

DE SITTER-Räume als Lösungen zu spontan gebrochener $\mathcal{N} = 1$ Supergravitation

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Physiker (Dipl.-Phys.)

vorgelegt am

Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von

Michael Strauch

geboren am 12. August 1979 in Halle (Saale)



Halle (Saale)/Hamburg, den 14. Oktober 2003

Erstgutachter: Prof. Dr. Jan Louis (seit 1. Januar 2003 Universität Hamburg)
Zweitgutachter: Prof. Dr. Steffen Trimper (Universität Halle)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsangabe	v
1 Einleitung	1
1.1 Wozu Supersymmetrie?	1
1.2 Was ist Supersymmetrie?	3
1.3 Gegenstand dieser Arbeit	4
2 Grundlagen der globalen Supersymmetrie und ihre spontane Brechung	7
2.1 Komponentenfelder	9
2.2 Superfelder und Superraum, supersymmetrische Wirkung	10
2.3 Chirale Superfelder	11
2.4 LAGRANGE-Dichte und skalares Potential	12
2.5 Spontane Supersymmetriebrechung und das O’RAIFEARTAIGH-Modell	14
2.6 R-Symmetrie – eine notwendige Bedingung für die Supersymmetriebrechung	17
2.7 Symmetrien des O’RAIFEARTAIGH-Modells	17
3 Verallgemeinerung des O’RAIFEARTAIGH-Modells	19
3.1 Klassifikation von Superpotentialen (Zusammenfassung)	20
3.2 Untersuchung des Verhaltens der klassifizierten Superpotentiale im Unendlichen	20
3.3 Vervollständigung der Klassifikation	22
3.4 Eindeutigkeit des O’RAIFEARTAIGH-Modells	23
3.5 Verallgemeinerung auf N Superfelder	24
3.6 Eigenschaften des verallgemeinerten Superpotentials	25
3.6.1 Flache Richtungen	25
3.6.2 R-Symmetrie	27

4 Grundlagen der lokalen Supersymmetrie (Supergravitation) und ihre spontane Brechung	29
4.1 Chirale Superfelder auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten	29
4.2 Skalares Potential	30
4.3 Spontane Supersymmetriebrechung und das POLÓNYI-Modell	31
5 DE SITTER-Vakua und die kosmologische Konstante	35
6 Modifikationen des POLÓNYI-Modells	41
6.1 Bemerkungen zum POLÓNYI-Modell	41
6.2 Verallgemeinerung auf N Superfelder	42
6.3 Einfluß des KÄHLER-Potentials	44
7 Zusammenfassung und Ausblick	49
A Notation und Konventionen	I
B Rechnen mit GRASSMANN-Variablen	III
C Das Massenspektrum des O’RAIFEARTAIGH-Modells	V
FORSCHUNGSBELEG – Klassifikation von Superpotentialen	IX
I Formulierung der Aufgabenstellung	XI
II Projektive Flächen 3. Ordnung	XIII
III Einige Ergebnisse aus der projektiven Geometrie	XIV
IV Verallgemeinerung der Aufgabenstellung	XV
V Beschreibung der Vorgehensweise	XV
VI Einige Berechnungen	XVIII
VII Vorläufiges Ergebnis der Klassifikation	XXII
a Darstellung der A_i	XXIV
b Normalformen der singulären projektiven Kubiken	XXIV
c Einfluß der affinen Transformation	XXVI
d „Potential“ mit Sattelpunkt	XXVI
Literaturverzeichnis	XXXI
Eidesstattliche Erklärung	XXXIII
Danksagung	XXXV

INHALTSANGABE

In dieser Arbeit soll die Möglichkeit von spontaner Supersymmetriebrechung mit DE SITTER-Grundzuständen untersucht werden. Diese Untersuchungen sind interessant, da bekannt ist, daß die Supersymmetrie keinesfalls als *exakte* Symmetrie in der Natur vorkommen kann. Dennoch ist die Möglichkeit dieser Symmetrie in einer *spontan gebrochenen* Form reizvoll, da sie zum Beispiel vielversprechende Kandidaten für die sogenannte *Dunkle Materie* im Universum liefert.

Außerdem liefern DE SITTER-Grundzustände eine positive kosmologische Konstante und könnten damit die *Dunkle Energie* im Universum und demnach auch dessen beschleunigte Expansion erklären.

Kapitel 1

Einleitung

1.1	Wozu Supersymmetrie?	1
1.2	Was ist Supersymmetrie?	3
1.3	Gegenstand dieser Arbeit	4

1.1 Wozu Supersymmetrie?

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist heute neben der Allgemeinen Relativitätstheorie eine der am genauesten experimentell geprüften physikalischen Theorien. In Präzisionsexperimenten zur elektroschwachen Wechselwirkung konnten die theoretischen Voraussagen des Standardmodells teilweise mit Fehlergrenzen von nur einigen Promille verifiziert werden.

Dennoch blieben bis jetzt einige ernsthafte Probleme offen. So hat das Standardmodell sehr viele freie Parameter, es gibt keine theoretische Motivation für die Wahl der Eichgruppe des Standardmodells, und vor allen Dingen ist es nicht möglich, im Rahmen des Standardmodells die Gravitationswechselwirkung zu beschreiben. All dies deutet darauf hin, daß das Standardmodell lediglich eine effektive Theorie ist, die nur unterhalb der elektroschwachen Energieskala $\sim \mathcal{O}(100 \text{ GeV})$ gültig ist. Um eine nicht nur phänomenologisch sondern auch konzeptionell befriedigende Theorie zu finden, ist eine Erweiterung des Standardmodells unumgänglich.

In den vergangenen zwei Jahrzehnten wurden mehrere Ansätze zur Erweiterung des Standardmodells verfolgt. Der populärste und wohl auch vielversprechendste von ihnen ist die *supersymmetrische Erweiterung*. Einen Überblick zum supersymmetrischen Standardmodell gibt beispielsweise [1].

Das supersymmetrische Standardmodell liefert eine elegante physikalische Erklärung für den HIGGS-Mechanismus, der im Standardmodell einerseits benötigt wird, um die Massen der Teilchen zu erklären, andererseits aber im Rahmen des *nicht*supersymmetrischen Standardmodells nur unzulänglich verstanden werden kann.

Im folgenden sollen kurz einige Probleme aufgelistet werden, die durch die Existenz von Supersymmetrie erklärt werden können und also die Beschäftigung mit ihr motivieren [2]:

- Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik hat ein ernsthaftes konzeptionelles Problem, das sogenannte *Hierarchie-Problem*: Im Rahmen des Standardmodells kann keine Antwort auf die Frage gegeben werden, warum die Skala des Standardmodells (10^{-17} m) so weit entfernt ist von der PLANCK-Skala (10^{-35} m), welche als die natürliche Skala einer fundamentalen physikalischen Theorie anzusehen ist. Das supersymmetrische Standardmodell stellt einen mathematisch konsistenten Weg zur Verfügung, diese beiden stark unterschiedlichen Skalen aufrecht zu erhalten und gibt gleichzeitig Hinweise auf die Beantwortung der Frage, warum die Skala des Standardmodells gerade bei 10^{-17} m liegt.
- Im supersymmetrischen Standardmodell kommt es bei sehr kleinen Längenskalen (nur ungefähr zwei Größenordnungen oberhalb der PLANCK-Skala) zu einer Vereinigung der Eichkopplungen von elektromagnetischer, starker und schwacher Wechselwirkung, was *ohne* Supersymmetrie nicht der Fall ist. Für die Physik auf noch kleineren Längenskalen existiert noch keine funktionierende Theorie, aber einige vielversprechende Ansätze deuten darauf hin, daß sich diese drei Wechselwirkungen bei der PLANCK-Skala auch noch mit der vierten fundamentalen Wechselwirkung in der Natur, der Gravitation, vereinigen. Um dies zu bewerkstelligen, scheint Supersymmetrie eine notwendige Voraussetzung zu sein!
- Das supersymmetrische Standardmodell liefert vielversprechende Kandidaten für die Teilchen der *Dunklen Materie*, die sogenannten *lightest superpartners* (LSP). Es ist eine Vorhersage der Supersymmetrie, daß von dieser Dunklen Materie wesentlich mehr im Universum vorhanden sein sollte als von der sichtbaren Materie, die Sterne beziehungsweise sichtbare Gas- und Staubwolken bildet. Diese Vorhersage deckt sich mit Beobachtungen von Sternen und Galaxien, deren Bewegungen nicht befriedigend erklärt werden können, wenn man nur die sichtbare Materie berücksichtigt.
- Ein großes Problem des Standardmodells ist, daß sich in seinem Rahmen die Gravitationswechselwirkung nicht beschreiben läßt. Hingegen macht die lokale Version der Supersymmetrie die Gravitation *notwendig*, und das supersymmetrische Standardmodell ist mit der Gravitationstheorie vereinbar.

- Nicht zuletzt sind alle Vorhersagen der Supersymmetrie mit den elektroschwachen Präzisionsexperimenten vereinbar. Darüberhinaus scheinen mit der Supersymmetrie Antworten auf Fragen wie:
 - Warum gibt es im Universum mehr „Materie“ als „Antimaterie“?
 - Ist das Proton instabil, und wenn ja, wie findet sein Zerfall statt?
 - Wie lassen sich die Massen der Neutrinos verstehen?

in greifbare Nähe zu rücken.

All dies sind starke Hinweise darauf, daß mit Hilfe der Supersymmetrie einige fundamentale Probleme aus so unterschiedlichen Bereichen wie Elementarteilchen- und Astrophysik sowie Kosmologie gelöst werden könnten. Vor allen Dingen aber ist die Supersymmetrie die einzige bekannte Möglichkeit, die Physik auf den uns geläufigen Skalen mit der Physik auf der PLANCK-Skala zu verbinden.

1.2 Was ist Supersymmetrie?

Die Grundidee hinter der Supersymmetrie ist die Vorstellung, daß die Gleichungen einer fundamentalen physikalischen Theorie sich nicht ändern sollten, wenn man Fermionen durch Bosonen ersetzt und umgekehrt, also auf geeignete Art und Weise ineinander *transformiert*. Diese Invarianz der Gleichungen unter dieser Art von Transformation entspricht einer *Symmetrie* der Theorie, die *Supersymmetrie* genannt wird. Daß eine solche Symmetrie existieren sollte, ist nicht offensichtlich, wenn man bedenkt, welche fundamentalen Unterschiede in der Beschreibung von Fermionen und Bosonen sowohl im Standardmodell als auch in der Quantentheorie gemacht werden (Spinstatistik, ...).

In der minimalen Version der Supersymmetrie gibt es genau einen *Generator* der Supersymmetrie und zu jedem Teilchen genau ein Partnerteilchen. Die Spins der beiden Teilchen unterscheiden sich um den Wert $\frac{1}{2}$. Auf diese Weise hat jedes Fermion einen bosonischen Superpartner, jedes Boson einen fermionischen Superpartner. Die Superpartner können durch Supersymmetrie-Transformationen ineinander überführt werden. Die Massen der Superpartner sind entartet. In Theorien mit sogenannter \mathcal{N} -erweiterter Supersymmetrie gibt es \mathcal{N} Supersymmetrie-Generatoren und jedes Teilchen hat mehrere Superpartner (nicht notwendigerweise \mathcal{N}). Konsistente Theorien können (unter Berücksichtigung der Gravitation) nur für $\mathcal{N} \leq 8$ formuliert werden, da sonst in der Theorie Teilchen mit Spin $S > 2$ auftreten würden und kein Weg bekannt ist, eine solche Theorie an die Gravitation zu koppeln [3].*

Es kann jedoch von vornherein ausgeschlossen werden, daß Supersymmetrie in der Natur als *exakte* Symmetrie realisiert wird, denn die (hypothetischen)

*Dies gilt genau genommen nur in vier Raumzeitdimensionen ($D = 4$). In dieser Arbeit soll aber ohnehin nur dieser Fall betrachtet werden, das heißt, es wird insbesondere nicht die Möglichkeit von kompaktifizierten Extra-Dimensionen untersucht.

Superpartner, die von dieser Symmetrie gefordert werden, sind in den Beschleuniger-Experimenten noch nie beobachtet worden. Das bedeutet, daß die Supersymmetrie bei niedrigen Energien gebrochen ist. Dies führt zur Aufhebung der Massenentartung der fermionischen und bosonischen Partner. Dabei ist die „Massenlücke“ zwischen den Superpartnern von der Größenordnung der Energieskala, bei der die Symmetriebrechung auftritt. Diese Symmetriebrechungs-Skala muß groß genug sein, um erklären zu können, warum die supersymmetrischen Partner des Standardmodells im Vergleich zu den bekannten Elementarteilchen so schwer sind, daß sie bei den bisher erreichten Beschleunigerenergien von ~ 100 GeV noch nicht beobachtet werden konnten.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Supersymmetrie zu brechen. Aus phänomenologischer Perspektive sind nur zwei Varianten interessant: die *spontane* oder die *weiche Supersymmetriebrechung*. Bei der spontanen Supersymmetriebrechung behält die Theorie die Supersymmetrie, die Grundzustände sind jedoch *nicht* supersymmetrisch. In dieser Arbeit wird nur die spontane Form der Supersymmetriebrechung untersucht.

1.3 Gegenstand dieser Arbeit

Von besonderem Interesse sind Supersymmetrie-Modelle mit sogenannten DE SITTER-Grundzuständen, in denen die Supersymmetrie *notwendigerweise* spontan gebrochen wird, da diese in Übereinstimmung mit den Experimenten eine kosmologische Konstante $\Lambda > 0$ beschreiben (siehe zum Beispiel [4-6]). Außerdem deuten aktuelle Messungen auf die Existenz einer *Dunklen Energie* hin, die für die *beschleunigte* Expansion des Universums verantwortlich ist (siehe zum Beispiel [7]). Eine positive kosmologische Konstante wäre eine mögliche Erklärung für diese Dunkle Energie.[†]

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 2** werden die Grundlagen der *globalen* Supersymmetrie und ihrer spontanen Brechung eingeführt sowie ein einfaches Modell für die spontane Supersymmetriebrechung (das O’RAIFEARTAIGH-Modell) untersucht. In **Kapitel 3** wird gezeigt, daß dieses Modell im einfachsten möglichen Fall dreier chiraler Superfelder *eindeutig* ist. Anschließend wird das Modell auf N Superfelder verallgemeinert und seine Eigenschaften werden studiert.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der *lokalen* Version der Supersymmetrie, der *Supergravitation*, welche der eigentliche Gegenstand dieser Arbeit ist. Dabei wird wieder zunächst ein einfaches bekanntes Modell für die spontane Brechung der lokalen Supersymmetrie untersucht (das POLÓNYI-Modell), welches nur von einem chiralen Superfeld abhängt und ein lineares Superpotential besitzt. In **Kapitel 5** wird gezeigt, daß dieses Modell in einem bestimmten Parameterbereich einen stabilen DE SITTER-Grundzustand besitzt und demnach einen

[†]Die sogenannte *Quintessenz* ist eine alternative Erklärungsmöglichkeit [8]. Auf sie wird in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen.

realistischen Wert für die kosmologische Konstante Λ liefern kann. In **Kapitel 6** werden schließlich Möglichkeiten zu Verallgemeinerungen beziehungsweise Modifikationen des POLÓNYI-Modells studiert, wobei auch auf den Einfluß des KÄHLER-Potentials eingegangen wird.

Kapitel 2

Grundlagen der globalen Supersymmetrie und ihre spontane Brechung

2.1	Komponentenfelder	9
2.2	Superfelder und Superraum, supersymmetrische Wirkung	10
2.3	Chirale Superfelder	11
2.4	LAGRANGE-Dichte und skalares Potential	12
2.5	Spontane Supersymmetriebrechung und das O'RAIFEARTAIGH-Modell	14
2.6	R-Symmetrie – eine notwendige Bedingung für die Supersymmetriebrechung	17
2.7	Symmetrien des O'RAIFEARTAIGH-Modells	17

Hier soll die Struktur der globalen Supersymmetrie in einer vierdimensionalen MINKOWSKI-Raumzeit skizziert werden. Ausführlichere Abhandlungen finden sich zum Beispiel in [9-11].

Wie bereits gesagt, transformiert die Supersymmetrie Fermionen in Bosonen und umgekehrt. Zu diesem Zweck werden *Supersymmetrie-Generatoren* (auch *Superladungen*) Q eingeführt, die wie folgt wirken:

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle, \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad (2.1)$$

mit HILBERT-Raum-Vektoren $|\dots\rangle$, die mit fermionischen beziehungsweise bosonischen Zuständen korrespondieren.

Durch diese Symmetrietransformation wird die Spin-Statistik des transformierten Zustandes geändert, da der Spin sich um den Wert $\frac{1}{2}$ ändert. Daher haben auch die Superladungen Q Spin $\frac{1}{2}$ und formen Spinor-Darstellungen der LORENTZ-Gruppe.*

*Normalerweise haben die Generatoren von Symmetrietransformationen ganzzahligen Spin.

Jedes Teilchen erhält durch diese Transformation einen *Superpartner*. Die bosonischen Superpartner der bekannten Fermionen werden durch das Präfix „S-“ gekennzeichnet (zum Beispiel Slepton, Squark), die fermionischen Superpartner der bekannten Bosonen durch das Suffix „-ino“ (zum Beispiel Photino, Gravitino). Alle Teilchen einer supersymmetrischen Theorie formen sogenannte *Supermultipletts*, welche die gleiche Anzahl von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden aufweisen.

Die Superladungen Q erfüllen eine *Antikommutator-Relation*

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.2)$$

und widersprechen damit nicht dem Theorem von COLEMAN und MANDULA [12], wonach die allgemeinste Algebra von Symmetrien der S -Matrix nur den Energie-Impuls-Operator P_m , die LORENTZ-Generatoren J_{mn} sowie eine endliche Anzahl von LORENTZ-Skalaren[†] B_l enthält, *falls* die Gruppe eine LIE-Gruppe mit reellen Parametern sein soll, die Generatoren also *kommutieren*. Dies ist bei der Supersymmetrie-Algebra nicht der Fall, da die Generatoren antikommutieren.

HAAG, LOPUSZÁNSKI und SOHNIUS [13] haben bewiesen, daß ein Satz von Kommutator- und Antikommutator-Relationen zwischen Generatoren der POINCARÉ-Algebra und Superladungen (auch POINCARÉ-*Superalgebra* genannt) die einzige gradierte LIE-Algebra von Symmetrien der S -Matrix ist, die mit der relativistischen Quantenfeldtheorie vereinbar ist.

Die Supersymmetrie-Algebra wird hier kurz für den Fall minimaler Supersymmetrie ($\mathcal{N} = 1$) angegeben. Dabei seien P_m der Vierer-Impuls und J_{mn} die Generatoren der LORENTZ-Gruppe ($m, n = 0, \dots, 3$).

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ [Q_\alpha, P_m] &= [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_m] = 0, \\ [P_m, P_n] &= 0, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} P_m, \\ [Q_\alpha, J_{mn}] &= -i(\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \\ [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, J_{mn}] &= -i(\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Indizes α und β nehmen, wie auch ihre gepunkteten Pendants, die Werte 1 und 2 an.

Diese Arbeit beschränkt sich auf den einfachsten Fall $\mathcal{N} = 1$, da es für $\mathcal{N} \geq 2$ sehr schwierig ist, die Supersymmetrie spontan zu brechen [14]. Die Notation und alle Konventionen sind in Anhang A zusammengestellt.

Der Operator des Massenquadrates

$$M^2 = P^m P_m \quad (2.4)$$

[†]Für diese gilt: $[P_m, B_l] = 0$, $[J_{mn}, B_l] = 0$, $[B_l, B_m] = iC_{lm}{}^k B_k$ mit den *Strukturkonstanten* $C_{lm}{}^k$.

kommutiert mit allen Generatoren der Supersymmetrie-Algebra (2.3)[‡] und ist somit invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Daher müssen die Massen aller Teilchen eines Supermultipletts entartet sein.

Es gibt zwei Arten von irreduziblen Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra: die masselose und die massive.

Im Fall $\mathcal{N} = 1$ enthält die masselose Darstellung im einfachsten Fall einen komplexen Skalar mit Spin 0 und einen MAJORANA-Spinor mit Spin $\frac{1}{2}$, die ein sogenanntes *skalares* oder *chirales Multiplett* bilden. Darüberhinaus existieren aber noch drei weitere masselose Multipletts:

$$\begin{aligned}
 \text{chirales Multiplett:} & \quad 2 \times |S = 0\rangle, \quad |S = 1/2\rangle, \\
 \text{Vektor-Multiplett:} & \quad |S = 1/2\rangle, \quad |S = 1\rangle, \\
 \text{Gravitino-Multiplett:} & \quad |S = 1\rangle, \quad |S = 3/2\rangle, \\
 \text{Graviton-Multiplett:} & \quad |S = 3/2\rangle, \quad |S = 2\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die massiven Multipletts haben für $\mathcal{N} = 1$ den folgenden Inhalt:

$$\begin{aligned}
 \text{chirales Multiplett:} & \quad 2 \times |S = 0\rangle, \quad |S = 1/2\rangle, \\
 \text{Vektor-Multiplett:} & \quad |S = 0\rangle, \quad 2 \times |S = 1/2\rangle, \quad |S = 1\rangle, \\
 \text{Gravitino-Multiplett:} & \quad |S = 1/2\rangle, \quad 2 \times |S = 1\rangle, \quad |S = 3/2\rangle, \\
 \text{Graviton-Multiplett:} & \quad |S = 1\rangle, \quad 2 \times |S = 3/2\rangle, \quad |S = 2\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Jedes dieser Multipletts beinhaltet dieselbe Anzahl von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden. Außerdem sind alle Multipletts massenentartet.

2.1 Komponentenfelder

Um eine supersymmetrische Feldtheorie zu formulieren, muß zunächst die Supersymmetrie-Algebra (2.3) auf Feldern realisiert werden. Zu diesem Zweck werden antikommutierende Parameter $\xi^\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ eingeführt:

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \{\xi^\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\} = \dots = 0. \tag{2.7}$$

Ein *Komponenten-Multiplett* ist ein Satz von Feldern (A, ψ, \dots) , auf dem mit der Summations-Konvention

$$\xi Q = \xi^\alpha Q_\alpha, \quad \bar{\xi} \bar{Q} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \tag{2.8}$$

die infinitesimale Supersymmetrie-Transformation δ_ξ definiert wird:

$$\begin{aligned}
 \delta_\xi A &= (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) A, \\
 \delta_\xi \psi &= (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \psi,
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

...

[‡] M^2 ist damit der CASIMIR-Operator der Supersymmetrie-Algebra.

Diese Supersymmetrie-Transformation bildet Tensorfelder auf Spinorfelder ab und umgekehrt. Aus der Algebra (2.3) entnimmt man, daß Q (und ebenso \bar{Q}) eine Massendimension von $\frac{1}{2}$ hat.[§] Deswegen transformieren Felder mit Massendimension ℓ in Felder mit Massendimension $\ell + \frac{1}{2}$ und/oder in Ableitungen von Feldern niedrigerer Massendimension.

Das Spinorfeld ψ wird definiert als das Feld, in welches das Skalarfeld A transformiert wird:

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\psi. \quad (2.10\text{-a})$$

Das Feld ψ transformiert in ein höherdimensionales Tensorfeld und eine Ableitung von A :

$$\delta_\xi\psi = \mathbf{i}\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F. \quad (2.10\text{-b})$$

Um die Algebra zu schließen, muß F gemäß

$$\delta_\xi F = \mathbf{i}\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi \quad (2.10\text{-c})$$

transformieren.

Das in den Gleichungen (2.10-a)-(2.10-c) konstruierte Komponentenmultiplett heißt *chirales* oder *skalares Multiplett*. Die Felder A, ψ und F bilden eine lineare Darstellung der Supersymmetrie-Algebra (2.3). Wenn A die Massendimension 1 hat, dann hat ψ die Dimension $\frac{3}{2}$ und F die Dimension 2.

Aus Gleichung (2.10-c) sieht man, daß F unter δ_ξ in eine Raumzeit-Ableitung transformiert. Das ist in jedem Multiplett für die Komponente mit der höchsten Dimension der Fall.

2.2 Superfelder und Superraum, supersymmetrische Wirkung

Superfelder stellen eine elegante und kompakte Beschreibung von Supersymmetrie-Darstellungen zur Verfügung (zumindest im Fall $\mathcal{N} = 1$). Die Darstellung in Komponentenfeldern kann aus der Superfeld-Darstellung durch Potenzreihen-Entwicklung zurückgewonnen werden.

Hier soll der Superraum-Formalismus als ein adäquates Hilfsmittel eingeführt werden, ohne auf die mathematischen Hintergründe näher einzugehen. Der Superraum ist eine achtdimensionale Erweiterung der vierdimensionalen Raumzeit. Neben den vier (bosonischen) Raumzeit-Koordinaten X_m verfügt er über die vier (fermionischen) Koordinaten θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Diese sind antikommutierende GRASSMANN-Variablen. Im Anhang B wird ein kurzer Überblick über das Rechnen mit diesen Variablen gegeben.

Ein Superfeld ist eine beliebige skalare Funktion auf dem Superraum. Ihre TAYLOR-Reihenentwicklung nach θ und $\bar{\theta}$ hat folgende Gestalt:

$$F(X, \theta, \bar{\theta}) = f(X) + \phi(X)\theta + \bar{\chi}(X)\bar{\theta} + m(X)\theta\theta + n(X)\bar{\theta}\bar{\theta} + v_m(X)\theta\sigma^m\bar{\theta} + \bar{\lambda}(X)\theta\theta\bar{\theta} + \psi(X)\bar{\theta}\bar{\theta}\theta + d(X)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}. \quad (2.11)$$

[§]Das folgt aus $\{Q, \bar{Q}\} \sim P$, da der Impulsoperator eine Massendimension von 1 hat.

Alle höheren Potenzen von θ und $\bar{\theta}$ verschwinden (siehe Anhang B). Die Funktionen $f, \phi, \bar{\chi}, \dots$ sind allesamt Komponentenfelder, die durch Gleichung (2.11) auf kompakte Art und Weise zu einem Superfeld zusammengefaßt werden können.

Wie im Anhang B erläutert, kann die höchste Komponente des Superfeldes durch Integration über die GRASSMANN-Variablen gewonnen werden:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} F(X, \theta, \bar{\theta}) = d(X). \quad (2.12)$$

Dies ist eine wichtige Eigenschaft, die ausgenutzt werden kann, um supersymmetrische Wirkungen zu konstruieren, denn die Supersymmetrie-Variation der höchsten Komponente d eines Superfeldes ist eine totale Ableitung: $\delta d = d' - d = \partial_m \mathcal{V}^m$. Das Raumzeit-Integral über diese Variation kann dann mit der physikalisch sinnvollen Forderung, daß \mathcal{V} im Unendlichen Null wird, zum Verschwinden gebracht werden. Damit ist das Raumzeit-Integral über die höchste Komponente eines jeden Superfeldes invariant unter Supersymmetrie-Transformationen.

Eine LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} ist eine Kopplung mehrerer Superfelder. Um solch eine Kopplung zu realisieren, werden die Superfelder einfach miteinander multipliziert (Produkte von Superfeldern sind wiederum Superfelder) und die höchste Komponente des Superfeld-Produktes herausprojiziert, damit die Kopplung (bis auf eine totale Ableitung) supersymmetrisch wird. Für die supersymmetrische Wirkung S gilt dann:

$$S = \int d^4X \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{L}. \quad (2.13)$$

Diese Wirkung ist invariant unter Supersymmetrie-Transformationen!

2.3 Chirale Superfelder

Ein allgemeines Superfeld enthält zuviele Komponentenfelder, um mit einer irreduziblen Darstellung von $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrie, die in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet wird, zu korrespondieren. Daher ist es nützlich, kovariante supersymmetrische Zwangsbedingungen an die Superfelder zu stellen, um die Anzahl der Komponentenfelder zu reduzieren.

Dazu werden kovariante Ableitungen D_α und $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ eingeführt, die mit den Supersymmetrie-Generatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ antikommutieren:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha (\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Zwangsbedingungen $D_\alpha F = 0$ und $\bar{D}_{\dot{\alpha}} F = 0$ sind invariant unter Supersymmetrie-Transformationen und geeignet, die Anzahl der Komponenten eines Superfeldes zu reduzieren.

Chirale Superfelder Φ werden durch die Bedingung

$$\bar{D}_\alpha \Phi = 0 \quad (2.15)$$

charakterisiert. Sie korrespondieren zu dem *chiralen Multipllett* (2.10-a)-(2.10-c).

Um die Zwangsbedingung (2.15) zu lösen, erfolgt ein Wechsel zu den Koordinaten $Y^m = X^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ und θ . Wegen $\bar{D}_\alpha(X^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) = 0$ und $\bar{D}_\alpha\theta = 0$ erfüllt jede Funktion, die von diesen beiden Variablen abhängt, die Zwangsbedingung (2.15):

$$\begin{aligned} \Phi &= A(Y) + \sqrt{2}\psi(Y)\theta + F(Y)\theta\theta \\ &= A(X) + i\partial_m A(X)\theta\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{4}\square A(X)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \\ &\quad + \sqrt{2}\psi(X)\theta - \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_m\psi(X)\sigma^m\bar{\theta}\theta + F(X)\theta\theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit $\square = \partial_m\partial^m$. Dies ist die allgemeinste Lösung zu Gleichung (2.15).

Das hermitesch konjugierte chirale Superfeld (auch *antichirales Superfeld* genannt) $\bar{\Phi}$ ist eine Funktion von $\bar{Y}^m = X^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ und $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= A^*(\bar{Y}) + \sqrt{2}\bar{\psi}(\bar{Y})\bar{\theta} + F^*(\bar{Y})\bar{\theta}\bar{\theta} \\ &= A^*(X) - i\partial_m A^*(X)\theta\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{4}\square A^*(X)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\psi}(X)\bar{\theta} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(X) + F^*(X)\bar{\theta}\bar{\theta}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Das ist die allgemeinste Lösung zur Zwangsbedingung $D_\alpha\bar{\Phi} = 0$.

Die höchsten Komponenten von Φ und $\bar{\Phi}$ sind die $\theta\theta$ - beziehungsweise $\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponenten, also F respektive F^* . Vor allen höheren Potenzen von θ und $\bar{\theta}$ stehen Raumzeit-Ableitungen niedrigerer Komponenten. Die Variation der F - beziehungsweise F^* -Komponente eines chiralen respektive antichiralen Superfeldes ist also eine totale Raumzeit-Ableitung.

Produkte von chiralen Superfeldern Φ_1, Φ_2, \dots sind wiederum chirale Superfelder, Produkte von antichiralen Superfeldern $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots$ sind antichirale Superfelder. Das Produkt $\Phi\bar{\Phi}$ hingegen ist weder ein chirales noch ein antichirales Superfeld, da die höchste Komponente hier die $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponente ist.

2.4 LAGRANGE-Dichte und skalares Potential

Die allgemeinste supersymmetrische renormierbare LAGRANGE-Dichte, die ausschließlich chirale und antichirale Superfelder enthält, lautet [9]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{pot}} \quad \text{mit} \\ \mathcal{L}_{\text{kin}} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_i \bar{\Phi}_i, \\ \mathcal{L}_{\text{pot}} &= \int d^2\theta \left\{ \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right\} + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da im allgemeinen ein Modell mit N Superfeldern betrachtet wird, laufen die Indizes i, j, k von 0 bis $N - 1$. Die Kopplungen m_{ij} und g_{ijk} sind symmetrisch in den Indizes, es gilt somit $m_{ij} = m_{ji}$ und $g_{ijk} = g_{\pi(ijk)}$ für alle Permutationen der Indizes. Die Abkürzung „h. c.“ steht für die hermitesch konjugierten Terme, die hinzuaddiert werden müssen. Es ist zu beachten, daß ein Wechsel der Koordinaten von Y zu X die LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} nicht beeinflußt!

In \mathcal{L}_{pot} taucht ein sogenanntes *Superpotential*

$$W(\Phi) = \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (2.19)$$

auf. Es besteht nur aus Summen und Produkten chiraler Superfelder und ist damit selbst wiederum ein chirales Superfeld. Man könnte zum Superpotential auch noch eine Konstante C hinzufügen. Jede Konstante ist trivialerweise ein chirales Superfeld.

In Komponentenfeldern ausgedrückt hat \mathcal{L} folgende Gestalt (dabei wurden alle totalen Ableitungen weggelassen, da sie in der Wirkung ohnehin keinen Beitrag liefern):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i + F_i F_i^* \\ & + \left[\lambda_i F_i + m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \text{h. c.} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dies ist die sogenannte „off-shell“-Formulierung, in der die „Hilfsfelder“ F vorkommen, für die es keinerlei dynamische Terme gibt und die daher mit Hilfe der EULER-LAGRANGE-Gleichungen eliminiert werden können:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} - \partial_m \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_m F_i)}}_{=0} = F_i^* + \lambda_i + m_{ij} A_j + g_{ijk} A_j A_k = 0. \quad (2.21)$$

Analog erhält man die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für die F_i^* . Mit dem Superpotential W aus Gleichung (2.19) kann dann geschrieben werden:

$$F_i = -\frac{\partial \bar{W}(A^*)}{\partial A_i^*}, \quad F_i^* = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}. \quad (2.22)$$

F_i und F_i^* können nun eliminiert werden, und man erhält die „on-shell“-Formulierung von \mathcal{L} , in der nur noch die dynamischen Felder A_i und ψ_i vorkommen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i \\ & - \left[\frac{1}{2} m_{ij} \psi_i \psi_j + g_{ijk} \psi_i \psi_j A_k + \text{h. c.} \right] \\ & - V(A, A^*) \end{aligned} \quad (2.23)$$

mit dem *skalaren Potential*[¶]

$$\begin{aligned} V(A, A^*) &= F_i F_i^* = \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \cdot \frac{\partial \bar{W}(A^*)}{\partial A_i^*} \\ &\equiv \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \right|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Das skalare Potential ist nichtnegativ (was im übrigen eine unmittelbare Folge der Supersymmetrie ist), da es als das Betragsquadrat des Gradienten des Superpotentials W aus Gleichung (2.19) aufgefaßt werden kann, nachdem in W die chiralen Superfelder Φ_i durch die Skalarfelder A_i ersetzt wurden. Wegen der Forderung nach Renormierbarkeit ist W ein Polynom 3. Grades.

2.5 Spontane Supersymmetriebrechung und das O'RAIFEARTAIGH-Modell

Für den supersymmetrischen HAMILTON-Operator kann aus der Supersymmetrie-Algebra (2.3) hergeleitet werden:

$$H = \frac{1}{4}(Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2). \quad (2.25)$$

Da das Energiespektrum einer supersymmetrischen Theorie positiv semidefinit ist, folgt für den Vakuum Erwartungswert der Energie eines supersymmetrischen Grundzustandes:

$$E_{\text{vac}} = \langle 0|H|0\rangle = 0. \quad (2.26)$$

Das ist nur möglich, wenn ein supersymmetrischer Grundzustand $|0\rangle$ von den Superladungen Q und \bar{Q} vernichtet wird:

$$Q_\alpha |0\rangle = 0, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0. \quad (2.27)$$

Daraus folgt, daß in einem supersymmetrischen Grundzustand $V = 0$ gelten muß.

In einem Grundzustand mit spontan gebrochener Supersymmetrie ist hingegen

$$Q_\alpha |0\rangle \neq 0. \quad (2.28)$$

[¶]Der Name deutet an, daß V keine Ableitungen oder fermionische Felder beinhaltet.

Es sei noch angemerkt, daß das skalare Potential im allgemeinen die Form $V = F_i F_i^* + \frac{1}{2}D^2$ hat. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer spontanen Brechung der Supersymmetrie. Die spontane Brechung des D -Terms ist gut verstanden, dazu muß nur ein sogenannter FAYET-ILIOPOULOS-Term zur LAGRANGE-Dichte hinzugefügt werden [9]. Interessanter ist die Brechung des F -Terms. Daher kann man sich auf ein skalares Potential $V = F_i F_i^*$ beschränken. Der D -Term tritt beispielsweise in Modellen, in denen ausschließlich ungeladene Felder vorkommen, ohnehin nicht auf.

Damit ist auch $E_{\text{vac}} \neq 0$, was nur für $V > 0$ möglich ist.^{||} Ein notwendiges Kriterium für die spontane Brechung der Supersymmetrie ist somit $V > 0$. Dieses Kriterium ist auch hinreichend, wenn man von Fällen absieht, in denen eines der Superfelder im Superpotential von den anderen Felder entkoppelt ist und nur linear auftritt, also beispielsweise $W = \Phi_0 + f(\Phi_1, \Phi_2, \dots)$. In diesem Fall wäre zwar auch $V = |\nabla W|^2 > 0$, es käme aber dennoch zu keiner Aufhebung der Massenentartung im Multiplett und demnach auch zu keiner spontanen Brechung der Supersymmetrie.**

Im allgemeinen muß also das skalare Potential am globalen Minimum größer als Null sein, damit es zur spontanen Brechung der Supersymmetrie kommt [15].

LOCHLAINN O'RAIFEARTAIGH hat im Jahre 1975 ein Modell zur spontanen Brechung der globalen Supersymmetrie veröffentlicht [15]. In seiner Arbeit führt O'RAIFEARTAIGH aus, warum mindestens drei Superfelder notwendig sind, um die Supersymmetrie spontan brechen zu können. Für das Superpotential schreibt er: $W = \lambda_i \Phi_i + m_{ij} \Phi_i \Phi_j + g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k$, $i, j, k = 0, \dots, N - 1$. Der Einfachheit halber beschränkt er sich bei der Konstruktion des Modells auf reelle Koeffizienten. Zunächst entwickelt er dann *notwendige* Bedingungen für die Existenz lokaler und globaler Minima des skalaren Potentials. Mit Hilfe einer Koordinatentransformation, die sich dadurch auswirkt, daß die konstanten Koeffizienten λ_i , m_{ij} sowie g_{ijk} abhängig von den Feldern werden (also $\lambda(\Phi)$ und so weiter, wobei für $\Phi_i = 0$ wieder die ursprünglichen Werte der Koeffizienten angenommen werden), kann das globale Minimum o. B. d. A. im Ursprung angenommen werden. Als Bedingung für die Existenz eines Extremums im Ursprung ergibt sich: $m_{ij} \lambda_j = 0$. Da $(\lambda_i) \neq \vec{0}$ gelten muß (mindestens ein linearer Term muß im Superpotential auftreten, da anderenfalls für $A_i = 0$ das skalare Potential Null wird), bedeutet dies, daß die Matrix (m_{ij}) *singulär*, also mindestens einer ihrer Eigenwerte Null

^{||}Das liest man aus der LAGRANGE-Dichte (2.23) ab: Im Grundzustand sind die fermionischen Felder ψ_i und die Ableitungen $\square A_i$ Null. Damit der Vakuumerwartungswert der Energie ungleich Null ist, muß demnach auch $V \neq 0$ gelten.

**Für ein Superpotential $W = \Phi_0 + f(\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ ist das skalare Potential V unabhängig von A_0 . Das Minimum des Potentials erhält man für $W_i = f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial A_i} = 0$, $i = 1, \dots, N - 1$. Für die Massenquadrat-Matrix der Fermionen (siehe auch Anhang C) erhält man:

$$M_f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & (f_{ik} f_{kj}^*)|_{\min} \\ \vdots & \end{pmatrix}, \text{ wobei die } f_{ij} \text{ für die zweiten Ableitungen der Funktion } f \text{ stehen. Für}$$

das skalare Potential gilt: $V = 1 + f_1 f_1^* + f_2 f_2^* + \dots$. Für die zweiten Ableitungen des skalaren Potentials am globalen Minimum ($f_i = 0$) folgt: $V_{ij}|_{\min} = [f_{1ij} f_1^* + f_{2ij} f_2^* + \dots]|_{\min} = 0$.

Damit gilt für die Massenquadrat-Matrix der Bosonen (siehe Anhang C): $M_b^2 = \begin{pmatrix} M_f^2 & 0 \\ 0 & M_f^2 \end{pmatrix}$. Damit haben die beiden Massenquadrat-Matrizen identische Eigenwerte, die Massenentartung zwischen Fermionen und Bosonen wird also nicht aufgehoben, und die Supersymmetrie wird demnach *nicht* spontan gebrochen!

sein muß. O'RAIFEARTAIGH trifft daher die Wahl:

$$(m_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & (m_{ab}) & \end{pmatrix}, \quad (\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad a, b = 1, \dots, N-1. \quad (2.29)$$

Damit ist dann in der Tat $m_{ij}\lambda_j = 0$ erfüllt. Weiterhin muß aber, damit es zu einer spontanen Brechung der Supersymmetrie kommen kann, m_{ij} *indefinit* sein, also sowohl positive als auch negative Eigenwerte haben. Diese Forderung kann nur erfüllt werden, wenn m_{ab} mindestens eine 2×2 -Matrix ist. Damit muß also m_{ij} mindestens eine 3×3 -Matrix sein, um alle Bedingungen erfüllen zu können, und das Modell muß deswegen mindestens drei chirale Superfelder enthalten.

Das Superpotential in O'RAIFEARTAIGHs Modell ist renormierbar – das heißt, es enthält nur Terme, die maximal vom Grade 3 sind – und hängt nur von drei chiralen Superfeldern Φ_0, Φ_1 und Φ_2 ab:

$$W = \lambda\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1^2. \quad (2.30)$$

Die Parameter λ, m und g können auch komplex sein. Dieses Superpotential liefert ein skalares Potential, das immer größer als Null ist, denn der Gradient von $W(A)$ kann nirgends Null werden:

$$\nabla W(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial A_0} \\ \frac{\partial W}{\partial A_1} \\ \frac{\partial W}{\partial A_2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + gA_1^2 \\ mA_2 + 2gA_0A_1 \\ mA_1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Die Parameter λ, m und g sollen ungleich Null sein. Daher kann die Ableitung nach A_2 nur für $A_1 = 0$ zum Verschwinden gebracht werden. Mit $A_1 = 0$ ist aber $\frac{\partial W}{\partial A_0} = \lambda \neq 0$. Es gilt also immer $\nabla W \neq \vec{0}$ und damit auch $V > 0$ (siehe Gleichung (2.24)).

Das skalare Potential nimmt sein absolutes Minimum für $A_1 = A_2 = 0$ an, unabhängig davon, welchen Wert A_0 hat. Das bedeutet, daß das skalare Potential des O'RAIFEARTAIGH-Modells eine sogenannte „flache Richtung“ hat. Eine solche flache Richtung korrespondiert mit einem masselosen Teilchen im Supermultiplett. (Da es hier nur ein masseloses Fermion gibt, muß dieses identisch mit dem GOLDSTONE-Fermion^{††} sein.) Im Anhang C werden die Minimierung des skalaren Potentials sowie das Massenspektrum des O'RAIFEARTAIGH-Modells ausführlich ausgerechnet.

^{††}GOLDSTONE-Fermionen sind masselose Fermionen, die durch die Brechung sogenannter *ungerader* Symmetrien (wie zum Beispiel der Supersymmetrie) entstehen [9].

2.6 R-Symmetrie – eine notwendige Bedingung für die Supersymmetriebrechung

Für ein generisches Superpotential kann das Gleichungssystem $W_i = 0$, $i = 0, \dots, N - 1$ immer gelöst werden (N Gleichungen für N Unbekannte). Selbst wenn auf dem klassischen *tree level* das Gleichungssystem unlösbar sein sollte und die Supersymmetrie somit spontan gebrochen wird, so werden im allgemeinen durch Quantenkorrekturen alle möglichen Zusatzterme in der effektiven Wirkung erzeugt, die das Superpotential generisch machen und die Supersymmetrie wiederherstellen, *es sei denn*, daß das Modell durch zusätzliche Symmetrien eingeschränkt wird.

Eine Möglichkeit für eine solche Symmetrie ist die folgende globale innere Symmetrie. Das Superpotential W hat eine sogenannte *R-Symmetrie*, wenn es möglich ist, den Superfeldern Φ_i sogenannte *R-Ladungen* q_i zuzuweisen, sodaß gilt:

$$e^{2i\alpha}W = W(e^{iq_i\alpha}\Phi_i) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

ANN E. NELSON und NATHAN SEIBERG haben auf eine Verbindung zwischen R-Symmetrien und Supersymmetriebrechung hingewiesen [16]. Sie zeigen, daß die Existenz einer R-Symmetrie eine *notwendige* Bedingung für die Brechung der Supersymmetrie ist. Eine spontan gebrochene R-Symmetrie^{‡‡} ist eine *hinreichende* Bedingung für spontane Supersymmetriebrechung, sofern das Superpotential *generisch* ist, womit gemeint ist, daß die effektive LAGRANGE-Dichte im niederenergetischen Grenzfall kein *fine-tuning* der Koeffizienten beinhaltet.

2.7 Symmetrien des O’RAIFEARTAIGH-Modells

Das Superpotential (2.30) des O’RAIFEARTAIGH-Modells hat eine R-Symmetrie mit den R-Ladungen

$$q_0 = 2, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 2. \quad (2.33)$$

Die notwendige Bedingung für die spontane Brechung der Supersymmetrie ist also erfüllt.

Das Vakuum ist charakterisiert durch $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, Φ_0 beliebig. Für alle Φ_0 (also in allen Grundzuständen) wird die Supersymmetrie spontan gebrochen. Für $\Phi_0 \neq 0$ ist auch die R-Symmetrie spontan gebrochen und die hinreichende Bedingung für spontane Supersymmetriebrechung ist erfüllt. Im Fall $\Phi_0 = 0$ ist die R-Symmetrie ungebrochen und die hinreichende Bedingung also nicht erfüllt. Dennoch ist die Supersymmetrie spontan gebrochen.

^{‡‡}Die R-Symmetrie ist *per definitionem* spontan gebrochen, wenn mindestens eines der R-geladenen Felder einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert hat.

Weiterhin hat das Superpotential des O'RAIFEARTAIGH-Modells eine Art „Spiegelsymmetrie“ (\mathbb{Z}_2 -Symmetrie):

$$\Phi_0 \rightarrow \Phi_0, \quad \Phi_1 \rightarrow -\Phi_1, \quad \Phi_2 \rightarrow -\Phi_2, \quad (2.34)$$

wie man sich leicht überzeugen kann.

DRAGON, ELLWANGER und SCHMIDT zeigen in ihrer Arbeit [17], daß das O'RAIFEARTAIGH-Modell das allgemeinste renormierbare Superpotential mit spontaner Supersymmetriebrechung ist, das Spiegelungs- und R -invariant ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob es neben dem O'RAIFEARTAIGH-Modell noch weitere Modelle für eine spontane Brechung der globalen Supersymmetrie gibt. Interessant ist also eine Klassifikation aller Superpotentiale W , die ein skalares Potential $V > 0$ liefern. Das läuft letztendlich darauf hinaus, alle Superpotentiale W zu finden, deren Gradient nirgends verschwindet.

Kapitel 3

Verallgemeinerung des O'RAIFEARTAIGH-Modells

3.1	Klassifikation von Superpotentialen (Zusammenfassung)	20
3.2	Untersuchung des Verhaltens der klassifizierten Superpotentialen im Unendlichen . .	20
3.3	Vervollständigung der Klassifikation	22
3.4	Eindeutigkeit des O'RAIFEARTAIGH-Modells . . .	23
3.5	Verallgemeinerung auf N Superfelder	24
3.6	Eigenschaften des verallgemeinerten Superpotentialen	25
3.6.1	Flache Richtungen	25
3.6.2	R-Symmetrie	27

In diesem Kapitel wird zunächst das Ergebnis einer früheren Arbeit [18] kurz zusammengefasst, in der alle *renormierbaren* Superpotentialen mit $N = 3$ chiralen Superfeldern danach klassifiziert wurden, ob ihr Gradient Null werden kann oder nicht. In dieser Arbeit konnten einige Fragen noch nicht abschließend geklärt werden. Das wird in diesem Kapitel nachgeholt und die Klassifikation damit vervollständigt.

Das O'RAIFEARTAIGH-Modell kann anschließend verallgemeinert werden, wobei sich mehrere Klassen ergeben. Abschließend werden die Eigenschaften dieser verallgemeinerten Klassen von Superpotentialen untersucht.

3.1 Klassifikation von Superpotentialen (Zusammenfassung)

In [18] wird ausgiebig Gebrauch von den Hilfsmitteln der projektiven Geometrie gemacht, um aus einer vollständigen Klassifikation aller projektiven Flächen dritter Ordnung mit Singularitäten diejenigen herauszufinden, die zur Konstruktion eines Superpotentials mit spontan gebrochener Supersymmetrie herangezogen werden können. Der Vollständigkeit halber ist diese Arbeit im Anhang ab Seite IX wiedergegeben. Dort werden auch alle nötigen Konzepte der projektiven Geometrie eingeführt, die zum Verständnis der folgenden Abschnitte nötig sind.

Im Ergebnis dieser Arbeit wurde eine Liste von Polynomen dritten Grades in den Variablen x_0 , x_1 und x_2 erhalten, deren Gradient im *Endlichen* nicht Null werden kann. Diese Polynome liefern also ein skalares Potential (2.24), das im *Endlichen* nicht Null werden kann und demnach, naiv betrachtet, zu einer spontanen Brechung der Supersymmetrie führen sollte. Zum einen befinden sich in dieser Liste aber Polynome von der Form $W = x_0 + f(x_1, x_2)$, für die es, wie in Abschnitt 2.5 erläutert, eben doch nicht zu einer Brechung der Supersymmetrie kommt. Zum anderen befinden sich in der Liste auch Polynome, die zwar nicht von der eben geschilderten Form sind, die aber dennoch nicht zu einer spontanen Supersymmetriebrechung führen, weil ihr Gradient im *Unendlichen* Null werden kann. Diese Polynome müssen aussortiert werden, da sie nicht zu einem stabilen Grundzustand mit gebrochener Supersymmetrie führen. Dies wird im nächsten Abschnitt getan.

Außerdem wurden in [18] nur die *singulären* projektiven Flächen untersucht. Unbeantwortet blieb in dieser Arbeit die Frage, ob auch die projektiven Flächen *ohne* Singularitäten Polynome mit nichtverschwindendem Gradienten liefern könnten. Diese Frage wird in Abschnitt 3.3 beantwortet.

3.2 Untersuchung des Verhaltens der klassifizierten Superpotentiale im Unendlichen

Unter den insgesamt 20 Polynomen mit nichtverschwindendem Gradienten aus Tabelle VII.1 befinden sich mehrere, deren Gradient entlang mindestens eines Weges im Unendlichen verschwindet.

Dazu gehört zum Beispiel $W = x_0x_1x_2 + x_0 + x_1$. Der Gradient dieses Polynoms lautet:

$$\begin{aligned}W_0 &= x_1x_2 + 1 \\W_1 &= x_0x_2 + 1 \\W_2 &= x_0x_1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.2. VERHALTEN DER SUPERPOTENTIALIALE IM UNENDLICHEN

Mit den Substitutionen $x_0 = x_1 = \varepsilon$ und $x_2 = -\frac{1}{\varepsilon}$ überzeugt man sich leicht, daß im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$, in dem x_2 gegen Unendlich geht, der Gradient von W verschwindet, wenngleich im Endlichen keine Lösung für $W_0 = W_1 = W_2 = 0$ existiert.

Auch der Gradient des Polynoms $W = x_0x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1(1 + ax_1 + bx_2)^2$ verschwindet für alle erlaubten Werte von a und b im Unendlichen. Für $a \neq 0$ werden dazu die Substitutionen $x_0 = -\frac{1}{2\varepsilon a^2}$, $x_1 = -\frac{1}{a}$ und $x_2 = \varepsilon$ vorgenommen, im Fall $a = 0$ setzt man $x_0 = \frac{4b^2\varepsilon^2 + 4b\varepsilon - 1}{8\varepsilon^3}$, $x_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}$ und $x_2 = \varepsilon$.

Der Gradient des Polynom $W = x_0(1 + ax_1 + bx_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2)$ kann nur für $a = b = 0$ nicht verschwinden. Dann erhält man nämlich ein Polynom vom Typ $W = x_0 + f(x_1, x_2)$ und damit $W_0 \equiv 1$.

Unter den Polynomen in Tabelle VII.1 gibt es noch eine ganze Reihe von diesem Typ, so beispielsweise die Polynome $W = x_0 + x_1x_2 + x_2^3$ und $W = x_0x_1 + x_2$. All diese Polynome sind zur Konstruktion von Superpotentialen mit spontan gebrochener Supersymmetrie jedoch ungeeignet, wie bereits in Abschnitt 2.5 angesprochen wurde. Wenn eines der Felder von den anderen entkoppelt wird, kommt es *nicht* zu einer Aufhebung der Massenentartung im Multiplett und somit auch nicht zu einer spontanen Brechung der Supersymmetrie.

Das einzige Polynom, dessen Gradient auch im Unendlichen nicht Null werden kann und das nicht von der trivialen Form $W = x_0 + f(x_1, x_2)$ ist, ist das Polynom $W = x_0x_2^2 + x_1(1 + cx_2)^2$, aus dem auch das O'RAIFEARTAIGH-Modell in seiner „Normalform“ (2.30) abgeleitet werden kann (siehe Abschnitt VI des Forschungsbelegs). Für den Parameter c müssen nur die Werte 0 und 1 in Betracht gezogen werden, da für $c \neq 0$ die Koordinatentransformation $x'_2 = cx_2$ und $x'_0 = \frac{1}{c^2}x_0$ vorgenommen und also o. B. d. A. $c = 1$ angenommen werden kann. Da man außerdem für $c = 0$ wiederum ein Polynom der Form $W = x_0 + f(x_1, x_2)$ erhalten würde, muß überhaupt nur der Fall $c = 1$ betrachtet werden. Für den Gradienten erhält man dann:

$$\begin{aligned} W_0 &= x_2^2 \\ W_1 &= (1 + x_2)^2 \\ W_2 &= 2x_0x_2 + 2x_1(1 + x_2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Um W_0 zum Verschwinden zu bringen, müßte man einen Weg wählen, entlang dessen $x_0 \rightarrow 0$ geht. Dann kann allerdings W_1 nicht mehr verschwinden. Der Gradient dieses Polynoms bleibt also auch im Unendlichen immer ungleich Null.

Aus den singulären projektiven Kubiken mit vier projektiven Koordinaten kann somit in der Tat nur *ein einziges* Polynom abgeleitet werden, dessen Gradient weder im Endlichen noch im Unendlichen verschwindet!

Es verbleibt noch die Untersuchung der Kubiken *ohne* Singularitäten.

3.3 Vervollständigung der Klassifikation

Wie im Abschnitt IV des Forschungsbelegs erläutert wird, ist es zur Herleitung eines Polynoms mit der Eigenschaft (II.1) aus den singulären projektiven Kubiken notwendig, eine Ebene ε zu finden, die

- 1.) alle Singularitäten der Kubik und
- 2.) alle Punkte $P \in \mathbb{P}^3$, deren 1. Polare ε ist, enthält.

Wenn man zeigen könnte, daß zu jeder singularitätenfreien Fläche 3. Ordnung $S : \widetilde{W} = 0$ und zu jeder Ebene ε ein Punkt $P \in \mathbb{P}^3$ existiert, so daß ε die 1. Polare in P bezüglich S ist, aber P *nicht* in ε liegt, dann wäre damit auch gezeigt, daß aus einer singularitätenfreien Kubik kein Polynom mit nichtverschwindendem Gradienten abgeleitet werden kann.

Es gilt: Jede Ebene ε im \mathbb{P}^3 ist 1. Polare eines Punktes P bezüglich $S : \widetilde{W}(x_0, \dots, x_3) = 0$. Sei $\varepsilon : x_3 = 0$. Dann besitzt das Gleichungssystem $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0$ mindestens eine Lösung, nämlich den Schnitt dreier Quadriken, und für jede Lösung gilt $\widetilde{W}_3 \neq 0$, da S keine Singularitäten hat. Die Ebene ε ist dann die 1. Polare eines jeden dieser Lösungspunkte.

Wenn ε *keine* Tangentialebene an S ist, so liegt keiner der Lösungspunkte P in ε . Um zu zeigen, daß keiner der Lösungspunkte in ε liegt, reicht es also aus, nur Tangentialebenen an S zu betrachten. Die Schnittkurve $\varepsilon \cap S$ besitzt dann mindestens eine Singularität und es müssen die folgenden sechs Fälle unterschieden werden:

- i) drei Berührungspunkte,
- ii) ein Schnittpunkt dreier Geraden als einziger Berührungspunkt,
- iii) zwei Schnittpunkte einer Quadrik und einer Gerade als Berührungspunkte,
- iv) der Berührungspunkt einer Quadrik und einer Gerade als einziger Berührungspunkt,
- v) eine Spitze als Berührungspunkt,
- vi) ein Doppelpunkt mit getrennten Tangenten als Berührungspunkt.

Es kann o. B. d. A. immer $\varepsilon : x_3 = 0$ betrachtet werden. Im ersten Fall dreier Berührungspunkte kann dann für die Gleichung von S o. B. d. A. geschrieben werden:

$$x_3 Q(x_0, \dots, x_3) + x_0 x_1 x_2 = 0 \quad \text{mit} \quad (3.3)$$

$$Q = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Außerdem muß $a_{00}, a_{11}, a_{22} \neq 0$ gelten, da anderenfalls einer der Punkte $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ eine Singularität von S wäre. Nach der Durchführung einer Projektivität

$$\begin{aligned}\rho x'_i &= \sqrt{a_{ii}} x_i \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \\ \rho x'_3 &= \sqrt{a_{00} a_{11} a_{22}} x_3\end{aligned}\tag{3.4}$$

kann sogar o. B. d. A. $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 1$ angenommen werden.

Es kann gezeigt werden, daß das Gleichungssystem

$$\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0, \quad x_3 = 1\tag{3.5}$$

immer lösbar ist. Somit liegen die Punkte P , deren 1. Polare $\varepsilon : x_3 = 0$ ist, *nicht* in ε , und man erhält demzufolge kein Polynom mit der Eigenschaft (II.1).

Ähnlich kann mit den übrigen fünf Fällen verfahren werden. Im Ergebnis kann festgehalten werden, daß aus den singularitätenfreien Kubiken kein Polynom mit nichtverschwindendem Gradienten abgeleitet werden kann.*

3.4 Eindeutigkeit des O'RAIFEARTAIGH-Modells

Das O'RAIFEARTAIGH-Modell ist im Fall $N = 3$ **das einzige renormierbare Modell mit spontaner Supersymmetrie-Brechung**. Dieses Ergebnis ist in der Tat interessant, denn zum einen geht diese besondere Stellung des Modells nicht aus O'RAIFEARTAIGHs Arbeit [15] hervor, da er dort nur *notwendige* Kriterien entwickelt, mit deren Hilfe er das Modell konstruiert, allerdings ohne ausschließen zu können, daß es im Fall $N = 3$ noch mehr Beispiele für Superpotentiale mit spontaner Supersymmetriebrechung geben könnte. Zum anderen konnte hier auch das Ergebnis der Arbeit von DRAGON, ELLWANGER und SCHMIDT [17] (siehe Abschnitt 2.7) verallgemeinert werden, in der das O'RAIFEARTAIGH-Modell unter der Forderung zusätzlicher Symmetrien hergeleitet wird.

Ein entscheidendes Ergebnis dieser Arbeit ist, daß selbst ohne die Forderung dieser zusätzlichen Symmetrien (R- und \mathbb{Z}_2 -Spiegelungssymmetrie) das O'RAIFEARTAIGH-Modell das einzig mögliche renormierbare Modell mit drei Superfeldern ist, das die Supersymmetrie spontan bricht. R- und \mathbb{Z}_2 -Symmetrie folgen zwanglos aus der Klassifikation.

*Die Rechnungen können hier nicht im Detail dargestellt werden. Mein Dank gilt an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Peter Brückmann [19].

3.5 Verallgemeinerung auf N Superfelder

Das O'RAIFEARTAIGH-Modell hängt nur von drei Superfeldern ab und ist damit das einfachste mögliche Modell für eine spontane Brechung der globalen Supersymmetrie. Dieser Abschnitt befaßt sich mit einer Verallgemeinerung dieses Modells auf $N \geq 3$ chirale Superfelder.

Um das charakteristische Merkmal des O'RAIFEARTAIGH-Polynoms[†] $W = x_0x_2^2 + x_1(1 + x_2)^2$, das als einziges nach der vollständigen Klassifikation für den Fall $N = 3$ übrigblieb, herauszuarbeiten, sei hier noch einmal der Gradient aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} W_0 &= x_2^2 \\ W_1 &= (1 + x_2)^2 \\ W_2 &= 2x_0x_2 + 2x_1(1 + x_2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die ausschlaggebende Eigenschaft dieses Polynoms besteht darin, daß in dem Gleichungssystem $W_0 = W_1 = W_2 = 0$ ein *überbestimmtes Untersystem* vorkommt. Das Untersystem $W_0 = W_1 = 0$ besteht aus *zwei Gleichungen* für nur *eine Variable*. Solch ein überbestimmtes System kann im allgemeinen nicht gelöst werden. Daher kann der Gradient des Superpotentials im O'RAIFEARTAIGH-Modell nicht Null werden, und zwar *weder im Endlichen noch im Unendlichen*.

Eine Verallgemeinerung des Superpotentials auf N Superfelder muß also dergestalt sein, daß im Gradienten immer ein *überbestimmtes Untersystem* enthalten ist. Diese Verallgemeinerung kann wie folgt angegeben werden:

$$\boxed{\begin{aligned} W^{[n]}(x_0, \dots, x_{N-1}) &= \sum_{i=0}^{n+1} x_i Q_i(x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}) + C(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}), \\ n &= 0, \dots, \left[\frac{N-3}{2} \right]. \end{aligned}} \tag{3.7}$$

Dabei sind die Q_i quadratische Polynome und C ein kubisches Polynom. Die obere Grenze $\left[\frac{N-3}{2} \right]$ für den Parameter n steht für die sogenannte *größte ganze Zahl* von $\frac{N-3}{2}$, das heißt:

$$\left[\frac{N-3}{2} \right] = \begin{cases} \frac{N-3}{2}, & N \text{ ungerade} \\ \frac{N-4}{2}, & N \text{ gerade} \end{cases}. \tag{3.8}$$

Mindestens eines der Polynome Q_i muß ein lineares Glied enthalten (was ja aber für generische Polynome ohnehin der Fall ist), so daß dann eine der Variablen x_0, \dots, x_{n+1} im Superpotential linear auftaucht. Ohne einen solchen linearen Term

[†]Wie bereits unmittelbar vor Gleichung (3.2) erläutert, kann o. B. d. A. $c = 1$ gesetzt werden

könnte der Gradient ganz einfach zum Verschwinden gebracht werden, indem alle Variablen Null gesetzt werden.

Für die Ableitungen $W_j^{[n]}$ dieser durch n parametrisierten Klassen von Superpotentialen erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{j = 0, \dots, n + 1} : \quad & W_j^{[n]} = Q_j(x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}) \\ \underline{j = n + 2, \dots, N - 1} : \quad & W_j^{[n]} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}) \\ & + \frac{\partial C}{\partial x_j}(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Das erste Untersystem ($j = 0, \dots, n + 1$) besteht aus $n + 2$ Gleichungen, hängt aber nur von $n + 1$ Variablen ab. Das System ist also überbestimmt und damit für *generische* Polynome Q_i nicht lösbar. Es gibt zwar Spezialfälle, in denen das System dennoch gelöst werden kann, zum Beispiel, wenn zwei der Polynome linear abhängig sind, also beispielsweise $Q_1 = 2Q_2$ gilt. Dann kann eine der Gleichungen eliminiert werden und das Gleichungssystem ist nicht mehr überbestimmt. Für generische Polynome Q_i wird dies aber nicht der Fall sein, und das verallgemeinerte Superpotential (3.7) stellt somit ein gutes „Rezept“ für die Formulierung von renormierbaren Theorien mit spontan gebrochener Supersymmetrie, die $N \geq 3$ chirale Superfelder enthalten, dar.

Im einfachsten möglichen Fall ($N = 3$) gibt es nur eine Klasse von Superpotentialen der Form (3.7), nämlich die mit $n = 0$. Man erhält dann:

$$W^{[0]}(x_0, x_1, x_2) = x_0 Q_0(x_2) + x_1 Q_1(x_2) + C(x_2). \quad (3.10)$$

Mit $Q_0 = x_2^2$, $Q_1 = (1 + x_2)^2$ und $C = 0$ erhält man das Superpotential des O’RAIFEARTAIGH-Modells in der Form $W = x_0 x_2^2 + x_1 (1 + x_2)^2$. Das kubische Polynom $C(x_2)$ spielt im Grunde keine Rolle, da es nur in der Ableitung W_2 auftaucht, aber bereits das Untersystem $W_0 = W_1 = 0$ ist überbestimmt. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, warum auf das kubische Polynom C ohnehin gänzlich verzichtet werden sollte.

3.6 Eigenschaften des verallgemeinerten Superpotentials

3.6.1 Flache Richtungen

Wie bereits am Ende von Abschnitt 2.5 angesprochen, besitzt das skalare Potential des O’RAIFEARTAIGH-Modells eine flache Richtung, da das globale Minimum $V_{\min} = |\lambda|^2$ für $A_1 = A_2 = 0$ angenommen wird, unabhängig davon, welchen Wert A_0 hat. Um diese Aussage zu präzisieren, soll hier noch einmal ein Blick auf das Superpotential des O’RAIFEARTAIGH-Modells

geworfen werden, und zwar in der Form, in der es in [18] klassifiziert wurde: $W = x_0x_2^2 + x_1(1 + x_2)^2$. Es seien nochmals die Ableitungen angegeben:

$$\begin{aligned} W_0 &= x_2^2 \\ W_1 &= (1 + x_2)^2 \\ W_2 &= 2x_0x_2 + 2x_1(1 + x_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Das skalare Potential erhält man als $V = |W_0|^2 + |W_1|^2 + |W_2|^2$. Bei der Berechnung des Minimums kann o. B. d. A. $W_2 = 0$ gesetzt werden, da dies die einzige Ableitung ist, die von x_0 und x_1 abhängt und diese beiden Variablen somit immer so gewählt werden können, daß $W_2 = 0$ wird. Es muß dann der Ausdruck $|W_0|^2 + |W_1|^2$ minimiert werden. Das absolute Minimum dieses Terms wird für $x_2 = \frac{1}{2}$ angenommen. Setzt man diesen Wert für x_2 ein, ist die Gleichung $W_2 = 0$ immer noch unterbestimmt, da sie von zwei Variablen abhängt. Das bedeutet, daß ein Parameter, zum Beispiel $x_0 = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ eingeführt werden kann. In Abhängigkeit von diesem Parameter ist dann x_1 festgelegt. Das Minimum wird aber *für alle Werte* von c , also auch *für alle Werte* von x_0 angenommen. Es existiert demnach eine flache Richtung. Eine flache Richtung hat ihren mathematischen Ursprung in einem *unterbestimmten* Untersystem, in dem ein Parameter eingeführt werden muß.

Es ist eine interessante Eigenschaft der verallgemeinerten Superpotentiale (3.7), daß auch sie immer eine flache Richtung besitzen. Dies wird deutlich, wenn die Ableitungen noch einmal näher betrachtet werden:

$$\underline{j = 0, \dots, n + 1} : \quad W_j^{[n]} = Q_j(x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}). \quad (3.12-a)$$

Hier hat man $n + 2$ Gleichungen für die $n + 1$ Variablen $x_{n+2} \dots, x_{2n+2}$. Aus der Minimierung der Summe der Betragsquadrate dieser Ableitungen werden diese Variablen festgelegt.

Als nächstes erhält man noch die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \underline{j = n + 2, \dots, 2n + 2} : \quad W_j^{[n]} &= \sum_{i=0}^{n+1} x_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}) \\ &+ \frac{\partial C}{\partial x_j}(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}) \end{aligned} \quad (3.12-b)$$

und

$$\underline{j = 2n + 3, \dots, N - 1} : \quad W_j^{[n]} = \frac{\partial C}{\partial x_j}(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}). \quad (3.12-c)$$

Es ist zunächst wichtig zu beobachten, daß nur in dem Untersystem (3.12-b) die Variablen x_0, \dots, x_{n+1} auftauchen. Dieses Untersystem besteht aus $n + 1$ Gleichungen und beinhaltet alle N Variablen. Da $n + 1$ Variablen bereits aus der Minimierung des Untersystem (3.12-a) bestimmt wurden, müssen nun nur

noch $N - n - 1$ Variablen bestimmt werden. Da für alle erlaubten Werte von n $N - n - 1 > n + 1$ gilt, ist das Untersystem (3.12-b) unterbestimmt und kann unter der Einführung von Parametern immer zu Null gelöst werden.

Das Untersystem (3.12-c) schließlich besteht aus $N - 2n - 3$ Gleichungen. Nach der Minimierung beziehungsweise Nullsetzung der beiden anderen Untersysteme sind noch genau $N - 2n - 3$ Variablen unbestimmt. Das Gleichungssystem (3.12-c) kann dann auch zu Null gelöst werden.

Entscheidend für das Auftreten flacher Richtungen ist die Notwendigkeit, im Untersystem (3.12-b) Parameter einzuführen.

Das Auftreten flacher Richtungen scheint in der Tat eine generische Eigenschaft von (renormierbaren) Modellen mit spontaner Supersymmetrie-Brechung zu sein, in denen ausschließlich chirale Superfelder auftreten!

3.6.2 R-Symmetrie

Wie in Abschnitt 2.6 erläutert, ist das Vorhandensein einer R-Symmetrie im Superpotential eine notwendige Bedingung für die spontane Brechung der Supersymmetrie. Auch das verallgemeinerte Superpotential (3.7) muß demzufolge eine R-Symmetrie aufweisen. Es muß also möglich sein, R-Ladungen q_i so zu bestimmen, daß die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
 e^{2i\alpha} W^{[n]}(x_0, \dots, x_{N-1}) &\equiv e^{2i\alpha} \sum_{i=0}^{n+1} x_i Q_i(x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}) \\
 &+ e^{2i\alpha} C(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}) \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} e^{i\alpha q_i} x_i Q_i(e^{i\alpha q_{n+2}} x_{n+2}, \dots, e^{i\alpha q_{2n+2}} x_{2n+2}) \\
 &+ C(e^{i\alpha q_{n+2}} x_{n+2}, \dots, e^{i\alpha q_{N-1}} x_{N-1})
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

erfüllt wird. Dies ist für den ersten Term ganz einfach zu realisieren, indem man für die R-Ladungen $q_0 = \dots = q_{n+1} = 2$ und $q_{n+2} = \dots = q_{2n+2} = 0$ setzt. Der erste Term hat somit in jedem Falle die geforderte R-Symmetrie.

Anders ist die Situation bei dem kubischen Polynom C , denn dieses hat im generischen Fall *keine* R-Symmetrie. Dazu muß in C nur ein konstanter Term auftreten. Das bedeutet, daß im generischen Fall das Auftreten des Polynoms C im Superpotential durch die R-Symmetrie *verboten* wird. Allerdings ist C ohnehin nicht für das Zustandekommen des überbestimmten Untersystem im Gradienten des Superpotentials ausschlaggebend. Fordert man nur einen überall von Null verschiedenen Gradienten, so kann man auf C verzichten. Für das verallgemeinerte Superpotential sollte deswegen nur noch der folgende Ausdruck

geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 W^{[n]}(x_0, \dots, x_{N-1}) &= \sum_{i=0}^{n+1} x_i Q_i(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}), \\
 n_{\min}^{\text{ger}} &= \frac{N-2}{2}, \quad n_{\min}^{\text{unger}} = \frac{N-3}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Dabei bedeuten n_{\min}^{ger} und n_{\min}^{unger} den Mindestwert, den n annehmen muß, damit ein überbestimmtes Untersystem entsteht, einmal für den Fall, daß die Anzahl der Superfelder N gerade ist, und einmal für den Fall, daß sie ungerade ist. Die Bedingungen an n ergeben sich, wenn man noch einmal die Ableitungen betrachtet:

$$\underline{j = 0, \dots, n+1} : \quad W_j^{[n]} = Q_j(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}), \tag{3.15-a}$$

$$\underline{j = n+2, \dots, N-1} : \quad W_j^{[n]} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(x_{n+2}, \dots, x_{N-1}). \tag{3.15-b}$$

Das System (3.15-b) besteht aus $N - n - 2$ Gleichungen und beinhaltet alle N Variablen. Es ist also unterbestimmt und kann im generischen Fall immer Null gesetzt werden. Das System (3.15-a) besteht aus $n + 2$ Gleichungen und hat $N - n - 2$ Variablen. Damit es überbestimmt wird, muß also die Relation $n + 2 > N - n - 2$ erfüllt sein. Ist $N = 2M$ (gerade), erhält man daraus die Bedingung $n > M - 2$. Da n eine ganze Zahl ist, ist der kleinstmögliche Wert also $n_{\min} = M - 1$. Substituiert man N wieder zurück, so erhält man $n_{\min}^{\text{ger}} = \frac{N-2}{2}$. Ist hingegen $N = 2M + 1$ (ungerade), so ergibt sich $n > M - \frac{3}{2}$, es ist dann also wiederum $n_{\min} = M - 1$. Substituiert man aber nun aus dem Ausdruck für ungerade N zurück, so erhält man $n_{\min}^{\text{unger}} = \frac{N-3}{2}$.

Durch die Forderung der R-Symmetrie kann das verallgemeinerte Superpotential also auf eine kürzere und einheitlichere Form eingeschränkt werden. Man hätte in dieser Arbeit auch von vornherein diese Symmetrie fordern können und wäre gleich bei der Form (3.14) angelangt. Hier sollte aber der Weg skizziert werden, wie das verallgemeinerte Superpotential in seiner endgültigen Form tatsächlich hergeleitet wurde – über Umwege.

An der Existenz der flachen Richtungen ändert sich übrigens nichts, da das System (3.15-b) für alle Werte von n unterbestimmt ist und bei der Minimierung des skalaren Potentials also wiederum Parameter eingeführt werden müssen.

Kapitel 4

Grundlagen der lokalen Supersymmetrie (Supergravitation) und ihre spontane Brechung

4.1	Chirale Superfelder auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten	29
4.2	Skalares Potential	30
4.3	Spontane Supersymmetriebrechung und das POLÓNYI-Modell	31

In diesem Abschnitt soll eine spontane Brechung der *lokalen* Version der Supersymmetrie, der *Supergravitation*, untersucht werden. Auch hier soll wieder nur der Fall $\mathcal{N} = 1$ mit chiralen Superfeldern in Betracht gezogen werden.

Ein wesentlicher Unterschied zur *globalen* Supersymmetrie besteht darin, daß die Transformations-Parameter ζ (siehe Abschnitt 2 und insbesondere Gl. (2.9) zum Vergleich mit den konstanten Parametern ξ im globalen Fall) nicht mehr konstant sind, sondern von den Superraum-Koordinaten θ , $\bar{\theta}$ und X abhängen. Die Parameter sind somit explizit raumzeitabhängig. In diesem Sinne kann man von der Supergravitation auch als einer *geeichten* Version der globalen Supersymmetrie sprechen.

4.1 Chirale Superfelder auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten

Ähnlich wie im globalen Fall (siehe Abschnitt 2.3) werden chirale Superfelder auch im lokalen Fall über eine kovariante Zwangsbedingung definiert, die in vollkommener Analogie zu Gleichung (2.15) wie folgt lautet:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \tag{4.1}$$

wobei $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$ eine Verallgemeinerung der kovarianten Ableitung (2.14) auf eine gekrümmte Raumzeit ist [9]. Chirale Superfelder enthalten drei Komponentenfelder. Diese könnten wieder als die Koeffizientenfunktionen einer Potenzreihenentwicklung in θ und $\bar{\theta}$ definiert werden. Diese Entwicklung wäre nun aber koordinatenabhängig. Daher ist es günstiger, die Komponenten eines chiralen Superfeldes Φ wie folgt zu definieren:

$$\begin{aligned} A &= \Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \\ \chi_{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{\alpha} \Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \\ F &= -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} \Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es werden neue Variablen Θ eingeführt, die so definiert sind, daß ein chirales Superfeld gerade wie folgt geschrieben werden kann:

$$\Phi = A(X) + \sqrt{2}\chi(X)\Theta + F(X)\Theta\Theta. \quad (4.3)$$

4.2 Skalares Potential

Aus der Verallgemeinerung der chiralen LAGRANGE-Dichte auf den lokalen Fall [9] ergibt sich für das skalare Potential:^{*}

$$V = e^{K/M^2} \left(|D_i W|^2 - \frac{3}{M^2} |W|^2 \right). \quad (4.4)$$

Dabei bedeuten M die PLANCK-Masse, K das KÄHLER-Potential, welches eine reelle Funktion ist, die von allen Superfeldern der Theorie abhängt, und $D_i W$ die kovariante Ableitung des Superpotentials W :[†]

$$D_i W = \frac{\partial W}{\partial \Phi_i} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial K}{\partial \Phi_i} W. \quad (4.5)$$

Das Betragsquadrat dieser kovarianten Ableitung ist gegeben durch:

$$|D_i W|^2 = K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} \quad (4.6)$$

mit der inversen KÄHLER-Metrik $K^{i\bar{j}}$, die durch $K^{i\bar{j}} K_{i\bar{j}} = \mathbb{1}$ mit $K_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi_i \partial \bar{\Phi}_{\bar{j}}}$ gegeben ist.

Dieses Potential ist *nicht* renormierbar, denn durch den Exponential-Faktor enthält die Potenzreihenentwicklung Terme beliebig hoher Ordnung.

^{*}Eigentlich müßte auch hier wieder der D -Term ($\sim D^2$) hinzugefügt werden. Da dessen Brechung aber unproblematisch ist, wird auch hier wieder nur der F -Term untersucht.

[†]Zur Berechnung des skalaren Potentials müssen natürlich die Superfelder Φ_i wieder durch die in ihnen enthaltenen Skalarfelder A_i ersetzt werden.

4.3 Spontane Supersymmetriebrechung und das POLÓNYI-Modell

Betrachtet man allgemein ein Modell mit N chiralen Superfeldern Φ_i , so gilt für die Variation der in ihnen enthaltenen Skalarfelder A_i unter einer Supersymmetrie-Transformation [9]:

$$\delta_\zeta A_i = \sqrt{2}\zeta\chi_i. \quad (4.7)$$

Der Vakuumerwartungswert dieser Variation ist Null.

Die Variation der Spinorfelder χ^i lautet unter Vernachlässigung sämtlicher Terme, deren Vakuumerwartungswert in jedem Falle Null ist [9]:

$$\delta_\zeta \chi^i = -\sqrt{2}e^{K/2}K^{i\bar{j}}D_{\bar{j}}\bar{W}\zeta. \quad (4.8)$$

Falls also am globalen Minimum des skalaren Potentials $D_i W = 0$ gilt, also der Vakuumerwartungswert $\langle D_i W \rangle = 0$ ist, so verschwindet diese Variation im Grundzustand und die Supersymmetrie ist ungebrochen. Hingegen wird die Supersymmetrie für $\langle D_i W \rangle \neq 0$ spontan gebrochen. In diesem Fall spielt χ die Rolle des GOLDSTONE-Fermions.

Um eine spontane Brechung der Supersymmetrie zu realisieren, muß demnach (mindestens im Grundzustand)

$$D_i W \neq 0 \quad (4.9)$$

gelten.

In diesem Abschnitt soll zunächst wieder ein einfaches Modell für die spontane Brechung der lokalen Supersymmetrie untersucht werden. Dabei werden wieder nur chirale Superfelder in Betracht gezogen. Im Gegensatz zur globalen Supersymmetrie ist zur Brechung der lokalen Supersymmetrie nur *ein* chirales Superfeld notwendig. Das einfachste Modell ist das POLÓNYI-Modell, das ein lineares Superpotential mit nur einem chiralen Superfeld hat [20, 21]:

$$W = m^2(\Phi + \beta). \quad (4.10)$$

Dabei ist β ein reeller Parameter. Für das KÄHLER-Potential wird angenommen:

$$K = \Phi\bar{\Phi}. \quad (4.11)$$

Für die kovariante Ableitung des Superpotentials ergibt sich, nachdem die Superfelder durch die in ihnen enthaltenen Skalarfelder ersetzt wurden:

$$D_A W = m^2 \left(1 + \frac{1}{M^2} A^*(A + \beta) \right). \quad (4.12)$$

Mit $A = re^{i\delta}$ schreibt sich die Gleichung $D_A W = 0$ folgendermaßen:

$$1 + \frac{1}{M^2} r^2 + \frac{1}{M^2} \beta r e^{-i\delta} = 0. \quad (4.13)$$

Für $\beta = 0$ hat diese Gleichung keine reelle Lösung für r ; dieser Fall kann also vernachlässigt werden. Für $\beta \neq 0$ wiederum kann der Imaginärteil der Gleichung nur verschwinden, falls $\delta = 0$ ist. Für r erhält man dann die beiden Lösungen:

$$r_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - M^2}. \quad (4.14)$$

Diese Lösungen sind nur dann reell, falls $|\beta| \geq 2M$ gilt. Der Umkehrschluß besagt, daß für $|\beta| < 2M$ die kovariante Ableitung $D_A W$ nirgends Null werden kann. *Im Parameterbereich $|\beta| < 2M$ ist die Supersymmetrie also in jedem Falle spontan gebrochen, da kein Grundzustand mit $D_A W = 0$ existieren kann.*

Als nächstes soll das globale Minimum des skalaren Potentials ermittelt werden. Da für $K = \Phi\bar{\Phi}$ die Ableitung $K_{\Phi\bar{\Phi}} = 1$ ist, ergibt sich:

$$V = \left(\frac{m}{M}\right)^4 e^{AA^*/M^2} \left[\{M^2 + A^*(A + \beta)\} \{M^2 + A(A^* + \beta)\} - 3M^2(A + \beta)(A^* + \beta) \right]. \quad (4.15)$$

Im Jahre 1977, als POLÓNYI dieses Modell vorschlug, war die Annahme einer verschwindenden *kosmologischen Konstante* ($\Lambda = 0$) noch mit den Meßdaten verträglich. Da der Wert der kosmologischen Konstante durch den Wert des skalaren Potentials an dessen absoluten Minimum gegeben ist (siehe dazu auch das folgende Kapitel), erschien damals vor allem ein Supergravitations-Modell mit spontan gebrochener Supersymmetrie und verschwindendem Vakuum-erwartungswert des skalaren Potential ($\langle V \rangle = 0$) interessant. Mit der Nebenbedingung $V = 0$ erhält man als Bestimmungsgleichung für die stationären Punkte:

$$A^*(A + \beta)(A^* + \beta) + A^* [M^2 + A(A^* + \beta)] = 2M^2(A^* + \beta). \quad (4.16)$$

Diese Gleichung kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$A^* (|A + \beta|^2 + |A|^2 - M^2) = 2\beta M^2 - \beta |A|^2. \quad (4.17)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist reell. Damit auch der Ausdruck auf der linken Seite reell ist, muß aber A^* reell sein, also $A \in \mathbb{R}$ gelten.[‡] In diesem Fall ist Gleichung (4.16) äquivalent zu:

$$(2A + \beta) [M^2 + A(A + \beta)] = 3M^2(A + \beta). \quad (4.18)$$

Die Bedingung für $V = 0$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$[M^2 + A(A + \beta)]^2 = 3M^2(A + \beta)^2. \quad (4.19)$$

[‡]Im Fall $\beta = 0$ könnte die Gleichung auch eine komplexe Lösung mit $|A| = \frac{M}{\sqrt{2}}$ haben. In diesem Fall wäre aber $V \neq 0$. Für $|A| = \sqrt{2}M$ verschwindet die rechte Seite der Gleichung auch für $\beta \neq 0$, die linke Seite wäre dann aber ungleich Null. Im Ergebnis dieser Betrachtungen ist also $A \in \mathbb{R}$ eine *notwendige* Bedingung für stationäre Punkte mit $V = 0$.

Setzt man diese Bedingung in Gleichung (4.18) ein, so ergibt sich schlußendlich:

$$[M^2 + A(A + \beta)]^2 = (A + \beta)(2A + \beta) [M^2 + A(A + \beta)]. \quad (4.20)$$

Diese Gleichung könnte zum einen durch $[M^2 + A(A + \beta)] = 0$ befriedigt werden. Damit diese Gleichung aber eine reelle Lösung hat, müßte $|\beta| \geq 2M$ sein. Hier interessiert jedoch nur der Parameterbereich $|\beta| < 2M$, da in ihm eine spontane Brechung der Supersymmetrie gewährleistet ist. Man kann sich also bei der Bestimmung der stationären Punkte mit $V = 0$ auf die Lösung der folgenden Gleichung beschränken:

$$M^2 + A(A + \beta) = (A + \beta)(2A + \beta). \quad (4.21)$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$A_{1,2} = -\beta \pm M. \quad (4.22)$$

Setzt man die erste Lösung $A_1 = -\beta + M$ in die Bedingung für $V = 0$ (Gleichung (4.19)) ein, so erhält man als die zwei möglichen Werte für β :

$$\beta_{1,2}^{(1)} = (2 \pm \sqrt{3})M. \quad (4.23)$$

Ähnlich erhält man dann für $A_2 = -\beta - M$ die beiden möglichen Werte:

$$\beta_{1,2}^{(2)} = (-2 \pm \sqrt{3})M. \quad (4.24)$$

Die Parameterwerte $\beta_1^{(1)}$ und $\beta_2^{(2)}$ liegen außerhalb des Bereiches $|\beta| < 2M$ und interessieren hier somit nicht weiter. Für kritische Punkte mit $V = 0$ kommen also die folgenden vier Kombinationen von β und A in Frage:

1. **Fall:** $\beta = (2 - \sqrt{3})M, \quad A = (\sqrt{3} - 1)M$
2. **Fall:** $\beta = -(2 - \sqrt{3})M, \quad A = -(\sqrt{3} - 1)M$
3. **Fall:** $\beta = (2 - \sqrt{3})M, \quad A = (\sqrt{3} - 3)M$
4. **Fall:** $\beta = -(2 - \sqrt{3})M, \quad A = -(\sqrt{3} - 3)M$

Allerdings erfüllen die Fälle 3 und 4 die Gleichung (4.18) nicht, sie sind also nur Scheinlösungen und keine kritischen Punkte. Es verbleibt demnach nur noch für die Fälle 1 und 2 die Untersuchung der zweiten Ableitung des skalaren Potentials, die für $V = \frac{\partial V}{\partial A} = 0$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} = \left(\frac{m}{M}\right)^4 e^{A^2/M^2} [12A^2 + 12\beta A + 2(\beta^2 - M^2)]. \quad (4.25)$$

Diese Ableitung ist für die Fälle 1 und 2 größer als Null, es handelt sich also um lokale Minima. Da es für die beiden möglichen β -Werte jeweils nur einen kritischen Punkt gibt, ist $V = 0$ auch das globale Minimum.

Für $|\beta| = (2 - \sqrt{3})M$ erhält man also mit dem Superpotential (4.10) ein Supergravitationsmodell mit spontan gebrochener Supersymmetrie und einer verschwindenden kosmologischen Konstante.

Neueste kosmologische Messungen legen jedoch einen *positiven* Wert $\Lambda > 0$ der kosmologischen Konstante nahe (siehe zum Beispiel [4-6]). Mit der Realisierung von Modellen zur Beschreibung einer positiven kosmologischen Konstante beschäftigt sich diese Arbeit in ihrem weiteren Verlauf.

Kapitel 5

DE SITTER-Vakua und die kosmologische Konstante

Anders als im Fall der *globalen* Supersymmetrie ist das skalare Potential im *lokalen* Fall nicht automatisch positiv definit. Auch mit $D_i W \neq 0$ kann das Potential (4.4) am globalen Minimum Null oder sogar negativ sein. Im Fall eines verschwindenden Vakuumerwartungswertes, $\langle V \rangle = 0$, spricht man von einem MINKOWSKI-Vakuum, im Fall $\langle V \rangle < 0$ von einem Anti-DE SITTER-Vakuum. Nach den Ergebnissen der neuesten kosmologischen Messungen interessieren aber nur noch DE SITTER-Vakua, für die

$$\langle V \rangle > 0 \quad (5.1)$$

gilt. Dieser Fall ist besonders interessant, da durch den Wert des skalaren Potentials am globalen Minimum, $\langle V \rangle$, der Wert der kosmologischen Konstante Λ gegeben ist. Ein positiver Wert für die kosmologische Konstante, wie er durch neueste kosmologische Messungen nahegelegt wird, kann nur durch ein Modell mit einem DE SITTER-Vakuum erklärt werden. Es ist erwähnenswert, daß eine positive kosmologische Konstante eine spontane Brechung der Supersymmetrie *bedingt*, denn nur für $\langle D_i W \rangle \neq 0$ (Brechung der Supersymmetrie) kann V am globalen Minimum überhaupt positiv werden.

Zunächst soll untersucht werden, ob das POLÓNYI-Modell in einem bestimmten Parameterbereich für β einen stabilen DE SITTER-Grundzustand liefern kann. Dazu muß das skalare Potential V *positiv definit* sein. Aus Gleichung (4.15) ergibt sich, daß dies der Fall ist, wenn gilt:

$$\tilde{V} := \left[\{M^2 + A^*(A + \beta)\} \{M^2 + A(A^* + \beta)\} - 3M^2(A + \beta)(A^* + \beta) \right] > 0. \quad (5.2)$$

Nach der Substitution $A = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) erhält man daraus:

$$\tilde{V} = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2x\beta + \beta^2) - M^2(x^2 + y^2 + 4x\beta + 3\beta^2) + M^4. \quad (5.3)$$

Das Vorzeichen vor der höchsten Potenz von x beziehungsweise y ist jeweils positiv. Das heißt, \tilde{V} entspricht einer nach oben geöffneten Parabel. Die Forderung nach einem positiv definiten skalaren Potential läuft demnach darauf hinaus, daß \tilde{V} keine Nullstellen haben darf. Da nur gerade Potenzen von y auftreten, kann $y^2 =: Y \geq 0$ gesetzt werden und man erhält eine quadratische Funktion in Y :

$$\tilde{V} = (x^2 + Y)(x^2 + Y + 2x\beta + \beta^2) - M^2(x^2 + Y + 4x\beta + 3\beta^2) + M^4. \quad (5.4)$$

Die Gleichung $\tilde{V} = 0$ hat die folgenden zwei Lösungen in Y :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} \left(-2x^2 - 2x\beta + M^2 - \beta^2 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{4\beta^2 x^2 + (4\beta^3 + 12\beta M^2)x + \beta^4 + 10M^2\beta^2 - 3M^4} \right), \\ Y_2 &= \frac{1}{2} \left(-2x^2 - 2x\beta + M^2 - \beta^2 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{4\beta^2 x^2 + (4\beta^3 + 12\beta M^2)x + \beta^4 + 10M^2\beta^2 - 3M^4} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Diese Funktionen $Y(x)$ entsprechen nach unten geöffneten Parabeln. Da aber $Y \geq 0$ sein muß, kommen nur die Bereiche in Betracht, in denen Y nicht negativ ist. Y_1 und Y_2 haben identische Nullstellen. Sie lauten:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{3}M - \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\sqrt{3}M\beta - M^2} \right), \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{3}M - \beta + \sqrt{\beta^2 - 2\sqrt{3}M\beta - M^2} \right), \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}M - \beta - \sqrt{\beta^2 + 2\sqrt{3}M\beta - M^2} \right), \\ x_4 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}M - \beta + \sqrt{\beta^2 + 2\sqrt{3}M\beta - M^2} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

An dieser Stelle sind vor allem die beiden unterschiedlichen Radikanden interessant:

$$\begin{aligned} R_1(\beta) &= \beta^2 - 2\sqrt{3}M\beta - M^2, \\ R_2(\beta) &= \beta^2 + 2\sqrt{3}M\beta - M^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wenn es möglich ist, einen Parameterbereich von β so zu bestimmen, daß sowohl R_1 als auch R_2 negativ definit sind, so hat Y keine reellen Nullstellen und ist folglich ebenfalls negativ definit. Dies widerspricht aber der notwendigen Forderung $Y \geq 0$ und bedeutet in letzter Konsequenz, daß \tilde{V} keine Nullstellen hat und das skalare Potential in diesem Parameterbereich positiv definit ist. Es ist in der Tat möglich, einen Bereich für β anzugeben, in dem beide Radikanden kleiner als Null sind. Beide Radikanden entsprechen nach oben geöffneten Parabeln in

β , sie sind demzufolge in dem Bereich zwischen den beiden Nullstellen negativ definit. Leicht überzeugt man sich davon, daß R_1 beziehungsweise R_2 jeweils in den folgenden β -Intervallen kleiner als Null sind:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left((\sqrt{3} - 2)M, (\sqrt{3} + 2)M \right), \\ I_2 &= \left((-\sqrt{3} - 2)M, (-\sqrt{3} + 2)M \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Der Überlappungsbereich dieser beiden Intervalle ist

$$|\beta| < (2 - \sqrt{3})M. \quad (5.9)$$

Für $|\beta| = (2 - \sqrt{3})M$ wird gerade ein MINKOWSKI-Vakuum mit $\langle V \rangle = 0$ realisiert, für alle dem Betrage nach kleineren β -Werte wird ein DE SITTER-Vakuum mit positiv definitem skalarem Potential angenommen.*

Realistische Modelle mit DE SITTER-Grundzustand müssen eine extrem kleine kosmologische Konstante ($\Lambda \approx 10^{-120}M^4$) liefern, um mit den Experimenten verträglich zu sein. Da der Parameter m in etwa von der Größenordnung der PLANCK-Masse sein sollte und der Exponentialfaktor e^{AA^*/M^2} nicht kleiner als Eins werden kann, ist der Vorfaktor $\left(\frac{m}{M}\right)^4 e^{AA^*/M^2}$ des skalaren Potential (4.15) immer mindestens von der Größenordnung Eins. Um also die extrem kleine kosmologische Konstante erklären zu können, muß der Term

$$\tilde{V} = \{M^2 + A^*(A + \beta)\} \{M^2 + A(A^* + \beta)\} - 3M^2(A + \beta)(A^* + \beta) \quad (5.10)$$

entsprechend klein gehalten werden. Dies schränkt den Parameterbereich für β wiederum empfindlich ein. So kann für $\beta = 0$ der Ausdruck \tilde{V} nicht kleiner als $\frac{3}{4}M^4$ werden. Es kommen lediglich β -Werte in Frage, deren Betrag nur unwesentlich kleiner als $(2 - \sqrt{3})M$ ist, so daß das skalare Potential zwar positiv definit ist, sein globales Minimum aber noch sehr nahe bei Null liegt. Die Stelle des globalen Minimums wird sich dann auch nur sehr wenig von der im Fall $|\beta| = (2 - \sqrt{3})M$ unterscheiden.

Mit der Definition[†]

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{\left(\frac{m}{M}\right)^4 e^{AA^*/M^2}} \quad (5.11)$$

und der Nebenbedingung $\langle V \rangle = \Lambda$ erhält man als Bedingung für die stationären Punkte des skalaren Potentials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial A} &= \left(\frac{m}{M}\right)^4 e^{AA^*/M^2} \left\{ \frac{A^*}{M^2} \Lambda' + A^* [M^2 + A(A^* + \beta)] \right. \\ &\quad \left. + [M^2 + A^*(A + \beta)] (A^* + \beta) - 3M^2(A^* + \beta) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

*Der DE SITTER-Sektor liegt innerhalb des Bereiches für die spontane Brechung der Supersymmetrie, $|\beta| < 2M$. Es ist offensichtlich, daß dies so sein muß, da ein DE SITTER-Grundzustand die Supersymmetrie notwendigerweise bricht, wie zu Beginn dieses Abschnitts bereits erläutert wurde.

†Nach dieser Definition ist Λ' höchstens von derselben Größenordnung wie Λ , unter Umständen (für sehr große Werte von A) noch kleiner.

Umgestellt erhält man daraus die Beziehung:

$$A^* \left[-\frac{\Lambda'}{M^2} + M^2 - 2|A|^2 - 2\beta\Re A - \beta^2 \right] = \beta (|A|^2 - 2M^2). \quad (5.13)$$

Daraus leitet man wieder ab, daß A reell sein muß.[‡] Die Bestimmungsgleichung für die stationären Punkte vereinfacht sich somit zu:

$$2A^3 + 3\beta A^2 - \left(M^2 - \beta^2 - \frac{\Lambda'}{M^2} \right) A - 2\beta M^2 = 0. \quad (5.14)$$

Diese Gleichung hat für $\beta \neq 0$ immer zwei komplexe und nur höchstens eine reelle Lösung. Letztere hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle = \frac{1}{12} \left\{ -6\beta + \frac{6\sqrt[3]{2}(2M^4 + M^2\beta^2 - 2\Lambda')}{\sqrt[3]{162M^8\beta + 54M^4\beta\Lambda' + \sqrt{R}}} \right. \\ \left. + \frac{1}{M^2} \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{162M^8\beta + 54M^4\beta\Lambda' + \sqrt{R}} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit dem Radikanden

$$R = 4(-6M^6 - 3M^4\beta^2 + 6M^2\Lambda')^3 + (162M^8\beta + 54M^4\beta\Lambda')^2. \quad (5.16)$$

Diese Lösung ist aber auch nur dann reell, wenn der Radikand R größer als Null ist. Dies ist zum Beispiel für $\beta = 0$ nicht gewährleistet, da Λ und somit auch Λ' sehr klein im Vergleich zur PLANCK-Skala ist und der Ausdruck in der ersten Klammer negativ wird. Nach den weiter oben durchgeführten Überlegungen kommen für β aber ohnehin nur Werte

$$\beta_\varepsilon = \pm(2 - \sqrt{3} - \varepsilon)M \quad (5.17)$$

mit einem hinreichend kleinen positiven ε in Frage. In diesem Fall ist $R > 0$, falls $\varepsilon \lesssim 0,08$ ist, und es existiert ein reeller stationärer Punkt. Für $\beta = \pm(2 - \sqrt{3})M$ und dementsprechend $\Lambda' = 0$ erhält man aus Gleichung (5.15) wieder die Stellen des globalen Minimums im MINKOWSKI-Fall: $\langle A \rangle = \pm(\sqrt{3} - 1)M$.

Für die zweite Ableitung des skalaren Potentials ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial A^2} = \left(\frac{m}{M} \right)^4 e^{A^2/M^2} \left\{ \frac{2}{M^2} \Lambda' + \frac{2A}{M^2} [4A^3 + 6\beta A^2 + 2(\beta^2 - M^2)A - 4\beta M^2] \right. \\ \left. + 12A^2 + 12\beta A + 2(\beta^2 - M^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

[‡]Im Fall $\beta = 0$ könnte A auch komplex sein. Jedoch hinge dann das skalare Potential (4.15) nur von $|A|$ ab, wäre also rotationssymmetrisch. Deswegen kann das globale Minimum auch in diesem Fall o. B. d. A. für $A \in \mathbb{R}$ bestimmt werden, denn es wird dann insbesondere auch auf der reellen Achse angenommen. Falls $\beta \neq 0$, aber $|A| = \sqrt{2}M$ ist, so verschwindet wiederum die rechte Seite der Gleichung. Damit auch die linke Seite Null wird, müßte gelten: $2\beta\Re A = -\frac{\Lambda'}{M^2} - 3M^2 - \beta^2$. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist wegen $\Lambda, \Lambda' > 0$ in jedem Falle kleiner als $-3M^2$. Der Term $2\beta\Re A$ auf der linken Seite ist aber im Parameterbereich $|\beta| < (2 - \sqrt{3})M$ nicht kleiner als $-2\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})M^2 \approx -0,76M^2$. Die Gleichung kann also nicht erfüllt werden und A kann demzufolge als reell angenommen werden.

Diese Ableitung ist für $|\beta| \lesssim (2 - \sqrt{3})M$ und die damit aus Gleichung (5.15) ermittelten stationären Punkte positiv. Das heißt, *es liegen stabile DE SITTER-Grundzustände vor*.

Der von den Experimenten nahegelegte außerordentlich kleine Wert der kosmologischen Konstante ($\Lambda \approx 10^{-120} M^4$) wird vom POLÓNYI-Modell nicht auf natürliche Weise hervorgebracht. Es muß vielmehr ein *fine-tuning* des Parameters β vorgenommen werden, das heißt, β muß sehr genau (auf viele Stellen nach dem Komma) eingestellt werden.

Kapitel 6

Modifikationen des POLÓNYI-Modells

6.1	Bemerkungen zum POLÓNYI-Modell	41
6.2	Verallgemeinerung auf N Superfelder	42
6.3	Einfluß des KÄHLER-Potentials	44

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit möglichen Abänderungen des POLÓNYI-Modells. Dabei wird zunächst die Möglichkeit der Einführung nichtlinearer Terme im Superpotential (4.10) untersucht. Danach wird auf die Einführung beliebig vieler chiraler Superfelder und auf den Einfluß des KÄHLER-Potentials eingegangen.

6.1 Bemerkungen zum POLÓNYI-Modell

Das POLÓNYI-Modell ist ein Modell zur spontanen Brechung der Supergravitation auf dem *tree level*, das heißt, es werden keine Quantenkorrekturen berücksichtigt. Der Grundzustand wird für Vakuumerwartungswerte des Skalarfeldes in der Größenordnung der PLANCK-Masse angenommen: $|\langle A \rangle| \approx M$ (siehe Abschnitt 4.3). Erreichen die Skalarfelder aber solche Werte, sind die Quantenkorrekturen möglicherweise nicht mehr vernachlässigbar und die *tree level*-Näherung erscheint fragwürdig [21].

Weiterhin ist das Superpotential $W = m^2(\Phi + \beta)$ nicht „natürlich“, da es nicht das allgemeinste mit seinen Symmetrien konsistente Superpotential ist, denn Terme Φ^2, Φ^3, \dots treten nicht auf [21]. Ein Superpotential $W = m^2\Phi$ wäre natürlich, da es im Gegensatz zum POLÓNYI-Modell eine R-Symmetrie (siehe Abschnitt 2.6) hat, die Terme höherer Ordnung verbietet. Die Einführung von β zerstört diese Symmetrie. Dieser Parameter ist aber notwendig, um den Vakuumerwartungswert des skalaren Potentials auf die Größenordnung der kosmologischen Konstante zu justieren.

Die Einführung von Termen Φ^2, Φ^3, \dots im POLÓNYI-Modell führt dazu, daß im allgemeinen kein β -Sektor bestimmbar ist, innerhalb dessen die kovariante

Ableitung $D_A W$ nicht verschwinden kann und eine spontane Brechung der Supersymmetrie gewährleistet wird. Dies soll hier kurz exemplarisch erläutert werden. Wählt man für das Superpotential etwa

$$W = m^2 \left(\Phi + \frac{\Phi^2}{m} + \beta \right) \quad (6.1)$$

und behält das KÄHLER-Potential $K = \Phi \bar{\Phi}$ bei, so erhält man für die kovariante Ableitung des Superpotentials:

$$D_A W = m^2 + 2mA + \frac{m^2}{M^2} A^* \left(A + \frac{A^2}{m} + \beta \right). \quad (6.2)$$

Aus dieser Gleichung erhält man anders als beim POLÓNÝI-Modell keine Realitätsbedingung für A . Ohne diese Einschränkung kann die Gleichung aber immer gelöst werden. Es gibt also keinen Parameterbereich für β , in dem keine Lösung für $D_A W = 0$ existiert. Damit wird jedoch das skalare Potential (4.4) in jedem Falle Null, in der Regel sogar negativ und kommt keinesfalls für die Konstruktion eines DE SITTER-Grundzustandes in Betracht.

In letzter Konsequenz kann also in den Fällen mit Termen höherer Ordnung das *globale* Minimum von V in der Regel nicht auf Null justiert werden, dies gelingt höchstens für *lokale* Minima. Das skalare Potential nimmt somit auch negative Werte an und kann keinen DE SITTER-Grundzustand liefern. Es gibt zwar Ausnahmen, aber in diesen Fällen sind die Potentiale extrem kompliziert, und die Berechnung der Minima erfordert normalerweise den Einsatz numerischer Methoden [22].

6.2 Verallgemeinerung auf N Superfelder

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwiefern das POLÓNÝI-Modell sich auf eine beliebige Anzahl von Superfeldern verallgemeinern lässt. Wie bereits im vorigen Abschnitt erläutert wurde, ist es nicht ohne Weiteres möglich, nicht-lineare Terme zum Superpotential zu addieren. Stattdessen soll hier zunächst eine noch naheliegendere Verallgemeinerung untersucht werden:

$$W = m^2 \left(\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i \right), \quad K = \Phi_i \bar{\Phi}_i. \quad (6.3)$$

Die kovarianten Ableitungen lauten entsprechend:*

$$\begin{aligned}
 D_0W &= m^2 + \frac{m^2}{M^2}A_0^*(A_0 + A_1 + \dots + A_{N-1} + \beta), \\
 D_1W &= m^2 + \frac{m^2}{M^2}A_1^*(A_0 + A_1 + \dots + A_{N-1} + \beta), \\
 D_2W &= m^2 + \frac{m^2}{M^2}A_2^*(A_0 + A_1 + \dots + A_{N-1} + \beta), \\
 &\vdots \\
 D_{N-1}W &= m^2 + \frac{m^2}{M^2}A_{N-1}^*(A_0 + A_1 + \dots + A_{N-1} + \beta).
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Setzt man diese Ableitungen Null, so erhält man zunächst aus $D_0W = D_1W = 0$ die *notwendige* Bedingung $A_0 = A_1$. Genauso kann man mit den Ableitungen D_0W und D_2W verfahren und so weiter. Letzten Endes muß notwendigerweise $A_0 = A_1 = \dots = A_{N-1}$ gelten und das System reduziert sich auf eine einzige Gleichung:

$$M^2 + A^*(NA + \beta) = 0. \tag{6.5}$$

Diese kann wieder nur für reelle A gelöst werden und vereinfacht sich demnach:

$$A^2 + \frac{\beta}{N}A + \frac{M^2}{N} = 0. \tag{6.6}$$

Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, falls $\frac{\beta^2}{4N^2} < \frac{M^2}{N}$ ist, also

$$|\beta| < 2\sqrt{NM} \tag{6.7}$$

gilt. Im Fall $N = 1$ (POLÓNYI-Modell) folgt daraus wieder der Symmetriebrechungssektor $|\beta| < 2M$.

Es ist also möglich, für ein lineares Superpotential mit N Superfeldern einen β -Sektor zu bestimmen, in dem die Supersymmetrie spontan gebrochen ist. Entscheidend dabei ist die Realitätsbedingung an A , die sich aus Gleichung (6.5) ergibt.

Allerdings ist es nicht ohne Weiteres möglich zu bestimmen, ob es auch in diesem verallgemeinerten Fall wieder einen β -Sektor mit einem positiv definiten skalaren Potential gibt. Im Fall $N = 1$ konnte dieser bestimmt werden, jedoch erscheint mir die Durchführung der Analyse aus Kapitel 5 für beliebige Werte von N nur sehr schwer oder gar unmöglich durchführbar. Die besondere Schwierigkeit besteht darin, daß man nicht nur mehr Variablen zu berücksichtigen hat, sondern diese quasi auch noch untereinander „wechselwirken“, das heißt, es treten zum Beispiel Produkte der Art $A_0A_1^*|A_2|^2$ auf. Solcherlei Produkte können insbesondere im Unendlichen sehr unterschiedliches Verhalten aufweisen. So könnte ein solches Produkt entlang eines Weges divergieren, entlang eines anderen

*Die KÄHLER-Metrik ist hier einfach die Einheitsmatrix: $K_{i\bar{j}} = K^{i\bar{j}} = \mathbf{1}$.

Weges aber gegen Null gehen. Das skalare Potential des POLÓNYSI-Modells weist solche Möglichkeiten nur in sehr eingeschränktem Umfang auf (Wechselwirkung Real-/Imaginärteil), und es erscheint mir daher recht unwahrscheinlich, daß man den DE SITTER-Sektor für N Superfelder durch eine simple Verallgemeinerung des entsprechenden Sektors im POLÓNYSI-Fall erhalten könnte. Eine naive Mutmaßung dieser Art könnte etwa sein, daß der DE SITTER-Sektor des POLÓNYSI-Modells auf analoge Weise verallgemeinert werden kann wie der Sektor für die spontane Supersymmetriebrechung, indem einfach mit dem Faktor \sqrt{N} multipliziert wird, also das verallgemeinerte skalare Potential im Sektor $|\beta| < (2 - \sqrt{3})\sqrt{N}M$ positiv definit sein sollte. Indes ist diese Vermutung aufgrund der geschilderten Schwierigkeiten nur schwerlich verifizierbar.

6.3 Einfluß des KÄHLER-Potentials

In den bisherigen Untersuchungen wurde für das KÄHLER-Potential immer die Form $K = \Phi\bar{\Phi}$ angenommen. Es kann jedoch auch eine andere Form haben. Interessant ist beispielsweise ein KÄHLER-Potential, das nur vom Realteil des Superfeldes abhängt:

$$K = K(\Phi + \bar{\Phi}). \quad (6.8)$$

Das Superpotential soll die POLÓNYSI-Form haben:

$$W = m^2(\Phi + \beta). \quad (6.9)$$

Ein *lineares* KÄHLER-Potential

$$K = m(\Phi + \bar{\Phi}) \quad (6.10)$$

indes macht keinen Sinn, denn die KÄHLER-„Metrik“ $K_{\Phi\bar{\Phi}}$ wäre gleich Null, die inverse Metrik würde nicht existieren und das skalare Potential (4.4) wäre nicht definiert.

Interessanter ist das KÄHLER-Potential

$$K = (\Phi + \bar{\Phi})^2, \quad (6.11)$$

für das die inverse KÄHLER-Metrik $K^{\Phi\bar{\Phi}} = \frac{1}{2}$ ist. Hier lautet die kovariante Ableitung:

$$D_A W = m^2 + \frac{2m^2}{M^2}(A + A^*)(A + \beta). \quad (6.12)$$

Die Gleichung $D_A W = 0$ lautet:

$$2A^2 + \underbrace{2|A|^2 + 2\beta(A + A^*) + M^2}_{\in \mathbb{R}} = 0. \quad (6.13)$$

Damit diese Gleichung lösbar ist, muß $A \in \mathbb{R}$ sein.[†] Die Gleichung vereinfacht sich deshalb zu:

$$A^2 + \beta A + \frac{M^2}{4} = 0. \quad (6.14)$$

Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, falls

$$|\beta| < M \quad (6.15)$$

ist. Die Supersymmetrie ist in diesem Sektor spontan gebrochen.

Es stellt sich die Frage, ob auch für das KÄHLER-Potential $K = (\Phi + \bar{\Phi})^2$ ein β -Sektor existiert, innerhalb dessen das skalare Potential positiv definit ist. Es hat jetzt folgende Gestalt:

$$V = \left(\frac{m}{M}\right)^4 e^{(A+A^*)^2/M^2} \left[\frac{1}{2} \{M^2 + 2(A + A^*)(A + \beta)\} \times \right. \\ \left. \times \{M^2 + 2(A + A^*)(A^* + \beta)\} - 3M^2(A + \beta)(A^* + \beta) \right]. \quad (6.16)$$

Es muß wieder der Teil

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \{M^2 + 2(A + A^*)(A + \beta)\} \{M^2 + 2(A + A^*)(A^* + \beta)\} \\ - 3M^2(A + \beta)(A^* + \beta) \quad (6.17)$$

größer als Null sein. Nach den Substitutionen $A = x + iy$ und $y^2 = Y$ ergibt sich:

$$\tilde{V} = (8x^2 - 3M^2)Y + 8x^4 + 16\beta x^3 + (M^2 + 8\beta^2)x^2 - 2\beta M^2 x + \frac{M^4}{2} - 3\beta^2 M^2. \quad (6.18)$$

\tilde{V} entspricht wieder einer nach oben geöffneten Parabel. Die Untersuchung, für welche β -Werte V positiv definit ist, läuft also wieder darauf hinaus zu bestimmen, in welchem β -Sektor \tilde{V} keine Nullstellen hat. Aus $\tilde{V} = 0$ bestimmt man:

$$Y = \frac{-8x^4 - 16\beta x^3 - (M^2 + 8\beta^2)x^2 + 2\beta M^2 x + 3\beta^2 M^2 - \frac{M^4}{2}}{8x^2 - 3M^2}. \quad (6.19)$$

Diese Funktion muß reell und nichtnegativ sein, falls eine Lösung zu $\tilde{V} = 0$ existieren soll. Y entspricht einer nach unten geöffneten Parabel. Bestimmt man also β derart, daß Y keine reellen Nullstellen besitzt, so ist diese Funktion immer negativ, es existieren keine Nullstellen zu \tilde{V} , und das skalare Potential V ist

[†]Natürlich wäre A^2 auch für ein rein imaginäres Feld $A = iy$ reell, aber weil dann $A + A^* = 0$ wäre, könnte in diesem Fall die kovariante Ableitung (6.12) keinesfalls Null werden.

positiv definit. Die Nullstellen von Y lauten:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{8} \left(-\sqrt{6}M - 4\beta - \sqrt{2}\sqrt{R_1} \right), \\
 x_2 &= \frac{1}{8} \left(-\sqrt{6}M - 4\beta + \sqrt{2}\sqrt{R_1} \right), \\
 x_3 &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{6}M - 4\beta - \sqrt{2}\sqrt{R_2} \right), \\
 x_4 &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{6}M - 4\beta + \sqrt{2}\sqrt{R_2} \right)
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

mit den beiden Radikanden

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 8\beta^2 - 4\sqrt{6}M\beta - 5M^2, \\
 R_2 &= 8\beta^2 + 4\sqrt{6}M\beta - 5M^2.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Y besitzt keine reelle Nullstelle, wenn man β so einstellt, daß *beide* Radikanden negativ werden. R_1 beziehungsweise R_2 sind jeweils in den folgenden β -Intervallen negativ:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left(\frac{5M}{2(-4 - \sqrt{6})}, \frac{5M}{2(4 - \sqrt{6})} \right), \\
 I_2 &= \left(\frac{5M}{2(-4 + \sqrt{6})}, \frac{5M}{2(4 + \sqrt{6})} \right).
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Der Überlappungsbereich dieser beiden Intervalle ist

$$|\beta| < \frac{5M}{2(4 + \sqrt{6})}. \tag{6.23}$$

Für Parameterwerte innerhalb dieses Bereiches ist das skalare Potential also positiv definit. Der DE SITTER-Sektor liegt selbstverständlich wieder innerhalb des Supersymmetriebrechungssektors $|\beta| < M$.

Für die Parameterwerte

$$\beta = \pm \frac{5M}{2(4 + \sqrt{6})} \tag{6.24}$$

wird wieder ein MINKOWSKI-Vakuum mit $\langle V \rangle = 0$ realisiert, und zwar an den Stellen

$$\langle A \rangle = \pm \frac{M}{4 + 2\sqrt{6}}. \tag{6.25}$$

In diesem Fall ist der Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes deutlich kleiner als beim POLÓNYSI-Modell, er ist hier nur $|\langle A \rangle| \approx 0,11M$. Zum Vergleich: Beim POLÓNYSI-Modell beträgt dieser Wert immerhin mehr als $0,7M$. Das bedeutet, daß das Modell mit $K = (\Phi + \bar{\Phi})^2$ das Kriterium für eine sichere *tree level*-Näherung wesentlich besser erfüllt als das POLÓNYSI-Modell.

Im übrigen gilt auch hier wieder dieselbe Argumentation wie beim POLÓNYI-Modell: Das DE SITTER-Minimum wird in der Nähe des MINKOWSKI-Minimums liegen, da β nur sehr wenig vom MINKOWSKI-Wert abweichen darf, wenn man den sehr kleinen Wert der kosmologischen Konstante reproduzieren will.

Die Einführung nichtlinearer Terme im Superpotential führt auch im Zusammenspiel mit dem KÄHLER-Potential (6.11) wieder dazu, daß kein β -Sektor bestimmt werden kann, in dem die kovariante Ableitung nicht Null wird.

Interessant wären auch noch Verallgemeinerungen des KÄHLER-Potentials auf beliebig hohe Potenzen von $(\Phi + \bar{\Phi})$:

$$K \sim (\Phi + \bar{\Phi})^n, \quad n \geq 3. \quad (6.26)$$

Mit größer werdendem n treten natürlich auch immer höhere Potenzen im skalaren Potential auf. Bisher traten in den Untersuchungen immer nur Gleichungen maximal 4. Grades auf, die noch analytisch gelöst werden konnten. Gleichungen höheren Grades hingegen entziehen sich einer allgemeinen exakten Analyse. Daher können hier keine Untersuchungen zu KÄHLER-Potentialen der Form (6.26) durchgeführt werden.

Ebenfalls nicht zum gewünschten Ergebnis führt ein KÄHLER-Potential

$$K = \ln(\Phi + \bar{\Phi}). \quad (6.27)$$

Auch hierfür ist die Gleichung $D_A W = 0$ immer lösbar, auch nach der Einführung beliebig hoher Potenzen im Superpotential.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit der *globalen* Form der Supersymmetrie. Es konnte gezeigt werden, daß das O’RAIFEARTAIGH-Modell im einfachsten möglichen Fall dreier chiraler Superfelder *eindeutig* ist. Dieses Modell wurde auf N chirale Superfelder verallgemeinert. Es stellte sich heraus, daß auch das skalare Potential dieser Verallgemeinerung immer flache Richtungen besitzt. Flache Richtungen und somit das Auftreten masseloser Teilchen im Multipllett scheinen also eine generische Eigenschaft von Modellen mit spontan gebrochener globaler Supersymmetrie zu sein.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden Untersuchungen zur *lokalen* Version der Supersymmetrie (Supergravitation) durchgeführt. Dabei wurde zunächst das POLÓNYI-Modell untersucht. In einem bestimmten Parameterbereich hat dieses Modell ein positiv definites skalares Potential und liefert stabile DE SITTER-Grundzustände, die ausgerechnet wurden. Dieses Modell ist also geeignet, eine kosmologische Konstante $\Lambda > 0$ zu beschreiben. Um den extrem kleinen Wert $\Lambda \approx 10^{-120} M^4$ erklären zu können, ist allerdings ein *fine-tuning* nötig. Außerdem ist das Modell in gewisser Hinsicht etwas problematisch, da es einerseits keine Quantenkorrekturen beinhaltet (*tree level*-Näherung), andererseits aber die Vakuumerwartungswerte der Skalarfelder in der Größenordnung der PLANCK-Masse liegen und diese klassische Näherung damit fragwürdig erscheinen muß.

Das lineare Superpotential des POLÓNYI-Modells läßt sich nicht ohne Weiteres verallgemeinern, da nach der Einführung von Termen höherer Ordnung kein Parameterbereich mehr bestimmbar ist, in dem die kovariante Ableitung des Superpotentials überall verschieden von Null ist. Damit kann das skalare Potential unmöglich positiv definit sein und kann demzufolge keine DE SITTER-Grundzustände liefern.

Eine Verallgemeinerung des POLÓNYI-Modells auf N Felder ist möglich, es kann in Abhängigkeit von der Anzahl der Superfelder immer ein Sektor angegeben werden, in dem die Supersymmetrie spontan gebrochen ist. Allerdings war in dieser Arbeit eine Analyse zum Vorhandensein eines DE SITTER-Sektors in diesem verallgemeinerten Fall nicht möglich. Falls sie überhaupt durchführbar ist, so wäre

sie doch extrem kompliziert.

Schließlich wurde der Einfluß des KÄHLER-Potentials untersucht. Dabei konnte für ein lineares Superpotential mit einem KÄHLER-Potential $K = (\Phi + \bar{\Phi})^2$ wieder ein DE SITTER-Sektor mit stabilen Grundzuständen ermittelt werden. Auch hier ist wieder ein *fine-tuning* nötig, um den Wert der kosmologischen Konstante zu justieren. Allerdings sind bei diesem Modell die Vakuumenerwartungswerte des Skalarfeldes wesentlich kleiner als beim POLÓNYI-Modell, so daß die *tree level*-Näherung besser gerechtfertigt erscheint.

Weitere Modifikationen des KÄHLER-Potentials erwiesen sich als erfolglos, da sie zu Gleichungen führen, die analytisch nicht mehr lösbar sind oder keinen DE SITTER-Sektor liefern können. Um neue Modelle mit stabilen DE SITTER-Grundzuständen und vor allem ohne *fine-tuning* zu konstruieren, reichen kleinere Modifikationen des POLÓNYI-Modells nicht aus.

Anhang A

Notation und Konventionen

In dieser Arbeit werden im wesentlichen dieselben Konventionen wie im „Standardwerk“ von WESS und BAGGER [9] verwendet. Natürlich wird die EINSTEINSche Summenkonvention benutzt, das heißt, es wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Außerdem werden die „natürlichen“ Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet, so daß dann zum Beispiel für den Impulsoperator $P_m = -i \frac{\partial}{\partial X^m} \equiv -i \partial_m$ gilt. Für die flache MINKOWSKI-Metrik soll gelten: $\eta_{mn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Die σ -Matrizen werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{A.1}$$

oder in einer kürzeren Schreibweise:

$$\sigma^m = (-\mathbf{1}_2, \vec{\sigma}),\tag{A.2}$$

wobei $\vec{\sigma}$ für die drei PAULI-Matrizen steht, $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$. Mit $(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}$ beispielsweise ist dann die $(\alpha, \dot{\beta})$ -Komponente von σ^m gemeint. Die vier Matrizen $\sigma^0, \dots, \sigma^3$ formen eine Basis für den Vektorraum der komplexen 2×2 -Matrizen.

Weiterhin wird definiert:

$$\bar{\sigma}^m = (-\mathbf{1}_2, -\vec{\sigma}),\tag{A.3}$$

und damit weiter:

$$\begin{aligned}(\sigma_{mn})_{\alpha}{}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{4} \left((\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\beta} - (\sigma_n)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta} \right), \\ (\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= \frac{1}{4} \left((\bar{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\alpha} (\sigma_n)_{\alpha\dot{\beta}} - (\bar{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\alpha} (\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}} \right).\end{aligned}\tag{A.4}$$

Die LORENTZ-invarianten antisymmetrischen Tensoren

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A.5}$$

werden dazu verwendet, die Spinor-Indizes zu verschieben. So ist beispielsweise $(\bar{\sigma}_{mn})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}}(\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}}$.

Die J_{mn} schließlich erfüllen die LORENTZ-Algebra:

$$[J_{kl}, J_{mn}] = i(\eta_{lm}J_{kn} - \eta_{ln}J_{km} - \eta_{km}J_{ln} + \eta_{kn}J_{lm}).\tag{A.6}$$

DIRAC-Spinoren können in zwei 2-komponentige WEYL-Spinoren zerlegt werden:

$$\Psi_{\text{D}} = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix},\tag{A.7}$$

wohingegen MAJORANA-Spinoren nur einen WEYL-Spinor enthalten:

$$\Psi_{\text{M}} = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.\tag{A.8}$$

Die Komponenten der WEYL-Spinoren sind GRASSMANN-Variablen, das heißt, es gilt:

$$\{\chi_{\alpha}, \chi_{\beta}\} = 0.\tag{A.9}$$

Anhang B

Rechnen mit GRASSMANN-Variablen

Die „ungeraden“ Superraum-Koordinaten θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ verhalten sich wie konstante Spinoren, sind also nicht von den X_m abhängig. Sie antikommutieren, also zum Beispiel $\theta^1\theta^2 = -\theta^2\theta^1$ (analog für $\bar{\theta}$). Spinorindizes in Produkten werden in der üblichen Art und Weise kontrahiert, also: $\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta = -2\theta^1\theta^2 = \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\theta_\alpha = 2\theta_2\theta_1 = -2\theta_1\theta_2$, und ebenso $\bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = 2\bar{\theta}_{\dot{1}}\bar{\theta}_{\dot{2}} = 2\bar{\theta}^{\dot{1}}\bar{\theta}^{\dot{2}}$. Da die θ 's und $\bar{\theta}$'s antikommutieren, also insbesondere $\theta^1\theta^1 = \theta^2\theta^2 = 0$ gilt, verschwindet jedes Produkt, das mehr als zwei θ 's beziehungsweise mehr als zwei $\bar{\theta}$'s enthält; zum Beispiel $\theta^\alpha\theta_\alpha\theta^\beta = -2\theta^1\theta^2\theta^\beta = 0$.

Ableitungen nach θ und $\bar{\theta}$ werden als $\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\beta} = \delta_\beta^\alpha$ und $\frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$ definiert.

Die Integration wird für eine einzelne GRASSMANN-Variable wie folgt definiert: $\int d\theta^1 f(\theta^1 + \theta^2) = \int d\theta^1 f(\theta^1)$. Weiterhin definiert man $\int d\theta^1\theta^1 = 1$ und $\int d\theta^1 1 = 0$, so daß dann beispielsweise $\int d\theta^1(a + \theta^1 b) = b$ gilt mit $a, b \in \mathbb{C}$. Selbstverständlich gilt dann auch $\int d\theta^1 d\theta^2\theta^1\theta^2 = 1$. Weiter wird definiert $d^2\theta = \frac{1}{2}d\theta^1 d\theta^2$ und $d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{2}d\bar{\theta}^{\dot{1}} d\bar{\theta}^{\dot{2}}$. Damit gilt dann:

$$\int d^2\theta \theta\theta = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\theta} = 1. \quad (\text{B.1})$$

Selbstverständlich gilt damit auch:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} = 1. \quad (\text{B.2})$$

Eine Funktion einer GRASSMANN-Variable kann in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden:

$$f(\theta^1) = f(0) + f'(0)\theta^1, \quad (\text{B.3})$$

alle höheren Terme verschwinden wegen $\theta^1\theta^1 = 0$. Damit erhält man

$$\int d\theta^1 f(\theta^1) = \int d\theta^1 [f(0) + f'(0)\theta^1] = f(0) \int d\theta^1 1 + f'(0) \int d\theta^1\theta^1 = f'(0). \quad (\text{B.4})$$

Es gilt also:

$$\left. \frac{\partial}{\partial\theta^1} f(\theta^1) \right|_{\theta^1=0} \equiv f^{(1)}(0) = \int d\theta^1 f(\theta^1). \quad (\text{B.5})$$

Differentiation und Integration bezüglich GRASSMANN-Variablen sind also äquivalent!

Außerdem gilt $\int d\theta_1 d\theta_2 = 0$ und wegen $\{d\theta_\alpha, d\theta_\beta\} = \{d\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0$ auch $\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 = 0$ sowie $\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -1$. Damit folgt dann für das Integral einer Funktion von zwei GRASSMANN-Variablen:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta_1, \theta_2) = \int d\theta_1 d\theta_2 [f^{(0)} + f^{(1)}\theta_1 + f^{(2)}\theta_2 + f^{(3)}\theta_1\theta_2] = -f^{(3)}. \quad (\text{B.6})$$

Das bedeutet, daß die Integration über die GRASSMANN-Variablen die höchste Komponente der TAYLOR-Entwicklung nach den GRASSMANN-Variablen „herausprojiziert“.

Anhang C

Das Massenspektrum des O'RAIFEARTAIGH-Modells

Hier soll zunächst das skalare Potential des O'RAIFEARTAIGH-Modells minimiert werden. Die Parameter $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi_\lambda}$, $m = |m|e^{i\varphi_m}$ und $g = |g|e^{i\varphi_g}$ können o. B. d. A. als reell angesehen werden, da immer die folgende Feldtransformation durchgeführt werden kann:

$$\begin{aligned} A'_0 &= e^{i\varphi_\lambda} A_0 \\ A'_1 &= e^{i/2(\varphi_g - \varphi_\lambda)} A_1 \\ A'_2 &= e^{i/2(2\varphi_m + \varphi_\lambda - \varphi_g)} A_2. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Damit werden sozusagen die Phasen der Parameter λ , m und g in die Felder A_i „hineingesteckt“ und man erhält dann für das Superpotential:

$$W(A) = |\lambda|A'_0 + |m|A'_1A'_2 + |g|A'_0A_1'^2. \tag{C.2}$$

Genaugenommen kann sogar o. B. d. A. $\lambda, m, g \geq 0$ vorausgesetzt werden.

Die Ableitungen des Superpotentials können Gleichung (2.31) entnommen werden. Das skalare Potential ist $V = |W_0|^2 + |W_1|^2 + |W_2|^2$. Da nur W_1 von A_2 abhängt, kann diese Ableitung immer Null gesetzt werden. Die Bestimmung des globalen Minimums von V läuft dann auf die Minimierung der Funktion $v = |W_0|^2 + |W_2|^2 = (\lambda + gA_1^2)(\lambda + gA_1^{*2}) + m^2A_1A_1^*$ hinaus. Für die Ableitung nach A_1 erhält man nach der Substitution $A_1 = re^{i\delta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial A_1} &= 2g^2r^3e^{-i\delta} + m^2re^{-i\delta} + 2\lambda gre^{i\delta} \\ &= (2g^2r^3 + m^2r + 2\lambda gr) \cos \delta \\ &\quad - (2g^2r^3 + m^2r - 2\lambda gr) \sin \delta. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Dieser Ausdruck wird in jedem Falle Null, wenn $r = 0$ ist. Außerdem existiert noch die Lösung $\left(\delta = \frac{\pi}{2}, r = \sqrt{\frac{2\lambda g - m^2}{2g^2}}\right)$; sie kommt allerdings nur für $m^2 < 2\lambda g$

in Frage. Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, soll hier nur der Parameterbereich mit $m^2 \geq 2\lambda g$ untersucht werden, in dem v nur einen einzigen kritischen Punkt bei $A_1 = 0$ (also $r = 0$) hat. Da außerdem $v \propto |A_1|^4$ gilt und diese Funktion also – salopp gesprochen – einer nach oben geöffneten Parabel entspricht, muß an diesem Punkt das globale Minimum von v vorliegen. Setzt man dann noch $A_2 = 0$, so wird auch die Ableitung W_1 zu Null, und das skalare Potential V nimmt sein globales Minimum also für $A_1 = A_2 = 0$ an, unabhängig davon, welchen Wert A_0 hat, insbesondere also für $A_0 = A_1 = A_2 = 0$. Der Funktionswert am globalen Minimum beträgt $V|_{\min} = \lambda^2$.

Die Massenmatrix für die *Fermionen* wird gegeben durch die zweiten Ableitungen des *Superpotentials* am globalen Minimum:

$$\begin{aligned} M_f &= (W_{ij})|_{\min} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \right) \Big|_{\min} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Die *Massenquadrat-Matrix* lautet:

$$M_f^2 = M_f M_f^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Die Eigenwerte der Matrix M_f^2 geben die Massenquadrate der fermionischen Eigenzustände an. In diesem Modell gibt es demzufolge drei (komplexe) Fermionen mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und den Massenquadraten

$$\boxed{0, m^2, m^2}.$$

Die Massenquadrat-Matrix der *Bosonen* ist gegeben durch die zweiten Ableitungen des *skalaren Potentials* an dessen globales Minimum:

$$\begin{aligned} M_b^2 &= \begin{pmatrix} (V_{ij}^*) & (V_{ij}) \\ (V_{i^*j^*}) & (V_{ij^*}) \end{pmatrix} \Big|_{\min} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial A_i \partial A_j^*} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial A_i^* \partial A_j} \end{pmatrix} \right) \Big|_{\min} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 & 2\lambda g & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda g & 0 & 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Die Eigenwerte dieser Matrix und damit die Massenquadrate der sechs (reellen) Bosonen mit Spin $S = 0$ lauten:

$$\boxed{0, 0, m^2, m^2, m^2 \pm 2\lambda g}.$$

Es wird deutlich, daß es für $\lambda, g \neq 0$ zu einer Aufhebung der Massenentartung zwischen Fermionen und Bosonen im Massenmultiplett kommt und die Super-

symmetrie in der Tat spontan gebrochen wird. Daß lediglich der bosonische Sektor des Massenspektrums durch die spontane Supersymmetriebrechung abgeändert wird, ist eine generische Eigenschaft dieser Symmetriebrechung auf klassischem Niveau. Die masselosen Eigenzustände ($m^2 = 0$) korrespondieren zu der flachen Richtung Φ_0 .

Zum Abschluß dieses Anhangs soll auf das sogenannte „Superspur-Theorem“ eingegangen werden (siehe zum Beispiel [10, 11]). Dieses stellt eine Verallgemeinerung der Tatsache dar, daß durch die spontane Brechung der Supersymmetrie zwar die Massenentartung zwischen Fermionen und Bosonen aufgehoben wird, die *Summe der Massenquadrate* aller Fermionen aber mit der aller Bosonen im Multipllett übereinstimmt. Dabei muß die Multiplizität $2S + 1$ berücksichtigt werden. Das Theorem besagt, daß auch mit spontan gebrochener Supersymmetrie gilt:

$$\text{STr } M^2 \equiv \sum_S (2S + 1)(-1)^{2S} m_S^2 = 0. \quad (\text{C.7})$$

Für das O’RAIFEARTAIGH-Modell erhält man damit $\text{STr } M^2 = 4m^2 - 2(2m^2)$. Die Superspur verschwindet also tatsächlich.

FORSCHUNGSBELEG

Klassifikation von Superpotentialen mit 3 Superfeldern

I	Formulierung der Aufgabenstellung	XI
II	Projektive Flächen 3. Ordnung	XIII
III	Einige Ergebnisse aus der projektiven Geometrie .	XIV
IV	Verallgemeinerung der Aufgabenstellung	XV
V	Beschreibung der Vorgehensweise	XV
VI	Einige Berechnungen	XVIII
VII	Vorläufiges Ergebnis der Klassifikation	XXII
	a Darstellung der A_i	XXIV
	b Normalformen der singulären projektiven Kubiken	XXIV
	c Einfluß der affinen Transformation	XXVI
	d „Potential“ mit Sattelpunkt	XXVI

I Formulierung der Aufgabenstellung

Da hier zunächst nur der einfachste mögliche Fall dreier chiraler Superfelder ($N = 3$) interessiert und außerdem die Renormierbarkeit der Theorie verlangt wird, kommt für das Superpotential von vorn herein nur die Form aus Gl. (2.19) infrage (dieser Abschnitt folgt O'RAIFEARTAIGHs Konvention und W wird ohne die störenden Koeffizienten vor m_{ij} bzw. g_{ijk} definiert):

$$W = \lambda_i \Phi_i + m_{ij} \Phi_i \Phi_j + g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (\text{I.1})$$

mit $i, j, k = 0, 1, 2$.

Die Beantwortung der Frage, welche genaue Form W haben muß, damit sein Gradient nicht verschwinden kann und damit das skalare Potential größer als Null wird, läuft auf die Untersuchung hinaus, unter welchen Bedingungen das Gleichungssystem

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = 0, \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (\text{I.2})$$

keine Lösung hat.

Da W ein Polynom 3. Grades ist, ist die Ableitung nach der i -ten Komponente eine quadratische Form und kann also wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = X^T A_i X. \quad (\text{I.3})$$

Dabei ist $X = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und A_i eine konstante 4×4 -Matrix. Im Anhang a werden die Matrizen A_i explizit dargestellt.

Aus Gleichung (I.3) folgt, daß ein bestimmter Vektor X_0 das Gleichungssystem (I.2) *genau dann* löst, wenn auch jedes Vielfache μX_0 von X_0 mit $\mu \neq 0$ eine Lösung ist. Es kann also in Gleichung (I.2) der Vektor X durch $\tilde{X} := \mu X$ ersetzt werden. Nun kann dieses neue Gleichungssystem in \tilde{X} gelöst werden. Die Lösung X_0 des ursprünglichen Gleichungssystems (I.2) erhält man, indem man den Lösungsvektor \tilde{X}_0 des neuen Gleichungssystems durch μ dividiert oder einfach $\mu = 1$ setzt.

Sollte das ursprüngliche Gleichungssystem (I.2) jedoch *keine* Lösung haben, so wird das neue Gleichungssystem *ausschließlich* für $\mu = 0$ lösbar sein. Umgekehrt gilt: Ist das neue Gleichungssystem *ausschließlich* für $\mu = 0$ lösbar, besitzt es also nur die Lösung $\tilde{X}_0 = 0$, so ist das ursprüngliche Gleichungssystem *nicht* lösbar, denn es ist $X \neq \vec{0}$.

Das Problem wird neu formuliert, indem von den ursprünglichen *affinen* Koordinaten zu sogenannten *projektiven* Koordinaten übergegangen wird:

$$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x_0}{x_3} \\ \frac{x_1}{x_3} \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.4})$$

Nun muß auch in dem Polynom W zu den neuen Koordinaten übergegangen werden:

$$W(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2) \longrightarrow W\left(\frac{x_0}{x_3}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right). \quad (\text{I.5})$$

Um ein sogenanntes *homogenes* Polynom zu erhalten, wird W noch mit x_3^3 multipliziert:

$$x_3^3 \cdot W\left(\frac{x_0}{x_3}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) =: \tilde{W}(x_0, x_1, x_2, x_3). \quad (\text{I.6})$$

\tilde{W} ist ein homogenes Polynom 3. Grades, da es *ausschließlich* Terme 3. Ordnung enthält. Setzt man $x_3 = 1$, so erhält man wieder das ursprüngliche Polynom W .*

Aus Gleichung (I.6) folgt $\forall i \in \{0, 1, 2\}$:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} = x_3^3 \frac{\partial W}{\partial x_i} = x_3^3 \frac{\partial W}{\partial \Phi_j} \cdot \underbrace{\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}}_{= \frac{1}{x_3} \delta_{ij}} = x_3^2 \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}. \quad (\text{I.7})$$

Somit gilt:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} = x_3^2 \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}. \quad (\text{I.8})$$

Ist das Gleichungssystem $\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = 0, i \in \{0, 1, 2\}$ *nicht* lösbar, so existiert zu dem Gleichungssystem $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} = 0, i \in \{0, 1, 2\}$ *nur dann* eine Lösung, wenn $x_3 = 0$ ist. Durch $x_3 = 0$ wird eine sogenannte *Fernhyperebene* (oder auch nur *Fernebene*)

*Statt $W(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$ kann natürlich ebenso gut $W(x_0, x_1, x_2)$ geschrieben werden.

in einem projektiven Raum beschrieben (siehe zum Beispiel [23]). Gesucht sind also diejenigen homogenen Polynome 3. Grades \widetilde{W} , für die die Lösungen des Gleichungssystems $\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x_i} = 0, i \in \{0, 1, 2\}$ zwangsläufig in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ liegen. Setzt man in einem solchen \widetilde{W} $x_3 = 1$, so erhält man ein affines Polynom[†] W , für welches das Gleichungssystem (I.2) nicht lösbar ist; und diese Polynome sollen hier klassifiziert werden.

II Projektive Flächen 3. Ordnung

Anstelle des Polynoms \widetilde{W} kann man auch die Fläche S betrachten, die als Nullstellenmenge von \widetilde{W} definiert ist, also $S : \widetilde{W} = 0$. $\widetilde{W}(x_0, \dots, x_3) = 0$ ist die Gleichung einer Fläche 3. Ordnung (*Kubik*) im projektiven Raum \mathbb{P}^3 . Diese Kubiken sind vollständig klassifiziert. Jede singularitätenfreie („glatte“) Kubik enthält genau 27 Geraden [24]. Hinzu kommen die Kubiken mit Singularitäten. In [25] sind die irreduziblen, komplexen, projektiven Flächen 3. Ordnung mit Singularitäten klassifiziert. Nach Art und Anzahl der Singularitäten können 25 verschiedene Klassen unterschieden werden. Außerdem gibt es noch reduzible („zerfallende“) Kubiken, die aus einer Ebene und einer Quadrik oder aus drei Ebenen bestehen, das heißt, das Polynom \widetilde{W} zerfällt in ein Produkt von Polynomen kleineren Grades. Mit den Kubiken sind dann aber auch die homogenen Polynome 3. Grades \widetilde{W} vollständig klassifiziert.

In dieser Arbeit sollen zunächst die singulären Kubiken betrachtet werden. In Tabelle b.1 werden alle Klassen der irreduziblen, komplexen, projektiven Flächen 3. Ordnung mit Singularitäten angegeben [25]. Zusätzlich werden noch die reduziblen Kubiken betrachtet. Die Normalformen von \widetilde{W} in diesen Fällen werden in Tabelle b.2 dargestellt [26].

Zur Erinnerung: Aus diesen Polynomen müssen nun diejenigen herausgesucht werden, die die folgende Eigenschaft erfüllen[‡]:

$$\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0 \implies x_3 = 0. \tag{II.1}$$

[†]Ab sofort soll $W(x_0, x_1, x_2)$ anstelle von $W(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$ geschrieben werden.

[‡]Ab sofort wird die kürzere Schreibweise $\widetilde{W}_i \equiv \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x_i}$ verwendet.

III Einige Ergebnisse aus der projektiven Geometrie

Für homogene Polynome \widetilde{W} vom Grade n gilt die sogenannte EULERSche Identität (auch EULERSches Lemma oder Theorem) [27][§]:

$$\sum_i x_i \widetilde{W}_i = n \widetilde{W}. \quad (\text{III.1})$$

Da hier \widetilde{W} vom Grade 3 ist und von den Variablen x_0, \dots, x_3 abhängt, genügt der folgende Spezialfall der EULERSchen Identität:

$$\sum_{i=0}^3 x_i \widetilde{W}_i(x_0, \dots, x_3) = 3 \widetilde{W}(x_0, \dots, x_3). \quad (\text{III.2})$$

Weiterhin definiert man in der projektiven Geometrie die 1. Polare eines Punktes $P \in \mathbb{P}^3$ [28]:

$$\sum_{i=0}^3 \widetilde{W}_i \Big|_P \cdot x_i = 0. \quad (\text{III.3})$$

Gleichung (III.3) ist die Gleichung einer Ebene. Liegt der Punkt P in der Fläche $S : \widetilde{W} = 0$, so stimmt die 1. Polare (III.3) von P mit der Tangentialebene an S im Punkt P überein [28].

Jetzt soll in $P(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$ (die Koordinaten von Punkten in projektiven Räumen werden gemeinhin durch „:“ getrennt) gelten:

$$\widetilde{W}_i \Big|_P = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (\text{III.4})$$

Wenn nun \widetilde{W} die Eigenschaft (II.1) hat, so folgt: $x_3 = 0$, das heißt, P liegt in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$. Aus der EULERSchen Identität (III.2) folgt dann weiterhin: $\widetilde{W} \Big|_P = 0$. Das bedeutet: Der Punkt P liegt auf der Kubik $S : \widetilde{W} = 0$.

Die Punkte, in denen die Eigenschaft (II.1) erfüllt ist, liegen also auf der Fläche S .

Bei den Punkten mit eben dieser Eigenschaft können nun 2 Fälle unterschieden werden:

- **1. Fall:** $\widetilde{W}_3 \Big|_P = 0$.

Dann ist P eine Singularität von S , das heißt, sämtliche Singularitäten von S liegen in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$, wenn \widetilde{W} die Eigenschaft (II.1) hat.[¶]

[§]Der Beweis ist sehr einfach. Für ein homogenes Polynom \widetilde{W} vom Grade n gilt $\forall \lambda \neq 0: \widetilde{W}(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots) = \lambda^n \widetilde{W}(x_0, x_1, \dots)$. Wird diese Gleichung nach λ differenziert und anschließend $\lambda = 1$ gesetzt, so ergibt sich Gleichung (III.1).

[¶]An Singularitäten gilt: $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = \widetilde{W}_3 = 0$. Bereits aus $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0$ soll ja aber folgen: $x_3 = 0$.

- **2. Fall:** $\widetilde{W}_3|_P \neq 0$.

Dann ist die Ebene $\varepsilon : x_3 = 0$ die 1. Polare des Punktes P bezüglich S (siehe Gleichung (III.3)). Weil aber auch $P \in S$ gilt (siehe oben), ist $\varepsilon : x_3 = 0$ die Tangentialebene an S im Punkt P .

Zusammenfassend kann also gesagt werden:

Wenn \widetilde{W} ein Polynom mit der Eigenschaft (II.1) ist, so sind die Lösungen zu $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0$ die Singularitäten von $S : \widetilde{W} = 0$ sowie die Punkte, in denen die Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ Tangentialebene an die Kubik S ist.

IV Verallgemeinerung der Aufgabenstellung

Die Punkte $P \in \mathbb{P}^3$ mit $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0$ sind also entweder Singularitäten von $S : \widetilde{W} = 0$ (wenn $\widetilde{W}_3 = 0$), oder es sind Punkte, deren 1. Polare die Ebene $\varepsilon : x_3 = 0$ ist (wenn $\widetilde{W}_3 \neq 0$).

Damit kann das Problem verallgemeinert werden:

Gegeben sei ein (homogenes) Polynom 3. Grades $\widetilde{W}(x_0, \dots, x_3)$, also eine Kubik $S : \widetilde{W}(x_0, \dots, x_3) = 0$.

*Existiert dann eine Ebene ε , die alle Singularitäten von S enthält und **außerdem** alle Punkte $P \in \mathbb{P}^3$ enthält, deren 1. Polare ε ist, so daß also alle Lösungen zu $\widetilde{W}_i = 0, i \in \{0, 1, 2\}$ in eben dieser Ebene liegen?*

Ein solcher Punkt P liegt dann auf S und ε ist die Tangentialebene an S im Punkt P .

V Beschreibung der Vorgehensweise

Es muß für jeden Flächentyp die Menge aller Ebenen bestimmt werden, die jeweils sämtliche Singularitäten der Fläche beinhalten. Das kann eine einzige Ebene oder auch eine ganze Ebenenschar sein. In [25] sind die Singularitäten der irreduziblen Kubiken angegeben.

Die Kubik $C_2 + 2B_3$ beispielsweise hat 3 Singularitäten (eine vom Typ C_2 und zwei vom Typ B_3)^{||} in den Punkten $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1 : 0)$. Es gibt hier also nur eine Ebene, die sämtliche Singularitäten enthält, nämlich $\varepsilon : x_3 = 0$.

Der Flächentyp $2B_3$ hingegen hat nur zwei Singularitäten bei $(1 : 0 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : 0 : 0)$. Hier kommt also zum einen die Ebene $\varepsilon : x_3 = 0$ in Betracht, zum anderen die Ebenenschar $\varepsilon : x_2 - cx_3 = 0$ mit $c \in \mathbb{C}$.

Bei Flächentypen mit nur einer Singularität, die durch eine Koordinatentransformation immer im Punkt $(1 : 0 : 0 : 0)$ angenommen werden kann, werden

^{||}Genauereres zu der Art der Singularitäten sowie zur Nomenklatur findet sich in [26].

die Untersuchungen aufwendiger, da dann die folgenden vier Fälle betrachtet werden müssen: $\varepsilon : x_1 - cx_2 = 0$, $\varepsilon : x_1 - cx_3 = 0$, $\varepsilon : x_2 - cx_3 = 0$ sowie $\varepsilon : -ax_1 - bx_2 + x_3 = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Beim Typ $\widetilde{L}_1 \cdot \widetilde{L}_2^2$ wiederum gibt es unendlich viele Singularitäten, nämlich alle Punkte in der Ebene $\varepsilon : x_2 = 0$, die hier betrachtet werden muß.

Ganz einfach ist die Sachlage jedoch beim Flächentyp $4C_2$: Die vier singulären Punkte liegen nicht in einer Ebene. Somit existiert eine Ebene, wie sie gesucht wird, gar nicht. Dieser Flächentyp kommt also von vornherein nicht in Betracht. Er liefert kein Polynom mit der Eigenschaft (II.1).

Wird nun beispielsweise die Ebene $\varepsilon : x_3 = 0$ betrachtet, weil alle Singularitäten in ihr liegen, so muß weiter untersucht werden, ob alle Lösungen von $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0$ in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ liegen oder ob auch Lösungen außerhalb dieser Ebene existieren. Ist Letzteres der Fall, so kommt diese Ebene bei dieser Fläche nicht in Betracht. Liegen hingegen alle Lösungen in $\varepsilon : x_3 = 0$, so wird in \widetilde{W} $x_3 = 1$ gesetzt, wodurch man ein affines Polynom W in x_0, x_1 und x_2 erhält, dessen Gradient nirgends verschwindet. Entsprechend wird vorgegangen, wenn beispielsweise die Ebene $\varepsilon : x_2 = 0$ betrachtet wird. Hierbei müssen dann jedoch die Ableitungen nach x_0, x_1 und x_3 betrachtet werden und am Ende wird (falls die Fläche die gesuchte Eigenschaft hat) $x_2 = 1$ gesetzt. Natürlich muß dann auch noch x_3 in x_2 umbenannt werden, um wieder konventionsgemäß ein affines Polynom $W(x_0, x_1, x_2)$ zu erhalten.

Wird eine Ebene der Form $\varepsilon : x_1 - cx_2 = 0$ betrachtet, so führt man die neue Bezeichnung $\widetilde{x}_1 := x_1 - cx_2$ ein und substituiert in \widetilde{W} entsprechend $x_1 = \widetilde{x}_1 + cx_2$. Anschließend muß die Ebene $\varepsilon : \widetilde{x}_1 = 0$ daraufhin untersucht werden, ob alle Lösungen von $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_2 = \widetilde{W}_3 = 0$ in ihr liegen oder nicht. Wird so wieder ein Flächentyp mit der gesuchten Eigenschaft entdeckt, so muß nun $\widetilde{x}_1 = x_1 - cx_2 = 1$ gesetzt werden, also letzten Endes in \widetilde{W} x_1 durch $1 + cx_2$ ersetzt werden. In diesem Fall würde dann x_3 in x_1 umbenannt, um der Konvention zu genügen.

Bei Ebenen der Form $\varepsilon : -ax_1 - bx_2 + x_3 = 0$ definiert man $\widetilde{x}_3 := -ax_1 - bx_2 + x_3$. Die restliche Vorgehensweise ist vollkommen analog zu der soeben beschriebenen.

Es kann vorkommen, daß bestimmte Werte von a, b oder c ausgeschlossen werden müssen, da für sie der Gradient von W doch verschwinden kann. Auf diese Problematik wird in Abschnitt VI näher eingegangen.

Wenn ein bestimmtes Polynom \widetilde{W} die Eigenschaft (II.1) hat, so behält es diese Eigenschaft auch dann noch, wenn in den Koordinaten eine *projektive Transformation* (*Projektivität*) durchgeführt wird. O. B. d. A. können die Koordinaten immer so umbenannt werden, daß die Lösungen von $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = 0$ in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ liegen. Dann hat die Projektivität die folgende allgemeine Gestalt:

$$\begin{aligned}
 x_0 &\longrightarrow a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 \\
 x_1 &\longrightarrow a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
 x_2 &\longrightarrow a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\
 x_3 &\longrightarrow a_{33}x_3.
 \end{aligned}
 \tag{V.1}$$

Wie man an Gleichung (V.1) sieht, bleibt bei dieser Transformation die Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ fixiert. Die Fixierung von ε ist wichtig, da diese Ebene in jedem Falle alle Singularitäten von $S : \widetilde{W} = 0$ enthalten muß.

Außerdem darf die Koeffizienten-Determinante der a_{ij} nicht Null werden:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{V.2})$$

Das kann etwas einfacher wie folgt geschrieben werden:

$$|(a_{ij})| \equiv \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_{33} \neq 0. \quad (\text{V.3})$$

Da am Ende ohnehin $x_3 = 1$ gesetzt wird, reicht es im Grunde aus, statt Gleichung (V.1) die folgende *affine Transformation (Affinität)* zu betrachten:

$$\begin{aligned} x_0 &\longrightarrow a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03} \\ x_1 &\longrightarrow a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} \\ x_2 &\longrightarrow a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} \\ x_3 &\longrightarrow \phantom{a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +} a_{33}. \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Auch hier müssen weiterhin die Bedingungen (V.3) erfüllt sein.

Bei den konkreten Berechnungen (Abschnitte VI und VII) wird nicht wie eben beschrieben $x_3 = 1$ oder $x_3 = 1 + cx_2$ und so weiter gesetzt, sondern $x_3 = k$ beziehungsweise $x_3 = k + cx_2$, wobei k eine beliebige komplexe Zahl außer Null sein soll: $k \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{0}$. Damit wird die affine Transformation in x_3 gleich explizit ausgeführt. Es müssen dann nur noch die ersten drei Zeilen von Gleichung (V.4) berücksichtigt werden.

In Anhang c wird der Vollständigkeit halber der Beweis dafür geführt, daß die Durchführung einer Affinität das „Nullstellenverhalten“ des Gradienten des Polynoms W nicht beeinflusst.

Es kann nicht ohne Weiteres ausgeschlossen werden, daß sich unter den Polynomen W , die hier gefunden werden und deren Gradient eben nicht verschwinden kann, auch solche befinden, für die das Potential (2.24) gar kein echtes Minimum besitzt und, ähnlich wie das „Potential“ aus Anhang d, im Unendlichen gegen Null gehen kann. Existiert ein solches Minimum nämlich nicht, so ist das Potential physikalisch nicht sinnvoll, und es könnte auch keine spontane Brechung der Supersymmetrie auftreten, da dafür ein echtes globales Minimum existieren muß, an dem $V > 0$ gilt.

Deswegen müssen die Polynome W , die hier klassifiziert werden, noch einer zusätzlichen Untersuchung unterzogen werden, um zu prüfen, ob ihr Gradient eventuell im Unendlichen gegen Null konvergieren kann.

Im nun folgenden Abschnitt VI sollen einige Berechnungen exemplarisch durchgeführt werden (die vollständige Darstellung der umfangreichen und sich immer wiederholenden Rechnungen würde den Rahmen dieser Arbeit deutlich sprengen und auch nichts substantiell Neues liefern), bevor dann in Abschnitt VII die endgültigen Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt werden.

VI Einige Berechnungen

An einigen exemplarischen Beispielen soll hier die typische Vorgehensweise illustriert werden.

Zunächst soll die Klasse $3B_3$ betrachtet werden. Die Fläche $S : \widetilde{W} = x_0x_1x_2 + x_3^3 = 0$ hat Singularitäten in den Punkten $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$ sowie $(0 : 0 : 1 : 0)$. Es kommt also nur die Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ in Betracht. Das zu betrachtende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_0 &= x_1x_2 = 0 \\ \widetilde{W}_1 &= x_0x_2 = 0 \\ \widetilde{W}_2 &= x_0x_1 = 0.\end{aligned}\tag{VI.1}$$

Es hat beispielsweise die Lösung $(0 : 0 : 0 : 1)$. Dieser Punkt liegt nicht in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$. Die Klasse $3B_3$ hat also nicht die Eigenschaft (II.1).

Nun folgt ein Flächentyp mit nur zwei Singularitäten: $2B_3$. Die Singularitäten liegen bei $(1 : 0 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : 0 : 0)$. Es wird zunächst die Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ betrachtet, in der beide Singularitäten liegen. Dann muß das folgende Gleichungssystem untersucht werden:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_0 &= x_1(x_2 + ax_3) = 0 \\ \widetilde{W}_1 &= x_0(x_2 + ax_3) = 0 \\ \widetilde{W}_2 &= x_0x_1 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0.\end{aligned}\tag{VI.2}$$

Setzt man $x_0 = x_1 = 0$, so werden die ersten beiden Gleichungen erfüllt. Aus der dritten Gleichung wird dann: $x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$. Sie hat außer der Lösung $x_3 = 0$ noch die Lösung $x_3 = -2x_2$, so daß das gesamte Gleichungssystem zum Beispiel durch $(0 : 0 : a : -2a) \forall a \neq 0$ gelöst wird. Also liegen die Lösungen nicht zwangsläufig in der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$. Das bedeutet, daß man kein Polynom mit nichtverschwindendem Gradienten erhält, wenn man in \widetilde{W} $x_3 = k$ setzt.

Außerdem müssen nun aber noch die Fernebenen $\varepsilon : x_2 - cx_3 = 0$ mit beliebigem $c \in \mathbb{C}$ betrachtet werden, da auch in ihnen die beiden Singularitäten liegen. Dazu wird in \widetilde{W} die Substitution $x_2 = \widetilde{x}_2 + cx_3$ durchgeführt. Nun muß das Gleichungssystem $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_3 = 0$ daraufhin untersucht werden, ob sämtliche Lösungen in der Fernebene $\varepsilon : \widetilde{x}_2 = 0$ liegen. Setzt man wieder $x_0 = x_1 = 0$, so verschwinden wieder automatisch die Ableitungen \widetilde{W}_0 und \widetilde{W}_1 . Setzt man außerdem $\widetilde{x}_2 = a$, so erhält man: $\widetilde{W}_3 = (a + 2cx_3)[a + (1 + c)x_3] + (1 + c)x_3(a + cx_3) = 0$. Das ist $\forall a \neq 0$ eine

quadratische Gleichung in x_3 . Diese hat selbstverständlich immer eine Lösung in \mathbb{C} . Damit liegen also die Lösungen des Gleichungssystems nicht zwangsläufig in der Fernebene $\varepsilon : \tilde{x}_2 = 0$. Also liefert auch $2B_3$ kein Polynom mit der geforderten Eigenschaft.

Auf ähnliche Weise wie eben demonstriert kann man auch einige andere Flächentypen, so zum Beispiel $3C_2$, ausschließen. Dabei setzt man für die fragliche Variable einen konstanten, von Null verschiedenen Wert ein und zeigt, daß das System dann eine Lösung besitzt.

Auch der Typ $\tilde{L}_1 \cdot \tilde{L}_2^2$ liefert kein Polynom mit nichtverschwindendem Gradienten. Hier kommt nur die Ebene $\varepsilon : x_2 = 0$ in Frage. Da die Ableitungen nach x_0 und x_3 identisch verschwinden, muß nur noch $\tilde{W}_1 = x_2^2 = 0$ betrachtet werden. Diese Gleichung liefert natürlich nur die Lösung $x_2 = 0$ und demnach liegen alle Lösungen des Gleichungssystems in der fraglichen Fernebene. Aber wenn man in \tilde{W} $x_2 = k$ setzt, erhält man: $W = k^2 x_1$. Wie in Abschnitt 2.5 angesprochen, muß W aber von mindestens drei Feldern abhängen. Also ist das soeben gefundene Polynom für die Zwecke dieser Arbeit unbrauchbar.

Jetzt soll der Flächentyp $2C_2 + B_4$ betrachtet werden. Die drei Singularitäten liegen in der Ebene $\varepsilon : x_3 = 0$, welche hier als einzige in Frage kommt. Das zu lösende Gleichungssystem hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0 &= x_1 x_2 + x_3^2 = 0 \\ \tilde{W}_1 &= x_0 x_2 + x_3^2 = 0 \\ \tilde{W}_2 &= x_0 x_1 = 0. \end{aligned} \tag{VI.3}$$

Aus der 3. Gleichung folgt sofort, daß entweder $x_0 = 0$ oder $x_1 = 0$ gelten muß. Mit $x_0 = 0$ folgt aber aus der 2. Gleichung, mit $x_1 = 0$ aus der 1. Gleichung, daß $x_3 = 0$ sein muß.

Dieser Flächentyp hat also die geforderte Eigenschaft! Wird $x_3 = k$ gesetzt, so erhält man ein Polynom mit nichtverschwindendem Gradienten: $W = k^2(x_0 + x_1) + x_0 x_1 x_2$.

Auf dieselbe Art und Weise erhält man aus $2C_2 + B_3$ das Polynom $W = k^2(x_0 + x_1 + k) + x_0 x_1 x_2$. Dieses Polynom unterscheidet sich aber von dem aus $2C_2 + B_4$ gewonnenen nur durch die additive Konstante k^3 . Die Ableitungen der beiden Polynome sind daher identisch. So liefert das aus $2C_2 + B_3$ gewonnene Polynom kein neues Potential der Form (2.24) und kann deswegen vernachlässigt werden.

An dieser Stelle soll die Wichtigkeit der Bedingung (V.3) demonstriert werden. Setzt man nämlich in $W = k^2(x_0 + x_1) + x_0 x_1 x_2$ eine affine Transformation ein, für die die Determinante in Gleichung (V.3) Null wird, so erhält man ein Polynom, dessen Gradient *doch* verschwinden kann. Als Beispiel soll hier die Transformation $x_0 \rightarrow x_0 + x_2$, $x_1 \rightarrow x_1$, $x_2 \rightarrow x_0 + x_2$ dienen. Die

entsprechende Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ist natürlich Null, da die erste und letzte

Spalte identisch sind. Setzt man diese Transformation in W ein, so erhält man

$W = k^2(x_0 + x_1 + x_2) + x_1(x_0 + x_2)^2$. Aus $W_1 = k^2 + (x_0 + x_2)^2 = 0$ erhält man die Lösung $x_0 + x_2 = ik$, also zum Beispiel $x_0 = ik, x_2 = 0$. Damit bestimmt man aus $W_0 = W_2 = k^2 + 2x_1(x_0 + x_2) = 0$ ohne Weiteres $x_1 = \frac{ik}{2}$. Das Gleichungssystem ist nun doch lösbar.

Wird hingegen eine Transformation angewendet, für die die Gleichung (V.3) erfüllt ist, beispielsweise $x_0 \rightarrow x_0 + x_2, x_1 \rightarrow x_0, x_2 \rightarrow x_1$ mit der von Null verschiedenen Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, so erhält man

$W = k^2(2x_0 + x_2) + x_0x_1(x_0 + x_2)$. Aus $W_2 = k^2 + x_0x_1 = 0$ erhält man $x_0x_1 = -k^2$. Eingesetzt in $W_0 = 2k^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2 = 0$ ergibt sich sofort $x_1x_2 = 0$, also $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$. Daraus folgt aber ein Widerspruch, denn mit $x_1 = 0$ kann $x_0x_1 = -k^2$ nicht erfüllt werden, und mit $x_2 = 0$ würde aus $W_1 = x_0^2 + x_0x_2$ folgen: $x_0 = 0$. Auch damit könnte $x_0x_1 = -k^2$ nicht erfüllt werden. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar.

Beim Flächentyp $C_2 + B_6$ liegen die beiden Singularitäten in $(1 : 0 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : 0 : 0)$. Zunächst wird die Fernebene $\varepsilon : x_2 = 0$ betrachtet. Das Gleichungssystem lautet in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_0 &= x_1x_2 + x_3^2 = 0 \\ \widetilde{W}_1 &= x_0x_2 = 0 \\ \widetilde{W}_3 &= 2x_0x_3 = 0. \end{aligned} \tag{VI.4}$$

Dieses Gleichungssystem wird zum Beispiel durch $(0 : 0 : 1 : 0)$ gelöst, womit die Lösungen nicht zwangsläufig in der Ebene $\varepsilon : x_2 = 0$ liegen.

Es verbleibt dann die Untersuchung der Ebenenschar $\varepsilon : x_3 - cx_2 = 0$. Nach der Substitution $x_3 = \widetilde{x}_3 + cx_2$ ergibt sich: $\widetilde{W} = x_0x_1x_2 + x_0(\widetilde{x}_3 + cx_2)^2 + x_2^3$. Das nun zu untersuchende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_0 &= x_1x_2 + (\widetilde{x}_3 + cx_2)^2 = 0 \\ \widetilde{W}_1 &= x_0x_2 = 0 \\ \widetilde{W}_2 &= x_0x_1 + 2cx_0(\widetilde{x}_3 + cx_2) + 3x_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{VI.5}$$

$\widetilde{W}_1 = 0$ kann nur für $x_0 = 0$ oder für $x_2 = 0$ erfüllt werden. Mit $x_0 = 0$ würde aus $\widetilde{W}_2 = 0$ automatisch folgen: $x_2 = 0$. Damit ergibt sich dann aus $\widetilde{W}_0 = 0$: $\widetilde{x}_3 = 0$. Dasselbe folgt natürlich sofort mit $x_2 = 0$. Damit ist ein neues Polynom mit der gesuchten Eigenschaft gefunden, nämlich: $\mathbf{W} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0(\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_2)^2 + \mathbf{x}_2^3$. Darin ist für $c = 0$ der Spezialfall enthalten, der sich bei der Betrachtung der Fernebene $\varepsilon : x_3 = 0$ ergibt.

Ganz ausführlich soll zu guter Letzt noch die Klasse U_8 betrachtet werden. Hier ist nur eine Singularität vorhanden, es müssen also insgesamt vier Fälle von Ebenen betrachtet werden (siehe Abschnitt V). Zunächst wird die Ebene $\varepsilon : x_1 - cx_2 = 0$ betrachtet. Nach der obligatorischen Substitution ergibt sich: $\widetilde{W} = x_0x_2^2 + (\widetilde{x}_1 + cx_2)^2x_2 + (\widetilde{x}_1 + cx_2)x_3^2$. Das Gleichungssystem ist das folgende:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W}_0 &= x_2^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_2 &= 2x_0x_2 + (\widetilde{x}_1 + cx_2)^2 + 2cx_2(\widetilde{x}_1 + cx_2) + cx_3^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_3 &= 2(\widetilde{x}_1 + cx_2)x_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{VI.6}$$

Aus der 1. Gleichung folgt natürlich: $x_2 = 0$. Die 3. Gleichung kann dann nur erfüllt werden, wenn $\widetilde{x}_1 = 0$ oder $x_3 = 0$ gilt. Ist $x_3 = 0$, so kann $\widetilde{W}_2 = 0$ nur erfüllt werden, wenn $\widetilde{x}_1 = 0$ gilt und es folgt zwangsläufig: $\widetilde{x}_1 = 0$.

Es ergibt sich das Polynom $\mathbf{W} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_2)^2\mathbf{x}_2 + (\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1^2$ (U_8 -a).

Das Polynom $\widetilde{W} = x_0x_2^2 + (\widetilde{x}_1 + cx_3)^2x_2 + (\widetilde{x}_1 + cx_3)x_3^2$ ergibt sich aus der Ebene $\varepsilon : x_1 - cx_3 = 0$. Damit erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W}_0 &= x_2^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_2 &= 2x_0x_2 + (\widetilde{x}_1 + cx_3)^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_3 &= 2cx_2(\widetilde{x}_1 + cx_3) + cx_3^2 + 2x_3(\widetilde{x}_1 + cx_3) = 0.
 \end{aligned} \tag{VI.7}$$

Hieraus folgt das Polynom $\mathbf{W} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_1)^2\mathbf{x}_2 + (\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1^2$ (U_8 -b).

Mit $\varepsilon : x_2 - cx_3 = 0$ folgt $\widetilde{W} = x_0(\widetilde{x}_2 + cx_3)^2 + x_1^2(\widetilde{x}_2 + cx_3) + x_1x_3^2$ und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W}_0 &= (\widetilde{x}_2 + cx_3)^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_1 &= 2x_1(\widetilde{x}_2 + cx_3) + x_3^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_3 &= 2cx_0(\widetilde{x}_2 + cx_3) + cx_1^2 + 2x_1x_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{VI.8}$$

Auch hier liegen wieder alle Lösungen in der Fernebene. Damit ergibt sich das Polynom $\mathbf{W} = \mathbf{x}_0(\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_2)^2 + \mathbf{x}_1^2(\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2$ (U_8 -c).

Bis hierhin gab es keine Einschränkungen für den Parameter c . Anders ist das zum Teil bei den Klassen U_7 und U_9 (siehe Abschnitt VII).

Bei der letzten Fernebene, die bei U_8 betrachtet werden muß, $\varepsilon : -ax_1 - bx_2 + x_3 = 0$, wird es jedoch zu Einschränkungen für die Parameter a und b kommen.

Es ergibt sich zunächst: $\widetilde{W} = x_0x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1(ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3)^2$. Das zu untersuchende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W}_0 &= x_2^2 = 0 \\
 \widetilde{W}_1 &= 2x_1x_2 + (ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3)^2 + 2ax_1(ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3) = 0 \\
 \widetilde{W}_2 &= 2x_0x_2 + x_1^2 + 2bx_1(ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3) = 0.
 \end{aligned} \tag{VI.9}$$

Wegen $x_2 = 0$ folgt aus der 2. Gleichung, daß entweder $(ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3) = 0$ oder $(ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3) = -2ax_1$ gelten muß. Im ersten Fall folgt aus der 3. Gleichung, daß $x_1 = 0$ ist. Damit muß dann aber wegen $(ax_1 + bx_2 + \widetilde{x}_3) = 0$ auch $\widetilde{x}_3 = 0$ sein. Im zweiten Fall wird aus der 3. Gleichung die folgende: $x_1^2 - 4abx_1^2 = (1 - 4ab)x_1^2 = 0$. Diese Gleichung wird erfüllt für $x_1 = 0$. Wegen $x_2 = 0$ folgt dann aber aus der 2. Gleichung wiederum $\widetilde{x}_3 = 0$. Die Lösungen

liegen also wieder alle in der Fernebene, *es sei denn*, daß $1 - 4ab = 0$ ist, denn dann hat das Gleichungssystem auch eine Lösung für $x_1 \neq 0$, und dann muß auch \tilde{x}_3 nicht Null sein.

Das Polynom $\mathbf{W} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{k} + \mathbf{a}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}\mathbf{x}_2)^2$ (U_8 -d) hat also nur dann einen nicht verschwindenden Gradienten, wenn $\mathbf{ab} \neq \frac{1}{4}$ gilt.

Auch bei den Klassen U_7 und U_9 kommt es zu Einschränkungen für a und b . Dort werden jedoch nur endlich viele Werte ausgeschlossen. Es gibt jedoch bei U_7 auch einen Fall, in dem a und b vollkommen beliebig gewählt werden können.

In der Tat müssen aber nicht alle vier Polynome (U_8 -a) bis (U_8 -d), die sich aus der Analyse der Klasse U_8 ergeben haben, in die Klassifikation aufgenommen werden. So kann (U_8 -b) weggelassen werden, denn im Fall $c = 0$ ist dieses Polynom ein Spezialfall von (U_8 -a). Im Fall $c \neq 0$ ist es hingegen ein Spezialfall von (U_8 -d). Um dies zu sehen, wird auf (U_8 -b) die folgende Affinität angewendet: $x_0 \rightarrow c^8x_0$, $x_1 \rightarrow cx_1 - \frac{1}{c}$, $x_2 \rightarrow \frac{1}{c^4}x_2$. Das ergibt dann $W = x_0x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1(1 - c^2x_1)^2$, also einen Spezialfall von (U_8 -d). Weiterhin ist (U_8 -c) nur für den Fall $c = 0$ interessant, denn für $c \neq 0$ kann die Affinität $x_0 \rightarrow c^8x_0$, $x_1 \rightarrow c^2x_1$, $x_2 \rightarrow \frac{1}{c^5}x_2 - \frac{1}{c}$ angewendet werden und man erhält wiederum einen Spezialfall von (U_8 -d).

Auf ähnliche Art und Weise lassen sich die vier Polynome, die sich zunächst aus der Klasse U_9 ergeben, zusammenfassen. Drei der vier Polynome können durch Affinitäten ineinander überführt werden, so daß an ihrer Stelle also nur ein Polynom angegeben werden muß. Auch die Vielfalt der Polynome, die sich aus U_7 ergibt, kann so stark eingeschränkt werden.

Aus der Klasse R_2 ergibt sich im übrigen das in Abschnitt 2.5 genannte Beispiel. Das Polynom lautet zunächst: $\mathbf{W} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{k} + \mathbf{c}\mathbf{x}_2)^2$. Die Konstante c kann in diesem Fall ganz beliebig gewählt werden. Setzt man $c = 1$, $k \equiv a_{33} = -\sqrt{2\lambda}$ und transformiert die Koordinaten gemäß $x_0 \rightarrow x_0 + \frac{m}{2\sqrt{\lambda g}}x_1$, $x_1 \rightarrow x_0 - \frac{m}{2\sqrt{\lambda g}}x_1$, $x_2 \rightarrow \sqrt{\frac{g}{2}}x_2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ (die Bedingungen (V.3) sind erfüllt, wenn $\lambda, m \neq 0$ gilt), so erhält man schließlich das Polynom $W = \lambda x_0 + mx_1x_2 + gx_0x_2^2$. Wird noch die Umbenennung $x_1 \leftrightarrow x_2$ durchgeführt, so sieht man ohne Weiteres die Übereinstimmung mit Gleichung (2.30).

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse zusammengestellt.

VII Vorläufiges Ergebnis der Klassifikation

In diesem Abschnitt sollen abschließend die aufgefundenen Polynome mit nichtverschwindendem Gradienten aufgelistet werden. Dabei wurden bereits diejenigen Polynome weggelassen, die nicht von mindestens drei Variablen abhängen. Außerdem wurde $k = 1$ gesetzt. Das ist o. B. d. A. möglich, wenn man bedenkt, daß in den Feldern nicht nur eine affine Transformation (V.4) durchgeführt werden kann, sondern das Polynom F die Eigenschaft seines nichtverschwindenden Gradienten natürlich auch dann behält, wenn es mit einer von Null verschiedenen Konstante multipliziert wird, also anstelle von F auch αF mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ verwendet werden kann. Daher können die Polynome durch k^3 dividiert und

$\frac{x_i}{k} =: x_i'$ für $i = 0, 1, 2$ gesetzt werden (die Striche werden anschließend wieder weggelassen). So kann k „eliminiert“ werden.

In der folgenden Tabelle sind neben der Grundform der Polynome (auf die dann immer noch eine Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstante oder eine Affinität angewendet werden kann) auch die mitunter auftretenden Bedingungen an die Parameter a und b angegeben.

Tabelle VII.1: *Polynome 3. Ordnung mit nichtverschwindendem Gradienten*

Normalform des Polynoms W	Einschränkungen für die Parameter
$x_0x_2^2 + x_1(1 + cx_2)^2$	—
$x_0 + x_1x_2 + x_2^3$	—
$x_0x_1x_2 + (1 + x_2)(1 + x_0 - x_2)$	—
$x_0x_1x_2 + \left(1 - \frac{1+a}{3}x_2\right) \left(1 + x_0 + \frac{2a-1}{3}x_2\right) \times$ $\times \left(1 + \frac{2-a}{3}x_2\right)$	nur mit $a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$x_0x_1x_2 + x_0 + x_1$	—
$x_0x_1 + x_2$	—
$x_0x_1x_2 + x_0(1 + cx_2)^2 + x_2^3$	—
$x_0x_1 + x_0x_2^2 + x_2$	—
$x_0x_1x_2 + x_0 + x_2^2$	—
$x_0 + x_1^2 + x_2^3$	—
$x_0x_2^2 + x_2(1 + ax_1 + bx_2)^2 + x_1^3$	—
$x_0x_2^2 + x_2(1 + cx_2)^2 + x_1^2(1 + cx_2)$	—
$x_0 + x_1^2 + x_1x_2^2$	—
$x_0x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1(1 + ax_1 + bx_2)^2$	$a \cdot b \neq \frac{1}{4}$
$x_0(1 + ax_1 + bx_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2)$	—
$x_0 + x_1x_2(1 + x_1 + x_2)$	—
$x_0x_2^2 + x_1(1 + ax_1 + bx_2) \times$ $\times (1 + x_1 + ax_1 + x_2 + bx_2)$	$(2b + 1)a \neq (3b + 2)b$
$x_0x_2^2 + x_1(1 + x_1 + x_2)$	—
$x_0x_2^2 + x_1(1 - x_1 - x_2)$	—
$x_0x_1 + x_2 + x_1x_2(x_1 + x_2)$	—

Wie bereits in Abschnitt V erläutert, können sich unter diesen Polynomen noch solche befinden, deren Gradient im Unendlichen gegen Null konvergiert. Diese Polynome müssen noch aussortiert werden, was in Abschnitt 3.2 getan wird.

Im darauf folgenden Abschnitt 3.3 werden die Kubiken *ohne* Singularitäten untersucht, womit die Klassifikation vervollständigt wird.

a Darstellung der A_i

W soll wie folgt geschrieben werden:

$$W = C + \lambda_i \Phi_i + m_{ij} \Phi_i \Phi_j + g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \quad (\text{a.1})$$

Dabei sind C , λ_i , m_{ij} und g_{ijk} beliebige komplexe Konstanten.** Die Laufindizes i , j und k , über die summiert wird, nehmen die Werte 0, 1 und 2 an.

Da die Superfelder Φ_i kommutieren, folgt: $m_{ij} = m_{ji}$ und auch $g_{ijk} = g_{\pi(ijk)}$ für alle Permutationen $\pi(ijk)$ von ijk . Daher kann W explizit wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} W = & C + \lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 \\ & + m_{00} \Phi_0^2 + m_{11} \Phi_1^2 + m_{22} \Phi_2^2 + 2m_{01} \Phi_0 \Phi_1 + 2m_{02} \Phi_0 \Phi_2 + 2m_{12} \Phi_1 \Phi_2 \\ & + g_{000} \Phi_0^3 + g_{111} \Phi_1^3 + g_{222} \Phi_2^3 + 3g_{001} \Phi_0^2 \Phi_1 + 3g_{002} \Phi_0^2 \Phi_2 \\ & + 3g_{011} \Phi_0 \Phi_1^2 + 3g_{112} \Phi_1^2 \Phi_2 + 3g_{022} \Phi_0 \Phi_2^2 + 3g_{122} \Phi_1 \Phi_2^2 + 6g_{012} \Phi_0 \Phi_1 \Phi_2. \end{aligned} \quad (\text{a.2})$$

Mit einigem Fleiß überzeugt man sich davon, daß sich aus Gleichung (a.2) zusammen mit Gleichung (I.3) für die Matrizen A_i ergibt:

$$A_i = \begin{pmatrix} 3g_{i00} & 3g_{i01} & 3g_{i02} & m_{i0} \\ 3g_{i01} & 3g_{i11} & 3g_{i12} & m_{i1} \\ 3g_{i02} & 3g_{i12} & 3g_{i22} & m_{i2} \\ m_{i0} & m_{i1} & m_{i2} & \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (\text{a.3})$$

b Normalformen der singulären projektiven Kubiken

Tabelle b.1: Irreduzible komplexe projektive Flächen 3. Ordnung

Flächentyp	Normalform von \widetilde{W}
K_1	$x_0 x_2^2 + x_1^3$
K_2	$x_0 x_1 x_2 + x_1^3 + x_2^3$
K_0	$x_0 x_2^2 + x_1 (x_0 + x_1) (x_0 + a x_1), \quad a \notin \{0, 1\}$
R_2	$x_0 x_2^2 + x_1 x_3^2$
R_1	$x_0 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^3$
$4C_2$	$x_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_0 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$
$3B_3$	$x_0 x_1 x_2 + x_3^3$
$C_2 + 2B_3$	$x_0 x_1 (x_2 + x_3) + x_2 x_3^2$
$2C_2 + B_4$	$x_0 x_1 x_2 + x_3^2 (x_0 + x_1)$

Fortsetzung siehe nächste Seite

**Hier wird der allgemeine Fall betrachtet, in dem zum Superpotential noch eine Konstante C hinzugefügt wird. Das ist aber für das skalare Potential ohne Bedeutung.

Fortsetzung von voriger Seite

Flächentyp	Normalform von \widetilde{W}
$2C_2 + B_3$	$(x_0 + x_1 + x_3)x_3^2 + x_0x_1x_2$
$3C_2$	$x_2x_3^2 + x_3(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) + ax_0x_1x_2, \quad a \notin \{0, 1\}$
$2B_3$	$x_0x_1(x_2 + ax_3) + x_2x_3(x_2 + x_3), \quad a \notin \{0, 1\}$
$C_2 + B_6$	$x_0x_1x_2 + x_0x_3^2 + x_2^3$
$C_2 + B_5$	$x_0x_1x_2 + x_0x_3^2 + x_2^2x_3$
$C_2 + B_4$	$x_0x_1x_2 + x_3(x_0 + x_2)(x_2 + x_3)$
$C_2 + B_3$	$x_0x_1x_2 + x_3(x_0 + ax_2 + x_3)(x_2 + x_3), \quad a \notin \{0, 1\}$
$2C_2$	$x_0x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3\left(x_0 + x_1 + \frac{x_2}{(1-a)(1-b)} + \frac{x_3}{(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})}\right),$ $a, b \notin \{0, 1\}, \quad a \neq b$
U_9	$x_0x_2^2 + x_1^2x_2 + x_3^3$
U_8	$x_0x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2$
U_7	1. Fall: $x_0x_2^2 + x_1x_3(x_1 + x_3)$ 2. Fall: $x_0x_2^2 + x_1x_3(x_1 + x_2 + x_3)$
B_6	$x_0x_1x_2 + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2^3$
B_5	$x_0x_1x_2 + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2^2x_3$
B_4	$x_0x_1x_2 + (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 + ax_2), \quad a \neq 0$
B_3	$x_0x_1x_2 + x_3(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3), \quad a, b \notin \{0, 1\}$
C_2	$x_0(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ $+ x_3(x_1 + ax_2)(x_1 + bcx_2 + (1-b)(1-c)x_3),$ $a, b, c \notin \{0, 1\}$

Tabelle b.2: Reduzible komplexe projektive Flächen 3. Ordnung

Flächentyp	Normalform von \widetilde{W}
$\widetilde{L} \cdot \widetilde{Q}$	1. Fall: $x_3(x_0x_1 + x_2x_3)$ 2. Fall: $(x_0 + x_1)(x_0x_1 + x_2x_3)$
$\widetilde{L}_1 \cdot \widetilde{L}_2 \cdot \widetilde{L}_3$	$x_1x_2x_3$
$\widetilde{L}_1 \cdot \widetilde{L}_2^2$	$x_1x_2^2$
\widetilde{L}_1^3	x_1^3
Ebene mit Quadrik-Kegel	1. Fall: $x_0(x_0x_1 + x_2^2)$ <i>Bem.:</i> Ebene tangential an den Kegel längs der Geraden $g : x_0 = x_2 = 0$ 2. Fall: $x_2(x_0x_1 + x_2^2)$ <i>Bem.:</i> Ebene schneidet den Kegel an der Spitze 3. Fall: $x_3(x_0x_1 + x_2^2)$ <i>Bem.:</i> Ebene schneidet den Kegel, enthält aber nicht dessen Spitze

c Einfluß der affinen Transformation

Hier soll gezeigt werden, daß die Durchführung einer affinen Transformation in den Koordinaten des Polynoms W keinerlei Einfluß darauf hat, ob dessen Gradient Null werden kann.

In dem Polynom $W(x_0, x_1, x_2)$ soll eine affine Transformation durchgeführt werden. Das bedeutet, daß von den ungestrichenen Koordinaten x_i zu den gestrichenen Koordinaten x'_i übergegangen wird, wobei für die Transformation gilt: $x_i = a_{ij}x'_j + a_{i3}$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Es ist dann $W(x_i) = W'(x'_i)$. Für die Ableitungen des neuen Polynoms W' gilt dann nach der Kettenregel der Differentiation:

$$W'_i \equiv \frac{\partial W'}{\partial x'_i} = \frac{\partial W}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ji} \frac{\partial W}{\partial x_j}. \quad (\text{c.1})$$

In Matrix-Schreibweise kann das wie folgt geschrieben werden:

$$(W'_i) = (a_{ij}) \cdot (W_j). \quad (\text{c.2})$$

Wenn nun der Gradient des ursprünglichen Polynoms, (W_j) , Nullstellen hat, also an mindestens einem Punkt $(W_j) = \vec{0}$ gilt, so folgt aus Gleichung (c.2) sofort, daß dann auch der Gradient des neuen Polynoms, (W'_i) , Null wird. Ein Polynom, dessen Gradient verschwinden kann, kann also durch eine affine Koordinatentransformation nicht in ein Polynom mit nichtverschwindendem Gradienten überführt werden. Der Gradient des neuen Polynoms kann dann ebenfalls Null werden.

Angenommen, das ursprüngliche Polynom W hat einen nichtverschwindenden Gradienten, also $(W_j) \neq \vec{0}$. Dann folgt aus Gleichung (c.2), daß auch der Gradient des neuen Polynoms, (W'_i) , nicht Null werden kann, denn das Gleichungssystem $(a_{ij}) \cdot (W_j) = \vec{0}$ ist für $(W_j) \neq \vec{0}$ nur lösbar, wenn die Determinante von (a_{ij}) Null ist. Genau das soll aber bei einer affinen Transformation nicht der Fall sein, siehe Bedingung (V.3).

Insgesamt kann festgestellt werden, daß eine affine Koordinatentransformation das Nullstellenverhalten des Gradienten von W nicht beeinflusst.

d „Potential“ mit Sattelpunkt

Hier soll eine Art Spielzeugmodell für ein „Potential“, das nur von zwei chiralen Superfeldern abhängt ($N = 2$), untersucht werden. Natürlich ist mit solch einem Modell eine spontane Brechung der Supersymmetrie gar nicht möglich, da dazu *drei* Felder nötig sind (siehe Abschnitt 2.5). Aber an diesem Modell kann exemplarisch demonstriert werden, daß der Gradient eines Polynoms im Unendlichen verschwinden kann, selbst wenn keine Lösung zu $\nabla W = \vec{0}$ gefunden werden kann. Aus diesem Grund muß dann später noch eine gesonderte Untersuchung der klassifizierten Polynome durchgeführt werden, um all jene „herauszufiltern“, deren Gradient im Unendlichen gegen Null konvergiert.

Das definierende Polynom lautet $W = \lambda\Phi_0 + g\Phi_0^2\Phi_1$. Dabei sollen λ und g von Null verschiedene, sonst aber beliebige \mathbb{C} -Zahlen* sein. Leicht überzeugt man sich davon, daß dann der Gradient von W nicht verschwinden kann. Das durch W nach Gl. (2.24) definierte „Potential“ lautet:

$$V = \lambda^2 + 2\lambda g A_0^* A_1^* + 2\lambda g A_0 A_1 + 4g^2 A_0 A_0^* A_1 A_1^* + g^2 A_0^2 (A_0^*)^2. \quad (\text{d.1})$$

Um die kritischen Punkte zu ermitteln, werden die Ableitungen nach A_0 und A_1 berechnet (in den Ableitungen nach A_0^* und A_1^* steckt dieselbe Information) und Null gesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial A_0} &= 2\lambda g A_1 + 4g^2 A_0^* A_1 A_1^* + 2g^2 A_0 (A_0^*)^2 = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial A_1} &= 2\lambda g A_0 + 4g^2 A_0 A_0^* A_1^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{d.2})$$

Die 2. Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn entweder $A_0 = 0$ oder $A_0^* A_1^* = -\frac{\lambda}{2g}$ gilt. Im ersten Fall folgt dann aus der 1. Gleichung: $A_1 = 0$. Es gibt somit einen kritischen Punkt bei $A_0 = A_1 = 0$.

Untersucht man hingegen die zweite Möglichkeit ($A_0 = a \neq 0$) und setzt dementsprechend $A_1 = -\frac{\lambda}{2ga}$ in die 1. Gleichung ein, so erhält man $\frac{\partial V}{\partial A_0} = 2g^2 |a|^2 a^*$. Das ist aber ungleich Null, das heißt: $A_0 = A_1 = 0$ ist der *einzigste kritische Punkt*.

Um die Art des kritischen Punktes zu ermitteln, muß die HESSE-Matrix mit den zweiten Ableitungen[†] untersucht werden. Wenn diese Matrix am kritischen Punkt positiv definit ist (also dort nur positive Eigenwerte hat), so liegt ein Minimum vor. Ist die Matrix hingegen indefinit (positive und negative Eigenwerte), so liegt überhaupt kein Extremwert vor, sondern zum Beispiel ein Sattelpunkt oder ein parabolischer Flachpunkt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die HESSE-Matrix symmetrisch ist. Deswegen hat sie nur reelle Eigenwerte, *sofern die Einträge in der Matrix reell sind*. Davon kann hier aber ausgegangen werden, da λ und g als reell angenommen werden können und am kritischen Punkt $(A_0, A_1) = (0, 0)$ ist und demnach auch von den Feldern kein imaginärer Beitrag kommen kann.

Die HESSE-Matrix wird wie folgt definiert:

$$H = \begin{pmatrix} V_{00} & V_{00^*} & V_{01} & V_{01^*} \\ V_{00^*} & V_{0^*0^*} & V_{0^*1} & V_{0^*1^*} \\ V_{01} & V_{0^*1} & V_{11} & V_{11^*} \\ V_{01^*} & V_{0^*1^*} & V_{11^*} & V_{1^*1^*} \end{pmatrix}. \quad (\text{d.3})$$

*Es kann aber im Folgenden o. B. d. A. $\lambda, g \in \mathbb{R}$ angenommen werden. Denn mit $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi_\lambda}$, $g = |g|e^{i\varphi_g}$ kann $W = |\lambda|\Phi_0' + |g|\Phi_0'^2\Phi_1'$ geschrieben werden, wobei $\Phi_0' := e^{i\varphi_\lambda}\Phi_0$ und $\Phi_1' := e^{i(\varphi_g - 2\varphi_\lambda)}\Phi_1$ bedeutet. Die Phasenfaktoren von λ und g können also in die Felder Φ_0 und Φ_1 „hineingesteckt“ werden. In $W = \lambda\Phi_0 + g\Phi_0^2\Phi_1$ kann dann nicht nur $\lambda, g \in \mathbb{R}$, sondern sogar $\lambda, g > 0$ vorausgesetzt werden, was von nun an auch getan wird.

[†]Diese Matrix ist, bis auf die Anordnung der Elemente, äquivalent zur Massenquadrat-Matrix der Bosonen.

Dabei bedeuten: $V_{00} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial A_0^2}$, $V_{01} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial A_0 \partial A_1}$, $V_{01^*} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial A_0 \partial A_1^*}$, $V_{1^*1^*} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial (A_1^*)^2}$ und so fort.

Wertet man die Matrix (d.3) am kritischen Punkt $(A_0, A_1) = (0, 0)$ aus, so erhält man:

$$H_{\text{krit. Pkt.}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\lambda g & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda g & 2\lambda g \\ 2\lambda g & 2\lambda g & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda g & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{d.4})$$

Diese Matrix hat die folgenden vier Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= g\lambda + \sqrt{5}g\lambda \\ \eta_2 &= g\lambda - \sqrt{5}g\lambda \\ \eta_3 &= -g\lambda - \sqrt{5}g\lambda \\ \eta_4 &= -g\lambda + \sqrt{5}g\lambda. \end{aligned} \quad (\text{d.5})$$

Angenommen, η_1 ist größer als Null. Dann ist zwangsläufig η_3 kleiner als Null, denn es ist ja $\eta_3 = -\eta_1$. Die Matrix ist also auf keinen Fall definit, da für ganz beliebige (aber natürlich von Null verschiedene) Parameterwerte immer positive *und* negative Eigenwerte auftreten. Das bedeutet: *Das „Potential“ hat kein (lokales) Minimum.* Eine genauere Untersuchung zeigt, daß an dem kritischen Punkt statt dessen ein Sattelpunkt vorliegt.

Abschließend soll das Verhalten des Potentials im Unendlichen untersucht werden. Genau genommen kann der Gradient von W nämlich nur im *Endlichen* nicht verschwinden. Um diesen Sachverhalt verstehen zu können, müssen die Ableitungen genauer betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial A_0} &= \lambda + 2gA_0A_1 \\ \frac{\partial W}{\partial A_1} &= gA_0^2. \end{aligned} \quad (\text{d.6})$$

Wie können diese Ableitungen nun zum Verschwinden gebracht werden? Damit die Ableitung nach A_1 verschwindet, muß notwendigerweise $A_0 \rightarrow 0$ gehen. Um gleichzeitig die Ableitung nach A_0 verschwinden zu lassen, muß dann allerdings $A_1 \rightarrow \infty$ gehen, damit der zweite Term in $\frac{\partial W}{\partial A_0}$ endlich bleibt und den ersten Term gerade kompensieren kann.

Ein solcher Grenzübergang kann tatsächlich angegeben werden:

$$\begin{aligned} A_0 &:= \varepsilon \\ A_1 &:= -\frac{\lambda}{2g\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{d.7})$$

Läßt man nun $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen, so geht $A_0 \rightarrow 0$ und die Ableitung nach A_1 verschwindet (siehe Gleichung (d.6)). Hingegen divergiert A_1 , wie man sofort sieht.

Weiterhin ist offensichtlich, daß im Grenzprozeß $\varepsilon \rightarrow 0$ das Produkt $A_0 A_1 \rightarrow -\frac{\lambda}{2g}$ geht und damit dann auch die Ableitung nach A_0 verschwindet. Hierdurch wird klar, daß das Potential V zu Null wird (siehe Gleichung (2.24)). Allerdings geschieht dies eben erst im Unendlichen. Dies entspricht der Tatsache, daß jede stetig differenzierbare Funktion ihr globales Minimum auf einem gewissen Gebiet Ω entweder im Innern des Gebietes $\overset{\circ}{\Omega}$ an (mindestens) einem der kritischen Punkte oder aber auf dem Rand des Gebietes $\partial\Omega$ annimmt. Hier wurde der gesamte Feldraum betrachtet, weshalb $\partial\Omega$ aus den unendlich fernen Punkten besteht. Im Endlichen (also im Innern des betrachteten Gebietes) hat das hier untersuchte Potential V aber nur einen kritischen Punkt bei $(0, 0)$. An diesem Punkt liegt aber *kein* lokales Minimum vor, sondern, wie weiter oben gezeigt wurde, ein Sattelpunkt, an dem das Potential den Wert λ^2 hat. Dies kann aber nicht der global kleinste Funktionswert sein, da durch einen Sattelpunkt neben Richtungen mit wachsenden Funktionswerten immer auch mindestens eine Richtung verläuft, in der die Funktionswerte *abnehmen*. Somit verbleibt nur noch die Möglichkeit, daß V sein globales Minimum auf dem Rand des Gebietes, also hier im Unendlichen, annimmt.

Das hier betrachtete Polynom W eignet sich also nicht für physikalische Modelle, da das durch dieses Polynom definierte skalare Potential kein lokales Minimum besitzt und das Gleichgewicht erst im Unendlichen erreicht würde, wo das Potential gegen Null konvergiert.

Literaturverzeichnis

- [1] **J. Louis, I. Brunner, S. Huber.** *The Supersymmetric Standard Model.* <http://arXiv.org> e-Print archive. hep-ph/9811341.
- [2] **G. Kane.** *Supersymmetry. Squarks, Photinos, and the Unveiling of the Ultimate Laws of Nature.* First paperback printing Aufl. Perseus Publishing, Cambridge (Massachusetts) (2001).
- [3] **M. F. Sohnius.** *Introducing Supersymmetry.* Physics Reports, 128: 39 (1985).
- [4] **Myungshin Im, R. E. Griffiths, K. U. Ratnatunga.** *A Measurement of the Cosmological Constant Using Elliptical Galaxies as Strong Gravitational Lenses.* <http://arXiv.org> e-Print archive. astro-ph/9611105.
- [5] **A. G. Riess et al.** *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant.* Astronomical Journal, 116: 1009 (1998). <http://arXiv.org> e-Print archive. astro-ph/9805201.
- [6] **M.-N. C  lerier.** *Supernovae data: Cosmological Constant or ruling out the Cosmological Principle?* <http://arXiv.org> e-Print archive. astro-ph/0005594.
- [7] **N. Straumann.** *On the Cosmological Constant Problems and the Astronomical Evidence for a Homogeneous Energy Density with Negative Pressure.* <http://arXiv.org> e-Print archive. astro-ph/0203330.
- [8] **C. Wetterich.** *Quintessence – the Dark Energy in the Universe?* <http://arXiv.org> e-Print archive. astro-ph/0110211.
- [9] **J. Wess, J. Bagger.** *Supersymmetry and Supergravity.* In: Princeton Series in Physics (herausgeg. von Ph. W. Anderson, A. S. Wightman, S. B. Treiman), 2. Aufl. Princeton University Press (1992).
- [10] **H. J. W. M  ller-Kirsten, A. Wiedemann.** *Supersymmetry. An Introduction with Conceptual and Computational Details.* World Scientific, Singapur/New Jersey/Hong Kong (1987).
- [11] **A. Bilal.** *Introduction to Supersymmetry.* <http://arXiv.org> e-Print archive. hep-th/0101055.
- [12] **S. Coleman, J. Mandula.** *All Possible Symmetries of the S-matrix.* Physical Review, 159: 1251 (1967).
- [13] **R. Haag, J. T. Lopusz  nski, M. Sohnius.** *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-matrix.* Nuclear Physics, B88: 257 (1975).

- [14] **M. Dine.** *Supersymmetry Phenomenology (With a Broad Brush)*. <http://arXiv.org> e-Print archive. hep-ph/9612389.
- [15] **L. O’Raifeartaigh.** *Spontaneous Symmetry Breaking for Chiral Scalar Superfields*. Nuclear Physics, B96: 331 (1975).
- [16] **A. E. Nelson, N. Seiberg.** *R Symmetry Breaking versus Supersymmetry Breaking*. Nuclear Physics, B416: 46 (1994). <http://arXiv.org> e-Print archive. hep-ph/9309299.
- [17] **N. Dragon, U. Ellwanger, M. G. Schmidt.** *Supersymmetry and Supergravity*. Progress in Particle and Nuclear Physics, 18: 1 (1987).
- [18] **M. Strauch.** *Klassifikation von Superpotentialen*. Forschungsbeleg. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. (2002, unveröffentlicht).
- [19] **P. Brückmann.** *Projektive Kubiken ohne Singularitäten*. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. (2003, unveröffentlicht).
- [20] **J. Polónyi.** *Generalization of the Massive Scalar Multiplet Coupling to the Supergravity*. Budapest Preprint, KFKI-77-93 (1977).
- [21] **H. P. Nilles.** *Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics*. Physics Reports, 110: 1 (1984).
- [22] **C. Kounnas, D. V. Nanopoulos, M. Quiros.** *Rapid Phase Transitions in Local SUSY GUTs*. Physics Letters, B129: 223 (1983).
- [23] **W. Blaschke.** *Projektive Geometrie*. In: Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften (herausgeg. von H. Poldt), 2. Aufl. Wolfenbütteler Verlagsanstalt K. G., Wolfenbüttel und Hannover (1948).
- [24] **O.-H. Keller.** *Vorlesungen über algebraische Geometrie*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig (1974).
- [25] **P. Brückmann.** *Zur projektiven Klassifizierung der irreduziblen, komplexen, projektiven Flächen dritter Ordnung mit Singularitäten*. Wissenschaftliche Hefte der Pädagogischen Hochschule „W. Ratke“ Köthen, Heft 3/II: 83 (1982).
- [26] **O.-H. Keller.** *Normalformen für Flächen 3. Ordnung*. Beiträge zur Algebra und Geometrie, J: 11 (1974).
- [27] **R. Hartshorne.** *Algebraic Geometry*. In: Graduate Texts in Mathematics (herausgeg. von S. Axler, F. W. Gehring, K. A. Ribet). Springer-Verlag New York Inc. (1977).
- [28] **M. Reid.** *Undergraduate Algebraic Geometry*. In: London Mathematical Society Student Texts (herausgeg. von C. M. Series). Cambridge University Press (1994).

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit

**DE SITTER-Räume als Lösungen zu
spontan gebrochener $\mathcal{N} = 1$
Supergravitation**

selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen angefertigt habe.

MICHAEL STRAUCH

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Jan Louis (Universität Hamburg) für den Vorschlag des Themas und die Betreuung dieser Arbeit.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Peter Brückmann (Universität Halle) für die tatkräftige Unterstützung bei der Erarbeitung der Klassifikation in dem dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsbeleg (siehe Anhang).

Weiterhin gilt mein aufrichtiger Dank Herrn Alexander Heide für einige konstruktive und erhellende Diskussionen sowie für die Anregung zur Beschäftigung mit dem im Anhang d des Forschungsbelegs untersuchten Pseudo-Superpotential.

Gedankt sei auch Herrn Dr. habil. Wolfdieter Lang (Universität Karlsruhe) für Hinweise zu dem im selben Anhang d untersuchten „Potential“.

Außerdem möchte ich mich bei den Herren Christian Heiliger und Olaf Hohm für ihre konstruktive Kritik sowie bei Frau Heike Mollnau für ihre Vorschläge zur besseren Lesbarkeit dieser Arbeit bedanken.