Aspekte von Mannigfaltigkeiten mit SU(3)-Struktur

Diplomarbeit
am II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Markus Mittag

September 2004

Gutachter der Diplomarbeit: Prof. Dr. Jan Louis
Zweitgutachter: Jun.-Prof. Dr. Henning Samtleben

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 String-Theorie

Auf der Suche nach einer vereinheitlichten Beschreibung in der theoretischen Physik gilt die Stringtheorie als Möglichkeit, allgemeine Relativitätstheorie und Quantenfeldtheorie zu einer einheitlichen Theorie zu führen. In der Stringtheorie werden Elementarteilchen nicht mehr als punktförmig sondern als eindimensionale Objekte - Strings - angesehen, die in einem Raumzeit-Hintergrund propagieren [Gre], [Pol]. Das Verständnis der Quantisierung dieser Objekte erfordert neue mathematische Konzepte. So ist eine konsistente Formulierung nur möglich, wenn die Hintergrund-Raumzeit statt eines vier-dimensionalen Minkowskiraumes die Dimension 10, 11 oder 26 besitzt. Die populärste Theorie ist die supersymmetrische Stringtheorie, welche eine 10-dimensionale Raumzeit erfordert. Um der Diskrepanz zwischen dieser 10-dimensionalen und der beobachteten vier-dimensionalen Raumzeit Rechnung zu tragen, besteht ein Konzept darin, eine Faktorisierung in einen Minkowiskiraum und eine sechs-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Radius einer Planck-Länge ($\approx 10^{-33}$ cm) anzunehmen. Die Geometrie und Topologie dieser Mannigfaltigkeit bestimmt die Gesetze der Physik bei niedriger Energie im vier-Dimensionalen. Es stellt sich also das Problem, Beispiele solcher Mannigfaltigkeiten geeigneter Geometrie zu finden, so daß es möglich sein wird, experimentelle Beobachtungen der Elementarteilchenphysik zu reproduzieren. Es hat sich herausgestellt, daß eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit mit Holonomiegruppe[1] SU(3) zu einer adäquaten Phänomenologie führt. Solche Mannigfaltigkeiten werden als Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

In Verallgemeinerung dieser Calabi-Yau-Kompaktifizierung hat sich gezeigt, daß die Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten zur Auffindung einer geeigneten Kompaktifizierungsgeometrie nicht ausreichend sind. Ein Ansatz besteht dann in der Wahl halb-flacher Mannigfaltigkeiten. Diese bilden eine bestimmte Klasse von SU(3)-Mannigfaltigkeiten, die Gegenstand der Untersuchung in dieser Arbeit sind.

[1] Der Begriff der Holonomiegruppe wird in Abschnitt 2.5 erklärt

1.2 Gegenstand und Gliederung dieser Arbeit

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob auf den halb-flachen Mannigfaltigkeiten der verallgemeinerten Calabi-Yau-Kompaktifizierung Gleichungen der Form der Einsteinschen Feldgleichungen herleitbar sind. Da die halb-flachen Mannigfaltigkeiten im Gegensatz zu den Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten nicht Ricci-flach[2] sind, hängt der Ricci-Tensor insbesondere von der unten zu erklärenden intrinsischen Torsion ab. Es wird untersucht, ob sich die Ricci-Krümmung als Linearkombination von quadratischen Termen der intrinsischen Torsion darstellen läßt.
Bei der Kompaktifizierung einer supersymmetrischen String-Theorie in einer zehn-dimensionalen Hintergrund-Raumzeit, ergibt sich die physikalische Forderung der Existenz eines kovariant konstanten Spinors auf der Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit [Gre], [Can3]. Bei einer verallgemeinerten Kompaktifizierung ist diese Forderung nach kovarianter Konstanz nicht mehr haltbar, es wird aber dennoch die Existenz eines global definierten Spinors auf der Kompaktifizierungs-Mannigfaltigkeit gefordert [Gur1]. Dies führt zu einer Strukturgruppenreduktion der Mannigfaltigkeit, worauf dann ein Zusammenhang definierbar ist, unter dem der global definierte Spinor parallel ist.
In Kapitel 2 wird zunächst der Begriff der reduzierten Strukturgruppe und der G-Mannigfaltigkeit eingeführt. Dabei wird der Formalismus der fast-komplexen Mannigfaltigkeiten und der Zusammenhangs-Begriff erklärt. Von zentraler Bedeutung ist die dabei definierte intrinsische Kontorsion, die ein Maß für die Abweichung der verallgemeinerten Kompaktifizierungs-Mannigfaltigkeit von der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist. Die reduzierte Strukturgruppe der verallgemeinerten Kompaktifizierungs-Mannigfaltigkeit ist die SU(3), was im Anschluß an die Definition von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten im Abschnitt 2.5 erläutert wird. In Abschnitt 2.6 werden SU(3)-Mannigfaltigkeiten als spezielle G-Mannigfaltigkeiten betrachtet. Es werden intrinsische Torsion und Kontorsion der SU(3)-Struktur definiert und in Abschnitt 2.7 wird untersucht, wie diese in irreduzible SU(3)-Darstellungen zerlegt werden können. Dadurch wird eine Klassifizierung der SU(3)-Mannigfaltigkeiten erreicht und die halb-flachen Mannigfaltigkeiten definiert. In Kapitel 3 werden dann Krümmungstensoren auf SU(3)-Mannigfaltigkeiten eingeführt und deren Zerlegung in irreduzible SU(3)-Darstellungen angegeben. In Abschnitt 3.3 werden Ricci-Tensor und Ricci-Skalar speziell auf den halb-flachen Mannigfaltigkeiten hergeleitet. Es zeigt sich, daß in dieser speziellen Form des Ricci-Tensors neben quadratischen Termen der intrinsischen Kontorsion auch deren kovariante Ableitungen auftreten. Es wird deshalb zunächst der Frage nachgegangen, ob die intrinsischen Kontorsion für halb-flache Mannigfaltigkei-

[2]dieser Begriff wird in Abschnitt 2.5 erläutert

ten bezüglich des in Abschnitt 2.6 definierten SU(3)-Zusammenhangs parallel ist. Es werden dazu die speziellen, im halb-flachen Fall enthaltenen Fälle der Klassen der in Tabelle 2.7.1 angegebenen nearly-Kähler- und quasi-Kähler-Mannigfaltigkeiten untersucht. Im nearly-Kähler-Fall ist die oben genannte Parallelität der intrinsischen Kontorsion erfüllt, im quasi-Kähler-Fall nur, wenn der Riemann-Tensor einer bestimmten Bedingung, der dritten Krümmungsbedingung von Gray [Gra2] genügt. Desweiteren wird untersucht, ob sich die kovariante Ableitung der intrinsischen Kontorsion in Form einer Linearkombination von quadratischen Termen der intrinsischen Kontorsion ausdrücken läßt, auch wenn diese nicht parallel bezüglich des SU(3)-Zusammenhangs ist. Dies ist im vorliegenden Fall für die spezielle Form der kovarianten Ableitungsterme zu untersuchen, wie sie in dem Ricci-Tensor auf halb-flachen Mannigfaltigkeiten vorkommen. Das wird in Abschnitt 3.3 für den Ricci-Tensor in komplexen Koordinaten durchgeführt. Die darin auftretenden kovarianten Ableitungsterme werden für den speziellen Fall halbflacher Mannigfaltigkeiten, wie er in [Gur1] auftritt, in Abschnitt 3.6 berechnet. Der in Abschnitt 3.3 hergeleitete Ricci-Skalar für halb-flache Mannigfaltigkeiten in komplexen Koordinaten ist eine Linearkombination von quadratischen Termen der intrinsischen Kontorsion, was mit dem Ergebnis in [Gur1] übereinstimmt.
Der Ricci-Tensor lässt sich für den speziellen Fall halb-flacher Mannigfaltigkeiten, die in [Gur1] auftreten, auf eine Form bringen, die keine kovarianten Ableitungs-Terme mehr enthält. Mit dem dort beschriebenen Formalismus gelingt es, die im Ricci-Tensor vorkommenden kovarianten Ableitungen der intrinsischen Kontorsion zu berechnen. Die Voraussetzung dafür ist die spezielle Form dieser Ableitungs-Terme, wie sie in dem für halb-flache Mannigfaltigkeiten hergeleiteten Ricci-Tensor in komplexen Koordinaten auftreten. Als Ergebnis erhält man Komponenten des Ricci-Tensors (in komplexen Koordinaten), die neben einer Linearkombination von quadratischen Termen der intrinsischen Kontorsion noch Ausdrücke enthalten, die aus dem in [Gur1] benutzten Formalismus stammen.

2 Mannigfaltigkeiten mit G-Struktur

2.1 Mathematische Grundlagen

Ausgangspunkt der Untersuchung seien n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten [Sto]. In diesem Abschnitt sollen Begriffe der G-Struktur, der Zusammenhänge und der intrinsischen Kontorsion der G-Struktur auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n erklärt werden[3]. Die SU(3)-Struktur auf sechs-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche Gegenstand dieser Arbeit ist, wird als spezieller Fall einer G-Struktur im nächsten Abschnitt konkretisiert.
Mit TM^n wird das Tangentialbündel über M^n bezeichnet, dessen Fasern die Tangentialräume T_pM^n bei $p \in M^n$ sind. Mit dem Tangentialbündel lassen sich auch die (p,q)-Tensorbündel $\bigotimes_p T^*M^n \otimes \bigotimes_q TM^n$ und Bündel der äußeren k-Formen $\Lambda^k T^*M^n$ über M^n konstruieren.
Unter einem (p,q)-*Tensorfeld* über der Mannigfaltigkeit M^n versteht man die differenzierbaren Schnitte $\Gamma(M^n, \bigotimes_p T^*M^n \otimes \bigotimes_q TM^n)$ über dem (p,q)-Tensorbündel über M^n. Als ko- bzw. kontravariantes *Vektorfeld* wird dann das (1,0) - bzw. (0,1) - Tensorfeld bezeichnet. Die *k-Formen* sind die differenzierbaren Schnitte $\Gamma(M^n, \Lambda^k T^*M^n)$ über dem Bündel der äußeren k-Formen.
Ein lineares Koordinatensystem $s : \mathbb{R}^n \to T_pM^n$ auf T_pM^n bei $p \in M^n$ ist durch das n-Tupel $(X_1, ..., X_n)$ von linear unabhängigen Spaltenvektoren $X_k \in \mathbb{R}^n$ definiert. $L(M^n)$ bezeichnet dann die Menge aller linearen Koordinatensysteme bei allen $p \in M^n$. Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ operiert durch $s' = sA$ von rechts auf $L(M^n)$. Das ist durch $X'_k := A_k{}^j X_j$, mit $A := (A_k{}^j) \in GL(n,\mathbb{R})$ definiert. Offensichtlich ist diese Operation fixpunktfrei und für die kanonische Projektion $\pi : L(M^n) \to L(M^n)/GL(n,\mathbb{R})$ gilt $\pi(s) = \pi(sA)$, was zur Identifikation von $L(M^n)/GL(n,\mathbb{R})$ mit M^n führt.
Es lässt sich nun zeigen, daß $L(M^n)$ ein (differenzierbares) Faserbündel mit typischer Faser $GL(n,\mathbb{R})$ ist:

$$\begin{tikzcd}
L(M^n) \arrow[d, "\pi"'] & \supset & \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times GL(n,\mathbb{R}) \arrow[dl, "pr_1"] \\
L(M^n)/GL(n,\mathbb{R}) \cong M^n & \supset & U &
\end{tikzcd}$$

ψ ist offensichtlich diffeomorph, denn die aus den Komponenten der X_k gebildete Matrix ist nicht singulär.

[3] Es wird dabei [Kob1], [Kob2], [Joy] gefolgt.

Das auch als Rahmenbündel bezeichnete Faserbündel $L(M^n)$ ist ein $GL(n,\mathbb{R})$-Prinzipalbündel[4] über M^n mit der Strukturgruppe $GL(n,\mathbb{R})$. Ist G eine Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ und ist P ein G-Prinzipalunterbündel von $L(M^n)$ über M^n , so heißt G auch Reduktion der Strukturgruppe $GL(n,\mathbb{R})$. Ein Rahmenbündel kann als Prinzipalbündel von vornherein abstrakt eingeführt werden. Dann lassen sich davon ausgehend Vektorbündel und speziell das Tangentialbündel und die Tensor- und Formenbündel als zu dem Prinzipalbündel assoziierte Vektorbündel einführen. Das G-Prinzipalunterbündel von $L(M^n)$ dient also als abstrakter Ausgangspunkt zur Konstruktion weiterer Objekte und fasst damit zusätzliche Strukturen auf der Mannigfaltigkeit M^n zusammen, die ja nur als differenzierbar vorausgesetzt ist. Das führt zu folgender Definition:

Definition 2.1.1 *Sei $L(M^n)$ das $GL(n,\mathbb{R})$-Prinzipalbündel der linearen Koordinatensysteme über M^n und sei G Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$.*
Das differenzierbare G-Prinzipalunterbündel P von $L(M^n)$ heißt G-Struktur auf M^n und M^n auch G-Mannigfaltigkeit.

Sei $\rho : G \to Aut(V)$ Darstellung der (abgeschlossenen) Lie-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ auf einen beliebigen $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Operiere G auf $P \times V$ durch die o.g. G-Operation auf P und durch die Darstellung ρ auf V, so ist folgendermaßen ein (differenzierbares) Vektorbündel definiert [Kob1]:
Sei $P \times_\rho V := (P \times V)/G$ der Quotient bezüglich obiger G-Operation auf $P \times V$, dann induziert die Abbildung $P \times V \to P/G \cong M^n$ eine Projektion $\tilde{\pi} : (P \times V)/G \to P/G \cong M^n$ so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(P\times V)/G \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & \supset & \tilde{\pi}^{-1}(U) \arrow[d] & \cong & (\pi^{-1}(U)\times V)/G & \cong & (U\times G\times V)/G \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d] & U\times V \arrow[dl, "pr_1"] \\
P/G\cong M^n & \supset & U & & = & & U &
\end{tikzcd}$$

Der Isomorphismus $\psi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times G$ induziert also einen Isomorphismus $\tilde{\psi} : \tilde{\pi}^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times V$. Es folgt dann, daß durch $P \times_\rho V$ ein (differenzierbares) Vektorraumbündel definiert ist, das zu P assoziierte Vektorbündel über M^n mit Strukturgruppe G. Es lässt sich dann zeigen, daß die Automorphismengruppe der Fasern $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ von $P \times_\rho V$ isomorph zur Strukturgruppe G ist.
Wird V speziell als isomorph zu den Tangentialräumen T_pM^n für alle $p \in M^n$ gewählt, so ist das zu P assoziierte Vektorbündel das Tangentialbündel TM^n über M^n, womit dann auch die (p,q)-Tensorbündel konstruiert werden. Die

[4] siehe Anhang B

Übergangsdiffeomorphismen der Fasern dieser Tensorbündel bei Koordinatenwechsel nehmen also Werte in der Darstellung $\rho(G)$ von G an. Diese lassen sich weiter ausreduzieren, so daß die in den irreduziblen Darstellungen von G liegenden (p,q)-Tensoren aus den Fasern $(T_p^*M^n)^{\otimes p} \otimes (T_pM^n)^{\otimes q}$ zu betrachten sind. Das fasst folgendes Lemma zusammen [Joy]:

Lemma 2.1.1 *Für jede Reduktion der Strukturgruppe zu G zerfällt das Tensorbündel $\bigotimes_p T^*M^n \otimes \bigotimes_q TM^n$ über M^n in die direkte Summe von Unterbündeln, die den irreduziblen Darstellungen von G entsprechen.*

Es existiert dabei immer ein Tensor, der einen Anteil in dieser Zerlegung besitzt, welcher unter G invariant ist. Das ist ein Singulett in der Darstellung von G. Das dazugehörige Unterbündel ist also trivial und besitzt einen global definierten, nicht verschwindenden Schnitt. Das bedeutet, es existiert ein global definiertes, nicht verschwindendes Tensorfeld.
Ist umgekehrt ein G-invariantes Tensorfeld auf M^n global definiert, so lässt sich zeigen, daß eine Reduktion der Strukturgruppe zu G existiert. Das beschreibt der folgende Satz [Cle].

Satz 2.1.1 *Sei T_pM^n der Tangentialraum im Punkt $p \in M^n$,*

$$G = Stab(\xi) \subset GL(n, \mathbb{R})$$

Lie-Untergruppe und Stabilisatorgruppe von $\xi \in (T_p^*M^n)^{\otimes p} \otimes (T_pM^n)^{\otimes q}$, dann existiert eine Reduktion der Strukturgruppe $GL(n,\mathbb{R})$ zu G von TM^n genau dann, wenn auf M^n ein global definiertes Tensorfeld Ξ existiert, das lokal gleich ξ ist.

2.2 Beispiele für G-Strukturen

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$ ist eine Reduktion der Strukturgruppe $GL(n,\mathbb{R})$ von T_pM^n genau dann, wenn M^n Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, d.h. es existiert ein global definiertes, $\mathrm{O}(n)$-invariantes (2,0)-Tensorfeld, welches lokal gleich dem (2,0)-Tensor g_p einer Riemannschen Metrik auf M^n entspricht. Der metrische Tensor g_p ist nämlich unter orthogonalen Transformationen invariant [Joy].
Im Fall $\mathrm{SO}(n)$ ist M^n zusätzlich orientierbar. Die weitere Strukturgruppenreduktion zur $\mathrm{SO}(n)$ bedeutet die Existenz einer invariante n-Form (Volumenform), da die Determinante der Transformationsmatrizen gleich eins ist.
Die Gruppe $GL(m,\mathbb{C})$ lässt sich in natürlicher Weise als Untergruppe von $GL(n = 2m, \mathbb{R})$ auffassen:

$$GL(m,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2m,\mathbb{R}) \mid A\mathsf{J} = \mathsf{J}A\} \tag{2.2.1}$$

wobei[5]

$$\mathsf{J} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{E}_3 \\ \mathbb{E}_3 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.2.2}$$

Unterteilt man die Matrix A in $m \times m$-Blockmatrizen A_1 und A_2, so ist die bijektive Abbildung

$$GL(m, \mathbb{C}) \ni A_1 + iA_2 \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix} \in GL(2m, \mathbb{R}) \tag{2.2.3}$$

definiert [Kob2].
Die Gruppe $GL(m, \mathbb{C})$ ist eine Reduktion der Strukturgruppe $GL(n, \mathbb{R})$ von TM^n. Mit $\mathsf{J} = A^{-1}\mathsf{J}A$ ist J ein $GL(n, \mathbb{R})$-invarianter (1,1)-Tensor. Dieser steht in eindeutigem Zusammenhang mit einem global definierten (1,1)-Tensorfeld J auf der Mannigfaltigkeit M^n, was im nächsten Abschnitt näher ausgeführt wird.
Die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(m) = \mathrm{O}(2m) \cap GL(m, \mathbb{C}) \subset GL(2m, \mathbb{R})$ ist genau dann Reduktion der Strukturgruppe $GL(2m, \mathbb{R})$ von TM^n, wenn ein global definiertes, $\mathrm{O}(2m)$-invariantes (2,0)-Tensorfeld g und ein global definiertes, $GL(m, \mathbb{C})$-invariantes (1,1)-Tensorfeld J auf M^n existieren, so daß g unter J invariant ist. D.h. es gilt $g(X, Y) = g(JX, JY)$ und es ist eine 2-Form J durch $\mathrm{J}(X, Y) := g(X, JY)$ definiert, mit $X, Y \in \Gamma(M^n, TM^n)$. J heißt Kählerform und die Mannigfaltigkeit M^n fast-hermitesch [Kob1].
Eine weitere Reduktion zur speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(m)$, für dessen komplexe Transformationsmatrizen die Determinante eins ist, führt zusätzlich auf die globale Existenz einer holomorphen Volumenform, was in Abschnitt 2.5 erläutert wird.

2.3 Tensoren auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Auf der Mannigfaltigkeit M^{2m} sei eine $GL(m, \mathbb{C})$-Struktur definiert. Es existiert dann ein global definiertes, $GL(m, \mathbb{C})$-invariantes (1,1)-Tensorfeld J so, daß es für alle $p \in M^n$ $\mathbb{C}$-lineare Koordinatensysteme der Tangentialräume T_pM^{2m} gibt. Sei also $u : \mathbb{R}^{2m} \to T_pM^n$ ein $\mathbb{R}$-lineares Koordinatensystem von T_pM^{2m}, dann wird u als $\mathbb{C}$-linear bezeichnet, wenn mit J aus (2.2.2)

$$u \circ \mathsf{J} \;=\; J_p \circ u \tag{2.3.1}$$

[5] $\mathbb{E}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

gilt. Dabei ist J_p (lokal gilt $J_p = J\,|_p$) ein Endomorphismus

$$J_p : T_pM^{2m} \to T_pM^{2m} \tag{2.3.2}$$

mit $J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pM^n}$, der komplexe Struktur auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum T_pM^n heißt. Auf geradzahlig-dimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich in zu jedem Punkt gehörigen Tangentialraum eine komplexe Struktur definieren [Fla]. (2.3.1) hat folgende Bedeutung: $\mathbb{R}^{2m}$ und T_pM^{2m} lassen sich in natürlicher Weise als $\mathbb{C}$-Vektorräume auffassen, indem die Multiplikation eines Vektors aus $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^{\mathsf{2m}}$ sowie $v \in T_pM^{2m}$ mit i jeweils durch $i\ \mathsf{v} := \mathsf{Jv}$ bzw. $iv{:=}J_pv$ definiert ist. Es ist dann nämlich für $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^{\mathsf{2m}}$ $u(i\mathsf{v}) = iu(\mathsf{v}) \in T_pM^{2m}$. Das (1,1)-Tensorfeld J bzw. die zugehörige Reduktion zu $GL(m, \mathbb{C})$ heißt fast-komplexe Struktur auf M^{2m}.
Sei $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}}\}$, $\alpha = 1, ..., m; \bar\alpha = m+1, ..., 2m$ eine Tangentialraumbasis bezüglich einer Karte x von M^{2m}. Die (kanonische) komplexe Struktur $J_p \equiv J$ auf T_pM^{2m} ist gegeben durch [Fla]:

$$\begin{aligned} J \quad : \quad T_pM^{2m} &\to T_pM^{2m} \\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} &\mapsto J(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) := \frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}} && (2.3.3) \\ \frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}} &\mapsto J(\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}}) := -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} && (2.3.4) \end{aligned}$$

Besitzt die Mannigfaltigkeit M^{2m} einen komplex-analytischen maximalen Atlas, so gilt folgendes Lemma [Fla]:

Lemma 2.3.1 *Ist x' eine weitere Karte der komplex-analytischen Struktur von M^{2m}, so bleibt die komplexe Struktur auf T_pM^{2m} (für alle Punkte p von M^{2m}) forminvariant, d.h. es gilt*

$$J(\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x'^{\bar\alpha}} \tag{2.3.5}$$

$$J(\frac{\partial}{\partial x'^{\bar\alpha}}) = -\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\ . \tag{2.3.6}$$

Auf einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit ist es somit möglich, ausgehend von der gemäß obigen Lemmas wohldefinierten komplexen Struktur der Tangentialräume eine fast-komplexe Struktur zu konstruieren. Eine auf diese Weise konstruierte fast-komplexe Struktur heißt integrabel, von der komplex-analytischen Struktur induziert oder komplexe Struktur auf der Mannigfaltigkeit M^{2m}. Nicht jede fast-komplexe Struktur ist integrabel, d.h. auf einer (geradzahlig-dimensionalen) Mannigfaltigkeit ist eine fast-komplexe Struktur möglich, die jedoch nicht komplex zu sein braucht. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Integrabilität einer fast-komplexen Struktur ist das Verschwinden des Nijenhuis-Tensors N, dessen Komponenten gegeben sind durch [Fla], [Gur1]:

$$N_{mn}{}^{p} \;=\; J_m{}^q(\nabla_q^{(\Gamma)} J_n{}^p - \nabla_n^{(\Gamma)} J_q{}^p) - J_n{}^q(\nabla_q^{(\Gamma)} J_m{}^p - \nabla_m^{(\Gamma)} J_q{}^p)\;. \tag{2.3.7}$$

Es ist gebräuchlich, statt der Vektoren und Tensoren aus Konstruktionen von reellen Tangentialräume auf M^{2m} ihre Komplexifizierungen zu benutzen. Das führt zu Tensoren mit komplexen Komponenten, die mit komplexen Indizes bezeichnet werden, was im folgenden zu erläutern ist:
Mit den reellen Tangentialvektoren X und Y aus dem $\mathbb{R}$-Vektorraum T_pM^{2m} erhält man den komplexifizierten Tangentialraum $T_pM^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dessen komplexifizierte Tangentialvektoren durch

$$X + iY \;=\; x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + x^{\bar\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}} + i(y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + y^{\bar\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}}) \tag{2.3.8}$$

$$\;=\; (x^\alpha + iy^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + (x^{\bar\alpha} + iy^{\bar\alpha})\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}} \tag{2.3.9}$$

gegeben sind [Fla], [Joy]. Die komplexe Struktur J lässt sich auf den komplexifizierten Tangentialraum fortsetztten. Es wird dazu eine Basis aus Eigenvektoren $\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}}\}$ von J zu den Eigenwerten i und $-i$ angegeben, definiert durch [Fla]:

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \;:=\; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - iJ(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})) \tag{2.3.10}$$

$$\;=\; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}}) \tag{2.3.11}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}} \;:=\; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + iJ(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})) \tag{2.3.12}$$

$$\;=\; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}})\;. \tag{2.3.13}$$

Es gilt dann nämlich

$$J(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}) \;=\; \frac{1}{2}(J(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) - iJ(\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}})) \tag{2.3.14}$$

$$\;=\; (-i)\frac{1}{2}(i\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}) \tag{2.3.15}$$

$$\;=\; i\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}}) \tag{2.3.16}$$

$$\;=\; i\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \tag{2.3.17}$$

und analog

$$J(\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}}) = \frac{1}{2}(J(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) + iJ(\frac{\partial}{\partial x^{\bar\alpha}})) \tag{2.3.18}$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}}\ . \tag{2.3.19}$$

In dieser Basis von $T_pM^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist J diagonal:

$$J = \begin{pmatrix} i\delta_\alpha{}^\beta & 0 \\ 0 & -i\delta_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta} \end{pmatrix} \tag{2.3.20}$$

$T_pM^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zerfällt also in die direkte Summe der Eigenräume von J $T_p^{(1,0)}M^{2m} \cong \mathbb{C}^m$ zum Eigenwert i und $T_p^{(0,1)}M^{2m} \cong \mathbb{C}^m$ zum Eigenwert $-i$, die komplex konjugiert zueinander sind [Fla], [Joy]:

$$T_pM^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_p^{(1,0)}M^{2m} \oplus T_p^{(0,1)}M^{2m} \tag{2.3.21}$$

In analoger Weise lassen sich auch die Kotangentialräume komplexifizieren und in die Eigenräume zu der darauf fortgesetzten komplexen Struktur zerlegen: $T_p^*M^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_p^{*(1,0)}M^{2m} \oplus T_p^{*(0,1)}M^{2m}$. Alle mit den komplexifizierten Tangential-und Kotangentialräumen konstruierten (p,q)-Tensorbündel zerfallen mit J also in entsprechende Unterbündel. Die Tensorkomponenten eines (p,q)-Tensors t werden dann mit komplexen Indizes geschrieben:

$$\begin{aligned} t &= t_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q} dz^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dz^{\alpha_p} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{\beta_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial z^{\beta_q}} \\ &\quad + t_{\bar\alpha_1\ldots\bar\alpha_p}{}^{\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q} d\overline{z^{\alpha_1}} \otimes \cdots \otimes d\overline{z^{\alpha_p}} \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z^{\beta_1}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z^{\beta_q}}} \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Dabei sind Reihenfolge und Stellung der Indizes zu beachten, denn das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht kommutativ. So sind z.B. die Tensoren

$$t' = t_\alpha{}^\beta dz^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z^\beta} + t_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta} d\overline{z^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z^\beta}} \tag{2.3.23}$$

und

$$t'' = t^\alpha{}_\beta \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \otimes dz^\beta + t^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta} \frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}} \otimes d\overline{z^\beta} \tag{2.3.24}$$

zu unterscheiden. Insbesondere zerfällt das Bündel der k-Formen wie folgt [Joy]:

$$\Lambda^k T^*M^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \oplus_{j=0}^k \Lambda^j T^{*(1,0)}M^{2m} \otimes \Lambda^{j-k} T^{*(0,1)}M^{2m} \tag{2.3.25}$$

$$= \oplus_{j=0}^k \Lambda^{j,k-j}M^{2m}\ , \tag{2.3.26}$$

wobei $\Lambda^{p,q}M^{2m} := \Lambda^p T^{*(1,0)}M^{2m} \otimes \Lambda^q T^{*(0,1)}M^{2m}$ als Bündel der (p,q)-Formen (wohl zu unterscheiden von den (p,q)-Tensoren) bezeichnet wird.
Ist auf der Mannigfaltigkeit eine fast-komplexe Struktur J definiert, so lassen sich alle Tensoren mit komplexen Indizes schreiben. Mit den Projektoren

$$P_m{}^n := \frac{1}{2}(\delta_m{}^n - iJ_m{}^n) \quad \text{und} \quad Q_m{}^n := \frac{1}{2}(\delta_m{}^n + iJ_m{}^n) \tag{2.3.27}$$

werden in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit Tensoren auf die jeweiligen Eigenräume von J projiziert [Can2]. Auf einer fast-hermiteschen Mannigfaltigkeit sind die Komponenten des metrischen Tensors und der Kählerform lokal immer von folgender Form möglich [Fla]:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\bar\alpha\bar\beta} = g^{\alpha\beta} = g^{\bar\alpha\bar\beta} = 0 \tag{2.3.28}$$
$$J_{\alpha\beta} = J_{\bar\alpha\bar\beta} = J^{\alpha\beta} = J^{\bar\alpha\bar\beta} = 0 \tag{2.3.29}$$
$$J_{\alpha\bar\beta} = ig_{\alpha\bar\beta} \tag{2.3.30}$$
$$J_{\bar\alpha\beta} = -ig_{\bar\alpha\beta} \tag{2.3.31}$$
$$J^{\alpha\bar\beta} = ig^{\alpha\bar\beta} \tag{2.3.32}$$
$$J^{\bar\alpha\beta} = -ig^{\bar\alpha\beta} \tag{2.3.33}$$

Im nächsten Abschnitt werden Zusammenhänge auf G-Mannigfaltigkeiten definiert. Insbesondere ist der Begriff des G-Zusammenhangs von Bedeutung, über den eine Klassifizierung der G-Mannigfaltigkeiten erreicht wird.

2.4 G-Zusammenhang

Der zentrale Begriff eines Zusammenhangs auf der Mannigfaltigkeit M^n wird zunächst in seiner allgemeinen Form eingeführt [Joy]:

Definition 2.4.1 *Ein Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$\nabla : \Gamma(M^n, TM^n) \to \Gamma(M^n, T^*M^n \otimes TM^n)$$

für die $\nabla(fX) = f\nabla X + df \otimes X$ gilt, mit dem Vektorfeld $X \in \Gamma(M^n, TM^n)$ und der differenzierbaren Funktion $f \in C^\infty(M^n)$.

∇X ist also ein (1,1)-Tensorfeld[6] über M^n.

[6] ∇ lässt sich aber auch auf beliebige (p,q)-Tensorfelder eindeutig fortsetzen gemäß

$$\nabla(T_1 \otimes ... \otimes T_k) = \sum_{j=1}^{k} T_1 \otimes ... \otimes \nabla(T_j) \otimes ... \otimes T_k$$

mit den beliebigen ko- und kontravarianten Tensorfeldern $T_1, ..., T_k \in \Gamma(M^n, TM^n)$ bzw. $\Gamma(M^n, T^*M^n)$, woraus die kovariante Ableitungsregel von Tensoren beliebiger Stufe folgt.

Definition 2.4.2 *Ist mit dem global definierten Tensorfeld Ξ gemäß Satz 2.1.1 lokal $\tilde{\nabla}\xi = 0$, dann heißt $\tilde{\nabla}$ G-Zusammenhang.*

Seien nun $\tilde{\nabla}'$ und $\tilde{\nabla}$ G-Zusammenhänge, gilt also $\tilde{\nabla}'\xi = 0$ und $\tilde{\nabla}\xi = 0$, dann ist für die Auswertung von $\tilde{\nabla}'\xi$ und $\tilde{\nabla}\xi$ bei allen $X \in \Gamma(M^n, TM^n)$

$$\tilde{\nabla}'_X\xi \;=\; \tilde{\nabla}_X\xi = 0 \tag{2.4.1}$$

und damit $\tilde{\nabla}'_X, \tilde{\nabla}_X \in \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = End(TM^n) \mid A\xi = 0\}$. Und da G die Stabilisatorgruppe von ξ ist, gilt $\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A\xi = 0\} = \mathfrak{g}$, dies ist die Lie-Algebra von G. Insbesondere ist $(\tilde{\nabla}'_X - \tilde{\nabla}_X)\xi = 0$ und dadurch ist die Äquivalenzrelation $\sim_G$ der G-Äquivalenz zweier Zusammenhänge $\tilde{\nabla}'$ und $\tilde{\nabla}$ erklärt. Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim_G$ hängt also nur von der G-Struktur ab.
Im folgenden seien nur noch Riemannsche, orientierte Mannigfaltigkeiten angenommen, die Strukturgruppe ist also zu SO(n) reduziert, so daß

$$\nabla'_X \in \mathfrak{so}(n) \ . \tag{2.4.2}$$

Der entsprechende SO(n)-Zusammenhang ist der eindeutig bestimmte (torsionsfreie) Levi-Civita Zusammenhang $\nabla^{(\Gamma)}$.
Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim_G$ ist durch die Projektion von

$$(\tilde{\nabla}_X - \nabla^{(\Gamma)}_X) \in \mathfrak{so}(n) \;=\; \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\perp} \tag{2.4.3}$$

auf das orthogonale Komplement $\mathfrak{g}^{\perp}$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{so}(n)$ eindeutig bestimmt:
Mit $\tilde{\nabla}' \sim_G \tilde{\nabla}$ ist $(\tilde{\nabla}'_X - \tilde{\nabla}_X) \in \mathfrak{g}$ und es gilt

$$\begin{aligned} pr_{\mathfrak{g}^{\perp}}(\tilde{\nabla}'_X - \tilde{\nabla}_X) &= \\ pr_{\mathfrak{g}^{\perp}}(\tilde{\nabla}'_X - \nabla^{(\Gamma)}_X) - pr_{\mathfrak{g}^{\perp}}(\tilde{\nabla}_X - \nabla^{(\Gamma)}_X) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

also

$$pr_{\mathfrak{g}^{\perp}}(\tilde{\nabla}'_X - \nabla^{(\Gamma)}_X) = pr_{\mathfrak{g}^{\perp}}(\tilde{\nabla}_X - \nabla^{(\Gamma)}_X) \ . \tag{2.4.5}$$

Dabei wird das durch

$$\kappa^{\mathfrak{g}^{\perp}}_X := pr_{\mathfrak{g}^{\perp}}(\tilde{\nabla}_X - \nabla^{(\Gamma)}_X) \tag{2.4.6}$$

definierte (2,1)-Tensorfeld $\kappa^{\mathfrak{g}^{\perp}}$ als intrinsische Kontorsion der G-Struktur bezeichnet, welche unten genauer betrachtet werden soll. Die intrinsische Kontorsion lässt sich auch folgendermaßen charakterisieren:

Lemma 2.4.1 *Für $G = Stab(\xi)$ mit $\xi \in (T^*_pM)^{\otimes p} \otimes T_pM^{\otimes q}$ besteht zwischen $\kappa^{\mathfrak{g}^{\perp}}$ und $\nabla^{(\Gamma)}\xi$ eine Bijektion.*

Beweis :
Es sei die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathfrak{so}(n) & \to & E := (T_p^* M)^{\otimes p} \otimes (T_p M)^{\otimes q} \\ A & \mapsto & \rho_*(A)\xi \end{array}$$

mit der Darstellung $\rho : G \to Aut(E)$ von G und der Darstellung ρ_* der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ definiert.
Dann ist $ker\varphi = \mathfrak{g}$, denn für $A \equiv \tilde{\nabla}_X$ folgen $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$ und $\tilde{\nabla}_X \in \mathfrak{g}$. Wegen $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$, wird durch $\varphi \mid_{\mathfrak{g}^\perp} \to E$ nur noch die Null aus $\mathfrak{g}$ auf die Null aus E abgebildet, d.h. es ist $\mathfrak{g}^\perp \ni 0 \mapsto 0 \in E$ also $ker(\varphi \mid_{\mathfrak{g}^\perp}) = 0$, was bedeutet, daß die eingeschränkte Abbildung $\varphi \mid_{\mathfrak{g}^\perp}$ injektiv ist. Somit ist die Abbildung $\varphi \mid_{\mathfrak{g}^\perp} (\kappa_X^{\mathfrak{g}^\perp}) = \rho_*(\kappa_X)\xi = (\tilde{\nabla}_X - \nabla_X^{(\Gamma)})\xi = -\nabla_X^{(\Gamma)}\xi$ auch bijektiv. □

Ein interessantes Beispiel für diese Charakterisierung der intrinsischen Kontorsion ist der Fall der Reduktion zur unitären Gruppe, was sich für die weitere Betrachtung als nützlich erweist:
Für ξ sei also die mögliche komplexe Struktur auf einem Tangentialraum $T_p M^{2m}$ eingesetzt; $\xi \equiv J \in \mathfrak{u}(m) \subset \mathfrak{so}(2m)$ und die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{so}(2m) \to \mathfrak{so}(2m) \tag{2.4.7}$$

$$\kappa_X^{\mathfrak{u}^\perp(m)} \mapsto ad_*(\kappa_X^{\mathfrak{u}^\perp(m)})J \tag{2.4.8}$$

definiert. Da φ nach $\mathfrak{so}(2m)$ abbildet ist hier die adjungierte Darstellung ad_* von $\mathfrak{u}(m)$ zu nehmen. Dafür gilt nun [Bro]

$$ad_*(\kappa_X)J = \kappa_X \circ J - J \circ \kappa_X = (\tilde{\nabla}_X - \nabla_X^{(\Gamma)})J = -\nabla_X^{(\Gamma)} J \tag{2.4.9}$$

also

$$\varphi \mid_{\mathfrak{u}^\perp(m)} (\kappa_X) = \kappa_X \circ J - J \circ \kappa_X = -2J \circ \kappa_X \ . \tag{2.4.10}$$

Wegen $\kappa_X \in \mathfrak{u}^\perp(m) = \{A \in \mathfrak{so}(2m) \mid AJ = -JA\}$ folgt daraus

$$-2J \circ \kappa_X = -\nabla_X^{(\Gamma)} J \tag{2.4.11}$$

und somit

$$\kappa_X = -\frac{1}{2} J \circ \nabla_X^{(\Gamma)} J \ . \tag{2.4.12}$$

2.5 Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten

In Kapitel 1.1 wurde die Existenz von kompakten sechs-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, den Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten Y, gefordert, die bei der Faktorisierung $\mathbb{R}^{1,3} \times Y$ der zehn-dimensionalen Hintergrund-Raum-Zeit eine physikalisch adäquate Kompaktfizierungsgeometrie besitzen. Es soll zunächst mit der Definition[7] von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten begonnen werden. Die Bedeutung dieser Definition und die dabei auftretenden Begriffe werden im Anschluß erläutert.

Definition 2.5.1 *Eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit mit Holonomiegruppe* $\mathrm{SU}(m)$ *($m \geq 2$).*

Es sei also eine $2m$-dimensionale fast-hermitesche Mannigfaltigkeit vorausgesetzt. Mit der Identifikation von $\mathbb{R}^{2m}$ mit $\mathbb{C}^m$ wird die $2m$-dimensionale Mannigfaltigkeit als von der komplexen Dimension m aufgefasst. Tensoren lassen sich dann auf der Grundlage von m-(komplex-)dimensionalen Tangentialräumen konstruieren. Bezüglich der in Abschnitt 2.3 eingeführten komplexen Koordinaten ist eine Tangentialraum-Basis also gegeben durch $\{\frac{\partial}{\partial z^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z^m}\}$ mit $J(\frac{\partial}{\partial z^k}) = i\,\frac{\partial}{\partial z^k}$, denn die Abbildung J ist dabei als Multiplikation mit i aufzufassen. Sei $\nabla^{(\Gamma)}$ der Levi-Civita Zusammenhang und γ_0 eine geschlossene Kurve auf der Mannigfaltigkeit, deren Anfangs-und Endpunkt p_0 ist. Die Transformationsgruppe, die die Änderung eines Tangentialvektors im Punkt p_0 durch einen Paralleltransport entlang γ_0 beschreibt, heißt Holonomiegruppe. Die Existenz invarianter Tensoren steht mit der Holonomiegruppe folgendermaßen in Beziehung [Joy]:

Lemma 2.5.1 *Sei ξ ein kovariant konstanter Tensor. Dann ist ξ (lokal, für einen beliebigen Punkt p auf der Mannigfaltigkeit) ein Singulett der Darstellung der Holonomiegruppe.*
Lässt umgekehrt die Operation der Holonomiegruppe einen (lokalen) Tensor invariant, so existiert ein kovariant konstantes Tensorfeld auf der Mannigfaltigkeit, das lokal gleich ξ ist.

Die $\mathrm{SU}(m)$-Holonomie hat also folgende Bedeutung:
Unter $\mathrm{SU}(m)$-Transformationen ist, wie in Abschnitt 2.2 erläutert, die Kählerform J invariant. Da die Determinante der Transformationsmatrizen gleich eins ist, ist die als holomorphe Volumenform bezeichnete $(m, 0)$-Form

$$\Omega := dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^m \tag{2.5.1}$$

[7] Es gibt unterschiedliche Definitionen von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten [Joy].

SU(m)-invariant [Sto]. Gemäß obigen Lemmas 2.5.1 existieren auf einer Mannigfaltigkeit mit Holonomiegruppe SU(3) also die (global definierten), kovariant konstanten Formen J und Ω. Insbesondere ist J geschlossen, womit auch der Nijenhuis-Tensor (2.3.7) verschwindet und die Mannigfaltigkeit Kählersch ist. Im Fall der zu betrachtenden Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten lässt sich zeigen, daß die invariante $(3,0)$-Form harmonisch ist [Can2].

Die Hodge-Zahlen entsprechen den Dimensionen der Räume der harmonischen Formen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit [Joy]. Auf einer Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit beispielsweise nimmt der Hodge-Diamond folgende Form an [Can2]:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h_{11} & & 0 & \\ 1 & & h_{21} & & h_{12} & & 1 \\ & 0 & & h_{11} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Die Holonomiegruppe des Levi-Civita-Zusammenhangs sei zunächst als SO(6) angenommen [Joy]. Neben den Tensordarstellungen der SO(6) auf M^6 existieren auch Spinordarstellungen der SO(6), welche den Darstellungen ihrer universellen Überlagerungsgruppe SU(4) $\cong$ SO(6) entsprechen [Sexl]. Die Spinoren der fundamentalen SU(4)-Darstellungen $[\mathbf{4}]$ und $[\bar{\mathbf{4}}]$ besitzen entgegengesetzte Chiralität [Sexl]. Die Spinordarstellung $[\mathbf{4}]$ zerfällt unter SU(3) gemäß $[\mathbf{4}] = [\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{3}]$ in irreduzible Darstellungen, was auf ein Singulett entsprechend der Existenz eines global definierten, SU(3)-invarianten Spinors η führt [Gre], [Can3], [Kak], [Gur1]. Mit Lemma 2.5.1 bedeutet das die Existenz eines global definierten, kovariant konstanten Spinorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit mit SU(3)-Holonomie. Die SU(3)-invarianten, kovariant konstanten Tensoren J und Ω lassen sich dann mit dem invarianten Spinor η konstruieren [Can2]: $J_m{}^n = -i\ \eta^\dagger \Gamma_m{}^n \eta$ und $\Omega_{mnp} = \eta^T \Gamma_{mnp} \eta$, wobei mit den sechsdimensionalen Gamma-Matrizen $\Gamma_{m_1}, ..., \Gamma_{m_6}$

$$\Gamma_{m_1 \dots m_k} \quad := \quad \Gamma_{[m_1} \cdots \Gamma_{m_k]} \tag{2.5.2}$$

gilt [Pro]. Eine Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit lässt also einen invarianten, kovariant konstanten Spinor zu, wie von der supersymmetrischen String-Theorie gefordert.

Darüberhinaus sind Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten Ricci-flach, was die Aussage folgenden Lemmas ist [Joy]:

Lemma 2.5.2 *Genau dann, wenn die Holonomiegruppe (Untergruppe von)* SU(m) *ist, ist eine Kählersche Mannigfaltigkeit Ricci-flach.*

2.6 SU(3)-Mannigfaltigkeiten

Die starke Bedingung der globalen Existenz eines SU(3)-invarianten, kovariant konstanten Spinors auf der sechs-dimensionalen Kompaktifizierungs-Mannigfaltigkeit M^6, was für Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten erfüllt ist, soll dahin abgeschwächt werden, daß die kovariante Ableitung (bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs) des SU(3)-invarianten Spinorfeldes η nicht verschwindet. Diese Kompaktifizierungs-Mannigfaltigkeit M^6 besitzt also keine SU(3)-Holonomie, wohl aber die reduzierte Strukturgruppe SU(3). Es sei zunächst als Strukturgruppe die SO(6) vorausgesetzt, die Mannigfaltigkeit M^6 ist also eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, wie in Abschnitt 2.2 erläutert wurde.

Die 2-Formen auf M^6 liegen in der 15-dimensionalen adjungierten Darstellung $\mathfrak{so}(6) \cong [\mathbf{15}]$. In komplexen Koordinaten zerfällt der Raum der 2-Formen Λ^2 zunächst gemäß (2.3.26)

$$\Lambda^2 \;=\; \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{2,0}\ . \tag{2.6.1}$$

Das lässt sich weiter in irreduzible SU(3)-Darstellungen zerlegen :

$$\Lambda^2 \;=\; \mathbb{C} \oplus \Lambda_0^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{2,0} \tag{2.6.2}$$

und das entspricht den SU(3)-Darstellungen [Cor]

$$[\mathbf{15}] \;=\; [\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]\ . \tag{2.6.3}$$

$\Lambda_0^{1,1}$ ist dabei der spurlose Anteil der (1,1)-Formen, welcher der acht-dimensionalen adjungierten Darstellung $\mathfrak{su}(3) \cong [\mathbf{8}]$ der SU(3) entspricht, und das Singulett kann als Kähler-Form interpretiert werden. Um das zu erklären wird zunächst die Lie-Algebra der U(3) folgendermaßen aufgefasst [Kob2]:

$$\mathfrak{u}(3) \;=\; \mathfrak{so}(6) \cap \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}) \tag{2.6.4}$$

dabei ist

$$\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}) \;=\; \{A \in \mathfrak{gl}(2m,\mathbb{R}) \mid A\mathsf{J} = \mathsf{J}A\} \tag{2.6.5}$$

die Lie-Algebra von $GL(m,\mathbb{C})$ mit J aus (2.2.2). Es besteht analog zu (2.2.3) eine Bijektion zwischen (2.6.4) und $\mathfrak{u}(3)$ aufgefasst als

$$\mathfrak{u}(3) \;=\; \{\mathrm{A} \;= A_1 + iA_2 \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}) \mid \bar{\mathrm{A}}^T = -\mathrm{A}\}\ . \tag{2.6.6}$$

Folgendes Lemma fasst die obigen Behauptungen zusammen:

Lemma 2.6.1 *Auf einer sechs-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^6 ist der Raum der (1,1)-Formen $\Lambda^{1,1}$ isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{u}(3)$ und zerfällt in irreduzible* SU(3)*-Darstellungen gemäß*

$$\begin{aligned}\Lambda^{1,1} &= \mathbb{C} \oplus \Lambda_0^{1,1} &(2.6.7)\\ &\cong \mathfrak{u}(3) &(2.6.8)\\ &= \langle \mathrm{J} \rangle \oplus \mathfrak{su}(3)\ , &(2.6.9)\end{aligned}$$

wobei $\langle \mathrm{J} \rangle$ den von der Kähler-Form aufgespannten ein-dimensionalen Unterraum von $\Lambda^{1,1}$ bezeichnet.

Beweis:
Sei $\lambda^{(1,1)} \in \Lambda^{1,1}$ eine beliebige (1,1)-Form, dann gilt mit (2.3.20)

$$\lambda_{\mu\bar{\nu}} J_\alpha{}^\mu J_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\nu}} = \lambda_{\alpha\bar{\beta}} \qquad (2.6.10)$$

und das ist äquivalent zu

$$\lambda_\rho{}^\mu J_\alpha{}^\rho = J_\rho{}^\mu \lambda_\alpha{}^\rho\ , \qquad (2.6.11)$$

denn durch beidseitige Kontraktion von (2.6.11) mit $J_\mu{}^\beta$ ist

$$\begin{aligned} J_\mu{}^\beta \lambda_\rho{}^\mu J_\alpha{}^\rho &= J_\mu{}^\beta J_\rho{}^\mu \lambda_\alpha{}^\rho \\ \Leftrightarrow \lambda_\rho{}^\mu J_\alpha{}^\rho J_\mu{}^\beta &= (-\delta_\rho{}^\beta)\lambda_\alpha{}^\rho \\ \Leftrightarrow \lambda_{\rho\bar{\mu}} J_\alpha{}^\rho J^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\beta}} &= -\lambda_{\alpha\bar{\beta}} \\ \Leftrightarrow \lambda_{\rho\bar{\mu}} J_\alpha{}^\rho (-J_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\mu}}) &= -\lambda_{\alpha\bar{\beta}} \\ \Leftrightarrow \lambda_{\rho\bar{\mu}} J_\alpha{}^\rho J_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\mu}} &= \lambda_{\alpha\bar{\beta}}\ . \end{aligned} \qquad (2.6.12)$$

(2.6.11) ist aber äquivalent zu $AJ = JA$, wenn $\lambda_\rho{}^\mu$ die Komponenten der Matrix A sind. Das beweist die Isomorphie von $\Lambda^{1,1}$ und $\mathfrak{u}(3)$. Die Lie-Algebra der SU(3) ist gegeben durch [Sto]

$$\mathfrak{su}(3) = \{\mathrm{A} \in \mathfrak{u}(3) \mid 0 = \mathrm{tr}^{\mathbb{C}}\ \mathrm{A} = \mathrm{tr} A_1 + i \mathrm{tr} A_2\}\ . \qquad (2.6.13)$$

Das sind also die Matrizen der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(3)$, für welche die komplexe Spur $\mathrm{tr}^{\mathbb{C}}\ \mathrm{A} = \mathrm{tr}A_1 + \mathrm{i}\ \mathrm{tr}A_2$ verschwindet. Da die Spur von A_1 wegen der Schiefsymmetrie von A gemäß (2.2.3) verschwindet, ist $\mathrm{tr}^{\mathbb{C}}\ \mathrm{A} = i\mathrm{tr}A_2$. Die Spuren sind aber unter Transformationen der Tangentialraumbasen invariant [Sto], so daß in komplexen Koordinaten auch $\mathrm{tr}A_2 = g^{\rho\bar{\sigma}}\lambda_{\rho\bar{\sigma}}$ geschrieben werden kann. Insgesamt ergibt sich also die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(3)$ als direkte Summe von $\mathfrak{su}(3)$ und dem ein-dimensionalen, von der komplexen Spur aufgespannten Unterraum von $\mathfrak{u}(3)$:

$$\mathfrak{u}(3) = \mathfrak{su}(3) \oplus \langle \mathrm{J} \rangle \qquad (2.6.14)$$

denn mit (2.3.30) sind die Komponenten von J durch $J_{\mu\bar{\nu}} = ig_{\mu\bar{\nu}}$ und $J_{\bar{\mu}\nu} = -ig_{\bar{\mu}\nu}$ definiert, und die Behauptung des Lemmas bewiesen. □

Neben der Kähler-Form bzw. der komplexen Struktur J als SU(3)-Singulett führt die Strukturgruppe SU(3) auf ein weiteres Singulett:
Die 3-Formen liegen in der Darstellung **[20]** der SO(6), aus welcher sich bei der Zerlegung in SU(3)-Darstellungen zwei Singuletts ergeben [Cle]:

$$\Lambda^3 = \Lambda^{3,0} \oplus \Lambda^{0,3} \oplus \Lambda_0^{2,1} \oplus \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda_0^{1,2} \oplus \Lambda^{0,1} \tag{2.6.15}$$

$$[\mathbf{20}] = [\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{1}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}] \oplus [\mathbf{3}] \oplus [\mathbf{6}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \ , \tag{2.6.16}$$

wobei $\Lambda_0^{2,1}$ und $\Lambda_0^{1,2}$ die spurlosen Anteile von $\Lambda^{2,1}$ und $\Lambda^{1,2}$ bezeichnen. Die Singuletts entsprechen der (3,0)-Form Ω und der (0,3)-Form $\bar{\Omega}$ respektive Real- sowie Imaginäranteil von $\Omega = \Omega^+ + i\Omega^-$, gegeben durch $\Omega^+ = \frac{1}{2}(\Omega + \bar{\Omega})$ und $\Omega^- = \frac{1}{2i}(\Omega - \bar{\Omega})$. Denn eine Basis in $\Lambda^{3,0}$ bzw. $\Lambda^{0,3}$ ist gegeben durch $dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ bzw. $d\overline{z^1} \wedge d\overline{z^2} \wedge d\overline{z^3}$. Wie in Abschnitt 2.5 beschrieben, führt die SU(3)-Struktur auch zur Existenz eines global definierten Spinors[8] η als SU(3)-Singulett. Umgekehrt folgt aus der Existenz dieses Spinors η auch die Existenz der global definierten SU(3)-Singuletts J und Ω. Diese sind mit η definiert durch [Can3]:

$$J_{mn} = -i\eta^\dagger \Gamma_7 \Gamma_{mn} \eta \tag{2.6.17}$$

und

$$\Omega^+_{mnp} = -i\eta^\dagger \Gamma_{mnp} \eta \quad , \quad \Omega^-_{mnp} = -i\eta^\dagger \Gamma_7 \Gamma_{mnp} \eta \ , \tag{2.6.18}$$

wobei $\Gamma_7 := \mathrm{i}\Gamma_1 \cdots \Gamma_6$, Γ_{mn} und Γ_{mnp} durch (2.5.2) definiert sind.
Als spezieller G-Zusammenhang gemäß Definition 2.4.1 ist ein SU(3)-Zusammenhang einzuführen. Seine Komponenten sind (mit einem beliebigen Tangentialvektor v) durch

$$\tilde{\nabla}_n v^p = \frac{\partial v^p}{\partial x^n} + v^k \Phi_{nk}{}^p \tag{2.6.19}$$

gegeben. $\Phi_{mk}{}^p$ bezeichnen die Komponenten eines SU(3)-Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$. Da (im Gegensatz zu den Christoffelsymbolen $\Gamma_{mk}{}^p$) die Komponenten $\Phi_{mk}{}^p$ nicht symmetrisch sind, besitzen diese Zusammenhänge eine Torsion. Die Torsion sowie die Kontorsion sind auf der SU(3)-Mannigfaltigkeit wie folgt definiert:

[8] Von nun an bezeichnet η einen Majorana-Spinor, im Unterschied zu Abschnitt 2.5, wo von Weyl-Spinoren ausgegangen wurde.

Definition 2.6.1 *Als Torsion des* SU(3)*-Zusammenhangs* $\tilde{\nabla}$ *wird der (2,1)-Tensor* $T \in \Lambda^2 \otimes \Lambda^1$ *definiert durch* $T_{mn}{}^p := \frac{1}{2}(\Phi_{mn}{}^p - \Phi_{nm}{}^p)$ *bezeichnet.*

Definition 2.6.2 *Die in* $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(6)$ *liegende Differenz* $\tilde{\nabla} - \nabla^{(\Gamma)}$ *heißt Kontorsionstensor des* SU(3)*-Zusammenhangs* $\tilde{\nabla}$ *und ist durch* $\kappa_{mn}{}^p = \Phi_{mn}{}^p - \Gamma_{mn}{}^p$ *gegeben.*

Der Kontorsionstensor wird zunächst in seine Anteile in $\mathfrak{su}(3)$ und dessen orthogonales Komplement $\mathfrak{su}^\perp(3)$ in $\mathfrak{so}(6)$ aufgeteilt. Es ist also

$$\kappa \;=\; \kappa^{\mathfrak{su}(3)} + \kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)} \; . \tag{2.6.20}$$

wobei $\kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}^\perp(3)$ gemäß (2.4.6) die *intrinsischen Kontorsion* ist. Zunächst wird folgende Zerlegung der Kontorsion durchgeführt. Mit Definition 2.6.2 ist

$$\kappa \;\in\; \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(6) \; . \tag{2.6.21}$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(6)$ wird nun in $\mathfrak{u}(3)$ und das orthogonale Komplement $\mathfrak{u}^\perp(3)$ zerlegt:

$$\begin{aligned} \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(6) &\cong \Lambda^1 \otimes (\mathfrak{u}(3) \oplus \mathfrak{u}^\perp(3)) \\ &\cong \Lambda^1 \otimes (\mathfrak{su}(3) \oplus \langle \mathrm{J} \rangle \oplus \mathfrak{u}^\perp(3)) \; , \end{aligned} \tag{2.6.22}$$

wobei in letzten Schritt Lemma 2.6.1 benutzt wurde. Da die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(6)$ auch orthogonal in $\mathfrak{su}(3)$ und $\mathfrak{su}^\perp(3)$ zerlegt werden kann, gilt mit (2.6.22)

$$\begin{aligned} &\Lambda^1 \otimes (\mathfrak{su}(3) \oplus \langle \mathrm{J} \rangle \oplus \mathfrak{u}^\perp(3)) \\ \cong\; &\Lambda^1 \otimes (\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}^\perp(3)) \; , \end{aligned} \tag{2.6.23}$$

woraus mit (2.6.3)

$$\begin{aligned} &\Lambda^1 \otimes (\mathfrak{su}(3) \oplus \mathbb{C} \oplus \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \\ \cong\; &\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(3) \oplus \Lambda^1 \otimes (\mathbb{C} \oplus \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \ni \kappa^{\mathfrak{su}(3)} + \kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)} \end{aligned} \tag{2.6.24}$$

folgt. Die intrinsische Kontorsion $\kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)}$ wird also folgendermaßen in irreduzible SU(3)-Darstellungen zerlegt:

$$\begin{aligned} \kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)} &\in \Lambda^1 \otimes (\mathbb{C} \oplus \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \\ &= ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]) \otimes ([\mathbf{1}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\mathbf{3}]) \end{aligned} \tag{2.6.25}$$

(dabei ist $\Lambda^1 = \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{2,0} = [\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]$ gemäß (2.3.26)). Die Äquivalenzklasse der SU(3)-Zusammenhänge $\tilde{\nabla}$ ist, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, durch $\kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)}$ eindeutig bestimmt. Als spezieller Repräsentant der SU(3)-Zusammenhänge wird der somit eindeutig bestimmte SU(3)-Zusammenhang

$$\nabla^{(T)} \;:=\; \nabla^{(\Gamma)} + \kappa^{\mathfrak{su}^\perp(3)} \tag{2.6.26}$$

gewählt.

2.7 Intrinsische Torsion und Kontorsion

Die weitere Ausreduktion des Tensorprodukts (2.6.25) in irreduzible SU(3)-Darstellungen führt auf die folgenden fünf, mit W bezeichneten Klassen [Gra1], [Car]:

$$\kappa^{\mathfrak{su}^{\perp}(3)} \in W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5 \tag{2.7.1}$$

Diese ergeben sich ausgehend von der Zerlegung (2.6.25) im vorigen Abschnitt [Gra1]:

$$\begin{aligned} & \Lambda^1 \otimes (\mathfrak{u}^{\perp}(3)) \\ = \; & \Lambda^1 \otimes (\Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{2,0}) && (2.7.2) \\ = \; & ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]) \otimes ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]) && (2.7.3) \end{aligned}$$

Wird die formale Ausreduktion der Produkträume $[\mathbf{3}]\otimes[\bar{\mathbf{3}}]=[\mathbf{8}]\oplus[\mathbf{1}]$, $[\mathbf{3}]\otimes[\mathbf{3}]=[\bar{\mathbf{3}}]\oplus[\mathbf{6}]$ und $[\bar{\mathbf{3}}]\otimes[\bar{\mathbf{3}}]=[\mathbf{3}]\oplus[\bar{\mathbf{6}}]$ ([Cor]) benutzt, was unten explizit berechnet wird, so folgt

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]) \otimes ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]) \\ = \; & \underbrace{([\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{1}])}_{W_1} \oplus \underbrace{([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}])}_{W_2} \oplus \underbrace{([\mathbf{6}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}])}_{W_3} \oplus \underbrace{([\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\mathbf{3}])}_{W_4} && (2.7.4) \\ = \; & W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 && (2.7.5) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W_5 &= \Lambda^1 \otimes \langle \mathrm{J} \rangle && (2.7.6) \\ &= ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}]) \otimes [\mathbf{1}] && (2.7.7) \\ &= ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}])' \, . && (2.7.8) \end{aligned}$$

Aufgrund der unterschiedlichen Zugehörigkeit von $\kappa^{\mathfrak{su}^{\perp}(3)}$ zu diesen W-Klassen werden SU(3)-Mannigfaltigkeiten klassifiziert. Insbesondere wird dadurch auch die Klasse der halb-flachen Mannigfaltigkeiten definiert. In Tabelle 2.7.1 sind die in dieser Arbeit betrachteten Klassen von SU(3)-Mannigfaltigkeiten vorwegnehmend zusammengefasst, die halb-flachen Mannigfaltigkeiten werden in Abschnitt 2.9 definiert. Nur bei der Kähler Mannigfaltigkeit handelt es sich um eine komplexe Mannigfaltigkeit, da hier der durch $(\kappa)_{1\oplus 2}$ gegebene[9], in $W_1 \oplus W_2$ liegende Nijenhuis-Tensor (2.3.7) verschwindet. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, existiert dann eine komplexe Struktur auf der Mannigfaltigkeit M^6.

Die Komponenten der mit κ_1 bis κ_5 bezeichneten Anteile von κ in den Klassen

[9] siehe z.B. [Gur1]

$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 0$	Kähler Mannigfaltigkeit
$W_1 = W_3 = W_4 = W_5 = 0$	almost-Kähler Mannigfaltigkeit
$W_2 = W_3 = W_4 = W_5 = 0$	nearly-Kähler Mannigfaltigkeit
$W_3 = W_4 = W_5 = 0$	quasi-Kähler Mannigfaltigkeit
$W_1 = W_2 = W_4 = W_5 = 0$	speziell-hermitesche Mannigfaltigkeit
$\Im m(W_1 \oplus W_2) = W_4 = W_5 = 0$	halb-flache Mannigfaltigkeit

Tabelle 2.7.1: W-Klassen

W_1 bis W_5 obiger formaler Zerlegung sollen nun auf folgende Weise explizit bestimmt werden:
In komplexen Koordinaten tritt der (3,0)-Tensor $\kappa_{mnp} = g_{pq}\kappa_{mn}{}^q$ mit den Indextypen $\kappa_{\alpha\beta\gamma}$, $\kappa_{\bar\alpha\beta\gamma}$, $\kappa_{\alpha\bar\beta\gamma}$, $\kappa_{\alpha\beta\bar\gamma}$ und den dazu komplex Konjugierten auf. Unter der SU(3) transformieren sich diese Komponenten des (3,0)-Tensors κ gemäß [Boe]

$$\kappa'_{\rho\mu\nu} = \upsilon_\rho^\alpha \upsilon_\mu^\beta \upsilon_\nu^\gamma \kappa_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.7.9}$$
$$\kappa'_{\bar\rho\mu\nu} = \bar\upsilon_{\bar\rho}^{\bar\alpha} \upsilon_\mu^\beta \upsilon_\nu^\gamma \kappa_{\bar\alpha\beta\gamma} \tag{2.7.10}$$
$$\kappa'_{\rho\bar\mu\nu} = \upsilon_\rho^\alpha \upsilon_{\bar\mu}^{\bar\beta} \upsilon_\nu^\gamma \kappa_{\alpha\bar\beta\gamma} \tag{2.7.11}$$
$$\kappa'_{\rho\mu\bar\nu} = \upsilon_\rho^\alpha \upsilon_\mu^\beta \bar\upsilon_{\bar\nu}^{\bar\gamma} \kappa_{\alpha\beta\bar\gamma} \ , \tag{2.7.12}$$

wobei υ_ρ^α und $\bar\upsilon_{\bar\rho}^{\bar\alpha}$ die Komponenten der Darstellungsmatrizen der SU(3) sind, welche der Unitaritätsbedingung

$$\upsilon_\rho^\alpha \bar\upsilon_\alpha^\sigma = \delta_\rho^\sigma \tag{2.7.13}$$

genügen. Zunächst lassen sich die Komponenten von κ allgemein entsprechend dem Auftreten holomorpher und antiholomorpher Indizes den Produkträumen der fundamentalen SU(3)-Darstellungen $[\mathbf{3}]$ und $[\bar{\mathbf{3}}]$ zuordnen. Das beschreibt Tabelle 2.7.2. Per Definition liegt κ aber in $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(6) \cong \Lambda^1 \otimes \Lambda^2$, so daß κ nur bestimmten Darstellungen der Ausreduktion der in Tabelle 2.7.2 angegebenen Tensorprodukten angehört. Die Ausreduktion in irreduzible SU(3)-Darstellungen eines beliebigen (2,0)-Tensors $t \in ([\mathbf{3}]\oplus[\bar{\mathbf{3}}])\otimes([\mathbf{3}]\oplus[\bar{\mathbf{3}}])$ wird folgendermaßen durchgeführt:
Die Komponenten von t mit je zwei holomorphen bzw. antiholomorphen In-

$[3] \otimes [3] \otimes [3]$	$\kappa_{\alpha\beta\gamma}$
$[\bar{3}] \otimes [3] \otimes [3]$	$\kappa_{\bar{\alpha}\beta\gamma}$
$[3] \otimes [\bar{3}] \otimes [3]$	$\kappa_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$
$[3] \otimes [3] \otimes [\bar{3}]$	$\kappa_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$

Tabelle 2.7.2: komplexe Indizes von κ

dizes lassen sich in eine Summe aus je einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Anteil bezüglich dieser Indizes aufteilen:

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(t_{\alpha\beta} + t_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(t_{\alpha\beta} - t_{\beta\alpha}) \tag{2.7.14}$$

$$t_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \frac{1}{2}(t_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + t_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) + \frac{1}{2}(t_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - t_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) \tag{2.7.15}$$

Diese Anteile bilden dann jeweils die Komponenten der irreduziblen Darstellung $[\bar{\mathbf{3}}]$ und $[\mathbf{6}]$, sowie $[\mathbf{3}]$ und $[\bar{\mathbf{6}}]$. Desweiteren bildet die Spur eine SU(3)-Invariante, so daß bei Auftreten zweier Indizes unterschiedlicher Holomorphie in einer Tensorkomponente jeweils ein Spuranteil entsprechend der Komponente eines 1-dimensionalen Unterraums herausprojiziert werden kann:

$$\begin{aligned} {t'}_{\alpha}{}^{\alpha} &= \upsilon^{\alpha}_{\rho}\bar{\upsilon}^{\rho}_{\sigma} t_{\alpha}{}^{\sigma} \\ &= \delta^{\alpha}_{\sigma} t_{\alpha}{}^{\sigma} \; . \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Da $t_{\alpha}{}^{\alpha} = 0$ eine homogene lineare Gleichung ist, liegt der spurlose Anteil von t in der Darstellung $[\mathbf{8}]$ der Zerlegung $[\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}] = [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]$.
Mit obiger Methode läßt sich die Ausreduktion von κ auffinden. Dabei sind nur die Komponenten von $\kappa^{\mathfrak{su}^{\perp}(3)}$ von Interesse. Wegen (2.6.25) liegt der Anteil der intrinsischen Kontorsion (im folgenden nur noch mit κ bezeichnet) mit den Komponenten $\kappa_{\alpha\beta\gamma}$ und $\kappa_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}$ in

$$([\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}]) \oplus ([\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{3}]) \tag{2.7.17}$$

woraus sich, wie oben beschrieben, jeweils ein Spur-Anteil subtrahieren lässt und somit in $[\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{8}]$ liegt. Dazu wird folgende Identifikation vorgenommen[10]:

$$\kappa_{\alpha\beta\gamma} \to \kappa_{\alpha\bar\eta} \;:=\; \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\eta}\kappa_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.7.18}$$

Davon lässt sich dann der Spur-Anteil subtrahieren:

$$\kappa_{\alpha\bar\eta} \;=\; \kappa_{\alpha\bar\eta} - g_{\alpha\bar\eta}(g^{\rho\bar\sigma}\kappa_{\rho\bar\sigma}) + g_{\alpha\bar\eta}(g^{\rho\bar\sigma}\kappa_{\rho\bar\sigma}) \tag{2.7.19}$$

Durch beidseitige Kontraktion von (2.7.19) mit $\epsilon_{\beta\gamma}{}^{\bar\eta}$ folgt

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\beta\gamma}{}^{\bar\eta}\cdot \mid \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\eta}\kappa_{\alpha\beta\gamma} &= (\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\eta}\kappa_{\alpha\beta\gamma} - g_{\alpha\bar\eta}(g^{\rho\bar\sigma}\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}{}_{\bar\sigma}\kappa_{\rho\mu\nu})) \\
&\quad + g_{\alpha\bar\eta}(g^{\rho\bar\sigma}\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}{}_{\bar\sigma}\kappa_{\rho\mu\nu}) && (2.7.20) \\
\kappa_{\alpha\beta\gamma} &= \kappa_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma}{}^{\bar\eta}g_{\alpha\bar\eta}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma}{}^{\bar\eta}g_{\alpha\bar\eta}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho}) && (2.7.21) \\
&= \kappa_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu}) && (2.7.22) \\
&= (\kappa_2)_{\alpha\beta\gamma} + (\kappa_1)_{\alpha\beta\gamma}\ . && (2.7.23)
\end{aligned}$$

wobei $(\kappa_1)_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu})$ und $(\kappa_2)_{\alpha\beta\gamma} := \kappa_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu})$ ist. Für die Komponenten $\kappa_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}$ wird die analoge Zerlegung durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} &= \kappa_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\bar\beta\bar\gamma}{}^{\eta}g_{\bar\alpha\eta}(\kappa_{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\bar\mu\bar\nu\bar\rho}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{\bar\beta\bar\gamma}{}^{\eta}g_{\bar\alpha\eta}(\kappa_{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\bar\mu\bar\nu\bar\rho}) && (2.7.24) \\
&= \kappa_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}(\kappa_{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}(\kappa_{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}) && (2.7.25) \\
&= (\kappa_2)_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} + (\kappa_1)_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} && (2.7.26)
\end{aligned}$$

[10] Der sechs-dimensionale ϵ-Tensor ist definiert als $\epsilon^{123456} = +1$. Die Indizes lassen sich mit der Metrik herunterziehen. Unter der SU(3)-Struktur zerfällt der ϵ-Tensor mit komplexen Indizes wie folgt:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} \;=\; -\mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}$$

wobei $\epsilon^{123} = \epsilon^{\bar1\bar2\bar3} = +1$ definiert ist.

mit $(\kappa_1)_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} := \frac{1}{2}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}(\kappa_{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\bar\rho\bar\mu\bar\nu})$ und $(\kappa_2)_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} := \kappa_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}(\kappa_{\bar\rho\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\bar\rho\bar\mu\bar\nu})$. Insgesamt sind das die in Tabelle 2.8.1 angegebenen Komponenten von W_1 und W_2.
Die Anteile von κ mit den Komponenten $\kappa_{\alpha\bar\beta\bar\gamma}$ und $\kappa_{\bar\alpha\beta\gamma}$ liegen entsprechend (2.6.25) in $[\mathbf{3}]\otimes[\mathbf{3}]$ und $[\bar{\mathbf{3}}]\otimes[\bar{\mathbf{3}}]$ und zerfallen in die irreduziblen SU(3)-Darstellungen $[\bar{\mathbf{3}}]\oplus[\mathbf{6}]$ und $[\mathbf{3}]\oplus[\bar{\mathbf{6}}]$: Mit den Identifikationen

$$\kappa_{\alpha\bar\beta\bar\gamma} \to \kappa_{\alpha\eta} := \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\bar\beta\bar\gamma}\epsilon^{\bar\beta\bar\gamma}{}_{\eta} \tag{2.7.27}$$

und

$$\kappa_{\bar\alpha\beta\gamma} \to \kappa_{\bar\alpha\bar\eta} := \frac{1}{2}\kappa_{\bar\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\eta} \tag{2.7.28}$$

und durch jeweiliges Symmetrisieren und Antisymmetrisieren in α und η bzw. $\bar\alpha$ und $\bar\eta$ ergibt sich

$$S_{\bar\alpha}{}^{\rho} \;:=\; (\frac{1}{4}\kappa_{\bar\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\eta} + \frac{1}{4}\kappa_{\bar\eta\beta\gamma}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\alpha})g^{\bar\eta\rho} \tag{2.7.29}$$

sowie

$$A_{\bar\alpha}{}^{\rho} \;:=\; (\frac{1}{4}\kappa_{\bar\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\eta} - \frac{1}{4}\kappa_{\bar\eta\beta\gamma}\epsilon^{\beta\gamma}{}_{\bar\alpha})g^{\bar\eta\rho}\ . \tag{2.7.30}$$

Die Komponenten von $W_3\oplus W_4$ können durch Subtraktion eines Spur-Anteils auch folgendermaßen erhalten werden:

$$\begin{aligned} \kappa_{\bar\alpha\mu\nu} &= \kappa_{\bar\alpha\mu\nu} - 2g_{\bar\alpha[\mu}(g^{\bar\rho\sigma}\kappa_{\bar\rho\sigma|\nu]}) + 2g_{\bar\alpha[\mu}(g^{\bar\rho\sigma}\kappa_{\bar\rho\sigma|\nu]}) && (2.7.31)\\ &= (S_{\bar\alpha}{}^{\rho})\epsilon_{\mu\nu\rho} + (A_{\bar\alpha}{}^{\rho})\epsilon_{\mu\nu\rho} && (2.7.32) \end{aligned}$$

und durch Kontraktion mit $g^{\bar\alpha\mu}$ erhält man

$$\begin{aligned} g^{\bar\alpha\mu}\kappa_{\bar\alpha\mu\nu} &= g^{\bar\rho\sigma}\kappa_{\bar\rho\sigma\nu}\\ &= (S^{\mu\rho} + A^{\mu\rho})\epsilon_{\mu\nu\rho}\\ &= A^{\mu\rho}\epsilon_{\mu\nu\rho}\ . && (2.7.33) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich dann für die Komponenten von W_3 und W_4

$$(\kappa_3)_{\bar\alpha\mu\nu} \;:=\; (S_{\bar\alpha}{}^{\rho})\epsilon_{\mu\nu\rho} \tag{2.7.34}$$

und

$$(\kappa_4)_{\bar\alpha\beta\nu} \;:=\; 2g_{\bar\alpha[\beta}(A^{\mu\rho}\epsilon_{\mu|\nu]\rho})\ . \tag{2.7.35}$$

Die analoge Betrachtung führt dann auch auf die komplex konjugierten Komponenten

$$(\kappa_3)_{\alpha\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad := \quad (S_\alpha{}^{\bar{\rho}})\epsilon_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}} \tag{2.7.36}$$

und

$$(\kappa_4)_{\alpha\bar{\beta}\bar{\nu}} \quad := \quad 2g_{\alpha[\bar{\beta}}(A^{\bar{\mu}\bar{\rho}}\epsilon_{\bar{\mu}|\bar{\nu}]\bar{\rho}}) \; . \tag{2.7.37}$$

Es sind noch die Komponenten $\kappa_{\alpha\beta\bar{\gamma}}, \kappa_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$ von κ sowie die dazu komplex konjugierten Komponenten zu untersuchen. Nach Tabelle 2.7.2 gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \in [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}] \quad &= \quad [\mathbf{3}] \otimes ([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]) &(2.7.38)\\ &= \quad ([\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{8}]) \oplus ([\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{1}]) &(2.7.39)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \in [\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{3}] \quad &= \quad [\mathbf{3}] \otimes ([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]) &(2.7.40)\\ &= \quad ([\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{8}]) \oplus ([\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{1}]) \; . &(2.7.41)\end{aligned}$$

Von $\kappa_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$ und $\kappa_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$ läßt sich jeweils ein Spuranteil subtrahieren:

$$\kappa_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \quad = \quad \kappa_{\alpha\bar{\beta}\gamma} - g_{\bar{\beta}\gamma}(g^{\bar{\rho}\sigma}\kappa_{\alpha\bar{\rho}\sigma}) + g_{\bar{\beta}\gamma}(g^{\bar{\rho}\sigma}\kappa_{\alpha\bar{\rho}\sigma}) \tag{2.7.42}$$

und

$$\kappa_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \quad = \quad \kappa_{\alpha\beta\bar{\gamma}} - g_{\beta\bar{\gamma}}(g^{\rho\bar{\sigma}}\kappa_{\alpha\rho\bar{\sigma}}) + g_{\beta\bar{\gamma}}(g^{\rho\bar{\sigma}}\kappa_{\alpha\rho\bar{\sigma}}) \; . \tag{2.7.43}$$

Da die intrinsische Kontorsion keinen Anteil in der adjungierten Darstellung $\mathfrak{su}(3) \cong [\mathbf{8}]$ besitzt, kann W_5 gemäß (2.7.39) und (2.7.41) nur noch in dem Anteil $([\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{1}]) \oplus ([\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{1}])$ liegen. Das entspricht den Komponenten

$$(\kappa_5)_{\alpha\bar{\beta}\gamma} := g_{\bar{\beta}\gamma}(g^{\bar{\rho}\sigma}\kappa_{\alpha\bar{\rho}\sigma}) \tag{2.7.44}$$

und in Analogie den komplex konjugierten Komponenten

$$(\kappa_5)_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} := g_{\beta\bar{\gamma}}(g^{\rho\bar{\sigma}}\kappa_{\bar{\alpha}\rho\bar{\sigma}}). \tag{2.7.45}$$

Die Komponenten $(\kappa_5)_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$ verschwinden, was weiter unten gezeigt wird.

2.8 Intrinsische Torsion und -Kontorsion mit den SU(3)-invarianten Formen

Um den Begriff der halb-Flachheit zu präzisieren, werden die äußeren Ableitungen der unter der SU(3)-Strukturgruppe invarianten Formen J und Ω betrachtet. Gemäß Definition 2.4.2 verschwinden die kovarianten Ableitungen von J und Ω bezüglich des SU(3)-Zusammenhangs $\nabla^{(T)}$. Mit (2.6.26) ist dann (siehe auch [Gur1])

$$\begin{aligned} \nabla^{(T)}_m J^{np} &= \nabla^{(\Gamma)}_m J^{np} - \kappa_m{}^n{}_r J^{rp} - \kappa_m{}^p{}_r J^{nr} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^{(T)}_m \Omega^{npq} &= \nabla^{(\Gamma)}_m \Omega^{npq} - \kappa_m{}^n{}_r \Omega^{rpq} - \kappa_m{}^p{}_r \Omega^{nrq} - \kappa_m{}^q{}_r \Omega^{npr} \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Allgemein lässt sich durch Antisymmetrisieren der kovarianten Ableitung $\nabla^{(\Gamma)}$ zu Formen übergehen; das äußere Differential einer p-Form α ist [Can2]

$$(d\alpha)_{m_0,\ldots,m_i,\ldots,m_p} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \nabla^{(\Gamma)}_{m_i} \alpha_{m_0,\ldots,\hat{m}_i,\ldots,m_p}\ . \tag{2.8.3}$$

Mit (2.8.3) folgen aus (2.8.1) und (2.8.2)

$$(dJ)_{mnp} = 6 T^{\mathfrak{su}^\perp(3)}_{[mn}{}^r J_{r|p]} \tag{2.8.4}$$

und

$$(d\Omega)_{mnpq} = 12 T^{\mathfrak{su}^\perp(3)}_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]}\ , \tag{2.8.5}$$

denn aus Definition 2.6.1 folgt $T_{mn}{}^p = \frac{1}{2}(\kappa_{mn}{}^p - \kappa_{nm}{}^p)$ durch das Antisymmetrisieren in den Indizes m und n [Gur1]. Da die Formen J und Ω SU(3)-Singuletts sind, verschwindet ihre Anwendung auf Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$, wie in T vorkommend. Somit tritt in (2.8.1) und (2.8.2) jeweils nur der intrinsische Anteil $T^{\mathfrak{su}^\perp(3)}$ der Torsion auf.

Es lassen sich also die Komponenten von T über die irreduzible SU(3)-Zerlegung von dJ und $d\Omega$ mit den W-Klassen und damit mit den Komponenten von κ in Beziehung setzen. Die jeweiligen Komponenten von $T^{\mathfrak{su}^\perp(3)}$ werden dazu mit dJ_{mnp} und $d\Omega_{mnpq}$ gemäß (2.8.4) und (2.8.5) ausgedrückt. Mit der allgemeinen Regel [Can2]

$$d\alpha^{(p,q)} = (d\alpha)^{(p-1,q+2)} + (d\alpha)^{(p,q+1)} + (d\alpha)^{(p+1,q)} + (d\alpha)^{(p+2,q-1)} \tag{2.8.6}$$

zur äußeren Ableitung von (p,q)-Formen α ergeben sich die äußeren Ableitungen der (1,1)-Form J und der (3,0)-Form Ω zu

$$dJ \;=\; [(dJ)^{(3,0)} + (dJ)^{(0,3)}] + [(dJ)^{(2,1)} + (dJ)^{(1,2)}]\;, \qquad (2.8.7)$$

was den SU(3)-Darstellungen

$$[\mathbf{20}] \;=\; [([\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{1}])] \oplus [([\mathbf{6}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}]) \oplus ([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}])] \qquad (2.8.8)$$

entspricht, und

$$d\Omega \;=\; [(d\Omega)^{(3,1)}] + [(d\Omega)^{(2,2)}] \qquad (2.8.9)$$

$$d\bar{\Omega} \;=\; [(d\bar{\Omega})^{(1,3)}] + [(d\bar{\Omega})^{(2,2)}] \qquad (2.8.10)$$

wozu die SU(3)-Darstellungen

$$[\mathbf{24}] \;=\; [([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}])'] \oplus [([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}]) \oplus ([\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{1}])] \qquad (2.8.11)$$

gehören [Gur1]. Dabei wurde zur vollständigen Zerlegung in irreduzible Darstellungen übergegangen: Der Anteil $[\mathbf{3}]$ entspricht gerade der Spur $(dJ)_{\alpha\beta}{}^{\beta}$, die von $(dJ)_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$ abgezogen werden kann. Analoges gilt für die komplex konjugierten Komponenten $(dJ)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma}$, von denen die Spur $(dJ)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{}^{\bar{\beta}}$, die in der Darstellung $[\bar{\mathbf{3}}]$ liegt, abgezogen werden kann. Insgesamt entsprechen die Komponenten von $J \wedge dJ$ den Komponenten des Spur-Anteils [Chi], [Gur1]. Der restliche, spurlose Anteil von $(dJ)^{(1,2)}$ in $[\mathbf{6}]$ wird mit $(dJ)_0^{(1,2)}$ bezeichnet, wofür $J \wedge (dJ)_0^{(1,2)} = 0$ gilt und entsprechend ist $(dJ)_0^{(2,1)}$ der spurlose Anteil von $(dJ)^{(2,1)}$ in $[\bar{\mathbf{6}}]$ mit $J \wedge (dJ)_0^{(2,1)} = 0$.
Aus dem $(d\Omega)^{(2,2)}$ Anteil lässt sich zur vollständigen SU(3)-Ausreduktion auch wieder ein Spur-Anteil subtrahieren. Dieser kann in der Form

$$(d\Omega)^{\eta}{}_{\eta} \;\sim\; (d\Omega)_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta\eta}\epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta}}J_{\eta\bar{\delta}} \qquad (2.8.12)$$

sowie

$$(d\Omega)^{\bar{\eta}}{}_{\bar{\eta}} \;\sim\; (d\Omega)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha\beta}\epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\eta}}\epsilon^{\alpha\beta\delta}J_{\bar{\eta}\delta} \qquad (2.8.13)$$

geschrieben werden. Das entspricht den Komponenten von $d\Omega \wedge J$ [Chi]. Da in der Zerlegung in SU(3)-Darstellungen einer fünf-Form kein Singulett existiert, gilt $\Omega \wedge J = 0$ [Gur1]. Deshalb ist aber $d\Omega \wedge J = dJ \wedge \Omega$ und $dJ \wedge \Omega$ ist gerade der $[(dJ)^{(3,0)} + (dJ)^{(0,3)}]$-Anteil von dJ. Das bedeutet, daß der Anteil $([\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{1}])$ von dJ gleich dem von $d\Omega$ ist. Der Anteil $([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}])$ ist dann

durch den spurlosen Anteil von $(d\Omega)^{(2,2)}$, bezeichnet mit $(d\Omega)_0^{(2,2)}$ bestimmt, für den $J \wedge (d\Omega)_0^{(2,2)} = 0$ gilt. Der restliche Anteil $([\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}])$ von $d\Omega$ ist durch $(d\Omega)^{(3,1)}$ und den dazu komplex Konjugierten bestimmt.
Die Zugehörigkeit der Anteile von dJ und $d\Omega$ zu den den einzelnen Komponenten von T in den entsprechenden Darstellungen ergibt sich nun wie folgt: Aus (2.8.4) und (2.8.5) folgt

$$\begin{aligned}(dJ)_{mnp} &= 6T_{[mn}{}^r J_{r|p]} \\ &= 3(\kappa_{[mn}{}^r J_{r|p]} - \kappa_{[nm}{}^r J_{r|p]}) && (2.8.14) \\ &= 6\kappa_{[mn}{}^r J_{r|p]} && (2.8.15)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(d\Omega)_{mnpq} &= 12T_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} \\ &= 6(\kappa_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} - \kappa_{[nm}{}^r \Omega_{r|pq]}) && (2.8.16) \\ &= 12\kappa_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} \ . && (2.8.17)\end{aligned}$$

Aus (2.8.4), (2.8.7) und (2.8.15) folgt dann auch

$$\begin{aligned}(dJ)^{(2,1)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma} &= \frac{6}{3}((T_{3\oplus 4})_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\rho} J_{\rho\gamma} + (T_{3\oplus 4})_{\beta\gamma}{}^{\rho} J_{\rho\bar{\alpha}} + (T_{3\oplus 4})_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\rho} J_{\rho\beta} \\ &\quad + (T_{3\oplus 4})_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\gamma} + (T_{3\oplus 4})_{\beta\gamma}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\bar{\alpha}} + (T_{3\oplus 4})_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\beta}) && (2.8.18) \\ &= \frac{6}{3}((\kappa_{3\oplus 4})_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\rho} J_{\rho\gamma} + (\kappa_{3\oplus 4})_{\beta\gamma}{}^{\rho} J_{\rho\bar{\alpha}} + (\kappa_{3\oplus 4})_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\rho} J_{\rho\beta} \\ &\quad + (\kappa_{3\oplus 4})_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\gamma} + (\kappa_{3\oplus 4})_{\beta\gamma}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\bar{\alpha}} + (\kappa_{3\oplus 4})_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\beta}) && (2.8.19)\end{aligned}$$

und mit (2.3.29) und der Tatsache, daß nur die Komponenten der Indexstruktur $(T_{3\oplus 4})_{\beta\gamma\bar{\rho}}$, $(T_{3\oplus 4})_{\bar{\beta}\bar{\gamma}\rho}$ und $(\kappa_{3\oplus 4})_{\bar{\beta}\gamma\rho}$, $(\kappa_{3\oplus 4})_{\beta\bar{\gamma}\bar{\rho}}$ nicht verschwinden, folgt aus (2.8.18) und (2.8.19) weiter

$$\begin{aligned}(dJ)^{(2,1)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma} &= 2(T_{3\oplus 4})_{\beta\gamma}{}^{\rho} J_{\rho\bar{\alpha}} \\ &= 2(\kappa_{3\oplus 4})_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\bar{\rho}} J_{\bar{\rho}\gamma} && (2.8.20)\end{aligned}$$

und daraus

$$(\kappa_{3\oplus 4})_{\bar{\alpha}\beta\gamma} = (T_{3\oplus 4})_{\beta\gamma\bar{\alpha}} \ . \qquad (2.8.21)$$

Der Spur-Anteil von (2.8.20) ist mit (2.3.30)

$$\begin{aligned}(dJ)^{(2,1)}_{\alpha\beta\bar{\gamma}} J^{\beta\bar{\gamma}} &= 2i((dJ)^{(2,1)})_{\alpha\beta}{}^{\beta} && (2.8.22) \\ &= 2i(T_{3\oplus 4})_{\alpha\beta}{}^{\rho} J_{\rho}{}^{\beta} && (2.8.23)\end{aligned}$$

und mit (2.3.20) und (2.8.21) ist

$$(dJ)^{(2,1)}_{\alpha\beta\bar{\gamma}} J^{\beta\bar{\gamma}} = 2i(T_{3\oplus 4})_{\alpha\beta}{}^{\rho} i\delta_{\rho}{}^{\beta} \tag{2.8.24}$$

$$= -2(T_{3\oplus 4})_{\alpha\beta}{}^{\beta} \tag{2.8.25}$$

$$= 2(\kappa_{3\oplus 4})^{\beta}{}_{\beta\alpha} \ . \tag{2.8.26}$$

Mit (2.8.25) und (2.8.26) ist dann gemäß (2.7.37)

$$(\kappa_4)_{\bar{\mu}\nu\alpha} := 2g_{\bar{\mu}[\nu}(\kappa_{3\oplus 4})^{\beta}{}_{\beta|\alpha]} \tag{2.8.27}$$

und

$$(T_4)_{\nu\alpha\bar{\mu}} := -2g_{\bar{\mu}[\nu}(T_{3\oplus 4})_{\alpha]\beta}{}^{\beta} \ . \tag{2.8.28}$$

Dadurch sind die Komponenten von $W_3 \oplus W_4$ bestimmt.
Für die Komponenten von $W_1 \oplus W_2$ folgt aus (2.8.5), (2.8.9), (2.8.10) und (2.8.17)

$$(d\Omega)^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \frac{12}{4!}((T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}} - (T_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar{\rho}})(\Omega_{\bar{\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \Omega_{\bar{\rho}\bar{\beta}\bar{\alpha}}) \tag{2.8.29}$$

$$= \frac{12}{4!}((\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar{\rho}})(\Omega_{\bar{\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \Omega_{\bar{\rho}\bar{\beta}\bar{\alpha}}) \tag{2.8.30}$$

und daraus

$$(d\Omega)^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} = ((T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}} - (T_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar{\rho}})\Omega_{\bar{\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{2.8.31}$$

$$= 2(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}}\Omega_{\bar{\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{2.8.32}$$

$$= ((\kappa)_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar{\rho}})\Omega_{\bar{\rho}\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{2.8.33}$$

also

$$(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}} = \frac{1}{2}((\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\rho}} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar{\rho}}) \ . \tag{2.8.34}$$

Aus (2.8.5), (2.8.9), (2.8.10) und (2.8.17) folgen auch die Komponenten von W_5:

$$(d\Omega)^{(3,1)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma\delta} = ((T_5)_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\rho} - (T_5)_{\beta\bar{\alpha}}{}^{\rho})\Omega_{\rho\gamma\delta} + ((T_5)_{\bar{\alpha}\delta}{}^{\rho} - (T_5)_{\delta\bar{\alpha}}{}^{\rho})\Omega_{\rho\beta\gamma} + ((T_5)_{\bar{\alpha}\gamma}{}^{\rho} - (T_5)_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\rho})\Omega_{\rho\delta\beta} \tag{2.8.35}$$

$$= (\kappa_5)_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\rho}\Omega_{\rho\gamma\delta} + (\kappa_5)_{\bar{\alpha}\delta}{}^{\rho}\Omega_{\rho\beta\gamma} + (\kappa_5)_{\bar{\alpha}\gamma}{}^{\rho}\Omega_{\rho\delta\beta} \tag{2.8.36}$$

und daraus

$$(d\Omega)^{(3,1)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma\delta} = 6(T_5)_{\bar{\alpha}[\beta}{}^{\rho}\Omega_{\rho|\gamma\delta]} \tag{2.8.37}$$

$$= 3(\kappa_5)_{\bar{\alpha}[\beta}{}^{\rho}\Omega_{\rho|\gamma\delta]} \ . \tag{2.8.38}$$

Werden in (2.8.5) nur komplexe Indizes gleichen Typs eingesetzt, so ist

$$(d\Omega)^{(4,0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 12(\kappa_5)_{[\alpha\beta}{}^{\rho}\Omega_{\rho|\gamma\delta]} \tag{2.8.39}$$

$$= 0 \; . \tag{2.8.40}$$

Daraus ergibt sich

$$(T_5)_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} = \frac{1}{2}(\kappa_5)_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} \tag{2.8.41}$$

und

$$(\kappa_5)_{\alpha\beta\bar{\gamma}} = 0 \; . \tag{2.8.42}$$

Die Komponenten von T und κ und deren Zugehörigkeit zu den entsprechenden SU(3)-Darstellungen werden in den folgenden Tabellen zusammengefasst:

W_1	$[1]\oplus[1]$	$(\kappa_1)_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\kappa_{\rho\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu})$, $(\kappa_1)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}=\frac{1}{2}\epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}(\kappa_{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}}\epsilon^{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}})$
W_2	$[8]\oplus[8]$	$(\kappa_2)_{\alpha\beta\gamma}=(\kappa_{\alpha\beta\gamma}-\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\epsilon^{\rho\mu\nu}\kappa_{\rho\mu\nu}))$, $(\kappa_2)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}=(\kappa_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}-\frac{1}{2}\epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}(\epsilon^{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}}\kappa_{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}}))$
W_3	$[6]\oplus[\bar{6}]$	$(\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}}=(S_{\alpha}{}^{\bar{\rho}})\epsilon_{\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\rho}}$, $(\kappa_3)_{\bar{\alpha}\beta\gamma}=(S_{\bar{\alpha}}{}^{\rho})\epsilon_{\beta\gamma\rho}$
W_4	$[\bar{3}]\oplus[3]$	$(\kappa_4)_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}}=2g_{\alpha[\bar{\beta}}(A^{\bar{\mu}\bar{\rho}}\epsilon_{\mu\|\bar{\gamma}]\rho})$, $(\kappa_4)_{\bar{\alpha}\beta\gamma}=2g_{\bar{\alpha}[\beta}(A^{\mu\rho}\epsilon_{\mu\|\gamma]\rho})$
W_5	$([3]\oplus[\bar{3}])'$	$(\kappa_5)_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}=g_{\beta\bar{\gamma}}(\kappa_{\bar{\alpha}\rho\bar{\sigma}}g^{\rho\bar{\sigma}})$, $(\kappa_5)_{\alpha\bar{\beta}\gamma}=g_{\bar{\beta}\gamma}(\kappa_{\alpha\bar{\rho}\sigma}g^{\bar{\rho}\sigma})$

Tabelle 2.8.1: SU(3)-Darstellungen der Kontorsion

W_1	$[1]\oplus[1]$	$(T_1)_{\alpha\beta\gamma} = (\kappa_1)_{\alpha\beta\gamma}$, c.c.	$d\Omega \wedge J = dJ \wedge \Omega$
W_2	$[8]\oplus[8]$	$(T_2)_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}((\kappa_2)_{\alpha\beta\gamma} - (\kappa_2)_{\beta\alpha\gamma})$, c.c.	$(d\Omega)^{(2,2)}_0$
W_3	$[6]\oplus[\bar{6}]$	$(T_3)_{\beta\gamma\bar{\alpha}} = (\kappa_3)_{\bar{\alpha}\beta\gamma}$, c.c.	$(dJ)^{(2,1)}_0 + (dJ)^{(1,2)}_0$
W_4	$[\bar{3}]\oplus[3]$	$(T_4)_{\beta\gamma\bar{\alpha}} = (\kappa_4)_{\bar{\alpha}\beta\gamma}$, c.c.	$J \wedge dJ$
W_5	$([3]\oplus[\bar{3}])'$	$(T_5)_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} = \frac{1}{2}(\kappa_5)_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}$, c.c.	$(d\Omega)^{(3,1)}$

Tabelle 2.8.2: Torsion und Kontorsion in SU(3)-Darstellung

2.9 Halb-flache Mannigfaltigkeiten

Die im vorigen Abschnitt mittels der W-Klassen der intrinsischen Kontorsion durchgeführte Klassifikation der SU(3)-Mannigfaltigkeiten ist damit auf die äußeren Differentiale der SU(3)-invarianten Formen zurückgeführt. Damit werden die halb-flachen Mannigfaltigkeiten eingeführt:

Definition 2.9.1 *Eine* SU(3)*-Mannigfaltigkeit heißt halb-flach, genau dann wenn das Quadrat der Kähler-Form $J \wedge J$ und der Imaginärteil der holomorphen Volumenform Ω^- geschlossen sind.*

Die durch $J \wedge dJ$ bestimmten Komponenten von T_4 und κ_4 der Klasse W_4 verschwinden also und aus der Geschlossenheit der Form $d\Omega^-$ folgt[11] das Verschwinden des (3,1)-Anteils von $d\Omega$, also das Verschwinden von W_5 :
Mit (2.8.6) ergibt sich für die äußere Ableitung der zu Ω komplex konjugierten (0,3)-Form $\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} d(\bar{\Omega})^{(0,3)} &= (d\bar{\Omega})^{(1,3)} + (d\bar{\Omega})^{(2,2)} \\ &= (d\Omega^+)^{(1,3)} - i(d\Omega^-)^{(1,3)} + (d\Omega^+)^{(2,2)} - i(d\Omega^+)^{(2,2)} \ . \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Daraus folgt nun aber

$$0 = (d\bar{\Omega})^{(3,1)} = (d\Omega^+)^{(3,1)} - i(d\Omega^-)^{(3,1)} \tag{2.9.2}$$

also

$$(d\Omega^+)^{(3,1)} = i(d\Omega^+)^{(1,3)} \ . \tag{2.9.3}$$

Wenn $(d\Omega^-) = 0$, also auch $(d\Omega^-)^{(3,1)} = 0$, dann folgt auch $(d\Omega^+)^{(3,1)} = 0$ also insgesamt $(d\Omega)^{(3,1)} = 0$.
Insbesondere verschwindet bei halb-flachen Mannigfaltigkeiten dann die Kontraktion von κ und J. Aus den Definitionen 2.6.1 und 2.6.2 folgt

$$\kappa_{mnp} = T_{mnp} + T_{pmn} + T_{pnm} \ . \tag{2.9.4}$$

Die Kontraktion von κ mit J in n und p ergibt dann mit Tabelle 2.8.2, (2.3.32) und (2.3.33)

$$\kappa_{mnp}J^{np} = T_{mnp}J^{np} + T_{pmn}J^{np} + T_{pnm}J^{np} \tag{2.9.5}$$

$$\begin{aligned} &= (T_3)_{\alpha\beta\bar{\gamma}}J^{\beta\bar{\gamma}} + (T_3)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma}J^{\bar{\beta}\gamma} \\ &\quad +(T_3)_{\gamma\alpha\bar{\beta}}J^{\bar{\beta}\gamma} + (T_3)_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}\beta}J^{\beta\bar{\gamma}} \ . \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

[11] da der Imaginärteil von $T_{1\oplus 2}$, entsprechend dem Anteil Ω^- verschwindet, trägt nur der Realteil zu $T_{1\oplus 2}$ bei, siehe Tabelle 2.7.1 sowie (3.3.33) und (3.3.34).

Die Komponenten von κ_3 lassen sich mit (2.7.34) und (2.7.36) ausdrücken. Analog können die Komponenten von (T_3) mit einem symmetrischen Tensor $\tilde{S}$ ausgedrückt werden:

$$(T_3)_{\alpha\beta\bar{\gamma}} = \tilde{S}_{\bar{\eta}\bar{\gamma}}\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar{\eta}} \tag{2.9.7}$$

und

$$(T_3)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma} = \tilde{S}_{\eta\gamma}\Omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{}^{\eta} \; , \tag{2.9.8}$$

denn $\Omega^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\eta}}$ ist proportional zu $\epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\eta}}$. Die Kontraktion mit J ergibt nun:

$$\begin{aligned}
(T_3)_{\alpha\beta\bar{\gamma}}J^{\beta\bar{\gamma}} &= \tilde{S}_{\bar{\eta}\bar{\gamma}}\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar{\eta}}J^{\beta\bar{\gamma}} \\
(T_3)_{\alpha\beta\bar{\gamma}}ig^{\beta\bar{\gamma}} &= \tilde{S}_{\bar{\eta}\bar{\gamma}}\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar{\eta}}ig^{\beta\bar{\gamma}} \\
&= \tilde{S}_{\bar{\eta}\bar{\gamma}}\Omega_{\alpha}{}^{\bar{\gamma}\bar{\eta}} \\
&= 0 \; ,
\end{aligned} \tag{2.9.9}$$

denn $\tilde{S}$ ist symmetrisch, Ω antisymmetrisch in $\bar{\gamma}$ und $\bar{\eta}$. Genauso verschwindet

$$\begin{aligned}
(T_3)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma}J^{\bar{\beta}\gamma} &= \tilde{S}_{\eta\gamma}\Omega_{\bar{\alpha}}{}^{\gamma\eta} \\
&= 0 \; .
\end{aligned} \tag{2.9.10}$$

Einsetzen von (2.9.9) und (2.9.10) in (2.9.6) ergibt dann

$$\kappa_{mnp}J^{np} = 0 \; . \tag{2.9.11}$$

In völliger Analogie verschwindet auch die Kontraktion

$$\begin{aligned}
\kappa_{mnp}J^{mn} &= T_{mnp}J^{mn} + T_{pmn}J^{mn} + T_{pnm}J^{mn} \\
&= 0 \; .
\end{aligned} \tag{2.9.12}$$

Damit ist gezeigt, daß alle Spuren des Tensors κ_{mnp} verschwinden, was gleichbedeutend ist mit dem ausschließlichen Auftreten der gleichen Holomorphie in den hinteren beiden Indizes von κ im halb-flachen Fall.

3 Krümmungstensor von SU(3)-Mannigfaltigkeiten

3.1 Krümmungstensor von G-Mannigfaltigkeiten

Es soll zunächst ein allgemeiner Krümmungstensor $\tilde{R}$ auf einer Mannigfaltigkeit M^n mit G-Struktur eingeführt werden. Dieser ist, ausführlich ausgedrückt, als Schnitt in $\Gamma(M^n, \Lambda^2 T^* M^n \otimes T^* M^n \otimes TM^n)$, also als 2-Form deren Werte Endomorphismen von TM^n sind, aufzufassen. Existiert auf M^n eine Strukturgruppenreduktion zur Lie-Gruppe G, so liegen die Werte eines G-Zusammenhangs gerade in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G [Joy] und ein Krümmungstensor ist folgendermaßen definiert [Kob1]:

Satz 3.1.1 *Sei ∇ ein G-Zusammenhang mit Torsion T, dann ist durch*

$$[\nabla_m, \nabla_n] v_p = -R_{mnp}{}^q v_q - 2T_{mn}{}^r \nabla_r v_p \tag{3.1.1}$$

ein (3,1)-Tensor $R \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}$ durch

$$R_{mnp}{}^q = \partial_m \Phi_{np}{}^q - \partial_n \Phi_{mp}{}^q - \Phi_{mp}{}^r \Phi_{nr}{}^q + \Phi_{np}{}^r \Phi_{mp}{}^q \tag{3.1.2}$$

definiert, der Krümmungstensor des G-Zusammenhangs mit den Komponenten Φ heißt.

Für den allgemeinen Krümmungstensor gilt in jedem Fall der folgende Satz [Kob1], [Spi]:

Satz 3.1.2 *Mit der Torsion T und dem G-Zusammenhang ∇ erfüllt der Krümmungstensor R folgende Bianchi-Identitäten:*
1.Bianchi-Identität

$$\begin{aligned} R_{mnp}{}^q + R_{npm}{}^q + R_{pmn}{}^q &= \nabla_m T_{np}{}^q + \nabla_n T_{pm}{}^q + \nabla_p T_{mn}{}^q \\ &\quad + T_{mn}{}^r T_{rp}{}^q + T_{np}{}^r T_{rm}{}^q + T_{pm}{}^r T_{rn}{}^q \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

2.Bianchi-Identität

$$\begin{aligned} &\nabla_m R_{npq}{}^l + \nabla_p R_{nqm}{}^l + \nabla_q R_{nmp}{}^l \\ &+ T_{pq}{}^r R_{nrm}{}^l + T_{qm}{}^r R_{nrp}{}^l + T_{mp}{}^r R_{nrq}{}^l = 0 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Das prominentestes Beispiel eines G-Krümmungstensors ist der Riemannsche Krümmungstensor (kurz Riemann-Tensor) des Levi-Civita - Zusammenhangs $\nabla^{(\Gamma)}$. Auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist der Riemann-Tensor

$$R^{(\Gamma)} \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(n) \tag{3.1.5}$$

durch

$$R^{(\Gamma)}_{mnp}{}^{q} \;=\; \partial_m \Gamma_{np}{}^{q} - \partial_n \Gamma_{mp}{}^{q} - \Gamma_{mp}{}^{r}\Gamma_{nr}{}^{q} + \Gamma_{np}{}^{r}\Gamma_{mp}{}^{q} \tag{3.1.6}$$

mit den in n und p symmetrischen Christoffelsymbolen definiert [Kob1], [Spi]. Wegen der Torsionsfreiheit gilt der folgende Satz [Spi]:

Satz 3.1.3 *Die Komponenten des Riemann-Tensors $R^{(\Gamma)}$ besitzen folgende Symmetrien:*
a.) $R^{(\Gamma)}_{mnpq} = -R^{(\Gamma)}_{nmpq}$
b.) $R^{(\Gamma)}_{mnpq} = -R^{(\Gamma)}_{mnqp}$
c.) $R^{(\Gamma)}_{mnpq} = R^{(\Gamma)}_{pqmn}$
d.) $R^{(\Gamma)}_{[mnp]q} = 0$ *(1. Bianchi-Identität)*

Mit der durch die Metrik g gegebenen Identifikation $\Lambda^2 \cong \mathfrak{so}(6)$ liegt der Riemann-Tensor also im symmetrisierten Anteil von $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$, bezeichnet mit $Sym^2(\Lambda^2)$. Es ist also $R^{(\Gamma)} \in Sym^2(\Lambda^2) \subset \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \cong \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(n)$ [Cle]. Der symmetrische Ricci-Tensor $R^{(\Gamma)}_{mp}$ und Ricci-Skalar $R^{(\Gamma)}$ sind die Kontraktionen $R^{(\Gamma)}_{mnp}{}^{n}$ und $R^{(\Gamma)}_{mn}{}^{mn}$.
Im nächsten Abschnitt soll von einem SU(3)-Krümmungstensor und den dafür zu betrachtenden Kontraktionen ausgegangen und die Beziehung zum Riemann-Tensor hergestellt werden.

3.2 Die Komponenten des Krümmungstensors unter SU(3)-Struktur

Zur Einführung eines Krümmungstensors auf der SU(3)-Mannigfaltigkeit wird ab jetzt der mit (der intrinsischen Kontorsion) κ gegebene eindeutig bestimmte SU(3)-Zusammenhang $\nabla^{(T)} = \nabla^{(\Gamma)} + \kappa$ aus (2.6.26) benutzt. Der Krümmungstensor $R^{(T)}$ des SU(3)-Zusammenhangs lässt sich durch den Riemann-Tensor $R^{(\Gamma)}$ auf folgende Weisen mit $\nabla^{(\Gamma)}$, $\nabla^{(T)}$ und κ ausdrücken [Nak], [Wal]:

$$R^{(T)}_{mnpq} \;=\; R^{(\Gamma)}_{mnpq} + \nabla^{(\Gamma)}_m \kappa_{npq} - \nabla^{(\Gamma)}_n \kappa_{mpq} - \kappa_{mp}{}^{r}\kappa_{nrq} + \kappa_{np}{}^{r}\kappa_{mrq} \tag{3.2.1}$$

und

$$
\begin{aligned}
R^{(T)}_{mnp} &= R^{(\Gamma)}_{mnp} + \nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} - \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} \\
&\quad + \kappa_{mn}{}^r \kappa_{rpq} - \kappa_{nm}{}^r \kappa_{rpq} - \kappa_{nq}{}^r \kappa_{mpr} + \kappa_{mq}{}^r \kappa_{npr} \; . \qquad (3.2.2)
\end{aligned}
$$

Dabei folgt (3.2.1) aus (3.1.2) mit Definition 2.6.2 und (3.1.6) sowie (3.2.2) aus (3.2.1) mit (2.6.26).
Riemann-, Ricci- und SU(3)-Krümmungstensor werden im folgenden in irreduzible SU(3)-Darstellungen zerlegt. Die Grundlage dieser Zerlegung bilden [Tri] und [Fal] Die Riemann-Tensoren liegen in einem Unterraum von $Sym^2(\Lambda^2)$, bezeichnet mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$. Mit der Bianchi-Identität d.) aus Satz 3.1.3 folgt, daß $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$ das Komplement der 4-Formen in $Sym^2(\Lambda^2)$ ist. Das wird in folgendem Lemma zusammengefasst:

Lemma 3.2.1 *Es gilt die Zerlegung* $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2 = \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \oplus \Lambda^4 \oplus \Lambda^2(\Lambda^2)$ *mit dem 105-dimensionalen Raum* $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$ *der Riemann-Tensoren.*

Beweis:
Sei ψ ein beliebiger Tensor aus $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$. Dann lässt sich immer eine lineare Abbildung $b : \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \to \Lambda^4$ auf die 4-Formen durch

$$b(\psi)_{mnpq} := \psi_{mnpq} + \psi_{npmq} + \psi_{pmnq} \qquad (3.2.3)$$

definieren. Die Riemann-Tensoren liegen insbesondere im Kern dieser Abbildung b, so daß $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) := ker\{b : \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \to \Lambda^4\}$ definiert wird. Damit die oben behauptete Zerlegung gilt, ist noch zu zeigen, daß der Kern von b tatsächlich in $Sym^2(\Lambda^2)$ liegt, die 4-Formen aber nicht.
Es gilt immer $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2 = Sym^2(\Lambda^2) \oplus \Lambda^2(\Lambda^2)$, da sich das Produkt zweier Tensoren in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen lässt (siehe (2.7.14) und (2.7.15)). Sei nun angenommen es gelte $\psi \in \Lambda^2(\Lambda^2)$ mit $b(\psi) = 0$. Dann ist

$$\psi_{mnpq} + \psi_{npmq} + \psi_{pmnq} = 0 \qquad (3.2.4)$$

also

$$
\begin{aligned}
\psi_{mnpq} &= -\psi_{npmq} - \psi_{pmnq} && (3.2.5)\\
&= \psi_{mqnp} - \psi_{nqmp} && (3.2.6)\\
&= \psi_{mqnp} + \psi_{qmnp} + \psi_{mnqp} && (3.2.7)\\
&= -\psi_{qmnp} + \psi_{qmnp} + \psi_{mnqp} && (3.2.8)\\
&= \psi_{mnqp} \; , && (3.2.9)
\end{aligned}
$$

wobei in (3.2.6) benutzt wurde, daß ψ aus $\Lambda^2(\Lambda^2)$ ist. In (3.2.7) wurde (3.2.4) für ψ_{nqmp} eingesetzt. Es ist aber auch $\psi_{mnpq} = -\psi_{mnqp}$ und somit folgt $\psi_{mnpq} = 0$ mit der obigen Annahme für ψ. Das bedeutet, daß der Kern der Einschränkung von b auf $\Lambda^2(\Lambda^2)$ nur aus der Null besteht und $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$ im symmetrisierten Anteil von $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$ liegt, also

$$ker\{b : \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \mid_{\Lambda^2(\Lambda^2)} \to \Lambda^4\} \;=\; 0 \tag{3.2.10}$$

und

$$ker\{b : \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \to \Lambda^4\} \;\subset\; Sym^2(\Lambda^2) \tag{3.2.11}$$

gilt. Offensichtlich gilt die Inklusion $\Lambda^4 \subset Sym^2(\Lambda^2)$, denn für $\psi \in \Lambda^4$ ist $\psi_{mnpq} = \psi_{pqmn}$ erfüllt. Weiterhin ist $\psi' = b(\psi) \neq 0$, für ein $\psi \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$, aber $\psi' \in \Lambda^4$. Außerdem ist $b(\psi') = 3\psi' \neq 0$ und somit $\Lambda^4 \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) = 0$. Insgesamt folgt daraus die im Lemma behauptete Zerlegung.
Für die Dimensionen der betrachteten Räume gilt

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) &= \dim Sym^2(\Lambda^2) - \dim \Lambda^4 \\ &= \binom{\binom{6}{2}+1}{2} - \binom{6}{4} = 105\ . \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$\square$

Den Raum der Riemann-Tensoren $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$ erhält man also durch Herausnehmen des Unterraums der 4-Formen aus $Sym^2(\Lambda^2)$. Mit (2.6.2) und (2.6.3) ist

$$Sym^2(\Lambda^2) \;=\; Sym^2(\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \oplus Sym((\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \otimes \Lambda^{1,1}) \oplus Sym^2(\Lambda^{1,1})\ . \tag{3.2.13}$$

Der erste Summand von (3.2.13) ist [Fal]

$$\begin{aligned} Sym^2(\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) &= Sym^2(\Lambda^{2,0}) \oplus Sym^2(\Lambda^{0,2}) \\ &\quad \oplus Sym(\Lambda^{2,0} \otimes \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{2,0}) \qquad (3.2.14) \\ &= Sym^2([\bar{\mathbf{3}}]) \oplus Sym^2([\mathbf{3}]) \\ &\quad \oplus Sym(([\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{3}]) \oplus ([\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}]))\ . \qquad (3.2.15) \end{aligned}$$

Dabei projiziert $Sym^2([\bar{\mathbf{3}}])$ auf den symmetrischen Anteil von

$$[\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}] = [\mathbf{3}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}] \tag{3.2.16}$$

also auf die Darstellung $[\bar{\mathbf{6}}]$, ebenso ist $Sym^2([\mathbf{3}]) = [\mathbf{6}]$ [Cor]. Wegen

$$[\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}] = [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \tag{3.2.17}$$

ergibt sich der symmetrische Anteil von $([\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{3}]) \oplus ([\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}])$ zu $[\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]$ [Fal]. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} & Sym^2([\bar{\mathbf{3}}]) \oplus Sym^2([\mathbf{3}]) \oplus Sym(([\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{3}]) \oplus ([\mathbf{3}] \otimes [\bar{\mathbf{3}}])) \\ = \; & [\bar{\mathbf{6}}] \oplus [\mathbf{6}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \; . \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Für den zweiten Summand von (3.2.13) gilt [Fal]

$$Sym((\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \otimes \Lambda^{1,1}) = ((\Lambda^{2,0} \otimes (\Lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{C})) \oplus (\Lambda^{0,2} \otimes (\Lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{C})) \tag{3.2.19}$$

$$= [\bar{\mathbf{3}}] \otimes ([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]) \oplus [\mathbf{3}] \otimes ([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}])) \; . \tag{3.2.20}$$

Darin sind die Tensorprodukte $[\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}]$ sowie $[\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{8}]$ auszureduzieren. Es ist [Cor]

$$[\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}] = [\bar{\mathbf{15}}] \oplus [\mathbf{6}]' \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \tag{3.2.21}$$

und

$$[\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{8}] = [\mathbf{15}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}]' \oplus [\mathbf{3}] \tag{3.2.22}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} & ([\bar{\mathbf{3}}] \otimes ([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]) \oplus [\mathbf{3}] \otimes ([\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}])) \\ = \; & [\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\bar{\mathbf{15}}] \oplus [\mathbf{6}]' \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\mathbf{3}] \oplus [\mathbf{15}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}]' \oplus [\mathbf{3}] \; . \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Der dritte Summand von (3.2.13) ist [Fal]

$$Sym^2(\Lambda^{1,1}) = Sym^2(\Lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{C}) \tag{3.2.24}$$

$$= Sym^2(\Lambda_0^{1,1}) \oplus Sym(\Lambda_0^{1,1} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \otimes \Lambda_0^{1,1}) \oplus Sym^2(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \; . \tag{3.2.25}$$

Dabei wurde zunächst $\Lambda^{1,1}$ in den Spuranteil $\mathbb{C} \cong [\mathbf{1}]$ und den spurlosen Teil $\Lambda_0^{1,1} \cong [\mathbf{8}]$ aufgespalten. Weiterhin folgt mit [Cor]

$$[\mathbf{8}] \otimes [\mathbf{8}] = [\mathbf{27}] \oplus [\mathbf{10}] \oplus [\bar{\mathbf{10}}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \; . \tag{3.2.26}$$

Der symmetrische Anteil davon ist [Fal]

$$Sym^2[\mathbf{8}] = [\mathbf{27}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \tag{3.2.27}$$

insgesamt folgt [Fal]

$$\begin{aligned} & Sym^2(\Lambda_0^{1,1}) \oplus Sym(\Lambda_0^{1,1} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \otimes \Lambda_0^{1,1}) \oplus Sym^2(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \\ = \; & ([\mathbf{27}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]) \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \; . \end{aligned} \qquad (3.2.28)$$

Mit der Isomorphie

$$\Lambda^4 \;\cong\; \Lambda^2 = [\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\mathbf{3}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \qquad (3.2.29)$$

ergibt sich also insgesamt folgende Zerlegung von $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$ in irreduzible SU(3)-Darstellungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) &= Sym^2(\Lambda^2) - \Lambda^4 \\ &= [\bar{\mathbf{6}}] \oplus [\mathbf{6}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \oplus [\bar{\mathbf{15}}] \oplus [\mathbf{6}]' \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \\ &\quad \oplus [\mathbf{15}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}]' \oplus [\mathbf{3}] \oplus [\mathbf{27}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \end{aligned} \qquad (3.2.30)$$

Die Zuordnung der Indexstruktur einzelner Komponenten von $R^{(\Gamma)}$ zu den jeweiligen SU(3)-Darstellungen ist in folgender Tabelle angegeben:

Darstellung	Indexstruktur
$[\bar{6}] \oplus [6]$	$R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}$
$[\bar{15}] \oplus [6]' \oplus [\bar{3}]$	$R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\delta}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma\delta}$, $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta\bar{\gamma}\delta}$, $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta\gamma\bar{\delta}}$
$[15] \oplus [\bar{6}]' \oplus [3]$	$R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta}$
$[27] \oplus [8] \oplus [1] \oplus [8] \oplus [1]$	$R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}$

Tabelle 3.2.1: SU(3)-Darstellungen des Riemann-Tensors

Es fällt auf, daß die Darstellungen $[\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}]$ in obiger Zerlegung doppelt auftreten. Für diese isotypischen Darstellungen können Unterräume unterschieden werden, indem zu der orthogonalen Summe

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \;=\; \mathfrak{K}_{Weyl} \oplus \mathfrak{K}_{Ricci} \qquad (3.2.31)$$

übergegangen wird, wobei $\mathfrak{K}_{Weyl}$ den Kern der Abbildung der Kontraktion der Riemann-Tensors zum Ricci-Tensor bezeichnet:

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \;\to\; Sym^2(\Lambda^1) \qquad (3.2.32)$$

$$R^{(\Gamma)}_{mnpq} \;\mapsto\; R^{(\Gamma)}_{mnp}{}^{n} = R^{(\Gamma)}_{mp} \qquad (3.2.33)$$

Mit Tabelle 3.2.1 erhält man für den durch $\mathfrak{K}_{Weyl}$ bestimmten Weyl-Tensor und den durch $\mathfrak{K}_{Ricci}$ bestimmten Ricci-Tensor die folgenden Zerlegungen [Fal]:

$$\mathfrak{K}_{Weyl} = [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{27}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}] \oplus [\mathbf{6}] \oplus [\bar{\mathbf{15}}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\mathbf{15}] \oplus [\mathbf{3}] \tag{3.2.34}$$

$$\mathfrak{K}_{Ricci} = [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{6}]' \oplus [\bar{\mathbf{6}}]' \tag{3.2.35}$$

Die Indexstruktur der Komponenten des Ricci-Tensors entspricht also folgenden Darstellungen:

Darstellung	Indexstruktur
$[8] \oplus [1]$	$R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\beta}$
$[6]' \oplus [\bar{6}]'$	$R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta}$, $R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$

Tabelle 3.2.2: SU(3)-Darstellungen des Ricci-Tensors

Der Unterraum $\mathfrak{K}_{Ricci}$ enthält weiterhin den orthogonal invarianten Unterraum $[\mathbf{1}]$, welchem der Ricci-Skalar

$$R^{(\Gamma)} = R^{(\Gamma)}{}_m{}^m \tag{3.2.36}$$

entspricht.
Eine U(3)-invariante Einteilung der Riemann-Tensoren erhält man auch durch Betrachtung des Grades der Reproduzierbarkeit von $R^{(\Gamma)}$ bei Kontraktionen mit dem Tensor J der fast hermiteschen Struktur von M^6 [Gra2], [Nag1]. Das sind folgende Unterräume von $\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6))$, die auch als die drei Klassen der Grayschen Krümmungsbedingungen bezeichnet werden [Gra2]:

$$\mathfrak{G}_1 = \{R^{(\Gamma)} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \mid R^{(\Gamma)}_{mnpq} = R^{(\Gamma)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s\}$$
$$\mathfrak{G}_2 = \{R^{(\Gamma)} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \mid R^{(\Gamma)}_{mnpq} = R^{(\Gamma)}_{uvpq} J_m{}^u J_n{}^v + R^{(\Gamma)}_{unrq} J_m{}^u J_p{}^r + R^{(\Gamma)}_{unps} J_m{}^u J_q{}^s\}$$
$$\mathfrak{G}_3 = \{R^{(\Gamma)} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \mid R^{(\Gamma)}_{mnpq} = R^{(\Gamma)}_{uvrs} J_m{}^u J_n{}^v J_p{}^r J_q{}^s\}$$

Es gelten die Inklusionen [Gra2]

$$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}_3 \; . \tag{3.2.37}$$

Zum Beispiel ist der Unterraum der Riemann-Tensoren auf Kähler-Mannigfaltigkeiten (lokal) isomorph zu $\mathfrak{G}_1$, und das ist der Unterraum

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{so}(6)) \cap Sym^2(\Lambda^{1,1}) \; , \tag{3.2.38}$$

denn Vertauschen J und $\nabla^{(\Gamma)}$, was wegen der Geschlossenheit von J für Kähler-Mannigfaltigkeiten zutrifft [Kob1], so liegt $R^{(\Gamma)}$ in $\mathfrak{G}_1$:

Lemma 3.2.2 *Wenn die kovariante Ableitung ∇' die komplexe Struktur J erhält, erfüllt der Krümmungstensor bezüglich ∇' die erste Krümmungsbedingung von Gray, und liegt damit in $\mathfrak{G}_1$.*

Beweis:
Es sei o.B.d.A. der Term $2T_{mn}{}^r\nabla'_r v_p$ ausgelassen, da er zu dem Beweis nicht beiträgt. Dann ist mit (3.1.1)

$$[\nabla'_m,\nabla'_n]J_r{}^s v_s \;=:\; -R'_{mnr}{}^q J_q{}^s v_s\ . \tag{3.2.39}$$

Da aber ∇' und J vertauschen, ist auch

$$\begin{aligned}[\nabla'_m,\nabla'_n]J_r{}^s v_s &= J_r{}^s[\nabla'_m,\nabla'_n]v_s & (3.2.40)\\ &=: -J_r{}^s R'_{mns}{}^q v_q\ . & (3.2.41)\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}R'_{mnr}{}^q J_q{}^s v_s &= J_r{}^l R'_{mnl}{}^q v_q\\ J_w{}^r R'_{mnr}{}^q J_q{}^s v_s &= J_w{}^r J_r{}^l R'_{mnl}{}^q v_q\\ &= (-\delta_w{}^l) R'_{mnl}{}^q v_q\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

und damit

$$\begin{aligned}-R'_{mnw}{}^q v_q &= R'_{mnr}{}^q J_w{}^r J_q{}^s v_s\\ &= -R'_{mnrq} J_w{}^r J_s{}^q v^s\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

und das ist die behauptete erste Krümmungsbedingung von Gray,

$$R'_{mnwq}v^q \;=\; R'_{mnrq}J_w{}^r J_s{}^q v^s\ . \tag{3.2.44}$$

□

In komplexen Koordinaten geschrieben bedeutet das unterschiedliche Holomorphie der hinteren beiden Indizes von $R^{(\Gamma)}$, in Analogie zu (2.6.10). Im Kähler-Fall folgt außerdem $R^{(\Gamma)}_{uvpq}J_m{}^u J_n{}^v$ [Kob1], was ebenfalls in Analogie zu (2.6.10) unterschiedliche Holomorphie in den ersten beiden Indizes von $R^{(\Gamma)}$ bedeutet.
Eine ähnliche Situation ist im Fall der SU(3)-Krümmungstensors $R^{(T)}$ des SU(3)-Zusammenhangs $\nabla^{(T)}$ anzutreffen. Da $\nabla^{(T)}$ und J vertauschen, folgt

$$R^{(T)}_{mnpq} \;=\; R^{(T)}_{mnrs}J_p{}^r J_q{}^s\ . \tag{3.2.45}$$

Insbesondere nimmt $R^{(T)}$ als 2-Form, bezogen auf die vorderen beiden Indizes, Werte in der adjungierten Darstellung der SU(3) an. Für die Ausreduktion in irreduzible SU(3)-Darstellungen von $R^{(T)}$ ergibt sich mit (2.6.2)

$$\begin{aligned} R^{(T)} \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{su}(3) &= (\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{C}) \otimes \Lambda_0^{1,1} && (3.2.46) \\ &= ((\Lambda^{2,0} \otimes \Lambda_0^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda_0^{1,1}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \Lambda_0^{1,1}) \\ &\quad \oplus ((\Lambda_0^{1,1}) \otimes (\Lambda_0^{1,1})) \\ &= [\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus ([\mathbf{8}] \otimes [\mathbf{8}]) \; . && (3.2.47) \end{aligned}$$

Es treten also die Tensorprodukte der Darstellungen $[\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}]$, $[\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{8}]$ und $[\mathbf{8}] \otimes [\mathbf{8}]$ auf. Mit (3.2.21), (3.2.22) und (3.2.26) folgt

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}] \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \otimes [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus ([\mathbf{8}] \otimes [\mathbf{8}]) \\ = \; & [\bar{\mathbf{15}}] \oplus [\mathbf{6}]' \oplus [\bar{\mathbf{3}}] \oplus [\mathbf{15}] \oplus [\bar{\mathbf{6}}]' \oplus [\mathbf{3}] \oplus [\mathbf{8}] \\ & \oplus ([\mathbf{1}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{8}] \oplus [\mathbf{10}] \oplus [\bar{\mathbf{10}}] \oplus [\mathbf{27}]) \; . \qquad (3.2.48) \end{aligned}$$

Die Indexstruktur der Komponenten von $R^{(T)}$ ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

Darstellung	Indexstruktur
$[\bar{15}] \oplus [6]' \oplus [\bar{3}]$	$R^{(T)}_{\alpha\beta\gamma\bar{\delta}}$, $R^{(T)}_{\alpha\beta\bar{\gamma}\delta}$
$[15] \oplus [\bar{6}]' \oplus [3]$	$R^{(T)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta}$, $R^{(T)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$
$[1] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [10] \oplus [\bar{10}] \oplus [27]$	$R^{(T)}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$, $R^{(T)}_{\bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta}}$, $R^{(T)}_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta}$, $R^{(T)}_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}$

Tabelle 3.2.3: SU(3)-Krümmungstensor

Für halb-flache Mannigfaltigkeiten kann gezeigt werden, daß die Ricci-Form, definiert durch

$$R^{(\Gamma)\star}_{mn} \;:=\; R^{(\Gamma)}_{mnpq} J^{pq} \qquad (3.2.49)$$

als Linearkombination von quadratischen Termen der intrinsischen Kontorsion geschrieben werden kann. Das wird durch Kontraktion des SU(3)-Krümmungstensors mit der Kählerform J erreicht, was folgender Satz beschreibt.

Satz 3.2.1 *Durch Kontraktion des Krümmungstensors von $\nabla^{(T)}$ mit der Kählerform* J *ergibt sich im Fall der halb-Flachheit für dessen Komponenten:*

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & R^{(\Gamma)}_{mnpq} J^{pq} + \kappa_{npq} \kappa_m{}^p{}_r J^{rq} + \kappa_{npq} \kappa_m{}^q{}_r J^{pr} - \kappa_{mpq} \kappa_n{}^p{}_r J^{rq} \\ & - \kappa_{mpq} \kappa_n{}^q{}_r J^{pr} - \kappa_{mp}{}^r \kappa_{nrq} J^{pq} + \kappa_{np}{}^r \kappa_{mrq} J^{pq} \qquad (3.2.50) \end{aligned}$$

Beweis:
Durch Kontraktion von $R^{(T)}$ mit J erhält man:

$$\begin{aligned} R^{(T)}_{mnpq} J^{pq} &= R^{(\Gamma)}_{mnpq} J^{pq} - \kappa_{npq} \nabla^{(\Gamma)}_m J^{pq} + \kappa_{mpq} \nabla^{(\Gamma)}_n J^{pq} \\ &\quad - \kappa_{mp}{}^r \kappa_{nrq} J^{pq} + \kappa_{np}{}^r \kappa_{mrq} J^{pq} \end{aligned} \tag{3.2.51}$$

und mit den Komponenten von $R^{(T)}$ gemäß Tabelle 3.2.3 ist

$$\begin{aligned} R^{(T)}_{mnpq} J^{pq} &= R^{(T)}_{mn\alpha\bar\beta} i g^{\alpha\bar\beta} - R^{(T)}_{mn\bar\alpha\beta} i g^{\bar\alpha\beta} \\ &= i R^{(T)}_{mn\alpha}{}^{\alpha} - i R^{(T)}_{mn}{}^{\beta}{}_{\beta} \\ &= 2i R^{(T)}_{mn\alpha}{}^{\alpha} \\ &= 0 \ , \end{aligned} \tag{3.2.52}$$

denn wegen (3.2.46) ist $R^{(T)}_{mn\alpha}{}^{\alpha}$ die Spur des Anteils in $\mathfrak{su}(3)$, welche verschwindet. Wegen (2.9.11) ist $\kappa_{npq} J^{pq} = 0$ und deshalb

$$(\nabla^{(\Gamma)}_m \kappa_{npq}) J^{pq} = \nabla^{(\Gamma)}_m (\kappa_{npq} J^{pq}) - \kappa_{npq} \nabla^{(\Gamma)}_m J^{pq} \tag{3.2.53}$$
$$= -\kappa_{npq} \nabla^{(\Gamma)}_m J^{pq} \ . \tag{3.2.54}$$

Mit (2.8.1) folgt dann durch Einsetzen von (3.2.52) und (3.2.54) in (3.2.51) die Behauptung. □

3.3 Ricci-Tensor und Ricci-Skalar auf halb-flachen Mannigfaltigkeiten

Der direkte Weg zur Herleitung des Ricci-Tensors auf SU(3)-Mannigfaltigkeiten geht von der Killing-Spinor Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla^{(T)}_m \eta &= \nabla^{(\Gamma)}_m \eta - \kappa_{mnp} \Gamma^{np} \eta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

und dem SU(3)-Krümmungstensor (3.2.2)

$$\begin{aligned} R^{(T)}_{mnp} &= R^{(\Gamma)}_{mnp} + \nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} - \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} \\ &\quad + \kappa_{mn}{}^r \kappa_{rpq} - \kappa_{nm}{}^r \kappa_{rpq} - \kappa_{nq}{}^r \kappa_{mpr} + \kappa_{mq}{}^r \kappa_{npr} \end{aligned}$$

aus. Dabei ist η der SU(3)-invariante und Spinor aus Abschnitt 2.6, für den $\nabla^{(T)}_l \eta = 0$ gilt und $\Gamma^{np} = \Gamma^{[n}\Gamma^{p]}$ ist durch (2.5.2) gegeben. Anwenden des Kommutators der kovarianten Ableitung $\nabla^{(T)}$ auf η ergibt mit (3.3.1) und (3.1.1)

$$0 = [\nabla^{(T)}_m, \nabla^{(T)}_n] \eta \tag{3.3.2}$$
$$= -R^{(T)}_{mnpq} \Gamma^{pq} \eta - 2 T_{mn}{}^r \nabla^{(T)}_r \eta \ . \tag{3.3.3}$$

Daraus folgt

$$R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{pq}\eta \;=\; 0\;. \tag{3.3.4}$$

Heranmultiplizieren von Γ^n von links an (3.3.4) ergibt:

$$R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{n}\Gamma^{pq}\eta \;=\; 0\;. \tag{3.3.5}$$

Mit der Identität [Can2]

$$\Gamma^n\Gamma^{pq} \;=\; \Gamma^{npq} + 2g^{n[p}\Gamma^{q]} \tag{3.3.6}$$

folgt

$$\begin{aligned} & R^{(T)}_{mnpq}(\Gamma^{npq} + 2g^{n[p}\Gamma^{q]})\eta \\ =\; & (R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{npq} + R^{(T)}_{mnpq}g^{np}\Gamma^{q} - R^{(T)}_{mnpq}g^{nq}\Gamma^{p})\eta && (3.3.7) \\ =\; & 0\;. && (3.3.8) \end{aligned}$$

Vertauschen von p und q im zweiten Term von (3.3.8) ergibt

$$(R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{npq} - R^{(T)}_{mnqp}g^{np}\Gamma^{q} - R^{(T)}_{mnpq}g^{nq}\Gamma^{p})\eta \;=\; 0 \tag{3.3.9}$$

Umbenennen von p in q in (3.3.9) führt auf

$$(R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{npq} - R^{(T)}_{mnpq}g^{nq}\Gamma^{p} - R^{(T)}_{mnpq}g^{nq}\Gamma^{p})\eta \;=\; 0 \tag{3.3.10}$$

$$(R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{npq} - 2R^{(T)}_{mnpq}g^{nq}\Gamma^{p})\eta \;=\; 0\;. \tag{3.3.11}$$

Im zweiten Term von (3.3.11) wird der SU(3)-Krümmungstensor über n und q zu $R^{(T)}_{mp} := R^{(T)}_{mnp}{}^{n}$ kontrahiert, so daß

$$R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{npq}\eta - 2R^{(T)}_{mp}\Gamma^{p}\eta \;=\; 0\;. \tag{3.3.12}$$

Durch Heranmultiplizieren von $\eta^\dagger\Gamma^r$ von links an (3.3.12) und mit der Identität [Pro]

$$\Gamma^r\Gamma^{npq} \;=\; \Gamma^{rnpq} + g^{r[n}\Gamma^{pq]} \tag{3.3.13}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & R^{(T)}_{mnpq}\Gamma^{npq}\eta - 2R^{(T)}_{mp}\Gamma^{p}\eta \\ =\; & R^{(T)}_{mnpq}\eta^\dagger(\Gamma^{rnpq} + g^{r[n}\Gamma^{pq]})\eta - 2R^{(T)}_{mp}\eta^\dagger\Gamma^{r}\Gamma^{p}\eta && (3.3.14) \\ =\; & 0 && (3.3.15) \end{aligned}$$

und mit $\Gamma^r\Gamma^n = \Gamma^{rn} + g^{rn}$ [Can2] folgt

$$R^{(T)}_{mnpq}(\eta^\dagger\Gamma^{rnpq}\eta + \eta^\dagger g^{r[n}\Gamma^{pq]}\eta) - 2R^{(T)}_{mp}(g^{rp}\eta^\dagger\eta + \eta^\dagger\Gamma^{rp}\eta) \;=\; 0\;. \tag{3.3.16}$$

Mit der Normierung $\eta^\dagger\eta = 1$ folgt aus (3.3.16)

$$R^{(T)}_{mnpq}\eta^\dagger\Gamma^{rnpq}\eta - 2R^{(T)}_{mp}g^{rp}\eta^\dagger\eta \;=\; 0 \tag{3.3.17}$$

und mit der Identität $\eta^\dagger\Gamma^{rn}\eta = 0$ [Can2] folgt daraus

$$R^{(T)}_{mnpq}\eta^\dagger\Gamma^{rnpq}\eta \;=\; 2R^{(T)}{}_m{}^r\;. \tag{3.3.18}$$

Einsetzen von (3.2.2) in (3.3.18) liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(R^{(\Gamma)}_{mnpq} + \nabla^{(T)}_m\kappa_{npq} - \nabla^{(T)}_n\kappa_{mpq}\\
&+\kappa_{mn}{}^l\kappa_{lpq} - \kappa_{nm}{}^l\kappa_{lpq} + \kappa_{mp}{}^l\kappa_{nlq} + \kappa_{mq}{}^l\kappa_{npl})\eta^\dagger\Gamma^{rnpq}\eta\\
=\;& R^{(\Gamma)}{}_{mn}{}^{rn} + \nabla^{(T)}_m\kappa_n{}^{rn} - \nabla^{(T)}_n\kappa_m{}^{rn}\\
&+\kappa_{mn}{}^l\kappa_l{}^{rn} - \kappa_{nm}{}^l\kappa_l{}^{rn} + \kappa_m{}^{rl}\kappa_{nl}{}^n - \kappa_{ml}{}^n\kappa_n{}^{rl}\;.
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Daraus ergibt sich der Ricci-Tensor zu

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}{}_m{}^r \;=\;& \frac{1}{2}(\nabla^{(\Gamma)}_m\kappa_{npq} - \nabla^{(\Gamma)}_n\kappa_{mpq}\\
&+\kappa_{mn}{}^l\kappa_{lpq} - \kappa_{nm}{}^l\kappa_{lpq} + \kappa_{mp}{}^l\kappa_{nlq} + \kappa_{mq}{}^l\kappa_{npl})\eta^\dagger\Gamma^{rnpq}\eta\\
&-\nabla^{(\Gamma)}_m\kappa_n{}^{rn} + \nabla^{(\Gamma)}_n\kappa_m{}^{rn}\\
&-\kappa_{mn}{}^l\kappa_l{}^{rn} + \kappa_{nm}{}^l\kappa_l{}^{rn} - \kappa_m{}^{rl}\kappa_{nl}{}^n + \kappa_{ml}{}^n\kappa_n{}^{rl}\;,
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

wobei die 1.Bianchi-Identität $R^{(\Gamma)}_{m[npq]} = 0$ benutzt wurde (siehe Satz 3.1.3 d.)). Die Faktoren $\eta^\dagger\Gamma^{rnpq}\eta$ in (3.3.20) lassen sich folgendermaßen auf J zurückführen: Mit der Erweiterung 1 = (-ii) lässt sich schreiben [Gur1]:

$$-i\eta^\dagger i\Gamma^{mnpq}\eta \;=\; i\eta^\dagger(\frac{i}{6!}\epsilon_{m_1\ldots m_6}\Gamma^{m_1\ldots m_6}\frac{1}{2}\epsilon^{mnpqrs}\Gamma_{rs})\eta \tag{3.3.21}$$

$$=\; \frac{i}{2}\epsilon^{mnpqrs}\eta^\dagger\Gamma_7\Gamma_{rs}\eta\;, \tag{3.3.22}$$

wobei $\Gamma_7 := \frac{i}{6!}\epsilon_{m_1\ldots m_6}\Gamma^{m_1\ldots m_6}$ definiert ist (siehe auch Abschnitt 2.6). Mit (2.6.17), also $J_{rs} := -i\eta^\dagger\Gamma_7\Gamma_{rs}\eta$ ergibt sich aus (3.3.22)

$$\eta^\dagger\Gamma^{mnpq}\eta \;=\; -\frac{1}{2}\epsilon^{mnpqrs}J_{rs}\;. \tag{3.3.23}$$

Mit der Spurlosigkeit von κ, was wegen der halb-Flachheits-Bedingung zutrifft (siehe Abschnitt 2.9) und mit (3.3.23) wird aus (3.3.20) die folgende Identität für den Ricci-Tensor:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{mw} &= -\frac{1}{4}(\nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} - \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} \\
&\quad + \kappa_{mn}{}^l \kappa_{lpq} - \kappa_{nm}{}^l \kappa_{lpq} + \kappa_{mp}{}^l \kappa_{nlq} + \kappa_{mq}{}^l \kappa_{npl}) \epsilon_w{}^{npqst} J_{st} \\
&\quad + \nabla^{(T)}_n \kappa_{mw}{}^n + \kappa_{nm}{}^l \kappa_{lw}{}^n
\end{aligned}
\tag{3.3.24}
$$

Durch Kontraktion mit g^{mw} folgt daraus der Ricci-Skalar

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)} &= -\frac{1}{2}(\nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} + \kappa_{mn}{}^l \kappa_{lpq} + \kappa_{np}{}^l \kappa_{mql}) \epsilon^{mnpqst} J_{st} \\
&\quad - \kappa_{nlm} \kappa^{lmn} \ .
\end{aligned}
\tag{3.3.25}
$$

Der Ricci-Tensor (3.3.24) ist nun genauer zu untersuchen; insbesondere ist in der vorliegenden Form die notwendige Symmetrie in den Indizes m und n nicht offensichtlich.
Um die Wirkung des ϵ-Tensors in (3.3.24) zu erkennen, sollen Ricci-Tensor und Ricci-Skalar mit komplexen Indizes ausgedrückt werden. Es sind dazu von den in Tabelle 3.2.2 aufgeführten Komponenten des Ricci-Tensors nur $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta}$ und $R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}}$ zu berechnen, die restlichen Komponenten sind die dazu komplex Konjugierten. Die Berechnungen sind im Anhang A ausgeführt, hier wird nun gleich das Ergebnis angegeben:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} &= 2\nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar{\gamma}} - 2(\kappa_3)_\alpha{}^{\gamma\rho} (\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\beta\gamma} + 2(\kappa_3)_{\bar{\gamma}\alpha}{}^{\bar{\rho}} (\kappa_3)_{\bar{\rho}\beta}{}^{\bar{\gamma}} \\
&\quad + (\kappa_{1\oplus 2})_\alpha{}^{\bar{\gamma}\bar{\rho}} (\kappa_3)_{\beta\bar{\gamma}\bar{\rho}} - (\kappa_3)_{\alpha\bar{\gamma}\bar{\rho}} (\kappa_{1\oplus 2})_\beta{}^{\bar{\gamma}\bar{\rho}}
\end{aligned}
\tag{3.3.26}
$$

und

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}} &= 2\nabla^{(T)}_{\delta} (\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\delta} - 2(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\delta\rho} (\kappa_{1\oplus 2})^\rho{}_{\bar{\beta}}{}^{\delta} + 2(\kappa_{1\oplus 2})_{\delta\alpha}{}^{\bar{\rho}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\rho}\bar{\beta}}{}^{\delta} \\
&\quad - (\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\gamma\rho} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\beta}}{}^{\gamma\rho} + (\kappa_3)_\alpha{}^{\gamma\rho} (\kappa_3)_{\bar{\beta}\gamma\rho} \ .
\end{aligned}
\tag{3.3.27}
$$

Den Ricci-Skalar erhält man dann durch Kontraktion von α und β in (3.3.27):

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)} &= -2(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\gamma\delta} (\kappa_{1\oplus 2})^{\delta\alpha\gamma} + 2(\kappa_{1\oplus 2})_{\gamma\alpha\delta} (\kappa_{1\oplus 2})^{\delta\alpha\gamma} \\
&\quad - (\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\gamma\delta} (\kappa_{1\oplus 2})^{\alpha\gamma\delta} + (\kappa_3)_{\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta}} (\kappa_3)^{\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta}} + c.c. \ .
\end{aligned}
\tag{3.3.28}
$$

Im Anhang A wird (3.3.28) durch direkte Berechnung aus (3.3.25) verifiziert.
Die Symmetrie von $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta}$ aus (3.3.26) in α und β kann folgendermaßen gezeigt werden:

In dem Term $\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma}$ wirkt die kovariante Ableitung $\nabla^{(T)}$ nur auf Komponenten von κ aus $W_1 \oplus W_2$. Er kann folglich mit (2.9.4), also

$$(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta\gamma} = (T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta\gamma} + (T_{1\oplus 2})_{\gamma\alpha\beta} + (T_{1\oplus 2})_{\gamma\beta\alpha} \tag{3.3.29}$$

(vgl. Tabelle 2.8.2) in Komponenten von T ausgedrückt werden:

$$\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;=\; \nabla^{(T)}_{\bar\gamma}((T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} + (T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\alpha\beta} + (T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\beta\alpha})\ . \tag{3.3.30}$$

Nur der erste Summand von (3.3.30) ist weiter zu untersuchen, die letzten beiden sind symmetrisch in α und β. Mit (2.8.32) ist

$$\begin{aligned}(d\Omega)^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta}\Omega^{\bar\sigma\bar\alpha\bar\beta} &= 2(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\rho}\Omega_{\bar\rho\bar\alpha\bar\beta}\Omega^{\bar\sigma\bar\alpha\bar\beta} \\ &= 2(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\rho}2\delta^{\bar\sigma}_{\bar\rho} \parallel \Omega \parallel^2 \\ &= 4(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\sigma} \parallel \Omega \parallel^2\ ,\end{aligned} \tag{3.3.31}$$

wobei

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\beta\gamma}\bar\Omega^{\alpha\beta\gamma} &= \parallel \Omega \parallel^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \\ &= \parallel \Omega \parallel^2 3!\ .\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Aus (3.3.31) folgt also

$$(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;=\; F^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta}\Omega^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} \tag{3.3.33}$$

mit

$$F^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta} \;:=\; \frac{(d\Omega)^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta}}{4 \parallel \Omega \parallel^2}\ . \tag{3.3.34}$$

Durch Dualisieren von $F^{(2,2)}$ ergibt sich

$$(*F^{(2,2)})^{\gamma\bar\gamma} \;=\; \frac{1}{4}F^{(2,2)}_{\rho\mu\bar\rho\bar\mu}\epsilon^{\rho\mu\gamma}\epsilon^{\bar\rho\bar\mu\bar\gamma} \tag{3.3.35}$$

und durch Heranmultiplizieren von $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}$ folgt daraus

$$(*F^{(2,2)})^{\gamma\bar\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} \;=\; \frac{1}{4}F^{(2,2)}_{\rho\mu\bar\rho\bar\mu}(\delta^\rho_\alpha\delta^\mu_\beta - \delta^\rho_\beta\delta^\mu_\alpha)(\delta^{\bar\rho}_{\bar\alpha}\delta^{\bar\mu}_{\bar\beta} - \delta^{\bar\rho}_{\bar\beta}\delta^{\bar\mu}_{\bar\alpha}) \tag{3.3.36}$$

$$= \frac{1}{4}4F^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta}\ , \tag{3.3.37}$$

so daß $\nabla^{(T)}$ angewendet auf (3.3.33) folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} &= (\nabla^{(T)}_{\bar\gamma} F^{(2,2)}_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta})\Omega^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} && (3.3.38)\\
&= (\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(*F^{(2,2)})^{\nu\bar\nu})\epsilon_{\alpha\beta\nu}\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\nu}\underbrace{f\epsilon^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}}_{\Omega^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}} && (3.3.39)\\
&= (\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(*F^{(2,2)})^{\nu\bar\nu})\Omega_{\alpha\beta\nu}2!\delta^{\bar\gamma}_{\bar\nu} && (3.3.40)\\
&= 2(\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(*F^{(2,2)})^{\gamma\bar\gamma})\Omega_{\alpha\beta\gamma} && (3.3.41)
\end{aligned}$$

Dabei wurde in (3.3.39) benutzt, daß sich wegen $\Omega \sim \epsilon$ auch $\Omega_{\alpha\beta\gamma} = f\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ schreiben lässt.
Es ist also $\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(*F^{(2,2)})^{\gamma\bar\gamma}$ zu berechnen. Wegen der festliegenden Indexstruktur von $*F^{(2,2)}$ lässt sich sofort zu reellen Indizes übergehen:

$$\begin{aligned}
\nabla^{(T)}_m(*F^{(2,2)})^{nm} &= \nabla^{(\Gamma)}_m(*F^{(2,2)})^{nm} + \kappa_{mr}{}^n(*F^{(2,2)})^{rm}\\
&\quad +\kappa_{mr}{}^m(*F^{(2,2)})^{nr} && (3.3.42)\\
&= -\underbrace{(d^\dagger(*F^{(2,2)}))^n}_{\mathrm{I}} + \kappa_m{}^n{}_r(*F^{(2,2)})^{mr}\ . && (3.3.43)
\end{aligned}$$

Dabei wurde neben der Spurlosigkeit von κ benutzt, daß die in obiger Form auftretende kovariante Ableitung der 2-Form $*F^{(2,2)}$ mit dem Ko-Ableitungsoperator $d^\dagger$ geschrieben werden kann. Für eine p-Form ω_p ist nämlich [Can2]

$$\begin{aligned}
d^\dagger\omega_p &= d^\dagger(\frac{1}{p!}\omega_{m_1\ldots m_p}dx^{m_1}\wedge\ldots\wedge dx^{m_p})\\
&= \frac{-1}{(p-1)!}\nabla^{(\Gamma)k}\omega_{km_2\ldots m_p}dx^{m_2}\wedge\ldots\wedge dx^{m_p}\ , && (3.3.44)
\end{aligned}$$

wobei die Ko-Ableitung durch

$$d^\dagger := (-1)^{p(n-p+1)} * d* \qquad (3.3.45)$$

gegeben ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
d^\dagger(*F^{(2,2)}) &= *d*(*F^{(2,2)}) && (3.3.46)\\
&\sim *d(F^{(2,2)}) && (3.3.47)\\
&\sim *(d(d\Omega)^{(2,2)}) && (3.3.48)
\end{aligned}$$

und mit (2.8.6) folgt

$$d(d\Omega)^{(2,2)} = 0 \qquad (3.3.49)$$

also

$$d^\dagger(*F^{(2,2)}) \;=\; 0\;, \tag{3.3.50}$$

womit gezeigt ist, daß Term I von (3.3.43) verschwindet. Aus (3.3.43) folgt also

$$\nabla^{(T)}_m(*F^{(2,2)})_n{}^m \;=\; \kappa_{mn}{}^r(*F^{(2,2)})^m{}_r\;. \tag{3.3.51}$$

Hier können direkt komplexe Indizes eingesetzt werden:

$$\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(*F^{(2,2)})_{\bar\delta}{}^{\bar\gamma} \;=\; (\kappa_3)_{\rho\bar\delta}{}^{\gamma}(*F^{(2,2)})^{\rho}{}_{\gamma} \tag{3.3.52}$$

Damit lässt sich nun $\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma}$ ausdrücken. Einsetzen von (3.3.52) in (3.3.41) ergibt

$$\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;=\; 2\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar\delta}(\kappa_3)_{\rho\bar\delta}{}^{\gamma}(*F^{(2,2)})^{\rho}{}_{\gamma} \tag{3.3.53}$$

und mit (3.3.35) folgt dann

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;&=\; 2\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar\delta}(\kappa_3)_{\rho\bar\delta\bar\gamma}\frac{1}{4}F^{(2,2)}_{\mu\nu\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\bar\mu\bar\nu\bar\gamma} &(3.3.54)\\ &=\; \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar\delta}(\kappa_3)_{\rho\bar\delta\bar\gamma}F^{(2,2)}_{\mu\nu\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\bar\mu\bar\nu\bar\gamma}\;. &(3.3.55)\end{aligned}$$

Mit $\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\delta} = \delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta}$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;&=\; \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}{}^{\bar\delta}(\kappa_3)_{\rho\bar\delta\bar\gamma}F^{(2,2)}_{\mu\nu\bar\mu\bar\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\bar\mu\bar\nu\bar\gamma} &(3.3.56)\\ &=\; \frac{1}{2}(\kappa_3)_{\rho}{}^{\delta}{}_{\bar\gamma}F^{(2,2)}_{\mu\nu\bar\mu\bar\nu}\Omega^{\bar\mu\bar\nu\bar\gamma}\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta}\;. &(3.3.57)\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3.3.33) in (3.3.57) ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;&=\; \frac{1}{2}(\kappa_3)_{\rho}{}^{\delta}{}_{\bar\gamma}F^{(2,2)}_{\mu\nu\bar\mu\bar\nu}\Omega^{\bar\mu\bar\nu\bar\gamma}\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta} &(3.3.58)\\ &=\; \frac{1}{2}(\kappa_3)_{\rho}{}^{\delta}{}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\mu\nu}{}^{\bar\gamma}\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta} &(3.3.59)\end{aligned}$$

Mit (2.8.33) folgt dann

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \;&=\; \frac{1}{2}(\kappa_3)_{\rho}{}^{\delta}{}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\mu\nu}{}^{\bar\gamma}\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta} &(3.3.60)\\ &=\; \frac{1}{4}(\kappa_3)_{\rho}{}^{\delta}{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\mu\nu}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\nu\mu}{}^{\bar\gamma})\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta}\;. &(3.3.61)\end{aligned}$$

Durch Auswerten von $\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\delta}$ folgt aus (3.3.61) weiter

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} \\
= \; & \frac{1}{4}((\kappa_3)_\rho{}^\rho{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar\gamma}) - (\kappa_{1\oplus 2})_\beta{}^\nu{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\nu}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\nu\alpha}{}^{\bar\gamma}) \\
& +(\kappa_3)_\alpha{}^\delta{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\delta}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\delta\beta}{}^{\bar\gamma}) - (\kappa_{1\oplus 2})_\delta{}^\delta{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\alpha}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma}) \\
& +(\kappa_3)_\beta{}^\delta{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\delta\alpha}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\delta}{}^{\bar\gamma}) - (\kappa_{1\oplus 2})_\alpha{}^\delta{}_{\bar\gamma}((\kappa_{1\oplus 2})_{\delta\beta}{}^{\bar\gamma} - (\kappa_{1\oplus 2})_{\beta\delta}{}^{\bar\gamma}))
\end{aligned}
\tag{3.3.62}
$$

und durch Zusammenfassen ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(T_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} &= \frac{1}{4}(-(\kappa_3)_{\beta\bar\nu\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\alpha{}^{\bar\nu\bar\gamma} + (\kappa_3)_{\beta\bar\nu\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\nu}{}_\alpha{}^{\bar\gamma} \\
&\quad +(\kappa_3)_{\alpha\bar\delta\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\beta{}^{\bar\delta\bar\gamma} - (\kappa_3)_{\alpha\bar\delta\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\delta}{}_\beta{}^{\bar\gamma} \\
&\quad +(\kappa_3)_{\beta\bar\delta\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\delta}{}_\alpha{}^{\bar\gamma} - (\kappa_3)_{\beta\bar\delta\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\alpha{}^{\bar\delta\bar\gamma} \\
&\quad -(\kappa_3)_{\alpha\bar\delta\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\delta}{}_\beta{}^{\bar\gamma} + (\kappa_3)_{\alpha\bar\delta\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\beta{}^{\bar\delta\bar\gamma}) && (3.3.63) \\
&= \frac{1}{2}((\kappa_3)_{\alpha\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\beta{}^{\bar\rho\bar\gamma} - (\kappa_3)_{\beta\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\alpha{}^{\bar\rho\bar\gamma} \\
&\quad +(\kappa_3)_{\alpha\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\rho\bar\gamma}{}_\beta - (\kappa_3)_{\beta\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\rho\bar\gamma}{}_\alpha)\ . && (3.3.64)
\end{aligned}
$$

Man erhält damit mit (3.3.30) das Ergebnis

$$
\begin{aligned}
\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} &= \frac{1}{2}((\kappa_3)_{\alpha\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\beta{}^{\bar\rho\bar\gamma} - (\kappa_3)_{\beta\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_\alpha{}^{\bar\rho\bar\gamma} \\
&\quad +(\kappa_3)_{\alpha\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\rho\bar\gamma}{}_\beta - (\kappa_3)_{\beta\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})^{\bar\rho\bar\gamma}{}_\alpha) \\
&\quad +\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}((T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\alpha\beta} + (T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\beta\alpha})\ .
\end{aligned}
\tag{3.3.65}
$$

Durch Einsetzen von (3.3.65) in (3.3.26) erhält man dann einen offensichtlich in α und β symmetrischen Ausdruck für die $[\mathbf{6}]' \oplus [\bar{\mathbf{6}}]'$-Komponenten des Ricci-Tensors:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} &= 2\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}((T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\alpha\beta} + (T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\beta\alpha}) \\
&\quad -(\kappa_3)_\alpha{}^{\rho\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\gamma\beta} - (\kappa_3)_\beta{}^{\rho\gamma}(\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\gamma\alpha} + 2(\kappa_3)_{\bar\gamma\alpha}{}^{\bar\rho}(\kappa_3)_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\gamma}
\end{aligned}
\tag{3.3.66}
$$

Um die Frage zu klären, wie in (3.3.24) die kovarianten Ableitungen von κ zu bestimmen sind, werden im nächsten Abschnitt spezielle Einschränkungen untersucht: Von den Klassen W_1 bis W_3, denen κ für halb-flache Mannigfaltigkeiten angehört, wird im ersten Schritt nur $W_1 \neq 0$ angenommen, im nächsten nur $W_1 \oplus W_2 \neq 0$. Für diese Fälle lassen sich Bedingungen für die $\nabla^{(T)}$-Parallelität von κ finden, also Bedingungen, für welche die $\nabla^{(T)}$-Terme in (3.3.24) verschwinden.

3.4 Nearly-Kähler Mannigfaltigkeiten

Für den speziellen, als nearly-Kähler bezeichneten Fall (siehe Tabelle 2.7.1), total antisymmetrischer Kontorsion, d.h. daß nur $W_1 \neq 0$ ist, lässt sich Parallelität von κ bezüglich des SU(3)-Zusammenhangs $\nabla^{(T)}$ zeigen. Die folgende Beweisführung basiert auf [Bel]. Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.4.1 *Im Fall einer nearly-Kähler Mannigfaltigkeit ist die intrinsische Kontorsion bezüglich des* SU(3)*-Zusammenhangs* $\nabla^{(T)}$ *parallel.*

Beweis:
In Lemma 2.4.1 wurde gezeigt, daß sich die intrinsische Kontorsion κ durch J ausdrücken lässt. Mit (2.4.12) ist

$$\kappa_{mnp} = -\frac{1}{2}(J_{lp}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l) \ . \tag{3.4.1}$$

Die nearly-Kähler Bedingung bedeutet also, daß nur der schiefsymmetrische Anteil von κ betrachtet wird, und der liegt in der Klasse W_1. Es wird hier vorausgesetzt, daß $-\frac{1}{2}(J_{np}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l)$ die einzigen Tensor-Komponenten von κ sind und zu $\Lambda^{(3,0)+(0,3)} = W_1$ gehören. $J_{np}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l$ ist also schiefsymmetrisch in m, n und p. W_2 bis W_5 verschwinden in diesem Fall.
Zum Beweis der $\nabla^{(T)}$-Parallelität von κ ist $\nabla^{(T)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) = 0$ zu zeigen, denn wegen (2.8.1) ist

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_w(J_{lp}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l) &= \underbrace{(\nabla^{(T)}_w J_{lp})}_{0}(\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l) + J_{lp}(\nabla^{(T)}_w\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l) && (3.4.2)\\ &= J_{lp}(\nabla^{(T)}_w\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l) \ . && (3.4.3)\end{aligned}$$

Es ist also $\nabla^{(T)}$ auf $(J_{lp}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l)$ anzuwenden:

$$\nabla^{(T)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) = \partial(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) - \Phi_{wm}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_r J_{np} - \Phi_{wn}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_n J_{rp} - \Phi_{wp}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nr} \ . \tag{3.4.4}$$

Mit (2.6.1) folgt daraus

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) &= \partial(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) - (\kappa_{wm}{}^r + \Gamma_{wm}{}^r)\nabla^{(\Gamma)}_r J_{np}\\ &\quad -(\kappa_{wn}{}^r + \Gamma_{wn}{}^r)\nabla^{(\Gamma)}_n J_{rp} - (\kappa_{wp}{}^r + \Gamma_{wp}{}^r)\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nr} \ .\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Einsetzen von (3.4.1) für κ führt auf

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) &= \partial(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) - \Gamma_{wm}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_r J_{np} - \Gamma_{wn}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_n J_{rp} - \Gamma_{wp}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nr}\\ &\quad \frac{1}{2}J_l{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_w J_m{}^l)(\nabla^{(\Gamma)}_r J_{np}) + \frac{1}{2}J_l{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_w J_n{}^l)(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{rp})\\ &\quad +\frac{1}{2}J_l{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_w J_p{}^l)(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nr}) \ ,\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

mit

$$\nabla^{(\Gamma)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) = \partial(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) - \Gamma_{wm}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_r J_{np} - \Gamma_{wn}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_n J_{rp} - \Gamma_{wp}{}^r\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nr} \tag{3.4.7}$$

folgt also

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) &= \nabla^{(\Gamma)}_w(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{np}) + \underbrace{\frac{1}{2}J_l{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_w J_m{}^l)(\nabla^{(\Gamma)}_r J_{np})}_{\mathrm{I}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}J_l{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_w J_n{}^l)(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{rp})}_{\mathrm{II}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}J_l{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_w J_p{}^l)(\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nr})}_{\mathrm{III}} \; .\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Die letzten drei Terme von (3.4.8) müssen noch umgeschrieben werden. Es wird dazu die Schiefsymmetrie von $(J_{lp}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l)$ ausgenutzt. Vertauschen von p und l ergibt

$$J_{lp}\nabla^{(\Gamma)}_m J_n{}^l = -J_p{}^l\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nl} \tag{3.4.9}$$

$$\tag{3.4.10}$$

und damit ist

$$-J_s{}^p J_p{}^l\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nl} = -(-\delta^l_s)\nabla^{(\Gamma)}_m J_{nl} \tag{3.4.11}$$

$$= \nabla^{(\Gamma)}_m J_{ns} \; , \tag{3.4.12}$$

was wegen der in (3.4.1) vorausgesetzten Schiefsymmetrie in m und n antisymmetrisch ist. Außerdem gilt die Identität

$$\nabla^{(\Gamma)}_p(-\delta_{lm}) = 0$$

$$= \nabla^{(\Gamma)}_p(J_{rl}J_m{}^r) \tag{3.4.13}$$

$$= (\nabla^{(\Gamma)}_p J_m{}^r)J_{rl} + J_m{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_p J_{rl}) \tag{3.4.14}$$

also

$$(\nabla^{(\Gamma)}_p J_m{}^r)J_{rl} = -J_m{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_p J_{rl}) \; . \tag{3.4.15}$$

Durch Vertauschen von r und n erhält man ausgehend von der Schiefsymmetrie von (3.4.12) die folgende Identität:

$$J_m{}^r(\nabla^{(\Gamma)}_r J_n{}^t) = -(\nabla^{(\Gamma)}_n J_r{}^t)J_m{}^r \tag{3.4.16}$$

und mit (3.4.15) folgt

$$-(\nabla_n^{(\Gamma)} J_r{}^t) J_m{}^r \;=\; J_r{}^t (\nabla_n^{(\Gamma)} J_m{}^r) \; . \tag{3.4.17}$$

Darin werden m und n vertauscht und nochmals (3.4.15) angewendet und anschließend m und r vertauscht:

$$\begin{aligned} J_r{}^t (\nabla_n^{(\Gamma)} J_m{}^r) &= -J_r{}^t (\nabla_m^{(\Gamma)} J_n{}^r) && (3.4.18)\\ &= J_n{}^r (\nabla_m^{(\Gamma)} J_r{}^t) && (3.4.19)\\ &= -J_n{}^r (\nabla_r^{(\Gamma)} J_m{}^t) \; . && (3.4.20) \end{aligned}$$

Mit (3.4.16) ergibt sich dann die Identität

$$J_m{}^r (\nabla_r^{(\Gamma)} J_n{}^t) \;=\; -J_n{}^r (\nabla_r^{(\Gamma)} J_m{}^t) \; . \tag{3.4.21}$$

Term I von (3.4.8) schreibt sich nun mit (3.4.21)

$$\begin{aligned} J_l{}^r (\nabla_w^{(\Gamma)} J_m{}^l)(\nabla_r^{(\Gamma)} J_{np}) &= -J_p{}^r (\nabla_w^{(\Gamma)} J_m{}^l)(\nabla_r^{(\Gamma)} J_{nl}) && (3.4.22)\\ &= J_p{}^r (\nabla_w^{(\Gamma)} J_m{}^l)(\nabla_n^{(\Gamma)} J_{rl}) \; , && (3.4.23) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch r und n vertauscht wurden. Für Term II von (3.4.8) ergibt sich durch Vertauschen von r und l sowie m und p und anschließendes Anwenden von (3.4.15)

$$\begin{aligned} J_l{}^r (\nabla_w^{(\Gamma)} J_n{}^l)(\nabla_m^{(\Gamma)} J_{rp}) &= J_{rl} (\nabla_m^{(\Gamma)} J_p{}^r)(\nabla_w^{(\Gamma)} J_n{}^l) && (3.4.24)\\ &= -J_{rl} (\nabla_p^{(\Gamma)} J_m{}^r)(\nabla_w^{(\Gamma)} J_n{}^l) && (3.4.25)\\ &= J_m{}^r (\nabla_p^{(\Gamma)} J_{rl})(\nabla_w^{(\Gamma)} J_n{}^l) \; . && (3.4.26) \end{aligned}$$

Auf Term III von (3.4.8) wird (3.4.15) wie folgt angewendet:

$$\begin{aligned} J_l{}^r (\nabla_m^{(\Gamma)} J_{nr})(\nabla_w^{(\Gamma)} J_p{}^l) &= -(\nabla_m^{(\Gamma)} J_l{}^r) J_{nr} (\nabla_w^{(\Gamma)} J_p{}^l) && (3.4.27)\\ &= J_n{}^r (\nabla_w^{(\Gamma)} J_p{}^l)(\nabla_m^{(\Gamma)} J_{rl}) && (3.4.28) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden l und r vertauscht. In (3.4.8) werden nun (3.4.23), (3.4.26) und (3.4.28) für die Terme I, II und III eingesetzt:

$$\begin{aligned} \nabla_w^{(T)} \nabla_m^{(\Gamma)} J_{np} &= \nabla_w^{(\Gamma)} \nabla_m^{(\Gamma)} J_{np} + \frac{1}{2} J_p{}^r (\nabla_n^{(\Gamma)} J_{rl})(\nabla_w^{(\Gamma)} J_m{}^l) \\ &\quad + \frac{1}{2} J_m{}^r (\nabla_p^{(\Gamma)} J_{rl})(\nabla_w^{(\Gamma)} J_n{}^l) \\ &\quad + \frac{1}{2} J_n{}^r (\nabla_m^{(\Gamma)} J_{rl})(\nabla_w^{(\Gamma)} J_n{}^l) && (3.4.29)\\ &= 0 \; . && (3.4.30) \end{aligned}$$

In (3.4.30) wurde die Identität (2.9) aus [Gra3] auf Seite 234 ausgenutzt.

3.5 Quasi-Kähler Mannigfaltigkeiten

Wird nur $W_1 \oplus W_2 \neq 0$ vorausgesetzt, lassen sich Bedingungen ableiten, unter denen eine Parallelität von κ bezüglich $\nabla^{(T)}$ erreicht werden kann. Das ist genau der in Tabelle 2.7.1 aufgeführte Fall einer quasi-Kähler Mannigfaltigkeit. Die Grundlage der folgenden Beweisführung bilden [Nag1] und [Nag2]. Es werden hier alle Rechenschritte ausgeführt und auf den zuvor eingeführten Formalismus zurückgeführt.
Als Bedingung für die $\nabla^{(T)}$-parallele Kontorsion ist ein Riemann-Tensor aus $\mathfrak{G}_3$ erforderlich (siehe Abschnitt 3.2). Umgekehrt kann nun gezeigt werden, daß die $\nabla^{(T)}$-Parallelität von κ auf der betrachteten Mannigfaltigkeit die Gültigkeit der Krümmungsbedingung von $\mathfrak{G}_3$ erfordert. Bei den hier zu betrachtenden halb-flachen SU(3)-Mannigfaltigkeiten ist diese Bedingung für den Riemann-Tensor im allgemeinen nicht erfüllt, was der Annahme der Parallelität von κ widerspricht.

Satz 3.5.1 *Sei die* SU(3)*-Mannigfaltigkeit von der Klasse quasi-Kähler, dann ist* $T_{mn}{}^r \nabla_r^{(T)} \kappa_{pqs} = 0$ *genau dann, wenn der Riemann-Tensor aus* $\mathfrak{G}_3$ *ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, sind einige Vorbereitungen nötig. In den folgenden beiden Lemmata werden dazu zwei Identitäten für die kovarianten Ableitungen von κ bewiesen, die auf quasi-Kählerschen Mannigfaltigkeiten gelten, wenn die erste bzw. die zweite Krümmungsbedingung von Gray erfüllt ist. Und zwar gilt:

Lemma 3.5.1 *Sei die* SU(3)*-Mannigfaltigkeit von der Klasse quasi-Kähler. Ist der Riemann-Tensor aus* $\mathfrak{G}_3$*, so folgt*

$$J_m{}^k (\nabla_k^{(T)} \kappa_{lp}{}^r) J_n{}^l + \nabla_m^{(T)} \kappa_{np}{}^r \quad = \quad 0 \ . \tag{3.5.1}$$

Beweis:
Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:
1.) Im Gegensatz zum SU(3)-Krümmungstensor (oder Riemann-Tensor einer Kähler Mannigfaltigkeit) vertauscht der Riemann-Tensor im vorliegenden Fall nicht mit der Kählerform J. Diese Differenz auf der SU(3)-Mannigfaltigkeit wird durch den Tensor

$$\mathfrak{D}_{mnpq}^{(T)} := \nabla_m^{(T)} \kappa_{npq} - (\nabla_n^{(T)} \kappa_{mpq} + 2 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq}) \tag{3.5.2}$$

ausgedrückt. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
0 &= R^{(T)}_{mnpq} - R^{(T)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s && (3.5.3)\\
&= R^{(\Gamma)}_{mnpq} - R^{(\Gamma)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s + \nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} - \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq}\\
&\quad +2T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} - \kappa_{nq}{}^l \kappa_{mpl} + \kappa_{mq}{}^l \kappa_{npl}\\
&\quad -\nabla^{(T)}_m \kappa_{nrs} J_p{}^r J_q{}^s + \nabla^{(T)}_n \kappa_{mrs} J_p{}^r J_q{}^s\\
&\quad -2T_{mn}{}^l \kappa_{lrs} J_p{}^r J_q{}^s + \kappa_{ns}{}^l \kappa_{mrl} J_p{}^r J_q{}^s - \kappa_{ms}{}^l \kappa_{nrl} J_p{}^r J_q{}^s && (3.5.4)\\
&= R^{(\Gamma)}_{mnpq} - R^{(\Gamma)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s + \mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} - \mathfrak{D}^{(T)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s\ . && (3.5.5)
\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} = -\mathfrak{D}^{(T)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s$ ist

$$R^{(\Gamma)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s - R^{(\Gamma)}_{mnpq} = 2\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} \qquad (3.5.6)$$

und daraus folgt dann auch

$$R^{(\Gamma)}_{uvpq} J_m{}^u J_n{}^v - R^{(\Gamma)}_{mnpq} = 2\mathfrak{D}^{(T)}_{pqmn}\ . \qquad (3.5.7)$$

2.) Aus (3.5.7) ergibt sich

$$R^{(\Gamma)}_{uvrs} J_m{}^u J_n{}^v J_p{}^r J_q{}^s - R^{(\Gamma)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s = 2\mathfrak{D}^{(T)}_{rsmn} J_p{}^r J_q{}^s\ . \qquad (3.5.8)$$

Durch Hinzuaddieren von (3.5.6) folgt daraus

$$R^{(\Gamma)}_{uvrs} J_m{}^u J_n{}^v J_p{}^r J_q{}^s - R^{(\Gamma)}_{mnpq} = 2\mathfrak{D}^{(T)}_{rsmn} J_p{}^r J_q{}^s + 2\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq}\ , \qquad (3.5.9)$$

woraus schließlich die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{uvrs} J_m{}^u J_n{}^v J_p{}^r J_q{}^s &= R^{(\Gamma)}_{mnpq}\\
&\Leftrightarrow\\
\mathfrak{D}^{(T)}_{rsmn} J_p{}^r J_q{}^s &= -\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} \qquad (3.5.10)
\end{aligned}$$

folgt.
Durch beidseitiges Anwenden von J auf (3.5.10) erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{(T)}_{rsmn} J_k{}^r J_l{}^s J_p{}^k J_q{}^l &= -\mathfrak{D}^{(T)}_{mnrs} J_p{}^r J_q{}^s\\
\mathfrak{D}^{(T)}_{rsmn} (-\delta_q{}^s)(-\delta_p{}^r) &= -(-\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq})\\
\mathfrak{D}^{(T)}_{pqmn} &= \mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq}\ . \qquad (3.5.11)
\end{aligned}$$

3.) Ist der Riemann-Tensor also aus $\mathfrak{G}_3$, so gilt (3.5.11) , was gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned}
&\nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} - \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} + 2T_{mn}{}^l \kappa_{lpq}\\
= \ &\nabla^{(T)}_p \kappa_{qmn} - \nabla^{(T)}_q \kappa_{pmn} + 2T_{pq}{}^l \kappa_{lmn}\ . \qquad (3.5.12)
\end{aligned}$$

Wegen der quasi-Kähler Bedingung $\kappa_{npq} = -\kappa_{vrq} J_n{}^v J_p{}^r$ und der Vertauschbarkeit von $\nabla^{(T)}$ und J gilt

$$J_m{}^u T_{un}{}^l \kappa_{lrq} J_p{}^r \;=\; T_{mn}{}^l \kappa_{kpq} \tag{3.5.13}$$

und

$$-\nabla^{(T)}_n \kappa_{urq} J_m{}^u J_p{}^r \;=\; \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq}\ . \tag{3.5.14}$$

Damit folgt aus (3.5.12)

$$\begin{aligned} & J_m{}^u \nabla^{(T)}_u \kappa_{nrq} J_p{}^r - \nabla^{(T)}_n \kappa_{urq} J_m{}^u J_p{}^r + 2 J_m{}^u T_{un}{}^l \kappa_{lrq} J_p{}^r \\ = \;& J_p{}^r \nabla^{(T)}_r \kappa_{qun} J_m{}^u - \nabla^{(T)}_q \kappa_{run} J_p{}^r J_m{}^u + 2 J_p{}^r T_{rq}{}^l \kappa_{lun} J_m{}^u \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

also

$$\begin{aligned} & J_m{}^u \nabla^{(T)}_u \kappa_{nrq} J_p{}^r + \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} + 2 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} \\ = \;& J_p{}^r \nabla^{(T)}_r \kappa_{qun} J_m{}^u + \nabla^{(T)}_q \kappa_{pmn} + 2 T_{pq}{}^l \kappa_{lmn}\ . \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

Addieren von (3.5.12) und(3.5.16) ergibt dann unter Benutzung von

$$J_n{}^v \nabla^{(T)}_m \kappa_{vpq} = J_p{}^r \nabla^{(T)}_m \kappa_{nrq} \tag{3.5.17}$$

folgende Identität:

$$\begin{aligned} & J_u{}^v J_m{}^u \nabla^{(T)}_u \kappa_{vpq} + \nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} + 4 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} - 4 T_{pq}{}^l \kappa_{lmn} \\ = \;& J_q{}^s J_p{}^r \nabla^{(T)}_r \kappa_{smn} + \nabla^{(T)}_p \kappa_{qmn} \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

Die linke Seite von (3.5.18) ist J-anti-invariant, die rechte Seite ist J-invariant in p und q.
Für die rechte Seite von (3.5.18) gilt

$$\begin{aligned} & J_j{}^q J_i{}^p J_q{}^s J_p{}^r \nabla^{(T)}_r \kappa_{smn} + \nabla^{(T)}_p \kappa_{qmn} J_i{}^p J_j{}^q \\ = \;& (-\delta_j{}^s)(-\delta_i{}^r) \nabla^{(T)}_r \kappa_{smn} + \nabla^{(T)}_p \kappa_{qmn} J_i{}^p J_j{}^q && (3.5.19) \\ = \;& \nabla^{(T)}_i \kappa_{jmn} + \nabla^{(T)}_p \kappa_{qmn} J_i{}^p J_j{}^q\ . && (3.5.20) \end{aligned}$$

Für die linke Seite von (3.5.18) gilt

$$\begin{aligned} & J_j{}^q J_i{}^p J_n{}^v J_m{}^u \nabla^{(T)}_u \kappa_{vpq} + 4 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} J_i{}^p J_j{}^q - 4 T_{pq}{}^l \kappa_{lmn} J_i{}^p J_j{}^q \\ = \;& -J_n{}^v J_m{}^u \nabla^{(T)}_u \kappa_{vij} - 4 T_{mn}{}^l \kappa_{lij} + 4 T_{ij}{}^l \kappa_{lmn}\ , \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

dabei wurde im letzten Schritt folgendermaßen vorgegangen:
mit

$$\kappa_{qv}{}^l J_n{}^v \;=\; J_v{}^l \kappa_{qn}{}^v \tag{3.5.22}$$

erhält man

$$\nabla^{(T)}_u \kappa_{vpq} J_i{}^p J_j{}^q \;=\; -\nabla^{(T)}_u \kappa_{vi}{}^p \underbrace{J_{pq} J_j{}^q}_{g_{pj}} \tag{3.5.23}$$

$$\;=\; -\nabla^{(T)}_u \kappa_{vij} \;. \tag{3.5.24}$$

Es folgt also

$$J_q{}^s J_p{}^r \nabla^{(T)}_r \kappa_{smn} + \nabla^{(T)}_p \kappa_{qmn} \;=\; 0 \;, \tag{3.5.25}$$

und das beendet den Beweis. □

Lemma 3.5.2 *Sei die* SU(3)*-Mannigfaltigkeit von der Klasse quasi-Kähler. Genau dann, wenn der Riemann-Tensor aus* $\mathfrak{G}_2$ *ist, gilt*

$$\nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} \;=\; \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} \;. \tag{3.5.26}$$

Beweis:
Aus (3.5.6) und (3.5.7) folgt zunächst die Äquivalenz

$$\mathfrak{D}^{(T)}_{pqmn} \;=\; \mathfrak{D}^{(T)}_{unrq} J_m{}^u J_p{}^r \tag{3.5.27}$$

⇔

$$R^{(\Gamma)}_{mnpq} - R^{(\Gamma)}_{uvpq} J_m{}^u J_n{}^v \;=\; R^{(\Gamma)}_{unrq} J_m{}^u J_p{}^r + R^{(\Gamma)}_{unps} J_m{}^u J_q{}^s \;. \tag{3.5.28}$$

Die rechte Seite von (3.5.27) wird nun wie folgt ausgeschrieben:

$$\nabla^{(T)}_u \kappa_{nrq} J_m{}^u J_p{}^r - \underbrace{\nabla^{(T)}_n \kappa_{urq} J_m{}^u J_p{}^r}_{\mathrm{II}} + 2\, \underbrace{J_m{}^u T_{un}{}^l \kappa_{lrq} J_p{}^r}_{\mathrm{III}} \tag{3.5.29}$$

$$= \nabla^{(T)}_u \kappa_{vpq} J_m{}^u J_n{}^v + \nabla^{(T)}_n \kappa_{mpq} + 2 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} \tag{3.5.30}$$

$$= \nabla^{(T)}_u \kappa_{vpq} J_m{}^u J_n{}^v + \nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} + 4 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} - \mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} \tag{3.5.31}$$

Dabei wurde auf Term II aus (3.5.29) die Identität (3.5.13) angewendet und auf Term III die Identität (3.5.14). Durch Einsetzen der Definition $\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq}$ in (3.5.30) ergibt sich dann (3.5.31). Aus (3.5.31) folgt, daß unter Voraussetzung von (3.5.28) die folgende Identität erfüllt ist:

$$\mathfrak{D}^{(T)}_{pqmn} \;=\; \nabla^{(T)}_u \kappa_{vpq} J_m{}^u J_n{}^v + \nabla^{(T)}_m \kappa_{npq} + 4 T_{mn}{}^l \kappa_{lpq} - \mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} \tag{3.5.32}$$

Wegen $\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}_3$ liegt der in diesem Lemma vorausgesetzte Riemann-Tensor auch in $\mathfrak{G}_3$ und es folgt mit (3.5.11) aus (3.5.32)

$$2\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} - 4T_{mn}{}^{l}\kappa_{lpq} \;=\; \nabla^{(T)}_{u}\kappa_{vpq}J_m{}^{u}J_n{}^{v} + \nabla^{(T)}_{m}\kappa_{npq}\;. \qquad (3.5.33)$$

Die linke Seite von (3.5.33) ist J-anti-invariant in m und n, denn es ist offensichtlich

$$2\mathfrak{D}^{(T)}_{uvpq}J_m J_n{}^{v} - 4T_{uv}{}^{l}\kappa_{lpq}J_m J_n{}^{v} \;=\; -2\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} + 4T_{mn}{}^{l}\kappa_{lpq}\;. \qquad (3.5.34)$$

Die rechte Seite von (3.5.33) ist J-invariant in m und n, in Analogie zur rechten Seite von (3.5.18). Beide Seiten von (3.5.33) verschwinden somit, woraus die Behauptung (3.5.26) folgt.
Ist umgekehrt (3.5.26) erfüllt, so ergibt sich mit der Definition von $\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} &= 2T_{mn}{}^{l}\kappa_{lpq} && (3.5.35)\\
&= 2T_{un}{}^{l}\kappa_{lrq}J_m J_r{}^{p} && (3.5.36)\\
&= \nabla^{(T)}_{u}\kappa_{nrq}J_m{}^{u}J_p{}^{r} - \underbrace{\nabla^{(T)}_{u}\kappa_{nrq}J_m{}^{u}J_n{}^{v}}_{\mathrm{II}} &&\\
&\quad +2T_{un}{}^{l}\kappa_{lrq}J_m J_r{}^{p} && (3.5.37)\\
&= \nabla^{(T)}_{u}\kappa_{vrq}J_m{}^{u}J_p{}^{r} - \nabla^{(T)}_{n}\kappa_{urq}J_m{}^{u}J_n{}^{v} &&\\
&\quad +2T_{un}{}^{l}\kappa_{lrq}J_m J_r{}^{p} && (3.5.38)\\
&= \mathfrak{D}^{(T)}_{unrq}J_m{}^{u}J_p{}^{r}\;. && (3.5.39)
\end{aligned}$$

In (3.5.35) wurde (3.5.14) benutzt und auf Term II von (3.5.37) wurde (3.5.26) angewendet. Das ist aber gerade (3.5.27), was äquivalent zu (3.5.28), also zur zweiten Krümmungsbedingung von Gray ist. Das macht den Beweis komplett. □

Lemma 3.5.3 *Sei die* SU(3)*-Mannigfaltigkeit von der Klasse quasi-Kähler. Ist der Riemann-Tensor aus* $\mathfrak{G}_3$ *, so gilt für den* SU(3)*-Krümmungstensor*

$$R^{(T)}_{uvpq}J_m{}^{u}J_n{}^{v} \;=\; R^{(T)}_{mnpq}\;. \qquad (3.5.40)$$

Beweis:
Mit der Definition von $\mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq}$ schreibt sich der SU(3)-Krümmungstensor (3.2.2):

$$R^{(T)}_{mnpq} \;=\; R^{(\Gamma)}_{mnpq} + \mathfrak{D}^{(T)}_{mnpq} - \kappa_{nq}{}^{l}\kappa_{mpl} + \kappa_{mq}{}^{l}\kappa_{npl} \qquad (3.5.41)$$

Mit (3.5.11) folgt daraus

$$R^{(T)}_{mnpq} - R^{(T)}_{pqmn} = -\kappa_{nq}{}^{l}\kappa_{mpl} + \kappa_{mq}{}^{l}\kappa_{npl} + \kappa_{qn}{}^{l}\kappa_{pml} - \kappa_{pn}{}^{l}\kappa_{qml} \ . \tag{3.5.42}$$

Durch Anwenden von J in m und n (3.5.42) ergibt sich

$$\begin{aligned} R^{(T)}_{uvpq}J_m{}^u J_n{}^v - R^{(T)}_{pquv}J_m{}^u J_n{}^v &= -\kappa_{vq}{}^{l}\kappa_{upl}J_m{}^u J_n{}^v + \kappa_{uq}{}^{l}\kappa_{vpl}J_m{}^u J_n{}^v \\ &\quad +\kappa_{qv}{}^{l}\kappa_{pul}J_m{}^u J_n{}^v - \kappa_{pv}{}^{l}\kappa_{qul}J_m{}^u J_n{}^v \ . \end{aligned} \tag{3.5.43}$$

Davon wird jeweils links und rechts $R^{(T)}_{mnpq}$ subtrahiert, so daß folgt:

$$\begin{aligned} R^{(T)}_{uvpq}J_m{}^u J_n{}^v - R^{(T)}_{mnpq} &= R^{(T)}_{pquv}J_m{}^u J_n{}^v \underbrace{-\kappa_{vq}{}^{l}\kappa_{upl}J_m{}^u J_n{}^v + \kappa_{uq}{}^{l}\kappa_{vpl}J_m{}^u J_n{}^v}_{\mathrm{II}} \\ &\quad \underbrace{+\kappa_{qv}{}^{l}\kappa_{pul}J_m{}^u J_n{}^v - \kappa_{pv}{}^{l}\kappa_{qul}J_m{}^u J_n{}^v}_{\mathrm{III}} \underbrace{-R^{(T)}_{mnpq}}_{\mathrm{IV}} \end{aligned} \tag{3.5.44}$$

$$\begin{aligned} &= R^{(T)}_{pqmn} - \kappa_{nq}{}^{l}\kappa_{mpl} + \kappa_{mq}{}^{l}\kappa_{npl} \\ &\quad +\kappa_{qn}{}^{l}\kappa_{pml} - \kappa_{pn}{}^{l}\kappa_{qml} \\ &\quad -R^{(T)}_{pqmn} + \kappa_{nq}{}^{l}\kappa_{mpl} - \kappa_{mq}{}^{l}\kappa_{npl} \\ &\quad -\kappa_{qn}{}^{l}\kappa_{pml} + \kappa_{pn}{}^{l}\kappa_{qml} \end{aligned} \tag{3.5.45}$$

$$= 0$$

Um von (3.5.44) zu (3.5.45) zu gelangen, wurde auf Term II aus (3.5.44) die quasi-Kähler Bedingung angewendet, auf Term III (3.5.22) angewendet und Term IV mit (3.5.42) ausgedrückt. Das ist die Behauptung des Lemmas. □

Mit diesen drei Lemmata ist nun der Beweis von Satz 3.5.1 möglich:
Es wird zunächst $\nabla^{(T)}_m$ von links auf (3.5.1) angewendet:

$$J_n{}^k\nabla^{(T)}_m\nabla^{(T)}_k\kappa_{lqw}J_p{}^l + \nabla^{(T)}_m\nabla^{(T)}_n\kappa_{pqr} = 0 \tag{3.5.46}$$

Austauschen von m durch $J_n{}^t$ und n durch $J_m{}^s$ führt dann auf

$$J_s{}^k J_m{}^s J_n{}^t\nabla^{(T)}_t\nabla^{(T)}_k\kappa_{lqr}J_p{}^l + J_m{}^s J_n{}^t\nabla^{(T)}_t\nabla^{(T)}_s\kappa_{pqr} = 0 \tag{3.5.47}$$

$$(-\delta_m{}^k)J_n{}^t\nabla^{(T)}_t\nabla^{(T)}_k\kappa_{lqr}J_p{}^l + J_m{}^s J_n{}^t\nabla^{(T)}_t\nabla^{(T)}_s\kappa_{pqr} = 0 \tag{3.5.48}$$

$$-J_n{}^t\nabla^{(T)}_t\nabla^{(T)}_m\kappa_{lqr}J_p{}^l + J_m{}^s J_n{}^t\nabla^{(T)}_t\nabla^{(T)}_s\kappa_{pqr} = 0 \ . \tag{3.5.49}$$

Addieren von (3.5.46) und (3.5.49) ergibt

$$\begin{aligned}
&{J_n}^k \nabla_m^{(T)} \nabla_k^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l - {J_n}^k \nabla_k^{(T)} \nabla_m^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l \\
&+\nabla_m^{(T)} \nabla_n^{(T)} \kappa_{pqr} + {J_m}^s {J_n}^k \nabla_k^{(T)} \nabla_s^{(T)} \kappa_{pqr} \quad = \quad 0 \qquad (3.5.50)
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&-(-{J_n}^k \nabla_m^{(T)} \nabla_k^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l + {J_n}^k \nabla_k^{(T)} \nabla_m^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l) \\
= \quad &\nabla_m^{(T)} \nabla_n^{(T)} \kappa_{pqr} + {J_m}^s {J_n}^k \nabla_k^{(T)} \nabla_s^{(T)} \kappa_{pqr} \ . \qquad (3.5.51)
\end{aligned}$$

Die Ricci-Identität (3.1.1) lässt sich auf κ fortsetzen:

$$\begin{aligned}
[\nabla_m^{(T)}, \nabla_n^{(T)}] \kappa_{pqr} \quad = \quad &\underbrace{-{R_{mnp}^{(T)}}^v \kappa_{vqr} - {R_{mnq}^{(T)}}^v \kappa_{pvr} - {R_{mnr}^{(T)}}^v \kappa_{pqv}}_{\equiv -\tilde{R}_{mn}^{(T)} \kappa_{pqr}} \\
&-2{T_{mn}}^t \nabla_t \kappa_{pqr} \qquad (3.5.52)
\end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht soll im folgenden die in (3.5.52) eingeführte Abkürzung $\tilde{R}_{mn}^{(T)} \kappa_{pqr} := -{R_{mnp}^{(T)}}^v \kappa_{vqr} - {R_{mnq}^{(T)}}^v \kappa_{pvr} - {R_{mnr}^{(T)}}^v \kappa_{pqv}$ benutzt werden. Damit ergibt sich dann aus (3.5.51)

$$\begin{aligned}
&{J_n}^k \tilde{R}_{mk}^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l + 2{J_n}^k {T_{mk}}^t \nabla_t^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l \\
= \quad &\nabla_m^{(T)} \nabla_n^{(T)} \kappa_{pqr} + {J_m}^s {J_n}^k \nabla_k^{(T)} \nabla_s^{(T)} \kappa_{pqr} \ . \qquad (3.5.53)
\end{aligned}$$

Durch Antisymmetrisieren von (3.5.53) in m und n erhält man

$$\begin{aligned}
&{J_n}^k \tilde{R}_{mk}^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l + 2{J_n}^k {T_{mk}}^t \nabla_t^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l \\
&-({J_m}^k \tilde{R}_{nk}^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l + 2{J_m}^k {T_{nk}}^t \nabla_t^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l) \qquad (3.5.54) \\
= \quad &\nabla_m^{(T)} \nabla_n^{(T)} \kappa_{pqr} + {J_m}^s {J_n}^k \nabla_k^{(T)} \nabla_s^{(T)} \kappa_{pqr} \\
&-(\nabla_n^{(T)} \nabla_m^{(T)} \kappa_{pqr} + {J_m}^s {J_n}^k \nabla_s^{(T)} \nabla_k^{(T)} \kappa_{pqr}) \qquad (3.5.55)
\end{aligned}$$

und das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&{J_n}^k \tilde{R}_{mk}^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l + {J_m}^k \tilde{R}_{kn}^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l \\
&+2({J_n}^k {T_{mk}}^t \nabla_t^{(T)} - {J_m}^k {T_{kn}}^t) \nabla_t^{(T)} \kappa_{lqr} {J_p}^l \qquad (3.5.56) \\
= \quad &(\nabla_m^{(T)} \nabla_n^{(T)} \kappa_{pqr} - \nabla_n^{(T)} \nabla_m^{(T)} \kappa_{pqr}) \\
&-({J_m}^s {J_n}^k \nabla_s^{(T)} \nabla_k^{(T)} \kappa_{pqr} - {J_n}^k {J_m}^s \nabla_k^{(T)} \nabla_s^{(T)} \kappa_{pqr}) \qquad (3.5.57) \\
= \quad &-\tilde{R}_{mn}^{(T)} \kappa_{pqr} - 2{T_{mn}}^t \nabla_t^{(T)} \kappa_{pqr} \\
&+{J_m}^s {J_n}^k \tilde{R}_{sk}^{(T)} \kappa_{pqr} + 2{J_m}^s {J_n}^k {T_{sk}}^t \nabla_t^{(T)} \kappa_{pqr} \ . \qquad (3.5.58)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
& J_n{}^k \tilde{R}^{(T)}_{mk} \kappa_{lqr} J_p{}^l + \underbrace{J_m{}^k \tilde{R}^{(T)}_{kn} \kappa_{lqr} J_p{}^l}_{-J_n{}^k \tilde{R}^{(T)}_{mk}} && (3.5.59)\\
& +2(J_n{}^k T_{mk}{}^t \nabla^{(T)}_t - J_m{}^k T_{kn}{}^t) \nabla^{(T)}_t \kappa_{lqr} J_p{}^l \\
= \; & -\tilde{R}^{(T)}_{mn} \kappa_{pqr} + J_m{}^s J_n{}^k \tilde{R}^{(T)}_{sk} \kappa_{pqr} \\
& -2T_{mn}{}^t \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} + 2 J_m{}^s J_n{}^k T_{sk}{}^t \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} && (3.5.60)\\
= \; & J_m{}^s J_n{}^k \tilde{R}^{(T)}_{sk} \kappa_{pqr} - \tilde{R}^{(T)}_{mn} \kappa_{pqr} \\
& +2(J_m{}^s J_n{}^k T_{sk}{}^t - T_{mn}{}^t) \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} \; . && (3.5.61)
\end{aligned}
$$

Wird in (3.5.61) Lemma 3.5.3 angewendet, woraus auch

$$
J_m{}^k R^{(T)}_{knpq} \;\; = \;\; -J_n{}^k R^{(T)}_{mkpq} \qquad (3.5.62)
$$

folgt und was in (3.5.59) eingesetzt wurde, so erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
& 2(J_n{}^k T_{mk}{}^t - J_m{}^k T_{kn}{}^t) \nabla^{(T)}_t \kappa_{lqr} J_p{}^l \\
= \; & 2(J_m{}^s J_n{}^k T_{sk}{}^t - T_{mn}{}^t) \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} \; . && (3.5.63)
\end{aligned}
$$

Mit $J_m{}^s T_{sn}{}^t = -J_s{}^t T_{mn}{}^s$ und $J_n{}^k T_{mk}{}^t = -J_k{}^t T_{mn}{}^k$ [Nag1] folgt aus (3.5.51)

$$
\begin{aligned}
& (-J_k{}^t T_{mn}{}^k - J_k{}^t T_{mn}{}^k) \nabla^{(T)}_t \kappa_{lqr} J_p{}^l \\
= \; & ((-1)^2 J_s{}^k J_k{}^t T_{mn}{}^s - T_{mn}{}^t) \kappa_{lqr} J_p{}^l && (3.5.64)\\
= \; & (-T_{mn}{}^t - T_{mn}{}^t) \kappa_{lqr} J_p{}^l \; , && (3.5.65)
\end{aligned}
$$

woraus weiter

$$
J_k{}^t T_{mn}{}^k \nabla^{(T)}_t \kappa_{lqr} J_p{}^l \;\; = \;\; T_{mn}{}^t \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} \qquad (3.5.66)
$$

folgt. Mit Lemma 3.5.1 ist aber auch

$$
J_k{}^t T_{mn}{}^k \nabla^{(T)}_t \kappa_{lqr} J_p{}^l \;\; = \;\; -T_{mn}{}^t \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} \; , \qquad (3.5.67)
$$

so daß die Behauptung

$$
T_{mn}{}^t \nabla^{(T)}_t \kappa_{pqr} \;\; = \;\; 0 \qquad (3.5.68)
$$

folgt.
Wird nun umgekehrt κ als $\nabla^{(T)}$-parallel vorausgesetzt, so ist (3.5.26) trivialerweise erfüllt und mit Lemma 3.5.2 folgt, daß der Riemann-Tensor die zweite Krümmungsbedingung von Gray erfüllt und somit auch in $\mathfrak{G}_3$ liegt. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

3.6 Ricci-Tensor spezieller halb-flacher Mannigfaltigkeiten

In dem auf die Form (3.3.66) gebrachten Komponenten des Ricci-Tensors treten noch Terme der Form $\nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}} T^{\bar{\gamma}}{}_{\alpha\beta}$ auf, die Komponenten der Gestalt (3.3.27) beinhalten Terme der Form $\nabla^{(T)}_{\delta} \kappa_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\delta}$. Für die speziellen halb-flachen Mannigfaltigkeiten, wie sie in [Gur1] behandelt und physikalisch motiviert werden, ist es möglich, die kovarianten Ableitungen von κ der obigen Form zu berechnen. Es erscheint aber nicht offensichtlich zu einem Endergebnis zu gelangen, in dem alle kovarianten Ableitungen durch Linearkombinationen von quadratischen Termen in T bzw. κ mit reellen Indizes ausgedrückt werden können.

3.6.1 Voraussetzungen

Vorausgesetzt sei eine spezielle halb-flache Mannigfaltigkeit, welche im Zusammenhang der verallgemeinerten String-Kompaktifizierung auftritt [Gur1], [Gur2]. In diesem speziellen Fall ist es möglich, die SU(3)-invarianten Formen Ω und J, sowie deren Differentiale $d\Omega$ und dJ mit harmonischen Basis-Formen in Beziehung zu setzen, die auf Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten existieren. Die Dimensionen der Räume der harmonischen Formen sind auf der Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit durch die Hodge-Zahlen bestimmt und durch den Hodge-Diamond dargestellt (siehe Abschnitt 2.5). Dabei sind nur die Hodge-Zahlen h_{11} und h_{21} unbestimmt. Im folgenden werden die zur Berechnung der kovarianten Ableitungen von κ benötigten Beziehungen gemäß des Formalismus aus [Gur1] zusammengestellt.
ω_i , $i = 1, ..., h^{(1,1)}(Y)$ und (α_A, β^A) , $A = 0, ..., h^{(1,2)}(Y)$ bezeichnen dabei auf der Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit Y harmonische Basen der Räume der harmonischen (1,1)-Formen $H^{(1,1)}(Y)$ und harmonischen 3-Formen $H^3(Y)$. In dem in [Gur1] benutzten Formalismus gelten folgende Beziehungen:

$$J = v^i \omega_i \tag{3.6.1}$$

$$\Omega = z^A \alpha_A - \mathcal{F}_A \beta^A \tag{3.6.2}$$

Dabei sind v^i skalare Felder, $z^A := (1, z^a)$, $a = 1, ..., h^{(1,2)}(Y)$ und $\mathcal{F}_A$ Parameter, die in [Can1] definiert sind, wobei die Parameter $\mathcal{F}_A$ von den z^a abhängen können. Es gilt:

$$*J = 4\mathcal{K} g_{ij} \nu^i \tilde{\omega}^j \tag{3.6.3}$$

$$*\tilde{\omega}^i = \frac{1}{4\mathcal{K}} g^{ij} \omega \tag{3.6.4}$$

g^{ij} ist eine in [Gur1] definierte Metrik und $\mathcal{K}$ bezeichnet das dort angegebene Kählerpotential. ν^i sind skalare Felder, analog zu den v^i. Es gilt:

$$d\Omega = e_i\tilde{\omega}^i \tag{3.6.5}$$

und

$$dJ = v^i e_i \beta^0 \tag{3.6.6}$$

mit den konstanten Parametern e_i. Weiterhin ist

$$d\omega_i = e_i\beta^0 \tag{3.6.7}$$

und

$$d\tilde{\omega}_i = 0 \ .$$

Die Hodge-duale Basis zu (α_A, β^A) ist gegeben durch

$$*\alpha_A = A_A{}^B\alpha_B + B_{AB}\beta^B \tag{3.6.8}$$

und

$$*\beta^A = C^{AB}\alpha_B + D^A{}_B\beta^B \ . \tag{3.6.9}$$

Die Komponenten $A_A{}^B$, B_{AB}, C^{AB} und $D^A{}_B$ der Matrizen A, B, C und D werden in [Suz] und [Cer] berechnet.
Auf der Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit ist auch $(\Omega, \chi_a, \bar{\Omega}, \bar{\chi}_a)$ eine Basis von $H^3(Y)$ mit den (3,0)-Formen Ω und den (2,1)-Formen χ_a auf Y [Gur2]. Damit ist

$$\beta^A = \tilde{f}^A\Omega + \tilde{f}^{Aa}\chi_a + h.c. \tag{3.6.10}$$

$$\alpha_A = f_A\Omega + f_A{}^a\chi_a + h.c. \ . \tag{3.6.11}$$

3.6.2 Berechnung der kovarianten Ableitungen

Zunächst werden die Terme $\nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}}(T_{1\oplus 2})^{\bar{\gamma}}{}_{\alpha\beta}$ berechnet:
Mit (3.3.33) und (2.8.2) ist

$$\begin{aligned}\nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}}(T_{1\oplus 2})^{\bar{\gamma}}{}_{\alpha\beta} &= \nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}}((F^{(2,2)})^{\bar{\gamma}\bar{\alpha}\gamma\alpha}\Omega_{\gamma\alpha\beta}) &(3.6.12)\\ &= (\nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}}(F^{(2,2)})^{\bar{\gamma}\bar{\alpha}\gamma\alpha})\Omega_{\gamma\alpha\beta} \ . &(3.6.13)\end{aligned}$$

Wegen der festliegenden Indexstruktur in (3.6.13) kann direkt zu reellen Indizes übergegangen werden. Es ist also die kovariante Ableitung von $F^{(2,2)}$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}\nabla_p^{(T)}(F^{(2,2)})^{pmrs} &= \nabla_p^{(\Gamma)}(F^{(2,2)})^{pmrs} + \kappa_{pl}{}^m(F^{(2,2)})^{plrs} + \kappa_{pl}{}^r(F^{(2,2)})^{pmls} \\ &\quad + \kappa_{pl}{}^s(F^{(2,2)})^{pmrl} \qquad (3.6.14)\end{aligned}$$

Mit (3.3.44) ist

$$\nabla_p^{(\Gamma)}(F^{(2,2)})^{pmrs} = -\frac{1}{3}(d^\dagger F^{(2,2)})^{mrs} . \qquad (3.6.15)$$

Aus (3.6.14) ergibt sich dann insgesamt

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar\gamma}^{(T)}(T_{1\oplus 2})^{\bar\gamma}{}_{\alpha\beta} &= (-\frac{1}{3}(d^\dagger F^{(2,2)})^{\bar\alpha\rho\sigma} + \kappa_{\bar\gamma\bar\lambda}{}^{\bar\alpha}(F^{(2,2)})^{\bar\gamma\bar\lambda\rho\sigma} + \kappa_{\bar\gamma\lambda}{}^{\rho}(F^{(2,2)})^{\bar\gamma\bar\alpha\lambda\sigma} \\ &\quad + \kappa_{\bar\gamma\lambda}{}^{\sigma}(F^{(2,2)})^{\bar\gamma\bar\alpha\rho\sigma})\Omega_{\rho\sigma\beta} . \qquad (3.6.16)\end{aligned}$$

Die Ko-Ableitung $(d^\dagger F^{(2,2)})^{mrs}$ von $F^{(2,2)}$ lässt sich nun mittels (3.6.5) berechnen. Wegen der festliegenden Indexstruktur von $F^{(2,2)}$ gilt

$$\begin{aligned}(d^\dagger F^{(2,2)})^{\bar\alpha\rho\sigma} &= (d^\dagger F^{(2,2)})^{mrs} \qquad (3.6.17)\\ &= \frac{1}{4 \parallel \Omega \parallel^2} e_i (d^\dagger \tilde\omega^i)^{mrs} \qquad (3.6.18)\\ &= \frac{1}{4 \parallel \Omega \parallel^2} e_i (*d*\tilde\omega^i)^{mrs} , \qquad (3.6.19)\end{aligned}$$

in (3.6.19) wurde dabei (3.3.45) benutzt. Einsetzen von (3.6.4) für $*\tilde\omega^i$ in (3.6.19) führt dann auf

$$(d^\dagger F^{(2,2)})^{mrs} = \frac{1}{4 \parallel \Omega \parallel^2} e_i (*(d(\frac{1}{4\mathcal{K}} g^{ij}\omega_j)))^{mrs} . \qquad (3.6.20)$$

Durch Einsetzen von (3.6.7) für $d\omega_j$ in (3.6.20) erhält man

$$\begin{aligned}(d^\dagger F^{(2,2)})^{mrs} &= \frac{1}{16\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i g^{ij} (*(e_j \beta^0))^{mrs} \qquad (3.6.21)\\ &= \frac{1}{16\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} (C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B\beta^B)^{mrs} . \qquad (3.6.22)\end{aligned}$$

Dabei wurde in (3.6.22) das Hodge-Dual von β^0 gemäß (3.6.9) berechnet. Wegen (3.6.17) lässt sich (3.6.22) in (3.6.16) einsetzen. Wird dann auch berücksichtigt, daß die Komponenten von κ mit unterschiedlicher Holomorphie in den letzten beiden Indizes aufgrund der halb-Flachheits-Bedingung verschwinden, ergibt sich folgendes Ergebnis

$$\nabla^{(T)}_{\bar{\gamma}}(T_{1\oplus 2})^{\bar{\gamma}}{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{48 \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} (C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B\beta^B)_\alpha{}^{\rho\sigma}\Omega_{\rho\sigma\beta} \; . \tag{3.6.23}$$

Es sind nun noch die Terme $\nabla^{(T)}_\gamma(\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma$ zu untersuchen, von denen die Komponenten (3.3.27) des Ricci-Tensors abhängen. Anders als in den oben berechneten $\nabla^{(T)}$-Termen von (3.3.26), wo nur Komponenten von κ aus $W_1 \oplus W_2$ auftraten und sich alle Ausdrücke auf $F^{(2,2)}$ zurückführen ließen, wirkt $\nabla^{(T)}$ in (3.3.27) auf Komponenten von κ aus W_3. Diese sind nach Tabelle 2.8.2 auf Seite 34 durch den Anteil $[(dJ)_0^{(2,1)} + (dJ)_0^{(1,2)}]$ von dJ bestimmt und mit (2.8.20) ist

$$\begin{aligned} ((dJ)_0^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma &= 2(\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\rho J_\rho{}^\gamma && (3.6.24)\\ &= 2i(\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma \; . && (3.6.25)\end{aligned}$$

In (3.6.25) wird nun der (1,2)-Anteil von (3.6.6) für $((dJ)_0^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma$ eingesetzt:

$$v^i e_i((\beta^0)^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma = 2i(\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma \tag{3.6.26}$$

Um die gewünschten kovarianten Ableitungsterme zu berechnen ist also $\nabla^{(T)}$ auf beide Seiten von (3.6.26) anzuwenden:

$$\nabla^{(T)}_\gamma(\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma = -\frac{i}{2} v^i e_i \nabla^{(T)}_\gamma((\beta^0)^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma \tag{3.6.27}$$

Es ist dann $\nabla^{(T)}_\gamma((\beta^0)^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma$ zu berechnen.
Gemäß (3.6.10) lässt sich der (1,2)-Anteil von β^0 in eine Basis harmonischer (1,2)-Formen $\chi^a := \bar{\chi}_a$ auf einer Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit entwickeln:

$$((\beta^0)^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma = c_a^{(1,2)}(\chi^a)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma \tag{3.6.28}$$

Dabei sind $c_a^{(1,2)} := \bar{\bar{f}}^{0a}$ die dazugehörigen Entwicklungskoeffizienten. Auf (3.6.28) ist $\nabla^{(T)}$ anzuwenden:

$$\begin{aligned} \nabla^{(T)}_\gamma((\beta^0)^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma &= c_a^{(1,2)}\nabla^{(T)}_\gamma(\chi^a)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma && (3.6.29)\\ &= c_a^{(1,2)}\nabla^{(T)}_p(\chi^a)_{mn}{}^p \; , && (3.6.30)\end{aligned}$$

denn für die harmonischen Basis-Formen χ^a liegt die Indexstruktur fest, so daß in (3.6.29) unmittelbar reelle Indizes eingesetzt werden können. Für diese lässt sich in der vorliegenden Form die kovariante Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned}
\nabla_p^{(T)}(\chi^a)_{mn}{}^p &= \nabla_p^{(\Gamma)}(\chi^a)_{mn}{}^p - \kappa_{pm}{}^l(\chi^a)_{ln}{}^p - \kappa_{pn}{}^l(\chi^a)_{ml}{}^p \\
&\quad +\kappa_{pl}{}^p(\chi^a)_{mn}{}^l && (3.6.31)\\
&= -\frac{1}{2}(d^\dagger\chi^a)_{mn} - \kappa_{pm}{}^l(\chi^a)_{ln}{}^p - \kappa_{pn}{}^l(\chi^a)_{ml}{}^p && (3.6.32)
\end{aligned}$$

Auf den ersten Term von (3.6.31) lässt sich (3.3.44) anwenden, der letzte Term verschwindet aufgrund der Spurlosigkeit von κ im halb-flachen Fall. Es ist also die Ko-Ableitung $d^\dagger\chi^a$ in (3.6.32) explizit zu berechnen. Nach der Formel von K.Kodaira [Tia] ist es möglich, die Basisformen χ^a mit Ω aus (2.5.1) in Beziehung zu setzen:

$$(\frac{\partial\Omega}{\partial z^a})_{mnp} = k^a(\Omega)_{mnp} + (\chi^a)_{mnp} \qquad (3.6.33)$$

Dabei sind z^a die Parameter aus (3.6.2). Von diesen Parametern können die in (3.6.33) auftretenden Koeffizienten k^a abhängen, aber nicht von der Mannigfaltigkeit [Can1]. Anwenden der Ko-Ableitung ergibt

$$(d^\dagger\frac{\partial\Omega}{\partial z^a})_{mn} = k^a(d^\dagger\Omega)_{mn} + (d^\dagger X^a)_{mn}\ . \qquad (3.6.34)$$

Wird vorausgesetzt, daß $d^\dagger$ und $\frac{\partial}{\partial z^a}$ kommutieren, verschwindet die linke Seite von (3.6.34), da davon ausgegangen wird, daß $d^\dagger\Omega$ nicht von den Parametern z^a abhängt. Es ist somit

$$(d^\dagger\chi^a)_{mn} = -k^a(d^\dagger\Omega)_{mn}\ . \qquad (3.6.35)$$

Die Ko-Ableitung von $d^\dagger\Omega$ lässt sich berechnen. Mit (3.3.45) und $*\Omega = -i\Omega$ [Can2] ist

$$\begin{aligned}
(d^\dagger\Omega)_{mn} &= (*d(*\Omega))_{mn} && (3.6.36)\\
&= -i(*d\Omega)_{mn}\ . && (3.6.37)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3.6.5) in (3.6.37) und anschließendes Anwenden von (3.6.4) ergibt sich

$$\begin{aligned}
(d^\dagger\Omega)_{mn} &= -ie_i(*\tilde\omega^i)_{mn} && (3.6.38)\\
&= -\frac{ie_i}{4\mathcal{K}}g^{ij}(\omega_j)_{mn}\ . && (3.6.39)
\end{aligned}$$

Aus (3.6.35) erhält man mit (3.6.39)

$$(d^\dagger \chi^a)_{mn} \quad = \quad k^a \frac{ie_i}{4\mathcal{K}} g^{ij} (\omega_j)_{mn} \; . \tag{3.6.40}$$

Wird nun (3.6.40) in (3.6.32) eingesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} \nabla^{(T)}_p (\chi^a)_{mn}{}^p \quad &= \quad -\frac{1}{2} k^a \frac{ie_i}{4\mathcal{K}} g^{ij} (\omega_j)_{mn} - \kappa_{pm}{}^l (\chi^a)_{ln}{}^p \\ & \quad -\kappa_{pn}{}^l (\chi^a)_{ml}{}^p \; . \end{aligned} \tag{3.6.41}$$

Einsetzen von (3.6.41) in (3.6.30) ergibt

$$\nabla^{(T)}_\gamma ((\beta^0)^{(1,2)})_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma \quad = \quad -\frac{ie_i}{8\mathcal{K}} k^a c^{(1,2)}_a g^{ij} (\omega_j)_{\alpha\bar{\beta}} \; , \tag{3.6.42}$$

wobei die halb-Flachheits-Bedingung berücksichtigt wurde, weshalb die Terme, die Komponenten von κ mit unterschiedlicher Holomorphie in den letzten beiden Indizes enthalten, verschwinden. Durch Einsetzen von (3.6.42) in (3.6.27) erhält man als Ergebnis

$$\nabla^{(T)}_\gamma (\kappa_3)_{\alpha\bar{\beta}}{}^\gamma \quad = \quad -\frac{1}{16\mathcal{K}} e_i e_j v^i k^a c^{(1,2)}_a (\omega^j)_{\alpha\bar{\beta}} \; . \tag{3.6.43}$$

Insgesamt lässt sich folgendes Ergebnis für die Komponenten des Ricci-Tensors angeben:

$$\begin{aligned} R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} \quad &= \quad -\frac{1}{24\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} ((C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B \beta^B)_\alpha{}^{\rho\sigma} \Omega_{\rho\sigma\beta} \\ & \quad +(C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B \beta^B)_\beta{}^{\rho\sigma} \Omega_{\rho\sigma\alpha}) \\ & \quad -(\kappa_3)_\alpha{}^{\rho\gamma} (\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\gamma\beta} - (\kappa_3)_\beta{}^{\rho\gamma} (\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\gamma\alpha} + 2(\kappa_3)_{\bar{\gamma}\alpha}{}^{\bar{\rho}} (\kappa_3)_{\bar{\rho}\beta}{}^{\bar{\gamma}} \end{aligned} \tag{3.6.44}$$

$$\begin{aligned} R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad &= \quad -\frac{1}{24\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} ((C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B \beta^B)_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \Omega_{\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\beta}} \\ & \quad +(C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B \beta^B)_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \Omega_{\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\alpha}}) \\ & \quad -(\kappa_3)_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\rho}\bar{\gamma}\bar{\beta}} - (\kappa_3)_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\rho}\bar{\gamma}\bar{\alpha}} + 2(\kappa_3)_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\rho} (\kappa_3)_{\rho\bar{\beta}}{}^{\gamma} \end{aligned} \tag{3.6.45}$$

und

$$\begin{aligned} R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}} \quad &= \quad -\frac{1}{8\mathcal{K}} e_i e_j v^i k^a c^{(1,2)}_a (\omega^j)_{\alpha\bar{\beta}} \\ & \quad -2(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\delta\rho} (\kappa_{1\oplus 2})^\rho{}_{\bar{\beta}}{}^\delta + 2(\kappa_{1\oplus 2})_{\delta\alpha}{}^{\bar{\rho}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\rho}\bar{\beta}}{}^\delta \\ & \quad -(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\gamma\rho} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\beta}}{}^{\gamma\rho} + (\kappa_3)_\alpha{}^{\gamma\rho} (\kappa_3)_{\bar{\beta}\gamma\rho} \; . \end{aligned} \tag{3.6.46}$$

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\beta} &= -\frac{1}{8\mathcal{K}} e_i e_j v^i k^a c_a^{(1,2)} (\omega^j)_{\bar{\alpha}\beta} \\
&\quad -2(\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\alpha}\bar{\delta}\bar{\rho}} (\kappa_{1\oplus 2})^{\bar{\rho}}{}_{\beta}{}^{\bar{\delta}} + 2(\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\delta}\bar{\alpha}}{}^{\rho} (\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\beta}{}^{\bar{\delta}} \\
&\quad -(\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\rho}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\beta}{}^{\bar{\gamma}\bar{\rho}} + (\kappa_3)_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\gamma}\bar{\rho}} (\kappa_3)_{\beta\bar{\gamma}\bar{\rho}} \; . \qquad (3.6.47)
\end{aligned}
$$

Aus (3.6.46) und (3.6.47) ergibt sich Ricci-Skalar, der auch durch (3.3.28) gegeben ist:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)} &= -2(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\gamma\delta} (\kappa_{1\oplus 2})^{\delta\alpha\gamma} + 2(\kappa_{1\oplus 2})_{\gamma\alpha\delta} (\kappa_{1\oplus 2})^{\delta\alpha\gamma} \\
&\quad -(\kappa_{1\oplus 2})_{\alpha\gamma\delta} (\kappa_{1\oplus 2})^{\alpha\gamma\delta} + (\kappa_3)_{\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta}} (\kappa_3)^{\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta}} + c.c. \; .
\end{aligned}
$$

(3.6.44) und (3.6.45) lassen sich vereinfachen. Da die Spuren $(\alpha_A)_\alpha{}^{\alpha\sigma}$ und $(\beta^B)_\alpha{}^{\alpha\sigma}$ verschwinden ([Suz]), gehören die (1,2)-Formen α_A und β^B sowie die komplex Konjugierten zu den SU(3)-Darstellungen $[\mathbf{6}]$ sowie $[\bar{\mathbf{6}}]$. Das folgt in Analogie zu (2.7.33), denn die (1,2)-Formen α_A und β^B liegen in $[\mathbf{3}]\otimes[\mathbf{3}]=[\bar{\mathbf{3}}]\oplus[\mathbf{6}]$, wobei der $[\bar{\mathbf{3}}]$-Anteil verschwindet. Da Ω ein SU(3)-Singulett ist, liegen

$$
(\alpha_A)_\alpha{}^{\rho\sigma} \Omega_{\rho\sigma\beta} \quad \text{und} \quad (\beta^B)_\alpha{}^{\rho\sigma} \Omega_{\rho\sigma\beta} \qquad (3.6.48)
$$

in der Darstellung $[\mathbf{6}]\otimes[\mathbf{1}]=[\mathbf{6}]$. Da in (3.6.48) zwei freie Indizes vorkommen, müssen diese symmetrisch sein, denn der $[\mathbf{6}]$-Anteil entspricht dem symmetrischen Anteil von $[\mathbf{3}]\otimes[\mathbf{3}]$. Es ist also:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{12\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} ((C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B \beta^B)_\alpha{}^{\rho\sigma} \Omega_{\rho\sigma\beta} \\
&\quad -(\kappa_3)_\alpha{}^{\rho\gamma} (\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\gamma\beta} - (\kappa_3)_\beta{}^{\rho\gamma} (\kappa_{1\oplus 2})_{\rho\gamma\alpha} + 2(\kappa_3)_{\bar{\gamma}\alpha}{}^{\bar{\rho}} (\kappa_3)_{\bar{\rho}\beta}{}^{\bar{\gamma}}
\end{aligned} \qquad (3.6.49)
$$

Analoges gilt für die komplex konjugierten Komponenten:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= -\frac{1}{12\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} ((C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B \beta^B)_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \Omega_{\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\beta}} \\
&\quad -(\kappa_3)_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\rho}\bar{\gamma}\bar{\beta}} - (\kappa_3)_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} (\kappa_{1\oplus 2})_{\bar{\rho}\bar{\gamma}\bar{\alpha}} + 2(\kappa_3)_{\gamma\bar{\alpha}}{}^{\rho} (\kappa_3)_{\rho\bar{\beta}}{}^{\gamma}
\end{aligned} \qquad (3.6.50)
$$

4 Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Begriffe der G-Struktur auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und des Zusammenhangs auf einer G-Mannigfaltigkeit von einem mathematischen Standpunkt eingeführt. Als weiterer grundlegender Begriff wird als charakteristische Größe die intrinsische Torsion- und Kontorsion der G-Struktur definiert. Mannigfaltigkeiten mit SU(3)-Struktur werden dann als spezielle Beispiele mit den darauf definierten Zusammenhängen und Krümmungstensoren konkretisiert. Dabei wird die Zerlegung der intrinsischen Torsion- und Kontorsion in irreduzible SU(3)-Darstellungen durchgeführt und eine Klassifikation der SU(3)-Mannigfaltigkeiten erreicht. Es wird die Beziehung zwischen den Komponenten von Torsion und Kontorsion bezüglich der einzelnen Darstellungen und der Differentiale der invarianten Formen der SU(3)-Mannigfaltigkeit hergestellt. Für die spezielle Klasse der halb-flachen Mannigfaltigkeiten werden Ricci-Tensor und Ricci-Skalar berechnet, welche nur von der intrinsischen Kontorsion und ihren kovarianten Ableitungen abhängen. Der zentrale Punkt ist dabei, diese kovarianten Ableitungen der intrinsischen (Kon-) Torsion zu berechnen. Es kann gezeigt werden, daß für bestimmte Klassen von SU(3)-Mannigfaltigkeiten Parallelität der intrinsischen (Kon-) Torsion bezüglich eines SU(3)-Zusammenhangs erfüllt ist. Das gilt allgemein im Fall einer nearly-Kähler Mannigfaltigkeit, welche auch in der größeren Klasse der halb-flachen Mannigfaltigkeiten enthalten ist. In der Klasse der quasi-Kählerschen Mannigfaltigkeiten gilt die Parallelität der intrinsischen (Kon-)Torsion bezüglich des SU(3)-Zusammenhangs für einen speziellen Fall; und zwar genau dann, wenn der Riemann-Tensor mit der fast-komplexen Struktur vertauscht, d.h. wenn die dritte Krümmungsbedingung von Gray erfüllt ist. Diese spezielle Bedingung ist im allgemeinen aber nicht für die halb-flache Mannigfaltigkeit gültig.
Eine Berechnung der in der im Ricci-Tensor speziellen Form auftretenden kovarianten Ableitungen ist für einen Spezialfall halb-flacher Mannigfaltigkeiten aber dennoch möglich. In komplexer Indexschreibweise gelingt dies mit Hilfe eines in [Gur1] eingeführten Formalismus, welcher mit der physikalischen Motivation der halb-flachen Mannigfaltigkeiten in engem Zusammenhang steht. Man gelangt so zu Ausdrücken der Komponenten des Ricci-Tensors (in komplexer Indexschreibweise), welche neben einer Linearkombination von quadratischen Termen der intrinsischen Kontorsion noch weitere, ableitungsfreie Terme enthalten, die auf den Formalismus aus [Gur1] zurückzuführen sind. Für diesen speziellen Fall von halb-flachen Mannigfaltigkeiten

lauten die Komponenten des Ricci-Tensors also explizit:

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{12\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} ((C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B\beta^B)_\alpha{}^{\rho\sigma}\Omega_{\rho\sigma\beta} \\
&\quad -(\kappa_3)_\alpha{}^{\rho\gamma}(\kappa_{1\oplus2})_{\rho\gamma\beta} - (\kappa_3)_\beta{}^{\rho\gamma}(\kappa_{1\oplus2})_{\rho\gamma\alpha} + 2(\kappa_3)_{\bar\gamma\alpha}{}^{\bar\rho}(\kappa_3)_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\bar\alpha\bar\beta} &= -\frac{1}{12\mathcal{K} \parallel \Omega \parallel^2} e_i e_j g^{ij} ((C^{0B}\alpha_B + D^0{}_B\beta^B)_{\bar\alpha}{}^{\bar\rho\bar\sigma}\Omega_{\bar\rho\bar\sigma\bar\beta} \\
&\quad -(\kappa_3)_{\bar\alpha}{}^{\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\rho\bar\gamma\bar\beta} - (\kappa_3)_{\bar\beta}{}^{\bar\rho\bar\gamma}(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\rho\bar\gamma\bar\alpha} + 2(\kappa_3)_{\gamma\bar\alpha}{}^{\rho}(\kappa_3)_{\rho\bar\beta}{}^{\gamma}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar\beta} &= -\frac{1}{8\mathcal{K}} e_i e_j v^i k^a c_a^{(1,2)} (\omega^j)_{\alpha\bar\beta} \\
&\quad -2(\kappa_{1\oplus2})_{\alpha\delta\rho}(\kappa_{1\oplus2})^\rho{}_{\bar\beta}{}^\delta + 2(\kappa_{1\oplus2})_{\delta\alpha}{}^{\bar\rho}(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\rho\bar\beta}{}^\delta \\
&\quad -(\kappa_{1\oplus2})_{\alpha\gamma\rho}(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\beta}{}^{\gamma\rho} + (\kappa_3)_\alpha{}^{\gamma\rho}(\kappa_3)_{\bar\beta\gamma\rho} \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\bar\alpha\beta} &= -\frac{1}{8\mathcal{K}} e_i e_j v^i k^a c_a^{(1,2)} (\omega^j)_{\bar\alpha\beta} \\
&\quad -2(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\alpha\bar\delta\bar\rho}(\kappa_{1\oplus2})^{\bar\rho}{}_{\beta}{}^{\bar\delta} + 2(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\delta\bar\alpha}{}^{\rho}(\kappa_{1\oplus2})_{\rho\beta}{}^{\bar\delta} \\
&\quad -(\kappa_{1\oplus2})_{\bar\alpha\bar\gamma\bar\rho}(\kappa_{1\oplus2})_{\beta}{}^{\bar\gamma\bar\rho} + (\kappa_3)_{\bar\alpha}{}^{\bar\gamma\bar\rho}(\kappa_3)_{\beta\bar\gamma\bar\rho} \ .
\end{aligned}$$

Es konnte aber nicht geklärt werden, ob sich ein geschlossener Ausdruck des Ricci-Tensors in reellen Indizes allgemein auf halb-flachen Mannigfaltigkeiten ergibt, der nur noch Linearkombinationen von quadratischen Ausdrücken der intrinsischen Kontorsion enthält.

Anhang

A Ricci-Tensor in komplexen Indizes

In diesem Anschnitt werden die Berechnungen der Komponenten $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta}$ und $R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar{\beta}}$ des Ricci-Tensors aus (3.3.24) für halb-flache Mannigfaltigkeiten in komplexen Koordinaten ausgeführt. Zunächst werden die Komponenten $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta}$ berechnet:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} \;=\; & -\frac{1}{4}\left(\nabla^{(T)}_{\alpha}\kappa_{\bar{\omega}\gamma\delta} - \nabla^{(T)}_{\bar{\omega}}\kappa_{\omega\alpha\gamma\delta} + \kappa_{\alpha\bar{\omega}}{}^{\rho}\kappa_{\rho\gamma\delta} - \kappa_{\bar{\omega}\alpha}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\bar{\rho}\gamma\delta}\right) \\
& \cdot\left(g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\bar{\lambda}\bar{\omega}\gamma\delta\bar{\sigma}\tau}J_{\bar{\sigma}\tau} + g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\bar{\lambda}\bar{\omega}\gamma\delta\sigma\bar{\tau}}J_{\sigma\bar{\tau}}\right) \\
& -\frac{1}{4}\left(\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\omega\bar{\gamma}\bar{\rho}} - \kappa_{\omega\delta}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\alpha\bar{\gamma}\bar{\rho}}\right)\left(g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\bar{\lambda}\omega\bar{\gamma}\delta\bar{\sigma}\tau}J_{\bar{\sigma}\tau} + g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\bar{\lambda}\omega\bar{\gamma}\delta\sigma\bar{\tau}}J_{\sigma\bar{\tau}}\right) \\
& -\frac{1}{4}\left(\kappa_{\alpha\bar{\delta}}{}^{\rho}\kappa_{\omega\gamma\rho} - \kappa_{\omega\bar{\delta}}{}^{\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho}\right)\left(g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\bar{\lambda}\omega\gamma\bar{\delta}\bar{\sigma}\tau}J_{\bar{\sigma}\tau} + g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\bar{\lambda}\omega\gamma\bar{\delta}\sigma\bar{\tau}}J_{\sigma\bar{\tau}}\right) \\
& +\nabla^{(T)}_{\bar{\omega}}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar{\omega}} + \kappa_{\bar{\omega}\alpha}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\bar{\rho}\beta}{}^{\bar{\omega}} \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\; & -\frac{1}{4}\left(\nabla^{(T)}_{\alpha}\kappa_{\bar{\omega}\gamma\delta} - \nabla^{(T)}_{\bar{\omega}}\kappa_{\alpha\gamma\delta} + \kappa_{\alpha\bar{\omega}}{}^{\rho}\kappa_{\rho\gamma\delta} - \kappa_{\bar{\omega}\alpha}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\bar{\rho}\gamma\delta}\right) \\
& \cdot\underbrace{\left(g_{\bar{\lambda}\beta}(-1)\epsilon^{\gamma\delta\tau\bar{\lambda}\bar{\omega}\bar{\sigma}}(-ig_{\bar{\sigma}\tau}) + g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\gamma\delta\sigma\bar{\lambda}\bar{\omega}\bar{\tau}}(ig_{\sigma\bar{\tau}})\right)}_{\mathrm{I}} \\
& -\frac{1}{4}\left(\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\omega\bar{\gamma}\bar{\rho}} - \kappa_{\omega\delta}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\alpha\bar{\gamma}\bar{\rho}}\right) \\
& \cdot\underbrace{\left(g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\omega\delta\tau\bar{\lambda}\bar{\gamma}\bar{\sigma}}(-ig_{\bar{\sigma}\tau}) + g_{\bar{\lambda}\beta}(-1)\epsilon^{\omega\delta\sigma\bar{\lambda}\bar{\gamma}\bar{\tau}}(ig_{\sigma\bar{\tau}})\right)}_{\mathrm{II}} \\
& -\frac{1}{4}\left(\kappa_{\alpha\bar{\delta}}{}^{\rho}\kappa_{\omega\gamma\rho} - \kappa_{\omega\bar{\delta}}{}^{\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho}\right) \\
& \cdot\underbrace{\left(g_{\bar{\lambda}\beta}(-1)\epsilon^{\omega\gamma\tau\bar{\lambda}\bar{\delta}\bar{\sigma}}(-ig_{\bar{\sigma}\tau}) + g_{\bar{\lambda}\beta}\epsilon^{\omega\gamma\sigma\bar{\lambda}\bar{\delta}\bar{\tau}}(ig_{\sigma\bar{\tau}})\right)}_{\mathrm{III}} \\
& +\nabla^{(T)}_{\bar{\omega}}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar{\omega}} + \kappa_{\bar{\omega}\alpha}{}^{\bar{\rho}}\kappa_{\bar{\rho}\beta}{}^{\bar{\omega}} \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

In (A.1) werden (2.3.30) und (2.3.31) für die Komponenten von J eingesetzt und die Indizes der ϵ-Tensoren umpermutiert. In (A.2) werden die Klammern I, II und III gemäß (A.7) und (A.8) berechnet. Zu (A.4) gelangt man dann durch Ausführen der δ-Symbole in (A.3). Nach Zusammenfassen und Ausnutzen der Spurlosigkeit von κ folgt schließlich (A.6).

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}(\nabla^{(T)}_\alpha \kappa^\omega{}_{\gamma\delta} - \nabla^{(T)\omega}\kappa_{\alpha\gamma\delta} + \kappa_\alpha{}^{\omega\rho}\kappa_{\rho\gamma\delta} - \kappa^\omega{}_\alpha{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\gamma\delta})(\delta^\gamma_\beta\delta^\delta_\omega - \delta^\gamma_\omega\delta^\delta_\beta) \\
&\quad -\frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_\omega{}^\gamma{}_{\bar\rho} - \kappa_{\omega\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_\alpha{}^\gamma{}_{\bar\rho})(-1)(\delta^\omega_\beta\delta^\delta_\gamma - \delta^\omega_\gamma\delta^\delta_\beta) \\
&\quad -\frac{1}{2}(\kappa_\alpha{}^{\delta\rho}\kappa_{\omega\gamma\rho} - \kappa_\omega{}^{\delta\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho})(\delta^\omega_\beta\delta^\gamma_\delta - \delta^\omega_\delta\delta^\gamma_\beta) \\
&\quad +\nabla^{(T)}_{\bar\omega}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar\omega} + \kappa_{\bar\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\omega} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}(\nabla^{(T)}_\alpha\kappa^\delta{}_{\beta\delta} - \nabla^{(T)\alpha}\kappa^\gamma{}_{\gamma\beta} - \nabla^{(T)\delta}\kappa_{\alpha\beta\delta} + \nabla^{(T)\gamma}\kappa_{\alpha\gamma\beta} \\
&\quad +\kappa_\alpha{}^{\delta\rho}\kappa_{\rho\beta\delta} - \kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\rho\gamma\beta} - \kappa^\delta{}_\alpha{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta\delta} + \kappa^\gamma{}_\alpha{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\gamma\beta} \\
&\quad +(-1)(\kappa_{\alpha\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_\beta{}^{\gamma\bar\rho} - \kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar\rho}\kappa_\gamma{}^{\gamma\bar\rho} - \kappa_{\beta\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_\alpha{}^{\gamma\bar\rho} + \kappa_{\gamma\beta}{}^{\bar\rho}\kappa_\alpha{}^{\gamma\bar\rho}) \\
&\quad +\kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\beta\gamma\rho} - \kappa_\alpha{}^{\omega\rho}\kappa_{\omega\beta\rho} - \kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho} + \kappa_\delta{}^{\delta\rho}\kappa_{\alpha\beta\rho}) \\
&\quad +\nabla^{(T)}_{\bar\omega}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar\omega} + \kappa_{\bar\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\omega} \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(\kappa_\alpha{}^{\delta\rho}\kappa_{\rho\beta\delta} + \kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\rho\beta\gamma} + \kappa_\alpha{}^{\rho\gamma}\kappa_{\gamma\beta\rho} + \kappa_\alpha{}^{\rho\omega}\kappa_{\omega\beta\rho} \\
&\quad -\kappa_{\bar\delta\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\delta} - \kappa_{\bar\gamma\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\gamma} - \kappa_\alpha{}^{\bar\gamma\bar\rho}\kappa_{\beta\bar\gamma\bar\rho} - \kappa_{\beta\bar\gamma\bar\rho}\kappa_\alpha{}^{\bar\gamma\bar\rho} \\
&\quad +\kappa_\beta{}^{\bar\gamma\bar\rho}\kappa_{\alpha\bar\gamma\bar\rho} + \kappa_{\alpha\bar\gamma\bar\rho}\kappa_\beta{}^{\bar\gamma\bar\rho} - 2\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma}) \\
&\quad +\nabla^{(T)}_{\bar\omega}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar\omega} + \kappa_{\bar\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\omega} \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

$$
= 2\nabla^{(T)}_{\bar\gamma}\kappa_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} - 2\kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\rho\beta\gamma} + 2\kappa_{\bar\gamma\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\beta}{}^{\bar\gamma} + \kappa_\alpha{}^{\bar\gamma\bar\rho}\kappa_{\beta\bar\gamma\bar\rho} - \kappa_{\alpha\bar\gamma\bar\rho}\kappa_\beta{}^{\bar\gamma\bar\rho} \qquad \text{(A.6)}
$$

Die Klammer in Term I in (A.2) berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
&(g_{\bar\lambda\beta}(-1)\epsilon^{\gamma\delta\tau\bar\lambda\bar\omega\bar\sigma}(-ig_{\bar\sigma\tau}) + g_{\bar\lambda\beta}\epsilon^{\gamma\delta\sigma\bar\lambda\bar\omega\bar\tau}(ig_{\sigma\bar\tau})) \\
&= \delta^\lambda{}_\beta(-1)(-i\epsilon^{\gamma\delta\tau}\epsilon_{\lambda\omega\sigma}(-i\delta^\sigma{}_\tau)) + \delta^\lambda{}_\beta(-i\epsilon^{\gamma\delta\sigma}\epsilon_{\lambda\omega\tau}(i\delta_\sigma{}^\tau)) \qquad \text{(A.7)} \\
&= 2(\delta^\gamma_\beta\delta^\delta_\omega - \delta^\gamma_\omega\delta^\delta_\beta)\ . \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Die Klammern II und III berechnen sich analog.

Im folgenden werden die Komponenten $R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar\beta}$ berechnet:

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar\beta} = & -\frac{1}{4}(\nabla^{(T)}_\alpha \kappa_{\omega\bar\gamma\bar\delta} - \nabla^{(T)}_\omega \kappa_{\alpha\bar\gamma\bar\delta} + \kappa_{\alpha\omega}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\gamma\bar\delta} - \kappa_{\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\gamma\bar\delta}) \\
& \cdot(g_{\lambda\bar\beta}\epsilon^{\lambda\omega\bar\gamma\bar\delta\bar\sigma\tau}J_{\bar\sigma\tau} + g_{\lambda\bar\beta}\epsilon^{\lambda\omega\bar\gamma\bar\delta\sigma\bar\tau}J_{\sigma\bar\tau}) \\
& -\frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\omega\bar\gamma\bar\rho} - \kappa_{\bar\omega\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\alpha\bar\gamma\bar\rho})(g_{\lambda\bar\beta}\epsilon^{\lambda\bar\omega\bar\gamma\delta\bar\sigma\tau}J_{\bar\sigma\tau} + g_{\lambda\bar\beta}\epsilon^{\lambda\bar\omega\bar\gamma\delta\sigma\bar\tau}J_{\sigma\bar\tau}) \\
& -\frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\bar\delta}{}^{\rho}\kappa_{\bar\omega\gamma\rho} - \kappa_{\bar\omega\bar\delta}{}^{\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho})(g_{\lambda\bar\beta}\epsilon^{\lambda\bar\omega\gamma\bar\delta\bar\sigma\tau}J_{\bar\sigma\tau} + g_{\lambda\bar\beta}\epsilon^{\lambda\bar\omega\gamma\bar\delta\sigma\bar\tau}J_{\sigma\bar\tau}) \\
& +\nabla^{(T)}_\omega\kappa_{\alpha\bar\beta}{}^{\omega} + \kappa_{\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\omega} \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{1}{2}(\nabla^{(T)}_\alpha\kappa_\omega{}^{\gamma\delta} - \nabla^{(T)}_\omega\kappa_\alpha{}^{\gamma\delta} + \kappa_{\alpha\omega}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\gamma\delta} - \kappa_{\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\gamma\delta})(\delta^\beta_\gamma\delta^\omega_\delta - \delta^\beta_\delta\delta^\omega_\gamma) \\
& -\frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa^{\omega\gamma}{}_{\bar\rho} - \kappa^{\omega}{}_{\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_\alpha{}^{\gamma}{}_{\bar\rho})(\delta^\beta_\omega\delta^\delta_\gamma - \delta^\beta_\gamma\delta^\delta_\omega) \\
& -\frac{1}{2}(\kappa_\alpha{}^{\delta\rho}\kappa^{\omega}{}_{\gamma\rho} - \kappa^{\omega\delta\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho})(-1)(\delta^\beta_\omega\delta^\gamma_\delta - \delta^\beta_\delta\delta^\gamma_\omega) \\
& +\nabla^{(T)}_\omega\kappa_{\alpha\bar\beta}{}^{\omega} + \kappa_{\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\omega} \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

Die Terme von (A.9) werden analog zu denen von (A.1) und (A.2) berechnet. Ausführen des δ-Symbols, Zusamenfassen und Berücksichtigen der Spurlosigkeit von κ in (A.10) führt schließlich auf (A.13):

$$
\begin{aligned}
R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar\beta} = & -\frac{1}{2}(-\nabla^{(T)}_\delta\kappa_\alpha{}^{\beta\delta} + \nabla^{(T)}_\gamma\kappa_\alpha{}^{\gamma\beta} \\
& +\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\beta\delta} - \kappa_{\alpha\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\gamma\beta} - \kappa_{\delta\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\beta\delta} + \kappa_{\gamma\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\gamma\beta} \\
& +\kappa_{\alpha\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa^{\beta\gamma}{}_{\bar\rho} - \kappa_{\alpha\omega}{}^{\bar\rho}\kappa^{\omega\beta}{}_{\bar\rho} - \kappa^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_\alpha{}^{\gamma}{}_{\bar\rho} \\
& (-1)(\kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa^{\beta}{}_{\gamma\rho} - \kappa^{\beta\gamma\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho} + \kappa^{\gamma\beta\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho})) \\
& +\nabla^{(T)}_\omega\kappa_{\alpha\bar\beta}{}^{\omega} + \kappa_{\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\omega} \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\delta} + \kappa_{\alpha\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\gamma} - \kappa_{\alpha\omega}{}^{\bar\rho}\kappa^{\omega}{}_{\bar\beta\bar\delta} - \kappa_{\alpha\gamma\rho}\kappa^{\gamma}{}_{\bar\beta}{}^{\rho} \\
& -\kappa_{\delta\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\beta\delta} - \kappa_{\gamma\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\beta\gamma} + \kappa_{\alpha\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa^{\beta\gamma}{}_{\bar\rho} - \kappa_\alpha{}^{\gamma}{}_{\bar\rho}\kappa_{\bar\beta\gamma}{}^{\bar\rho} \\
& -\kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\bar\beta\gamma\rho} + \kappa_{\bar\beta}{}^{\gamma\rho}\kappa_{\alpha\gamma\rho} - 2\nabla^{(T)}_\delta\kappa_{\alpha\bar\beta}{}^{\delta}) \\
& +\nabla^{(T)}_\omega\kappa_{\alpha\bar\beta}{}^{\omega} + \kappa_{\omega\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\omega} \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

$$
= 2\nabla^{(T)}_\delta\kappa_{\alpha\bar\beta}{}^{\delta} - 2\kappa_{\alpha\delta\rho}\kappa^{\delta}{}_{\bar\beta}{}^{\delta} + 2\kappa_{\delta\alpha}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\beta}{}^{\delta} - \kappa_{\alpha\gamma\rho}\kappa_{\bar\beta}{}^{\gamma\rho} + \kappa_\alpha{}^{\gamma\rho}\kappa_{\bar\beta\gamma\rho} \qquad \text{(A.13)}
$$

Auch der Ausdruck (3.3.25) für den Ricci-Skalar soll in komplexe Indexschreibweise umgerechnet werden. Die Rechenschritte sind analog zu denen aus der Berechnung von $R^{(\Gamma)}_{\alpha\beta}$ und $R^{(\Gamma)}_{\alpha\bar\beta}$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
R^{(\Gamma)} &= -\frac{1}{2}(\nabla^{(T)}_{\alpha}\kappa_{\omega\bar\gamma\bar\delta} + \kappa_{\alpha\omega}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho\bar\gamma\bar\delta})(\epsilon^{\alpha\omega\bar\gamma\bar\delta\bar\sigma\tau}J_{\bar\sigma\tau} + \epsilon^{\alpha\omega\bar\gamma\bar\delta\sigma\bar\tau}J_{\sigma\bar\tau}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(\kappa_{\bar\omega\bar\gamma}{}^{\rho}\kappa_{\alpha\delta\rho})(\epsilon^{\alpha\bar\omega\bar\gamma\delta\bar\sigma\tau}J_{\bar\sigma\tau} + \epsilon^{\alpha\bar\omega\bar\gamma\delta\sigma\bar\tau}J_{\sigma\bar\tau}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(\kappa_{\bar\omega\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_{\alpha\bar\delta\bar\rho})(\epsilon^{\alpha\bar\omega\gamma\bar\delta\bar\sigma\tau}J_{\bar\sigma\tau} + \epsilon^{\alpha\bar\omega\gamma\bar\delta\sigma\bar\tau}J_{\sigma\bar\tau}) \\
&\quad -\kappa_{\omega\rho\alpha}\kappa^{\rho\alpha\omega} + c.c. \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\nabla^{(T)}_{\alpha}\kappa_{\omega}{}^{\gamma\delta} + \kappa_{\alpha\omega}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\gamma\delta})(\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\omega}_{\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\omega}_{\gamma}) \\
&\quad -(\kappa^{\omega\gamma\rho}\kappa_{\alpha\delta\rho})(\delta^{\alpha}_{\omega}\delta^{\delta}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\delta}_{\omega}) \\
&\quad +(\kappa^{\omega}{}_{\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\bar\rho})(\delta^{\alpha}_{\omega}\delta^{\gamma}_{\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\gamma}_{\omega}) \\
&\quad -\kappa_{\omega\rho\alpha}\kappa^{\rho\alpha\omega} + c.c. \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\nabla^{(T)}_{\alpha}\kappa_{\delta}{}^{\alpha\delta} - \nabla^{(T)}_{\delta}\kappa_{\gamma}{}^{\gamma\delta}) + \kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\alpha\delta} - \kappa_{\delta\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\gamma\delta}) \\
&\quad -(\kappa^{\alpha\delta\rho}\kappa_{\alpha\delta\rho} - \kappa^{\delta\alpha\rho}\kappa_{\alpha\delta\rho}) \\
&\quad +\kappa^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\bar\rho} - \kappa^{\gamma}{}_{\gamma}{}^{\bar\rho}\kappa_{\alpha}{}^{\alpha\bar\rho} \\
&\quad -\kappa_{\omega\rho\alpha}\kappa^{\rho\alpha\omega} + c.c. \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\kappa_{\alpha\delta}{}^{\bar\rho}\kappa_{\bar\rho}{}^{\alpha\delta} - \kappa^{\alpha\delta\rho}\kappa_{\alpha\delta\rho} + \kappa^{\delta\alpha\rho}\kappa_{\alpha\delta\rho} + \kappa^{\alpha\bar\delta\bar\rho}\kappa_{\alpha\bar\delta\bar\rho} \\
&\quad -\kappa_{\omega\rho\alpha}\kappa^{\rho\alpha\omega} + c.c. \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
-\kappa_{\omega\rho\alpha}\kappa^{\rho\alpha\omega} &= \kappa_{\omega\rho\alpha}\kappa^{\rho\omega\alpha} = \kappa_{\alpha\delta\rho}\kappa^{\delta\alpha\rho} \\
&= \kappa_{\omega\alpha\rho}\kappa^{\rho\alpha\omega} \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

folgt dann aus (A.17):

$$R^{(\Gamma)} = -2\kappa_{\alpha\gamma\delta}\kappa^{\delta\alpha\gamma} + 2\kappa_{\gamma\alpha\delta}\kappa^{\delta\alpha\gamma} - \kappa_{\alpha\gamma\delta}\kappa^{\alpha\gamma\delta} + \kappa_{\alpha\bar\gamma\bar\delta}\kappa^{\alpha\bar\gamma\bar\delta} + c.c. \qquad \text{(A.19)}$$

B Prinzipalbündel

Im folgenden soll kurz der Begriff des G-Prinzipalbündels eingeführt und erläutert werden, da in Abschnitt 2.1 davon Gebrauch gemacht wird. Es wird dabei gemäß der Referenzen [Kob1] und [Sto] vorgegangen.

1.) Die Lie-Gruppe G operiere frei (d.h. fixpunktfrei) von rechts auf der $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit P (d.h. alle Stabilisatoruntergruppen sind trivial).

2.) Der Orbitraum $P/G =: M$ sei differenzierbare Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi : P \to M$ sei submersiv.

3.) Für alle Punkte u aus P sei die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \eta_u : G &\to uG \\ \mathrm{g} &\mapsto u\mathrm{g} \end{aligned} \tag{B.1}$$

diffeomorph (uG bezeichne den Orbit durch u). Das ist erfüllt, wenn G eine abzählbare Topologie besitzt. Dann gilt:
a.) Sei U eine offene Teilmenge von M und s ein Schnitt über U:

$$s : U \to P \quad ; \quad \pi(s(x)) = x \ , \tag{B.2}$$

dann existiert eine diffeomorphe Abbildung ψ, so daß

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) &\to U \times G \\ u &\mapsto (\pi(u), \varphi(u)) \ , \end{aligned} \tag{B.3}$$

wobei $\varphi = \eta_u^{-1}$ und $s(\pi(u))\varphi(u) = u$ ist, denn die Umkehrabbildung

$$\psi^{-1} : (v, \mathrm{g}) \mapsto s(v)\mathrm{g} \tag{B.4}$$

($v \in U$) ist differenzierbar und immersiv. Das folgende Diagramm ist also kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
P & \supset & \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times G \arrow[dl, "pr_1"] \\
M & \underset{\text{offen}}{\supset} & U &
\end{tikzcd}$$

b.) Weiterhin gilt $\varphi(u\mathrm{g}') = \varphi(u)\mathrm{g}'$, also $\psi(u)\mathrm{g}' = (\pi(u), \varphi(u)\mathrm{g}') = \varphi(u\mathrm{g}')$.

c.) Sei U_α eine Überdeckung offener Kartengebiete von M, $M \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ und

$$\psi_\alpha : u \mapsto (\pi(u), \varphi_\alpha(u)) \tag{B.5}$$

mit

$$\varphi_\alpha(u\mathrm{g}') = \varphi_\alpha\alpha(u)\mathrm{g}' \ . \tag{B.6}$$

Für $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist $\varphi_\beta(u\mathrm{g}')\varphi_\alpha^{-1}(u\mathrm{g}') = \varphi_\beta(u)\varphi_\alpha^{-1}(u)$. Die Abbildung $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ hängt also nur noch von $\pi(u)$ und nicht von u ab. Es existiert also eine Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \quad ; \quad \varphi_{\beta\alpha}(\pi(u)) := \varphi_\beta(u)\varphi_\alpha^{-1}(u) \ , \tag{B.7}$$

so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\psi_\alpha"'] \arrow[dr, "\psi_\beta"] & \\
(U_\alpha \cap U_\beta) \times G \arrow[rr, "\psi_{\alpha\beta}"] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times G
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\psi_{\alpha\beta} := \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = (\mathrm{id}_{U_\alpha \cap U_\beta}, \varphi_{\alpha\beta}(\pi(u)))$.
Für ein $v = \pi(u) \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ ist mit $\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha}$ die Kozykelbedingung $\psi_{\gamma\alpha} = \psi_{\gamma\beta} \circ \psi_{\beta\alpha}$ erfüllt und die Abbildungen $\psi_{\alpha\beta}$ sind die Übergangs-Diffeomorphismen zu dem differenzierbaren Faserbündel P mit typischer Faser G und der trivialisierenden Überdeckung

$$\mathfrak{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha \times G \ . \tag{B.8}$$

P heißt dann G-Prinzipalbündel.
Ist umgekehrt eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit M mit einer offenen Kartenüberdeckung $\{U_\alpha\}$ und eine Lie-Gruppe G gegeben, so daß eine Abbildung $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ die Kozykelbedingung erfüllt, so lässt sich zeigen, daß ein G-Prinzipalbündel $P(M, G)$ konstruierbar ist [Kob1].

Literatur

[Bel] F. Belgun, A. Moroianu: *Nearly Kähler 6-Manifolds with Reduced Holonomy*, Ann. Glob. Anal. Geom. 19, (2001), p. 307-319.

[Boe] H. Boerner: *Darstellungen von Gruppen*, Springer-Verlag, Berlin (1955).

[Bro] T. Bröcker, T. tom Dieck: *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[Can1] P. Candelas, X. De La Ossa: *Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds*, Nucl. Phys. B 355 (1991) p. 455-481.

[Can2] P. Candelas: *Lectures on Complex Manifolds*, in *Superstrings '87*, Proceedings of the 1987 Trieste Spring School, eds. L. Alvarez-Gaume, M.B. Green, M. Grisaru, R. Jengo, E.Sezgin, World Scientific (1987).

[Can3] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten: *Vacuum Configurations for Superstrings*, Nucl. Phys. B 258 (1985), pp 46.

[Car] G.L. Cardoso, G. Curio, G. Dall' Agata, D. Lüst, P. Manousselis, G. Zoupanos: *Non-Kähler String Backgrounds and their Five Torsion Classes*, Nucl. Phys. B 652 (2003), p. 5-34.

[Cer] A. Ceresole, R. D'Auria, S.Ferrara: *The symplectic structure of N=2 Supergravity and its central extension*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 46 (1996) p. 67, hep-th/9509160.

[Chi] S. Chiossi, S. Salamon: *The Intrinsic Torsion of SU(3) and G_2 Structures*, in *Differential Geometry*, Valencia (2001)(World Scientific Publishing, River Edge, N.J., 2002), pp. 115-133, math.DG/0202282, (2002).

[Cle] R. Cleyton: *G-structures and Einstein metrics*, Ph.D. thesis, University of Southern Denmark, Odense (2001).

[Cor] J.F. Cornwell: *Group Theory in Physics*, Academic Press, San Diego (1997).

[Fal] M. Falcitelli, A. Farinola, S. Salamon: *Almost-Hermitian geometry*, Diff. Geom. Appl. 4 (1994), p. 259-282.

[Fla] E.J. Flaherty: *Hermitian and Kählerrian Geometry in Relativity*, Springer-Verlag, Berlin (1976).

[Gra1] A. Gray, L.M. Hervella: *The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and their Linear Invariants*, Ann. Mat. Pura. Appl. 123 (1980) p. 35-58.

[Gra2] A. Gray: *Curvature Identities for Hermitian and Almost Hermitian Manifolds*, Tohoku Math. Journ. 28(1976), p. 601-612.

[Gra3] A. Gray: *The Structure of Nearly Kähler manifolds*, Math. Ann. 223 (1976) p. 233-248.

[Gre] M. Green, J. Schwartz, E. Witten: *Superstring theory* (2 vols), Cambridge University Press (1986).

[Gur1] S. Gurrieri, J. Louis, A. Micu, D. Waldram: *Mirror Symmetry in Generalised Calabi-Yau Compactifications*, Nucl. Phys. B 654 (2003), p.61-113, hep-th/0211102.

[Gur2] S. Gurrieri, A. Lukas, A. Micu: *Heterotic on Half-flat*, hep-th/0408121 (2004).

[Joy] D. Joyce: *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press (2000).

[Kak] M.Kaku: *Introduction to Superstrings and M-Theorie*, Springer-Verlag, New York (1998).

[Kob1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, J.Wiley & Sons, New York (1976).

[Kob2] S. Kobayashi: *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[Nag1] P.A. Nagy: *Algebraic reduction of certain almost Kähler manifolds*, math.DG/0302281 (2003).

[Nag2] P.A. Nagy: *Torsion in almost Kähler geometry*, math.DG/0301069 (2003).

[Nak] M. Nakahara: *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing, Bristol (1990).

[Pol] J. Polchinski: *String theory*, Cambridge University Press (1998).

[Pro] A. van Proeyen: *Tools for supersymmetry*, Proceedings of Spring School on Quantum Field Theory: Supersymmetry and Superstrings, Calimanesti, Romania, 24-30 Apr 1998, hep-th/9910030 (2002).

[Sexl] R. Sexl, H. Urbantke: *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer-Verlag, Wien (1992).

[Spi] M. Spivac: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*(vol 2) Publish or Perish, Houston (1979).

[Sto] U. Storch, H. Wiebe: *Lehrbuch der Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2001).

[Suz] H. Suzuki: *Calabi-Yau compactification of type IIB string and a mass formula of the extreme black holes*, Mod. Phys. Lett. A11 (1996), p. 623, hep-th/9508001.

[Tia] G. Tian: *Mathematical aspects of String Theorie*, World Scientific, S.T. Yau ed., Singapore (1987).

[Tri] F. Tricerri, L. Vanhecke: *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), p. 365-398.

[Wal] R. M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London (1984).

Erklärung gemäss Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben.

Markus Mittag