

- fundamentale Darstellungen der  $SO(8)$

#### $\mathbf{8}_v$ $SO(8)$ Darstellung

$$1 \times [1, 0, 0, 0] \quad 1 \times [-1, 1, 0, 0] \quad 1 \times [0, -1, 1, 1] \quad 1 \times [0, 0, 1, -1] \quad 1 \times [0, 0, -1, 1] \quad 1 \times [0, 1, -1, -1] \quad 1 \times [1, -1, 0, 0] \\ 1 \times [-1, 0, 0, 0]$$

#### $\mathbf{8}_c$ $SO(8)$ Darstellung

$$1 \times [0, 0, 1, 0] \quad 1 \times [0, 1, -1, 0] \quad 1 \times [1, -1, 0, 1] \quad 1 \times [1, 0, 0, -1] \quad 1 \times [-1, 0, 0, 1] \quad 1 \times [-1, 1, 0, -1] \quad 1 \times [0, -1, 1, 0] \\ 1 \times [0, 0, -1, 0]$$

#### $\mathbf{8}_s$ $SO(8)$ Darstellung

$$1 \times [0, 0, 0, 1] \quad 1 \times [0, 1, 0, -1] \quad 1 \times [1, -1, 1, 0] \quad 1 \times [1, 0, -1, 0] \quad 1 \times [-1, 0, 1, 0] \quad 1 \times [-1, 1, -1, 0] \quad 1 \times [0, -1, 0, 1] \\ 1 \times [0, 0, 0, -1]$$

- fundamentale, adjungierte Darstellung der  $SO(8)$

#### $\mathbf{28}$ $SO(8)$ Darstellung

$$1 \times [0, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [1, 0, 1, -1] \quad 1 \times [1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, 1] \quad 1 \times [1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, 1, -1] \\ 1 \times [-1, 1, -1, 1] \quad 1 \times [2, -1, 0, 0] \quad 1 \times [0, -1, 2, 0] \quad 1 \times [0, -1, 0, 2] \quad 1 \times [-1, 2, -1, -1] \quad 4 \times [0, 0, 0, 0] \quad 1 \times [1, -2, 1, 1] \\ 1 \times [0, 1, 0, -2] \quad 1 \times [0, 1, -2, 0] \quad 1 \times [-2, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, -1] \quad 1 \times [1, -1, -1, 1] \quad 1 \times [-1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [1, 0, -1, -1] \\ 1 \times [-1, 0, 1, -1] \quad 1 \times [-1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [-1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [0, -1, 0, 0]$$

- 35 dimensionale Darstellungen der  $SO(8)$

#### $\mathbf{35}_v$ $SO(8)$ Darstellung

$$1 \times [2, 0, 0, 0] \quad 1 \times [0, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [-2, 2, 0, 0] \quad 1 \times [1, 0, 1, -1] \quad 1 \times [1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, 1] \\ 1 \times [1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [0, -2, 2, 2] \quad 1 \times [-1, 1, 1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, -1, 1] \quad 1 \times [2, -1, 0, 0] \quad 1 \times [0, -1, 2, 0] \quad 1 \times [0, -1, 0, 2] \\ 1 \times [-1, 2, -1, -1] \quad 1 \times [0, 0, 2, -2] \quad 3 \times [0, 0, 0, 0] \quad 1 \times [0, 0, -2, 2] \quad 1 \times [1, -2, 1, 1] \quad 1 \times [0, 1, 0, -2] \quad 1 \times [0, 1, -2, 0] \\ 1 \times [-2, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, -1] \quad 1 \times [1, -1, -1, 1] \quad 1 \times [0, 2, -2, -2] \quad 1 \times [-1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [1, 0, -1, -1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, -1] \\ 1 \times [-1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [2, -2, 0, 0] \quad 1 \times [-1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [0, -1, 0, 0] \quad 1 \times [-2, 0, 0, 0]$$

#### $\mathbf{35}_s$ $SO_8$ Darstellung

$$1 \times [0, 0, 0, 2] \quad 1 \times [0, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [0, 2, 0, -2] \quad 1 \times [1, 0, 1, -1] \quad 1 \times [1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, 1] \\ 1 \times [2, -2, 2, 0] \quad 1 \times [1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, 1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, -1, 1] \quad 1 \times [2, -1, 0, 0] \quad 1 \times [0, -1, 2, 0] \quad 1 \times [0, -1, 0, 2] \\ 1 \times [-1, 2, -1, -1] \quad 1 \times [2, 0, -2, 0] \quad 3 \times [0, 0, 0, 0] \quad 1 \times [-2, 0, 2, 0] \quad 1 \times [1, -2, 1, 1] \quad 1 \times [0, 1, 0, -2] \quad 1 \times [0, 1, -2, 0] \\ 1 \times [-2, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, -1] \quad 1 \times [1, -1, -1, 1] \quad 1 \times [-1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [-2, 2, -2, 0] \quad 1 \times [1, 0, -1, -1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, -1] \\ 1 \times [-1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [0, -2, 0, 2] \quad 1 \times [-1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [0, -1, 0, 0] \quad 1 \times [0, 0, 0, -2]$$

#### $\mathbf{35}_c$ $SO_8$ Darstellung

$$1 \times [0, 0, 2, 0] \quad 1 \times [0, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [0, 2, -2, 0] \quad 1 \times [1, 0, 1, -1] \quad 1 \times [1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, 1] \\ 1 \times [2, -2, 0, 2] \quad 1 \times [1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, 1, -1] \quad 1 \times [-1, 1, -1, 1] \quad 1 \times [2, -1, 0, 0] \quad 1 \times [0, -1, 2, 0] \quad 1 \times [0, -1, 0, 2] \\ 1 \times [-1, 2, -1, -1] \quad 1 \times [2, 0, 0, -2] \quad 3 \times [0, 0, 0, 0] \quad 1 \times [-2, 0, 0, 2] \quad 1 \times [1, -2, 1, 1] \quad 1 \times [0, 1, 0, -2] \quad 1 \times [0, 1, -2, 0] \\ 1 \times [-2, 1, 0, 0] \quad 1 \times [1, -1, 1, -1] \quad 1 \times [1, -1, -1, 1] \quad 1 \times [-1, -1, 1, 1] \quad 1 \times [-2, 2, 0, -2] \quad 1 \times [1, 0, -1, -1] \quad 1 \times [-1, 0, 1, -1] \\ 1 \times [-1, 0, -1, 1] \quad 1 \times [0, -2, 2, 0] \quad 1 \times [-1, 1, -1, -1] \quad 1 \times [0, -1, 0, 0] \quad 1 \times [0, 0, -2, 0]$$

- 56 dimensionale Darstellungen der  $SO_8$

**56<sub>s</sub>** SO<sub>8</sub> Darstellung

$1 \times [1, 0, 1, 0]$   $1 \times [1, 1, -1, 0]$   $1 \times [-1, 1, 1, 0]$   $1 \times [2, -1, 0, 1]$   $1 \times [0, -1, 2, 1]$   $1 \times [-1, 2, -1, 0]$   $1 \times [2, 0, 0, -1]$   
 $1 \times [0, 0, 2, -1]$   $3 \times [0, 0, 0, 1]$   $1 \times [1, -2, 1, 2]$   $3 \times [0, 1, 0, -1]$   $1 \times [0, 1, -2, 1]$   $1 \times [-2, 1, 0, 1]$   $3 \times [1, -1, 1, 0]$   
 $1 \times [1, -1, -1, 2]$   $1 \times [0, 2, -2, -1]$   $1 \times [-1, -1, 1, 2]$   $1 \times [-2, 2, 0, -1]$   $1 \times [1, 0, 1, -2]$   $3 \times [1, 0, -1, 0]$   $3 \times [-1, 0, 1, 0]$   
 $1 \times [-1, 0, -1, 2]$   $1 \times [2, -2, 0, 1]$   $1 \times [1, 1, -1, -2]$   $1 \times [0, -2, 2, 1]$   $1 \times [-1, 1, 1, -2]$   $3 \times [-1, 1, -1, 0]$   $1 \times [2, -1, 0, -1]$   
 $1 \times [0, -1, 2, -1]$   $3 \times [0, -1, 0, 1]$   $1 \times [-1, 2, -1, -2]$   $3 \times [0, 0, 0, -1]$   $1 \times [0, 0, -2, 1]$   $1 \times [-2, 0, 0, 1]$   $1 \times [1, -2, 1, 0]$   
 $1 \times [0, 1, -2, -1]$   $1 \times [-2, 1, 0, -1]$   $1 \times [1, -1, -1, 0]$   $1 \times [-1, -1, 1, 0]$   $1 \times [-1, 0, -1, 0]$

**56<sub>v</sub>** SO<sub>8</sub> Darstellung

$1 \times [0, 0, 1, 1]$   $1 \times [0, 1, 1, -1]$   $1 \times [0, 1, -1, 1]$   $1 \times [1, -1, 2, 0]$   $1 \times [1, -1, 0, 2]$   $1 \times [0, 2, -1, -1]$   $3 \times [1, 0, 0, 0]$   
 $1 \times [-1, 0, 2, 0]$   $1 \times [-1, 0, 0, 2]$   $1 \times [2, -2, 1, 1]$   $1 \times [1, 1, 0, -2]$   $1 \times [1, 1, -2, 0]$   $3 \times [-1, 1, 0, 0]$   $1 \times [2, -1, 1, -1]$   
 $1 \times [2, -1, -1, 1]$   $3 \times [0, -1, 1, 1]$   $1 \times [-1, 2, 0, -2]$   $1 \times [-1, 2, -2, 0]$   $1 \times [2, 0, -1, -1]$   $3 \times [0, 0, 1, -1]$   $3 \times [0, 0, -1, 1]$   
 $1 \times [-2, 0, 1, 1]$   $1 \times [1, -2, 2, 0]$   $1 \times [1, -2, 0, 2]$   $3 \times [0, 1, -1, -1]$   $1 \times [-2, 1, 1, -1]$   $1 \times [-2, 1, -1, 1]$   $3 \times [1, -1, 0, 0]$   
 $1 \times [-1, -1, 2, 0]$   $1 \times [-1, -1, 0, 2]$   $1 \times [-2, 2, -1, -1]$   $1 \times [1, 0, 0, -2]$   $1 \times [1, 0, -2, 0]$   $3 \times [-1, 0, 0, 0]$   $1 \times [0, -2, 1, 1]$   
 $1 \times [-1, 1, 0, -2]$   $1 \times [-1, 1, -2, 0]$   $1 \times [0, -1, 1, -1]$   $1 \times [0, -1, -1, 1]$   $1 \times [0, 0, -1, -1]$

**56<sub>c</sub>** SO<sub>8</sub> Darstellung

$1 \times [1, 0, 0, 1]$   $1 \times [1, 1, 0, -1]$   $1 \times [-1, 1, 0, 1]$   $1 \times [2, -1, 1, 0]$   $1 \times [0, -1, 1, 2]$   $1 \times [-1, 2, 0, -1]$   $1 \times [2, 0, -1, 0]$   
 $3 \times [0, 0, 1, 0]$   $1 \times [0, 0, -1, 2]$   $1 \times [1, -2, 2, 1]$   $1 \times [0, 1, 1, -2]$   $3 \times [0, 1, -1, 0]$   $1 \times [-2, 1, 1, 0]$   $1 \times [1, -1, 2, -1]$   
 $3 \times [1, -1, 0, 1]$   $1 \times [0, 2, -1, -2]$   $1 \times [-1, -1, 2, 1]$   $1 \times [-2, 2, -1, 0]$   $3 \times [1, 0, 0, -1]$   $1 \times [1, 0, -2, 1]$   $1 \times [-1, 0, 2, -1]$   
 $3 \times [-1, 0, 0, 1]$   $1 \times [2, -2, 1, 0]$   $1 \times [1, 1, -2, -1]$   $1 \times [0, -2, 1, 2]$   $3 \times [-1, 1, 0, -1]$   $1 \times [-1, 1, -2, 1]$   $1 \times [2, -1, -1, 0]$   
 $3 \times [0, -1, 1, 0]$   $1 \times [0, -1, -1, 2]$   $1 \times [-1, 2, -2, -1]$   $1 \times [0, 0, 1, -2]$   $3 \times [0, 0, -1, 0]$   $1 \times [-2, 0, 1, 0]$   $1 \times [1, -2, 0, 1]$   
 $1 \times [0, 1, -1, -2]$   $1 \times [-2, 1, -1, 0]$   $1 \times [1, -1, 0, -1]$   $1 \times [-1, -1, 0, 1]$   $1 \times [-1, 0, 0, -1]$

# Literaturverzeichnis

- [1] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fré, T. Magri, *N=2 Supergravity and N=2 Super Yang-Mills Theory on General Scalar Manifolds: Symplectic Covariance, Gaugings and the Momentum Map.*, J. Geom. Phys. **23** (1997) 111
- [2] P. Candelas, de la Ossa, *Moduli space of Calabi-Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B355** (1991) 455
- [3] S.Coleman J.Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159** (1967) 1251
- [4] S.Ferrara, S.Sabharwal, *quaternionic manifolds for type II superstring vacua of Calabi-Yau spaces*, Nucl. Phys. **B332** (1990) 317-332
- [5] M. Graña, J. Louis, D. Waldram, *Hitchin Functionals in N=2 Supergravity*, JHEP **1** (2006) 8
- [6] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstringtheory, (2 Vols.)*, (Cambridge University Press, 1987)
- [7] R. Haag, J. Lopuszanski, M.Sohnius, , Nucl. Phys. **B88** (1975) 257
- [8] G. Howard, *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*, Benjamin/Cummings Frontiers in Physics Vol. **54** (1982)
- [9] T. Hübsch, *Calabi Yau Manifolds*, (World Scientific Publishing Co. Pte- Ltd., 1992)
- [10] S. Ishihara, *Quaternion Kählerian Manifolds*, J. Diff. Geom. **9** (1974) 483
- [11] D. D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, (Oxford University Press, 2000)
- [12] J. Louis, A. Micu, *Type II theories compactified on Calabi-Yau threefolds in the presence of background fluxes*, Nucl. Phys. **B635** (2002) 395
- [13] J. Polchinski, *String Theory, (2 Vols.)*, (Cambridge University Press, 1998)
- [14] R. Slansky, *group theory for unified model building*, Phys. Rep. **79** (1981) 1-128

- 
- [15] A. Strominger, *Loop corrections to the universal hypermultiplet*, Phys. Lett. **B421** (1998) 139
- [16] J. Terning, *Modern Supersymmetry, Dynamics and Duality*, (Clarendon Press Oxford, 2006)
- [17] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, (Princeton Series in Physics, 1992)
- [18] P. C. West, *Supergravity, Brane Dynamics and String Duality*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)
- [19] B. de Wit, *Supergravity*, Lecture Notes 2001 Les Houches Summer School, hep-th/0212245

# Danksagung

Hiermit möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Jan Louis für die interessante Aufgabenstellung und die immer freundliche Betreuung bedanken. Ebenfalls danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Volker Schomerus, der sich bereit erklärt hat, das Zweitgutachten zu übernehmen.

Ferner möchte ich meinen Kollegen des II. Theoretischen Instituts sowie der Desy-Theorie, insbesondere aber Stellan Bohlens und Tobias Kasprzik, für interessante Diskussionen und eine angenehme Arbeitsatmosphäre danken. Ich danke auch Berit Salchow, die mir bei der Korrektur der Arbeit geholfen hat.

Weiter bedanke ich mich herzlich bei meiner Familie, insbesondere bei meinen Eltern Heike und Werner Hambrock und meinen Großeltern Ruth und Arthur Feldmann für die moralische und finanzielle Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit und besonders während der Diplomarbeit.

# Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig angefertigt und nur die angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 1. Dezember 2006

Christian Hambrock