

# Allgemeine Relativitäts- und Eichtheorie <sup>1</sup>

Gerhard Mack

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

24. Mai 1998

<sup>1</sup>Vorlesung an der Universität Hamburg, WS 1997/98



# Contents

<b>1</b>	<b>Die Prinzipien</b>	<b>1</b>
1.1	Naheinformationsprinzip und Paralleltransport . . . . .	1
1.2	Beschreibung durch Matrizen . . . . .	10
1.3	Paralleltransport von Tangentenvektoren und Pseudo-Riemannsche Geometrie . . . . .	16
1.4	Das Äquivalenzprinzip . . . . .	26
1.4.1	Eigenzeit, und Vierergeschwindigkeit als Tangenten- vektor . . . . .	29
1.4.2	Die Bewegungsgleichung eines Massenpunkts bei Abwesenheit von Nichtgravitationskräften. . . . .	30
1.4.3	Gleichung der geodätischen Abweichung . . . . .	34
1.4.4	Bewegung eines nichtrelativistischen Teilchens im schwachen stationären Gravitationsfeld. . . . .	37
1.4.5	Vierbein . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Die Einsteinschen Feldgleichungen</b>	<b>41</b>
2.1	Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen . . . . .	41
2.2	Tensorkalkül . . . . .	49
2.2.1	Transformationsgesetz von Tensorkomponenten . . . . .	52
2.2.2	Kovariante Ableitungen in Komponenten . . . . .	54
2.2.3	Paralleltransport von Spinoren* . . . . .	56
2.2.4	Invarianten und globale Bedeutung . . . . .	61
2.3	Der Energie-Impuls-Tensor . . . . .	63
2.3.1	Energie-Impuls-Tensor eines Massenpunkts . . . . .	63
2.3.2	Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors . . . . .	64
2.3.3	Bianchi-Identitäten . . . . .	67

<b>3</b>	<b>Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>71</b>
3.1	Die Schwarzschild-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen . . .	71
3.2	Periheldrehung der Planeten und Lichtablenkung an der Sonne . . .	75
3.3	Zeit und Zeitdilatation . . . . .	81
3.4	Allgemein relativistische Elektrodynamik und Rotverschiebung 83	
3.5	Lineare Näherung der Einstein'schen Feldgleichungen und Gravitationswellen . . . . .	86
3.5.1	Nebenbedingungen für harmonische Koordinaten . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Maxwell- und Yang Mills Theorie</b>	<b>91</b>
4.1	Maxwell- und Yang-Mills Gleichungen . . . . .	91
4.1.1	Feldgleichungen im Minkowskiraum . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Quantentheorie der Eichfelder</b>	<b>95</b>
5.1	Erinnerung an die Prinzipien der Quantenmechanik . . . . .	95
5.2	Freies elektromagnetisches Feld im kontinuierlichen Raum . . . . .	96
5.2.1	Vertauschungsrelationen von $E$ und $B$ . . . . .	97
5.2.2	Wellenfunktion für freie elektromagnetische Felder . . . . .	98
5.2.3	Gauss' Gesetz und Eichinvarianz der Wellenfunktion . . . . .	99
5.2.4	Hamiltonoperator und Schrödingergleichung . . . . .	100
5.2.5	Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für freie Photonen . . . . .	105
5.2.6	Normalprodukte . . . . .	106
5.2.7	Lösung der Schrödingergleichung . . . . .	107
5.2.8	Wellenfunktion des Grundzustands . . . . .	109
5.2.9	Skalarprodukt im Hilbertraum . . . . .	110
5.2.10	Lösungen der Maxwell-Gleichungen . . . . .	113
5.2.11	Lokalität . . . . .	115
<b>A</b>	<b>Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>119</b>
A.1	Beispiel Kugel $S^n$ . . . . .	120
<b>B</b>	<b>Die Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Dirac Gleichung für Wellenfunktionen der speziell relativistischen Quantenmechanik</b>	<b>129</b>
C.0.1	Die quantenmechanische Lorentzgruppe . . . . .	130

C.0.2 Dirac- und Weyl-Gleichungen . . . . . 132



# Chapter 1

## Die Prinzipien

### 1.1 Naheinformationsprinzip und Paralleltransport

Einer der wichtigsten Fortschritte der Physik im letzten Jahrhundert war die Formulierung des sogenannten *Nahewirkungsprinzips*. Es besagt, daß scheinbar vorhandene Kräfte zwischen Teilchen nicht von einer direkten "Fern"-Wirkung des einen Teilchens auf das andere herrühren, wie man seit Newton annahm. Vielmehr werden sie durch Felder vermittelt, die selbst dynamischen Gleichungen genügen müssen. Betrachten wir beispielsweise ein System aus elektrisch geladenen Teilchen  $i = 1 \dots N$  mit elektrischen Ladungen  $q_i$ , die sich zur Zeit  $t$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$  aufhalten und Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i$  haben. Dann ist die Kraft auf Teilchen  $i$  gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses  $\mathbf{p}_i$  und durch die Lorentzkraft gegeben.

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = q_i \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t)] \right)$$

Sie ist also durch das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  *am selben Ort*  $\mathbf{r}_i$  wo sich das Teilchen befindet, und zur selben Zeit gegeben. Dieses Feld ist auch nicht etwa durch die Lage der andern Teilchen  $j$  zur selben Zeit bestimmt, sondern wird als Lösung der Maxwell Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Ausserdem müssen physikalisch mögliche elektromagnetische Felder noch den beiden weiteren Bedingungen genügen, daß

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.2)$$

Diese Gleichungen enthalten keine zeitlichen Ableitungen; sie schränken die physikalisch erlaubten Anfangsbedingungen ein.  $\mathbf{j}$  und  $\rho$  sind Strom und Ladungsdichte. Sie sind durch Ort, Geschwindigkeit und Ladung der Teilchen bestimmt.

Der entscheidende Punkt ist hier die *Lokalität* dieser Gleichungen. Sie beinhalten nur Verknüpfungen zwischen Größen am selben Ort und zur selben Zeit, oder in einer infinitesimalen Umgebung des selben Raum-Zeit-Punkts. Fernwirkung der Art, daß die Kraft auf ein Teilchen durch die Lage und Geschwindigkeit der anderen Teilchen zur selben Zeit bestimmt wäre, würde auch der speziellen Relativitätstheorie widersprechen, da diese einen Begriff absoluter Gleichzeitigkeit an verschiedenen Raumpunkten nicht kennt.

Man glaubt heute, daß alle in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen durch Eichfeldtheorien beschrieben werden. Darin eingeschlossen ist die durch die allgemeine Relativitätstheorie gelieferte Theorie der Gravitation. Diese Theorien genügen einer Verschärfung des oben erwähnten Prinzips der Lokalität. Ich will es als *Naheinformationsprinzip* bezeichnen. Wegen seiner Allgemeingültigkeit erscheint es als ein wirklich grundlegendes Prinzip. Das Naheinformationsprinzip verlangt, daß es nicht nur keine Kräfte über endliche Entfernungen, sondern auch keine Möglichkeit des direkten Informationsaustauschs über endliche Entfernung geben soll. Will ein Beobachter Information an einen andern Beobachter übermitteln, so wird er hierzu ein Signal aussenden müssen. Dieses wird sich dann nach den Gesetzen der Physik in der Raum-Zeit fortpflanzen. Was am Ort des zweiten Beobachters ankommt, wird im allgemeinen vom Zustand des Mediums abhängen, durch das das Signal gelaufen ist. Beispielsweise könnte es von Schwerfeldern oder von elektomagnetischen Feldern, die längs seines Wegs wirksam sein mögen, beeinflußt werden. Wir stellen uns vor, daß das Signal Information von Punkt zu (infinitesimal benachbartem) Punkt transportiert, also längs eines Wegs  $C$  in der Raum-Zeit.

In der allgemeinen Relativitätstheorie und in Eichfeldtheorien interessiert man sich für den Vergleich der Richtung von Vektoren durch Beobachter an



### 1.1. NAHEINFORMATIONSPRINZIP UND PARALLELTRANSPORT 3

verschiedenen Punkten der Raum-Zeit. Dabei sind verschiedene Arten von Vektoren von Interesse. In der allgemeinen Relativitätstheorie sind es Tangentenvektoren an Kurven durch  $x$ , beispielsweise die Vierergeschwindigkeit  $u$  eines Teilchens am Raum-Zeit Punkt  $x$ . In der speziell relativistischen Elektrodynamik ist  $x = (\mathbf{r}, t)$ , und  $V_x$  ist ein 1-dimensionaler komplexer Vektorraum, in dem die Wellenfunktion  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  eines geladenen Teilchens am Raum Zeit Punkt  $x$  seinen Wert nimmt. Wir kommen darauf später zurück.

Wir betrachten also eine 4-dimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit  $M$  mit Punkten  $x \in M$ . Zu jedem Punkt  $x$  in  $M$  soll es einen Vektorraum  $V_x$  geben, in dem die Vektoren  $v$  des Beobachters bei  $x$  liegen. Vektoren in verschiedenen Vektorräumen kann man nach den Regeln der Mathematik nicht addieren, subtrahieren oder sonst vergleichen. Damit ein Beobachter bei  $y$  einen Vektor  $v \in V_x$  mit Vektoren in "seinem" Vektorraum  $V_x$  vergleichen kann, muß der Vektor  $v$  (die in ihm enthaltene Information) längs eines Wegs  $C$  von  $x$  nach  $y$  transportiert werden. Es werden also Abbildungen  $\mathcal{U}(C)$  benötigt

$$\mathcal{U}(C) : V_x \mapsto V_y \quad \text{für Wege } C \text{ von } x \text{ nach } y \quad (1.3)$$

Da  $V_x$  Vektorräume sind, werden diese Abbildungen als *linear* angenommen. Die Abbildungen  $\mathcal{U}(C)$  werden als *Paralleltransporter* bezeichnet.<sup>1</sup> Nach der obigen Diskussion wird man erwarten, daß die Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C)$  nicht a priori gegeben sind. Vielmehr werden sie durch die Werte gewisser Felder längs des Wegs  $C$  bestimmt. Diese Felder werden zu bestimmen sein als Lösung *lokaler* Gleichungen für ihre zeitliche Entwicklung, wie wir dies beim elektromagnetischen Feld sahen. Im allgemeinen wird  $\mathcal{U}(C)$  vom Weg  $C$  abhängen, und nicht nur von seinem Anfangs- und Endpunkt.

Da wir uns vorstellen, daß ein Signal von Punkt zu benachbartem Punkt läuft, werden die Paralleltransporter der folgenden Zusammensetzungsregel genügen müssen. Sei  $C_1$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  und  $C_2$  ein Weg von  $y$  nach  $z$ . Dann läuft der daraus zusammengesetzte Weg  $C_2 \circ C_1$  von  $x$  nach  $z$ . Es muß gelten

$$\mathcal{U}(C_2 \circ C_1) = \mathcal{U}(C_2)\mathcal{U}(C_1) : V_x \mapsto V_z \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Nach der speziellen Relativitätstheorie mag es natürlich erscheinen, die Existenz solcher Paralleltransporter zunächst nur für überall positiv zeitartige Wege  $C$  zu postulieren. Doch sind damit bereits Paralleltransporter für beliebige Wege  $C$  bestimmt, wenn man Stetigkeit und die beiden Eigenschaften (1.4) und (1.5) postuliert. Hierzu denkt man sich einen beliebigen Weg durch eine Zackenlinie o. ä. aus positiv und negativ zeitartigen Stücken approximiert.

Auf der rechten Seite sind zwei Abbildungen nacheinander auszuführen.

Sei weiter  $-C$  gleich dem in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg  $C$ . Dann soll gelten

$$\mathcal{U}(-C) = \mathcal{U}(C)^{-1} \quad (1.5)$$

In Worten: Ist der längs  $C$  von  $x$  nach  $y$  paralleltransportierte Vektor  $v$  gleich  $w$ , so ist auch der längs  $-C$  von  $y$  nach  $x$  transportierte Vektor  $w$  gleich  $v$ . Ist schließlich  $\emptyset$  der "leere Weg" von  $x$  nach  $x$ , so soll

$$\mathcal{U}(\emptyset) = 1 \quad (1.6)$$

sein. Ausserdem fordert man üblicherweise, um lokale Differentialgleichungen überhaupt formulieren zu können, daß  $\mathcal{U}(C)$  in stetiger und differenzierbarer Weise vom Weg  $C$  abhängt. Mit einer präzisen mathematischen Formulierung dieser letzten Forderung werde ich mich an dieser Stelle nicht befassen. Es wird aber später noch über die physikalische Bedeutung der Annahmen, die notwendig sind, damit diese Forderung sinnvoll ist, zu sprechen sein

Eine Zuordnung  $\mathcal{U} : C \mapsto \mathcal{U}(C)$  von Abbildungen  $\mathcal{U}(C)$  zu Wegen  $C$  mit den geschilderten Eigenschaften nennt man einen *Zusammenhang*.

Ist ein Zusammenhang gegeben, so lassen sich daraus eine Reihe von abgeleiteten Größen bilden, insbesondere die kovariante Ableitung und der Krümmungs- oder Feldstärketensor. Diese sollen jetzt eingeführt werden.

Hierzu brauchen wir zuerst noch den Begriff des Tangentenvektors. Eine Kurve <sup>2</sup> in  $M$  (genauer: ein Kurvenstück) ist gegeben durch eine Abbildung

$$\tau \mapsto C(\tau) \in M$$

die jedem reellen Parameterwert  $\tau$  aus einem Intervall der reellen Achse  $\mathbf{R}$  einen Punkt von  $M$  zuordnet. Wir werden nur stückweise glatte Kurven betrachten. <sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>Mit Kurve ist in diesem Text stets eine parametrisierte Kurve gemeint. Kommt es auf die Parametrisierung nicht an, so sprechen wir von einem Weg.

Zwei Kurven  $\tau_1 \mapsto C_1(\tau_1)$  und  $\tau_2 \mapsto C_2(\tau_2)$  bestimmen denselben Weg, wenn  $C_2(\tau_2 = f(\tau_1) = C_1(\tau_1))$  für eine geeignete monoton steigende Funktion  $f$ .

Ein Zusammenhang  $\mathcal{U}$  ordnet jeder Kurve  $C$  von  $x$  nach  $y$  eine Abbildung  $\mathcal{U}(C) : V_x \mapsto V_y$  zu, die nicht von der Parametrisierung der Kurve  $C$  abhängt.

<sup>3</sup>Damit der Begriff einer stückweise glatten Kurve definiert ist, muß  $M$  *a priori* Struktur besitzen, über die noch zu sprechen sein wird. Gewöhnlich nimmt man an, daß  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, s. Anhang ??.

## 1.1. NAHEINFORMATIONSPRINZIP UND PARALLELTRANSPORT 5

Zwei Kurven  $C$  durch  $x$  haben den gleichen Tangentenvektor  $Y$  bei  $x$  wenn sie sich einander anschmiegen bei  $x$ . Man kann daher Tangentenvektoren bei  $x$  definieren als Äquivalenzklassen von glatten Kurven durch  $x$ , die sich einander anschmiegen. "Anschmiegen" bedeutet anschaulich, daß die beiden Kurven in einer infinitesimalen Umgebung von  $x$  übereinstimmen, Parametrisierung eingeschlossen. Mathematisch genauer gesprochen schmiegen sich die Kurven einander an, haben also den gleichen Tangentenvektor, wenn die in der folgenden Gl.(1.7) definierten Differentialoperatoren  $\partial_Y$  übereinstimmen.

Einem Tangentenvektor  $Y$  bei  $x$  ist in eindeutiger Weise ein Differentialoperator  $\partial_Y$  zugeordnet, und umgekehrt.  $\partial_Y$  wirkt auf reelle Funktionen  $f$  auf  $M$ .  $\partial_Y f(x)$  ist eine reelle Zahl, und wird als *Richtungsableitung* von  $f$  bei  $x$  in Richtung  $Y$  bezeichnet. Sie ist wie folgt definiert. Sei  $C$  irgend eine Kurve durch  $x = C(0)$  mit Tangentenvektor  $Y$  bei  $x$ . Dann setzt man

$$\partial_Y f(x) = \frac{d}{d\tau} f(C(\tau))_{\tau=0} \quad (1.7)$$

In der Mathematik ist es üblich, Tangentenvektoren  $Y$  und Differentialoperatoren  $\partial_Y$  zu identifizieren. Dem Physiker sei davon abgeraten. Der Grund dafür ist, daß Tangentenvektoren in der Physik üblicherweise durch ihre physikalische Bedeutung - z.B. Impuls, Vierergeschwindigkeit - definiert sind, und nicht als Differentialoperatoren, insbesondere nicht in der klassischen Physik. Wir werden dennoch später Gleichungen hinschreiben wie  $Y = Y^\mu \partial / \partial x^\mu$ . Sie sollten aber gelesen werden als: "Der dem Tangentenvektor  $Y$  zugeordnete Differentialoperator ist  $Y^\mu \partial / \partial x^\mu$ ".

Differentialoperatoren kann man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Daher liegen Tangentenvektoren bei  $x$  in einem Vektorraum  $T_x M$ . Für eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist dieser Vektorraum 4-dimensional. Dies ist anschaulich klar, und wird offensichtlich, wenn wir später lokale Koordinaten einführen, und  $\partial_Y$  durch Ableitungen nach Koordinaten  $x^\mu$  ausdrücken:  $Y = \sum Y^\mu \partial / \partial x^\mu$ . Es sei schliesslich ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Tangentenvektor einer Kurve von ihrer Parametrisierung abhängt, wie man aus der Formel für  $\partial_Y$  sieht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Begriff der kovarianten Ableitung. Ist für jeden Punkt  $x$  ein Vektor  $v(x) \in V_x$  gegeben, so sprechen wir von einem *Vektorfeld*  $v$ . Ein Vektorfeld ist also eine Verallgemeinerung des Begriffs einer reellen Funktion  $f$  auf  $M$ . Die *kovariante Ableitung*  $D_Y v(x)$  eines Vektorfelds  $v$  in Richtung des Tangentenvektors  $Y$  bei  $x$  ist eine Verallgemeinerung der Richtungsableitung  $\partial_Y f(x)$  einer reellen Funktion. Die Idee

ist in beiden Fällen die gleiche. Man vergleicht  $f(x)$  bzw.  $v(x)$  bei  $x = C(0)$  mit  $f(y)$  bzw.  $v(y)$  beim infinitesimal benachbarten Punkt  $y = C(\tau)$  auf einer Kurve  $C$ , deren Tangentenvektor  $Y$  ist. Es ist

$$\partial_Y f(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f(C(\tau)) - f(C(0))] = \frac{d}{d\tau} f(C(\tau))_{\tau=0}$$

Da aber  $v(x)$  und  $v(y)$  in verschiedenen Vektorräumen  $V_x$  und  $V_y$  liegen, ist ihre Differenz nicht erklärt. Um sie voneinander abziehen zu können, muß man zuvor  $v(y)$  per Paralleltransport nach  $V_x$  abbilden. Entsprechend definiert man

$$\begin{aligned} D_Y v(x) &= \frac{d}{d\tau} [\mathcal{U}(-C_\tau)v(C(\tau))]_{\tau=0} \in V_x \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\mathcal{U}(C_\tau)^{-1}v(C(\tau)) - v(C(0))] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dabei ist  $C_\tau$  das Stück der Kurve  $C$  von  $x = C(0)$  nach  $y = C(\tau)$ . Daher ist  $\mathcal{U}(C_\tau)^{-1} = \mathcal{U}(-C_\tau)$  eine Abbildung von  $V_y$  nach  $V_x$ .  $D_Y v(x)$  ist wieder ein Vektor in  $V_x$  wie  $v(x)$  selbst. Die kovariante Ableitung hängt vom Zusammenhang  $\mathcal{U}$  ab, weil das Resultat des eben erwähnten Paralleltransports davon abhängt. Später werden wir Paralleltransport und kovariante Ableitung für beliebige Tensorfelder definieren, darin eingeschlossen reelle Funktionen ("Skalare"). Die Verallgemeinerung wird so sein, daß für reelle Funktionen  $f$  die kovariante Ableitung  $D_Y f$  der gewöhnlichen Richtungsableitung  $\partial_Y f$  gleich ist.

Schließlich sei bemerkt, daß man in Gl.(1.8)  $v(y)$  nicht für alle Punkte  $y$  in einer Umgebung von  $x$  zu kennen braucht, sondern nur auf einem Kurvenstück durch  $x$  mit Tangente  $Y$ . Daraus ergibt sich die Möglichkeit der folgenden Verallgemeinerung.

Ein *Vektorfeld längs einer Kurve*  $C$  ist bestimmt durch Angabe eines Vektors  $v(\tau) \in V_{C(\tau)}$  für jeden Punkt  $C(\tau)$  der Kurve  $C$ . Sei  $Y(\tau)$  der Tangentenvektor der Kurve  $C$  bei  $C(\tau)$ . Dann kann man die kovariante Ableitung von  $v$  in Richtung der Tangente  $Y$  betrachten. Man führt für diese Größe eine spezielle Bezeichnung ein, und nennt sie die *kovariante Ableitung von  $v(\tau)$  nach  $\tau$* .

$$\frac{D}{d\tau} v(\tau) \equiv D_{Y(\tau)} v(\tau) = \frac{d}{d\sigma} [\mathcal{U}(C_{\sigma\tau})^{-1}v(\sigma)]_{\sigma=\tau} \in V_{C(\tau)} \quad (1.9)$$

$C_{\sigma\tau}$  ist dabei das Stück der Kurve  $C$  von  $C(\tau)$  nach  $C(\sigma)$ . Von der entsprechenden Formel für die Ableitung  $\frac{d}{d\tau} f(\tau)$  unterscheidet sich  $\frac{D}{d\tau} v(\tau)$  wiederum

## 1.1. NAHEINFORMATIONSPRINZIP UND PARALLELTRANSPORT 7

nur durch die Notwendigkeit, einen Paralleltransport von  $C(\sigma)$  nach  $C(\tau)$  durchzuführen.

Ein *Vektorfeld  $v$  längs einer Kurve  $C$  heißt parallel*, wenn  $v(\tau_1)$  aus  $v(\tau_2)$  durch Paralleltransport längs der Kurve  $C$  hervorgeht. Nach Gl.(1.9) ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\frac{D}{d\tau}v(\tau) \equiv D_{Y(\tau)}v(\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau. \quad (1.10)$$

Als nächstes wollen wir der *Krümmungs- oder Feldstärketensor* einführen. Für eine geschlossene Kurve  $C$  von  $x$  nach  $x$  ist der Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C) : V_x \mapsto V_x$  eine Abbildung des Vektorraums  $V_x$  in sich. Der Feldstärketensor gibt  $\mathcal{U}(C) - 1$  für infinitesimal kleine Wege ( $1 =$  identische Abbildung) an. Eine koordinaten unabhängige mathematische Definition wird in Gl.(1.14) gegeben werden. Um den Kontakt mit der anschaulichen Bedeutung herauszuarbeiten, ist es jedoch notwendig, etwas weiter auszuholen.

Auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  kann man stets in einer Umgebung eines Punktes  $x$  ein Koordinatensystem einführen, und zwar auf unendlich viele Weisen. Anschaulich gesprochen nimmt man hierzu einfach einen Pinsel, und malt ein Netz von beliebig krummen, aber glatten und einander benachbarten Linien. Für unsere 4-dimensionale Raum-Zeit Mannigfaltigkeit brauchen wir 4 reelle Koordinaten  $x^\mu$ ,  $\mu = 0..3$ . Reelle Funktionen  $f$  auf  $M$  können dann als Funktionen dieser reellen Koordinaten betrachtet werden, und nach diesen differenziert werden. Sind  $C^\mu$  die Koordinaten der Punkte auf einer Kurve  $C$  durch  $x$  mit Tangentenvektor  $Y$  bei  $x = C(0)$ , so liefert die Definition (1.7) der Richtungsableitung

$$\partial_Y f(x) = \sum_{\mu} Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x) \equiv Y^\mu \partial^\mu f(x)$$

mit

$$Y^\mu = \frac{dC^\mu}{d\tau}(\tau = 0).$$

Wir schreiben kurz  $Y = \sum Y^\mu \partial_\mu$ , wobei das "=" in der oben vereinbarten Weise zu lesen ist: "Der dem Tangentenvektor zugeordnete Differentialoperator ist...". Stattdessen kann man auch  $\partial_\mu$  als Symbole für Basisvektoren im Tangentenraum  $T_x M$  auffassen, und ihre Interpretation als Differentialoperatoren zeitweilig vergessen. Speziell ist  $Y = \partial_\mu$  Tangentenvektor an eine der Koordinatenlinien. Für die kovarianten Ableitungen führt man die Abkürzung ein

$$D_Y \equiv D_\mu \quad \text{für} \quad Y = \partial_\mu \quad (1.11)$$

Wir werden später sehen, daß  $D_Y$  linear ist in  $Y$ . Also ist

$$D_Y = \sum_{\mu} Y^{\mu} D_{\mu} \quad (1.12)$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen über Koordinaten kommen wir jetzt zum Krümmungs- oder Feldstärketensor. Nach Wahl eines Koordinatensystems können wir einen geschlossenen Weg  $C$  betrachten, der aus Stücken der Koordinatenlinien in  $\mu$  und  $\nu$ -Richtung besteht, und ein infinitesimales Quadrat umschließt, wie in der Zeichnung angegeben. Wir betrachten das Ergebnis des Paralleltransports um  $C$  herum und definieren

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) : V_x \mapsto V_x$$

durch

$$\mathcal{U}(C) = 1 - \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \delta x^{\mu} \delta x^{\nu} \quad (\text{keine Summe über } \mu, \nu.) \quad (1.13)$$

Differenzierbarkeitsannahmen an  $\mathcal{U}(C)$  garantieren, daß  $\mathcal{U}(C) - 1$  im Limes kleiner  $\delta x^{\mu}$ ,  $\delta x^{\nu}$  zu  $\delta x^{\mu} \delta x^{\nu}$  proportional ist.

$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$  gibt die Änderung eines Vektors an, wenn man ihn um einen infinitesimalen geschlossenen Weg herum parallel transportiert. Im *Spezialfall* wo die *Paralleltransporter*  $\mathcal{U}(C)$  vom Weg unabhängig sind, ist  $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv 0$ . Den geschlossenen Weg  $C$  kann man zusammensetzen aus zwei Wegen  $C_1$  und  $C_2$ ;  $C = -C_2 \circ C_1$ . Daher ist  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = 1 - \mathcal{U}(C_2)^{-1} \mathcal{U}(C_1) = 0$ , wenn  $\mathcal{U}(C_2) = \mathcal{U}(C_1)$ . Umgekehrt folgt aus  $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv 0$ , daß  $\mathcal{U}(C)$  unabhängig vom Weg  $C$  ist. Genauer gilt, daß  $\mathcal{U}(C_2) = \mathcal{U}(C_1)$  ist, wenn  $C_1$  und  $C_2$  dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, und stetig ineinander deformiert werden können. Solche Wege nennt man homotop. In einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit sind beliebige Wege zwischen  $x$  und  $y$  homotop.

Schließlich soll auch eine koordinatenunabhängige Definition gegeben werden. Das oben betrachtete Viereck besteht aus Koordinatenlinien mit Tangentenvektoren  $\partial_{\mu}$  und  $\partial_{\nu}$ . Seien nun  $Y \in T_x M$  und  $Z \in T_x M$  zwei beliebige Tangentenvektoren bei  $x$ . Man definiert dann den Krümmungstensor mit Hilfe zweiter kovarianter Ableitungen,

$$\mathcal{R}(Z, Y)v(x) = (D_Z D_Y - D_Y D_Z - D_{[Z, Y]})v(x). \quad (1.14)$$

Diese Formel benötigt einige Erklärungen.  $D_Y v(x)$  hängt vom Tangentenvektor  $Y \in T_x M$  bei  $x$  ab und außerdem vom Vektorfeld  $v$  in einer Umgebung von  $x$ . Um  $D_Z D_Y v(x)$  zu bestimmen, brauchen wir aber  $D_Y v(x')$

## 1.1. NAHEINFORMATIONSPRINZIP UND PARALLELTRANSPORT 9

nicht nur für  $x' = x$ , sondern in einer Umgebung von  $x$ , oder zumindest auf einer geeigneten Kurve durch  $x$ . Damit  $D_Y v(x')$  definiert ist, muß deshalb  $Y = Y(x') \in T_{x'} M$  für alle solchen  $x'$  gegeben sein. Dies ist erfüllt, wenn ein *Tangentenvektorfeld*  $Y$  gegeben ist. Ein solches Vektorfeld  $Y$  bestimmt einen Tangentenvektor  $Y(x') \in T_{x'} M$  für jedes  $x'$ . Sind  $Z, Y$  zwei Tangentenvektorfelder und  $v$  ein Vektorfeld mit  $v(x) \in V_x$ , so ist  $D_Z D_Y v(x)$  erklärt, und der Ausdruck (1.14) ist sinnvoll. Dabei ist  $[Z, Y](x)$  der Tangentenvektor, der dem Differentialoperator  $\partial_Z \partial_Y - \partial_Y \partial_Z$  zugeordnet ist.

Es ergibt sich nun aber, daß das Resultat für  $\mathcal{R}(Z, Y)v(x)$  tatsächlich nicht von den Vektorfeldern  $v, Z$ , und  $Y$  in einer Umgebung von  $x$  abhängt, sondern nur von ihren Werten  $v(x), Z(x), Y(x)$  am Punkt  $x$  selbst. Für jedes Paar von Tangentenvektoren  $Z, Y$  bei  $x$  ist also  $\mathcal{R}(Z, Y)$  eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{R}(Z, Y) : V_x \mapsto V_x. \quad (1.15)$$

Die Beziehung dieser Größe zum oben definierten Feldstärketensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  ergibt sich wie folgt. Ist ein Koordinatensystem gewählt, so lassen sich Tangentenvektorfelder  $Y, Z$  schreiben als  $Y(x) = \sum Y^\mu(x) \partial_\mu$ , und  $Z(x) = \sum Z^\mu(x) \partial_\mu$ , mit reellen Funktionen  $Y^\mu(x)$ , und  $Z^\mu(x)$ , und  $\partial_\mu = \partial/\partial x^{\mu}$ . Dann ist

$$[Z, Y](x) = \sum_\mu \left( Z^\mu \frac{\partial Y^\nu(x)}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial Z^\nu(x)}{\partial x^\mu} \right) \partial_\mu.$$

Insbesondere ist also  $[Z, Y] = 0$ , wenn  $Z = \partial_\mu$  und  $Y = \partial_\nu$ . Schreibt man die kovarianten Ableitungen in Gl.(1.14) aus mit Paralleltransportern, wie in Gl.(1.8) (zweite Gleichung), und vergleicht mit der Definition (1.13) von  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , so sieht man, daß

$$\mathcal{R}(Z, Y)(x) = \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \quad \text{für } Z = \partial_\mu, \quad Y = \partial_\nu.$$

Also ist

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \quad (1.16)$$

Wegen der Linearität von  $\mathcal{R}(Z, Y)$  in  $Z$  und  $Y$  gilt allgemeiner

$$\mathcal{R}(Z, Y) = \sum_{\mu, \nu} Z^\mu(x) Y^\nu(x) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x). \quad (1.17)$$

In Eichfeldtheorien wird  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  als Feldstärketensor bezeichnet, in der allgemeinen Relativitätstheorie spricht man vom Krümmungstensor (vgl. nach Gl.(1.30) unten) und benutzt üblicherweise den Buchstaben  $R$ . Wir werden bei der Notation  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  bleiben, um Verwechslungen mit dem später einzuführenden Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  zu vermeiden.

## 1.2 Beschreibung durch Matrizen

Die Formulierung physikalischer Grundgleichungen mit Hilfe der bisher eingeführten Größen - insbesondere der kovarianten Ableitung - hat den Vorteil, daß damit die Erfüllung des Naheinformationsprinzips manifest wird. Diese Größen konnten definiert werden, ohne daß es dazu notwendig wäre, eine Basis in den Vektorräumen  $V_x$  oder ein Koordinatensystem auf  $M$  zu wählen.

Für den Zweck praktischer Rechnungen ist es jedoch häufig günstiger, zu einer Beschreibung der Abbildungen  $\mathcal{U}(C) : V_x \mapsto V_y$  und der daraus abgeleiteten Größen durch Matrizen überzugehen.

Um einer linearen Abbildung eine Matrix zuzuordnen zu können, muß man zunächst eine Basis in den beteiligten Vektorräumen wählen.

Sei  $n$  die Dimension der Vektorräume  $V_x$ . Wir benötigen eine Basis  $e(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$  mit  $e_\alpha(x) \in V_x$  für jedes  $x \in M$ . Eine solche wird als *gleitende Basis* bezeichnet (engl: moving frame, frz: repère mobile). Wir werden verlangen, daß  $e_\alpha(x)$  stetig und (kovariant) differenzierbar von  $x$  abhängen. Die genaue Bedeutung dieser Forderung wird später erklärt werden.

Nach dem Naheinformationsprinzip kann es keine ausgezeichnete gleitende Basis geben, denn sonst könnte man Vektoren  $v \in V_x$  und  $w \in V_y$  a priori vergleichen, indem man ihre Komponenten  $v^\alpha, w^\alpha$  bezüglich der ausgezeichneten Basis vergleicht.

Ist eine gleitende Basis in irgend einer willkürlichen Weise gewählt, so kann man Vektoren  $v(x) \in V_x$  nach dieser Basis entwickeln.

$$v(x) = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha(x) e_\alpha(x), \quad (1.18)$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten  $v^\alpha(x)$ . Gleichzeitig werden den Abbildungen  $\mathcal{U}(C)$  Matrizen  $\mathbf{U}(C) = (U^\alpha_\beta(C))$  durch folgende Formel zugeordnet:

$$\mathcal{U}(C)e_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^n e_\beta(y) U^\beta_\alpha(C) \quad \text{für Wege } C \text{ von } x \text{ nach } y. \quad (1.19)$$

Im folgenden werden wir Summationen nicht mehr explizit angeben, sondern vereinbaren, daß über wiederholte Indizes summiert wird (Indizes  $\mu, \nu, \dots$  von 0 bis 3, Indizes  $\alpha, \beta, \dots$  von 1 bis  $n = \dim V_x$ ).  $\mathbf{U}(C)$  werden als *Paralleltransportmatrizen* bezeichnet.



Wir werden gleich untersuchen, wie sich die Matrizen  $\mathbf{U}(C)$  ändern, wenn man zu einer andern gleitenden Basis  $e'(x)$  übergeht. Wir können die neuen Basisvektoren nach den alten entwickeln,

$$e'_\alpha(x) = e_\beta(x)S^\beta_\alpha(x). \quad (1.20)$$

Definieren wir  $\mathbf{U}'(C)$  durch  $\mathcal{U}(C)e'_\alpha(x) = e'_\beta(y)U'^\beta_\alpha(C)$ , so ergibt sich durch Einsetzen und Vergleich, daß

$$\mathbf{U}'(C) = \mathbf{S}(y)^{-1}\mathbf{U}(C)\mathbf{S}(x) \quad (1.21)$$

$\mathbf{S}(y)$  ist die Matrix mit Elementen  $S^\alpha_\beta(y)$ , und  $\mathbf{S}(y)^{-1}$  ihr Matrix-Inverses.

*Eichtransformationen* sind Transformationen gleitender Basen von der Form (1.20). Daher gelten Gl.(1.21) und seine Folgerungen für Eichtransformationen. Häufig lässt man allerdings nicht beliebige Transformationen (1.20) als Eichtransformationen zu. Wir werden sehen, dass sowohl in der allgemeinen Relativitätstheorie als auch in den Eichtheorien der Elementarteilchenphysik Skalarprodukte  $\langle, \rangle_x$  in  $V_x$  existieren, die unter Paralleltransport invariant sind. (In der allgemeinen Relativitätstheorie ist das Skalarprodukt nicht positiv definit). In Eichtheorien kann es noch weitere Invarianten unter Paralleltransport geben, vgl später. Als Eichtransformationen lässt man dann nur solche zu, die das Skalarprodukt (und ggf. andere Invarianten) invariant lassen, die also insbesondere (pseudo)-orthogonale gleitende Basen in ebensolche überführen. Die Gruppen  $G_x$  solcher Eichtransformationen (1.20) bei  $x$  sind für alle  $x$  isomorph, denn ist  $g_x \in G_x$ , und  $C$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , so ist  $\mathcal{U}(C)g_x\mathcal{U}(C)^{-1} \in G_y$ . Die Äquivalenzklasse bezeichnet man als *Eichgruppe*  $G$ .  $G_x$  enthält auf jeden Fall die sogenannte *Holonomiegruppe*  $H_x$ . Sie besteht aus Basistransformationen der Form

$$e'_\alpha(x) = \mathcal{U}(C)e_\alpha(x), \quad (1.22)$$

wo  $C$  eine beliebige Schleife von  $x$  nach  $x$  ist. In andern Worten,  $S^\beta_\alpha(x) = U^\beta_\alpha(C)$ . Typischerweise ist  $G_x = H_x$ .

Die folgenden Betrachtungen gelten für ganz beliebige Transformationen (1.20) gleitender Basen.

Wir betrachten den Spezialfall eines infinitesimalen Kurvenstücks  $C$  von  $x$  nach  $y$  mit Tangentenvektor  $Y$ . Wir nehmen an, es sei ein Koordinatensystem in einer Umgebung von  $x$  eingeführt. Seien  $\{x^\mu = C(0)\}$  und  $\{x^\mu + \delta x^\mu = C(\delta\tau)\}$  die Koordinaten der infinitesimal benachbarten Punkte  $x$  und  $y$ . Da

$\mathbf{U}(\emptyset) = \mathbf{1}$  ist (Einheitsmatrix), so folgt aus Differenzierbarkeitsannahmen, daß

$$\mathbf{U}(C) = \mathbf{1} - \Gamma_\mu \delta x^\mu = \mathbf{1} - \Gamma_\mu Y^\mu \delta \tau, \quad (1.23)$$

da

$$\delta x^\mu = \frac{dC^\mu(\tau)}{d\tau} \delta \tau = Y^\mu \delta \tau$$

Dabei ist jede der vier Grössen  $\Gamma_\mu$  eine  $n \times n$  Matrix;  $n = \dim V_x$ .  $\Gamma_\rho$  kann aus  $\mathbf{U}(C)$  bestimmt werden, indem man einen Weg in  $\rho$ -Richtung betrachtet, sodaß nur  $\delta x^\mu$  für  $\mu = \rho$  nicht verschwindet. Aus Formel (1.21) folgt, daß sich  $\Gamma_\mu(x)$  beim Übergang (1.20) zu einer andern gleitenden Basis wie folgt transformiert,

$$\Gamma_\mu(x) \mapsto \Gamma'_\mu(x) = \mathbf{S}(x)^{-1} \Gamma_\mu(x) \mathbf{S}(x) + \mathbf{S}(x)^{-1} \partial_\mu \mathbf{S}(x). \quad (1.24)$$

Schließlich sei bemerkt, daß die Grösse  $\Gamma(x) = \Gamma_\mu(x) dx^\mu$  wegen der Definition (1.23) bei fester Wahl der gleitenden Basis nicht vom Koordinatensystem abhängt. Hierauf werden wir später zurückkommen. Eine Linearkombination von Differentialen  $dx^\mu$  nennt man eine 1-Form. Entsprechend ist  $\Gamma(x)$  eine Matrix aus 1-Formen  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x) dx^\mu$ .

Die Matricelemente  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)$  der Matrizen  $\Gamma_\mu(x)$  werden als *Zusammenhangskoeffizienten* bezeichnet. Sie hängen nicht nur vom Zusammenhang  $\mathcal{U}$ , sondern außerdem von der Wahl einer gleitenden Basis ab. In Eichfeldtheorien ist es üblich,  $\mathbf{A}_\mu$  statt  $\Gamma_\mu$  zu schreiben, und  $\mathbf{A}_\mu$  als *Vektorpotential* zu bezeichnen.

Als nächstes betrachten wir die kovariante Ableitung. Es ist üblich, die folgende *Semicolon-Notation* für die  $\alpha$ -Komponente des Vektors  $D_\mu v(x) \in V_x$  zu benutzen.

$$(D_\mu v)^\alpha(x) \equiv v^\alpha_{;\mu}(x), \quad \text{sodaß} \quad D_\mu v(x) = v^\alpha_{;\mu}(x) e_\alpha(x). \quad (1.25)$$

Es folgt aus Gl.(1.23) und der Definition (1.8) der kovarianten Ableitung, daß  $D_Y$  in  $Y$  linear ist. Es ergibt sich daher allgemein, daß

$$(D_Y v)^\alpha(x) = Y^\mu v^\alpha_{;\mu}(x), \quad (1.26)$$

wenn  $Y = Y^\mu \partial_\mu$  ein Tangentenvektor bei  $x$  ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß sich  $v^\alpha_{;\mu}(x)$  mit Hilfe der Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$  wie folgt ausdrücken lässt.

$$v^\alpha_{;\mu}(x) = \partial_\mu v^\alpha(x) + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x) v^\beta(x) \quad (1.27)$$

Dabei ist  $\partial_\mu v^\alpha(x)$  die gewöhnliche partielle Ableitung der reellen oder komplexen Funktion  $v^\alpha$  nach der Koordinate  $x^\mu$ .

Wie schon nach Gl.(1.8) bemerkt wurde, genügt es,  $v$  längs einer Kurve  $C$  mit Tangentenvektor  $Y$  zu kennen, um  $D_Y v$  zu bestimmen. Ist  $v$  ein Vektorfeld längs  $C$ , also  $v(\tau) \in V_{C(\tau)}$ ,  $D_Y v \equiv Dv/d\tau$ , so ergibt sich anstelle von Gl.(1.26,1.27)

$$\left(\frac{D}{d\tau}v\right)^\alpha(\tau) = \frac{dv^\alpha(\tau)}{d\tau} + Y^\mu(\tau)\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(C(\tau))v^\beta(\tau). \quad (1.28)$$

Dies folgt aus Gl.(1.26,1.27) nach der Kettenregel, wenn man sich  $v$  als Einschränkung eines Vektorfelds auf  $M$  auf den Weg  $C$  vorstellt.

Um diese Formeln zu verifizieren, gehen wir von der Definition (1.8) der kovarianten Ableitung aus. Sei  $C$  eine Kurve durch  $x = C(0)$  mit Tangentenvektor  $Y = Y^\mu \partial_\mu$  bei  $x$ , und  $C_\tau$  das Kurvenstück davon von  $x = C(0)$  bis  $C(\tau)$ . Dann ist nach Gl.(1.23)

$$\mathbf{U}(C_\tau)^{-1} = \mathbf{U}(-C_\tau) = \mathbf{1} - \tau Y^\mu \Gamma_\mu(x) + \dots$$

Hier und im folgenden stehen die Punkte ... für Terme der Ordnung  $\tau^2$  und höher. Somit ist nach Gl.(1.19)

$$\begin{aligned} D_Y v(x) &= \frac{d}{d\tau} \left[ \mathcal{U}(C_\tau)^{-1} v(C(\tau)) \right]_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[ v^\alpha(C(\tau)) e_\beta(x) U_\alpha^\beta(-C_\tau) \right]_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[ \left( v^\alpha(x) + \tau Y^\mu \partial_\mu v^\alpha(x) \right) e_\beta(x) \left( \delta_\alpha^\beta + \tau Y^\nu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta(x) + \dots \right) \right]_{\tau=0} \\ &= Y^\mu \left( \partial_\mu v^\beta(x) + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta(x) v^\alpha(x) \right) e_\beta(x). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Als Spezialfall von Gl.(1.25,1.27) ergibt sich die kovariante Ableitung der Basisvektoren  $e_\beta(x)$ . Schreibt man  $e_\beta(x) = v^\alpha e_\alpha(x)$ , so ist  $v^\alpha = \delta_\beta^\alpha$  unabhängig von  $x$ . Daher erhält man

$$D_\mu e_\beta(x) = e_\alpha(x) \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x) \quad (1.29)$$

Die Zusammenhangskoeffizienten könnten also auch als Komponenten der kovarianten Ableitungen der Basisvektoren erklärt werden. Es war schon darauf hingewiesen worden, daß sie nicht nur vom Zusammenhang  $\mathcal{U}$ , sondern auch von der gleitenden Basis abhängen.

Schliesslich wollen wir jetzt noch den Feldstärketensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  in Matrixsprache übersetzen. Für jeden Wert von  $\mu, \nu$  ist  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$  eine lineare Abbildung  $V_x \mapsto V_x$ . Die zugehörige Matrix bezeichnen wir mit

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = (F_{\beta\mu\nu}^\alpha(x)) \equiv (R_{\beta\mu\nu}^\alpha(x)) \quad (1.30)$$

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gewöhnlich  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha(x)$  als Krümmungstensor bezeichnet. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß  $R_{\rho\mu\nu}^\sigma$  die Komponenten eines Tensors vierter Stufe sind, wenn  $e$  eine holonome Basis im Tangentenraum ist.  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  ist definiert durch

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}e_\alpha(x) = e_\beta(x)F_{\alpha\mu\nu}^\beta(x) \quad (1.31)$$

Gl.(1.16) besagt, daß  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$  ist. Wir setzen dies ein und erhalten aus Gl.(1.25)

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}e_\alpha = D_\mu v_{(\alpha\nu)} - D_\nu v_{(\alpha\mu)},$$

wobei

$$v_{(\alpha,\nu)} = D_\nu e_\alpha = e_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$$

nach Gl.(1.29). Setzen wir nun Gl.(1.25,1.27) ein, so ergibt sich ein Ausdruck der Form (1.31) mit

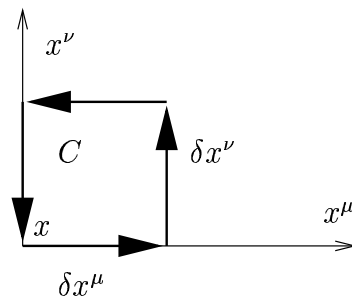
$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] \quad (1.32)$$

$[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu$  ist dabei der Kommutator der beiden Matrizen  $\Gamma_\mu$  und  $\Gamma_\nu$ . In Komponentenschreibweise lautet Gl.(1.32)

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\gamma - \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\gamma \quad (1.33)$$

Statt von Gl.(1.16) hätten wir auch von der ursprünglichen Definition (1.13) von  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  ausgehen können. In Matrizen übersetzt lautet diese Gleichung

$$\mathbf{1} - \mathbf{F}_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu = \mathbf{U}(C), \quad (1.34)$$



$$\mathcal{U}(C) = 1 - \mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\delta x^\mu\delta x^\nu \quad \text{no sum}$$

Figure 1.1: Definition des Krümmungstensors

wobei  $C$  die geschlossene Kurve der Zeichnung 1.1 ist, d.h. ein aus infinitesimalen Stücken der Koordinatenlinien zusammengesetztes Viereck.

Daraus ergibt sich aufgrund von Gl.(1.21) das Transformationsgesetz beim Übergang (1.20) zu einer neuen gleitenden Basis,

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \mapsto \mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathbf{S}(x)^{-1} \mathbf{F}_{\mu\nu}(x) \mathbf{S}(x) \quad (1.35)$$

Durch Einsetzen der Definition (1.19) der Paralleltransportmatrizen, ihrem Ausdruck (1.23) durch Zusammenhangskoeffizienten, und der Matrix-Version der Zusammensetzungsregel (1.4) für Paralleltransporter für die vier Stücke des rechteckigen Wegs  $C$  kommt man, von Gl.(1.34) ausgehend, zum selben Ergebnis (1.32) für  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ . Damit ist gleichzeitig gezeigt, daß die beiden in Abschnitt 1.1 gegebenen Definitionen von  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  äquivalent sind, wie dort behauptet wurde.

### 1.3 Paralleltransport von Tangentenvektoren und Pseudo-Riemannsche Geometrie

In der klassischen <sup>4</sup> allgemeinen Relativitätstheorie interessiert man sich für den Paralleltransport von Tangentenvektoren. Beispielsweise fragt man, ob die Vierergeschwindigkeit eines Teilchens am Raum-Zeit Punkt  $x$  und am benachbarten Punkt  $y$  seiner Weltlinie "dieselbe" ist. Die Vierergeschwindigkeit bei  $x$  ist der Tangentenvektor an die Weltlinie eines Teilchens am Punkt  $x$ , wenn die Weltlinie durch die Eigenzeit parametrisiert wird - vgl. später.

Tangentenvektoren wurden in Paragraph 1 eingeführt. Die Tangentenvektoren am Punkt  $x$  der 4-dimensionalen Raum-Zeit Mannigfaltigkeit  $M$  bilden einen reellen 4-dimensionalen Vektorraum  $V_x = T_x M$ . Ein Tangentenvektorfeld  $Y$  ist gegeben, wenn für jedes  $x \in M$  ein Vektor  $Y(x) \in T_x M$  gegeben ist.

Um Tangentenvektoren an verschiedenen Punkten  $x$  und  $y$  vergleichen zu können, braucht man nach der Diskussion von Paragraph 1 Paralleltransporter

$$\mathcal{U}(C) : T_x M \mapsto T_y M, \quad C \text{ ein Weg von } x \text{ nach } y. \quad (1.36)$$

---

<sup>4</sup>"klassisch" soll heißen, daß die Bewegung von Massenpunkten klassisch beschrieben wird, und nicht quantenmechanisch.

Man sagt, die Gesamtheit  $\mathcal{U}$  der Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C)$  bestimmt einen (linearen oder affinen) Zusammenhang.

Um zu einer Beschreibung durch Matrizen überzugehen, muß man eine gleitende Basis einführen. Ist in der Umgebung  $O$  des Punkts  $\hat{x} \in M$  ein Koordinatensystem auf  $M$  gewählt, so bestimmt dieses gleichzeitig eine gleitende Basis  $e(x) = (e_0(x), \dots, e_3(x))$ . Dabei sind  $e_\mu(x)$  die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien,

$$e_\mu(x) = \partial_\mu \quad (1.37)$$

Man nennt solche gleitenden Basen *holonom*, oder auch Koordinatenbasen<sup>5</sup> Nicht jede gleitende Basis ist holonom, d.h. es gibt für eine gleitende Basis nicht immer ein Koordinatensystem derart, daß Gl.(1.37) gilt. Holonome Basen haben die Eigenschaft, daß die den Basisvektoren  $e_\mu(x)$  zugeordneten Differentialoperatoren miteinander kommutieren.

Wie schon früher betont wurde, kann es nach dem Naheinformationsprinzip eine ausgezeichnete gleitende Basis nicht geben, da man sonst Vektoren an verschiedenen Raum-Zeit Punkten dadurch a priori vergleichen könnte, daß man ihre Komponenten bezüglich der ausgezeichneten Basis vergleicht. Da aber jedes Koordinatensystem eine gleitende Basis bestimmt, so folgt daraus, daß es auch kein ausgezeichnetes Koordinatensystem auf  $M$  geben kann. Vielmehr ist ein Koordinatensystem so gut wie ein anderes. Dies führt zur Forderung der *allgemeinen Kovarianz*: Die Feld- und Bewegungsgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie müssen für beliebige Wahl eines Koordinatensystems ihre Gültigkeit behalten. Um dies sicher zu stellen, gibt es zwei Möglichkeiten.

i) Man formuliert die Gleichungen ausschließlich mit Hilfe der in Paragraph 1 eingeführten Größen - kovariante Ableitungen u.s.w - die ohne Bezug auf ein Koordinatensystem oder eine gleitende Basis definiert wurden, oder

ii) Man rechnet nach, daß die Gleichung ihre Form behält nach einer Koordinatentransformation

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \varphi^\mu(x^0, \dots, x^3) \quad (1.38)$$

Dabei sind  $\varphi^\mu$  beliebige stetig differenzierbare, nicht notwendig lineare, Funktionen. Sie müssen nur der Einschränkung genügen, daß die Jacobi-Determinante

---

<sup>5</sup>Im folgenden werden wir die Vektoren einer holonomen Basis mit Indizes  $\mu, \nu = 0 \dots 3$  numerieren, während die Vektoren einer beliebigen gleitenden Basis mit  $\alpha, \beta \dots$  numeriert werden sollen. Auf diese Weise soll durch die Notation angezeigt werden, ob eine Gleichung für beliebige Wahl einer gleitenden Basis gilt, oder nur für holonome Basen.

der Transformation nicht verschwinden soll. Im folgenden werden wir statt Gl.(1.38) kurz

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x'^\mu(x^0, \dots, x^3) \quad (1.39)$$

schreiben.

Wir wollen nun bestimmen, wie sich die Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma^\sigma_{\rho\mu}$  und die Komponenten  $R^\sigma_{\rho\mu\nu}$  des Krümmungstensors bezüglich einer holonomen Basis unter einer Koordinatentransformation (1.39) transformieren. Eine solche Koordinatentransformation induziert gleichzeitig eine Transformation der gleitenden Basis (1.37)

$$e_\mu(x) \mapsto e'_\mu(x) = e_\nu(x) S^\nu_\mu(x). \quad (1.40)$$

Nach der Kettenregel für die Differentiation ist

$$e'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Daher ist in Gl.(1.40)

$$S^\nu_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, \quad \text{und} \quad T^\mu_\rho \equiv (S^{-1})^\mu_\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \quad (1.41)$$

Da  $\Gamma_\mu dx^\mu$  für feste gleitende Basis eine koordinatenunabhängige Bedeutung hat, so ergibt sich aus dem Transformationsgesetz (1.24) von  $\Gamma_\mu$  beim Übergang zu einer anderen, durch ein neues Koordinatensystem bestimmten, gleitenden Basis, daß

$$\Gamma'_\mu(x) dx'^\mu = [\mathbf{S}(x)^{-1} \Gamma_\mu(x) \mathbf{S}(x) + \mathbf{S}(x)^{-1} \partial_\mu \mathbf{S}(x)] dx^\nu.$$

Dabei sind  $\{x^\mu\}$  und  $\{x'^\mu\}$  die alten und die neuen Koordinaten des Punkts  $x \in M$ . Da

$$dx^\nu = dx'^\mu \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) = dx'^\mu S^\nu_\mu$$

ist, so ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von  $dx'^\mu$

$$\Gamma'_\mu(x) = [\mathbf{S}(x)^{-1} \Gamma_\mu(x) \mathbf{S}(x) + \mathbf{S}(x)^{-1} \partial_\mu \mathbf{S}(x)] \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

Durch Betrachten der Matrixelemente und Einsetzen des Ausdrucks (1.41) für die Matrixelemente von  $\mathbf{S}(x)$  ergibt sich daraus

$$\Gamma'^\sigma_{\rho\mu} = \Gamma^\tau_{\omega\nu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\rho \partial x'^\mu} \quad (1.42)$$



Die Herleitung der hier angegebenen Form des zweiten Terms der rechten Seite vereinfacht sich durch Benutzung der Tatsache, daß  $(\partial f / \partial x^\nu) dx^\nu = (\partial f / \partial x'^\rho) dx'^\rho$  ist.

Durch eine entsprechende Rechnung ergibt sich aus Gl.(1.35) für den Krümmungstensor (1.30)

$$R^{\rho\sigma}_{\rho\mu\nu} = R^{\tau}_{\omega\lambda\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \quad (1.43)$$

Man sagt, daß  $R \dots$  sich wie ein Tensor transformiert; wir werden darauf zurück kommen. Im Gegensatz dazu genügt  $\Gamma \dots$  einem *inhomogenen Transformationsgesetz* (1.42), bei dem ein von  $\Gamma$  unabhängiger Summand auftritt.

Von besonderer Bedeutung sind Zusammenhänge  $\mathcal{U}$  mit speziellen Eigenschaften, die nun diskutiert werden sollen. Dabei ist es wesentlich, daß wir jetzt Zusammenhänge betrachten, die den Paralleltransport von Tangentenvektoren bestimmen.

Ein solcher Zusammenhang wird *metrisch* genannt, wenn in den Tangentenzräumen  $T_x M$  ein Skalarprodukt  $\langle, \rangle_x$  erklärt ist, und sich die dadurch definierte Länge eines Vektors beim Paralleltransport nicht ändert. Allgemeiner gilt dann

$$\langle \mathcal{U}(C)Y, \mathcal{U}(C)Z \rangle_y = \langle Y, Z \rangle_x \quad (1.44)$$

für jeden Weg  $C$  von  $x$  nach  $y$ , und jedes  $Y, Z \in T_x M$ .

Das Skalarprodukt  $\langle, \rangle_x$  definiert den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}(x)$  und umgekehrt. Man sagt, es bestimmt eine Riemannsche *Metrik*. Die definierende Gleichung lautet

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle_x = g_{\mu\nu}(x), \quad \text{oder} \quad \langle Y, Z \rangle_x = Y^\mu Z^\nu g_{\mu\nu}(x) \quad (1.45)$$

für  $Y, Z$  in  $T_x M$ ,  $Y = Y^\mu \partial_\mu$ ,  $Z = Z^\nu \partial_\nu$ .

Aus der ersten dieser Gleichungen sehen wir, wie  $g_{\mu\nu}(x)$  von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Die von einer Koordinatentransformation induzierte Transformation (1.40) der holonomen gleitenden Basis ergibt für  $g_{\mu\nu}$  das folgende Transformationsgesetz bei Koordinatentransformationen (1.39).

$$g_{\mu\nu} \mapsto g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (1.46)$$

Dies ist das Transformationsgesetz eines kovarianten Tensors 2-ter Stufe, vgl. Paragraph 2 von Kapitel II.

Den Index  $x$  an  $\langle, \rangle_x$  lassen wir hinfert meist weg. Er ergibt sich aus dem Kontext. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird das "Skalarprodukt"  $\langle, \rangle_x$  ähnlich wie schon die Metrik in der speziellen Relativitätstheorie nicht positiv definit sein.

Die *Torsion*  $S$  eines Zusammenhangs kann definiert werden durch den antisymmetrischer Teil der Zusammenhangskoeffizienten

$$2S^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}. \quad (1.47)$$

Im Gegensatz zur Krümmung kann die Torsion nur für Zusammenhänge im Tangentenraum definiert werden, da der Ausdruck  $\Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$  sinnlos ist, wenn  $\beta, \mu$  Indizes verschiedener Art sind (beispielsweise  $\beta = 1\dots n, \mu = 0\dots 3$ ).

Aus Gl. (1.42) ergibt sich das Transformationsgesetz unter Koordinatentransformationen

$$S^\sigma_{\rho\mu} \mapsto S'^\sigma_{\rho\mu} = S^\tau_{\omega\nu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \quad (1.48)$$

Der inhomogene Term im Transformationsgesetz (1.42) für die Zusammenhangskoeffizienten kürzt sich heraus. Die Torsion transformiert sich also im Unterschied zu den Zusammenhangskoeffizienten wie ein Tensor. Daraus folgt, dass die Torsion für jede Wahl des Koordinatensystems verschwindet, wenn sie für irgend eine spezielle Wahl verschwindet.

Ebenso wie die Krümmung kann man die Torsion auch in koordinatenunabhängiger Weise definieren.

$$S(Y, Z) = D_Y Z - D_Z Y - [Y, Z]. \quad (1.49)$$

Die Koeffizienten  $S^\rho_{\mu\nu}$  ergeben sich hieraus durch Entwicklung nach der holonomen Basis

$$S(Y, Z)(x) = Y^\mu(x)Z^\nu(x)S^\rho_{\mu\nu}(x)e_\rho(x) \in T_x M \quad (1.50)$$

Man rechnet nach, daß sie durch Gl.(1.47) gegeben sind.

Es wird sich aus dem in Paragraph 4 formulierten Äquivalenzprinzip ergeben, daß die Torsion in der Einstein'schen Gravitationstheorie verschwindet. Außerdem verlangt diese Theorie einen metrischen Zusammenhang. Wie schnell eine (ideale) Uhr läuft würde sonst von ihrer Vorgeschichte abhängen. Damit würde der Begriff der Eigenzeit seinen physikalischen Sinn verlieren (da sie nicht meßbar wäre), und die Zeit wäre nicht nur relativ, d.h. vom

Bezugssystem abhängig, sondern sie wäre überhaupt undefiniert. Allerdings folgt aus dem Äquivalenzprinzip, daß das durch den metrischen Tensor definierte Skalarprodukt  $\langle, \rangle_x$  in der Allgemeinen Relativitätstheorie *nicht positiv definit* ist, wohl aber nicht entartet.

Aus den eben genannten Gründen ist der folgende Satz von grundlegender Bedeutung für die Allgemeine Relativitätstheorie.

### Fundamentalsatz der Riemannschen Geometrie

*Zu einer gegebenen Metrik gibt es genau einen metrischen Zusammenhang mit verschwindender Torsion. Seine Zusammenhangskoeffizienten sind durch den metrischen Tensor bestimmt nach der Formel*

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu}, \quad (1.51)$$

$$\Gamma_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (1.52)$$

Dabei sind  $g^{\rho\sigma}$  die Komponenten des inversen metrischen Tensors, d.h.

$$g^{\rho\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^{\rho}_{\mu}.$$

Der Beweis dieses wichtigen Satzes ist enttäuschend, denn er ergibt sich durch einfache Rechnung. Zunächst zeigt man, daß die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwinden muß, damit der Zusammenhang metrisch ist, d.h. damit das Skalarprodukt  $\langle, \rangle$  invariant ist unter Paralleltransport. Dies bedeutet, daß

$$g_{\sigma\nu;\mu} \equiv \partial_{\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\nu\tau} \Gamma^{\tau}_{\sigma\mu} - g_{\sigma\tau} \Gamma^{\tau}_{\nu\mu} = 0 \quad (1.53)$$

für jedes  $\mu, \nu, \sigma$ . Kovariante Ableitung und Semikolon-Notation werden später für beliebige Tensorfelder im Einklang mit der hier benutzten Notation definiert werden.

Für  $\Gamma_{\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\tau} \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$  ergibt sich daraus

$$\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} = \Gamma_{\sigma\nu\mu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} \quad (1.54)$$

Daraus folgen durch Permutation der Indizes die beiden weiteren Gleichungen

$$\partial_{\nu}g_{\sigma\mu} = \Gamma_{\sigma\mu\nu} + \Gamma_{\mu\sigma\nu} \quad (1.55)$$

$$-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\nu\sigma} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} \quad (1.56)$$

Bildet man die halbe Summe dieser drei Gleichungen, und benutzt, daß wegen des Verschwindens der Torsion  $\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \Gamma_{\mu\sigma\nu}$  ist, so erhält man Gl.(1.52).

Damit bleibt nur noch Gl.(1.53) zu zeigen. Sei  $C$  ein infinitesimaler Weg vom Punkt  $x$  mit Koordinaten  $\{x^\mu\}$  zum infinitesimal benachbarten Punkt  $y$  mit Koordinaten  $\{y^\mu = x^\mu + \delta x^\mu\}$ . Sei weiter  $Y = Y^\mu e_\mu(x) \in T_x M$  und ebenso  $Z = Z^\nu e_\nu(y) \in T_y M$ . Dann ist nach Gl.(1.19), (1.23) und (1.45)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}(C)Y, \mathcal{U}(C)Z \rangle_y &= Y^\mu Z^\nu \langle e_\rho(y), e_\sigma(y) \rangle_y U^\rho_\mu(C) U^\sigma_\nu(C) \\ &= Y^\mu Z^\nu g_{\rho\sigma}(y) (\delta^\rho_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\tau} \delta x^\tau) (\delta^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\omega} \delta x^\omega). \end{aligned}$$

Nun ist

$$g_{\rho\sigma}(y) = g_{\rho\sigma}(x) + \partial_\nu g_{\rho\sigma}(x) \delta x^\nu + \dots$$

Damit ergibt sich bis zu Gliedern erster Ordnung in  $\delta x$

$$\langle \mathcal{U}(C)Y, \mathcal{U}(C)Z \rangle_y = Y^\mu Z^\nu g_{\mu\nu}(x) + Y^\mu Z^\nu (\partial_\tau g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu\tau} - \Gamma_{\mu\sigma\tau}) \delta x^\tau$$

Aufgrund der Forderung (1.44) der Metrizität muß dies gleich

$$\langle Y, Z \rangle_x = Y^\mu Z^\nu g_{\mu\nu}(x)$$

sein. Da  $\delta x$ ,  $Z$  und  $Y$  beliebig waren, ist dies nur möglich, wenn Gl. (1.52) gilt. Damit ist der Beweis des Fundamentalsatzes der Riemannschen Geometrie vollständig.

Positivität der Metrik wurde nicht angenommen, wohl aber die Existenz eines inversen metrischen Tensors, damit man  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  aus  $\Gamma_{\sigma\mu\nu}$  bestimmen kann. Die Metrik darf also nicht entartet sein, d.h. es muss  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$  sein.

Ist eine positiv definite Metrik gegeben, so bestimmt sie die *Länge einer Kurve*  $C$  von  $x_a = C(\lambda_a)$  nach  $x_e = C(\lambda_e)$  nach der Formel

$$s = \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \left( g_{\mu\nu}(C(\lambda)) \frac{dC^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.57)$$

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Metrik nicht positiv definit, jedoch behält Gl.(1.57) (mit einem geänderten Vorzeichen) für zeitartige Kurven ihren Sinn. Dies wird in Paragraph diskutiert werden.

### Innere Geometrie von Flächen im $\mathbf{R}^3$

Um dem Leser die Riemannsche Geometrie etwas vertrauter zu machen, soll nun als Beispiel die innere Geometrie einer im  $\mathbf{R}^3$  eingebetteten Fläche  $M$  diskutiert werden.

Die Punkte  $\mathbf{r}$  des Raums  $\mathbf{R}^3$  sind Tripel reeller Zahlen

$$\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3), \quad r^i \in \mathbf{R}$$

Da  $\mathbf{R}^3$  ein linearer Raum ist, können Tangentenvektoren  $v \in T_{\mathbf{r}}\mathbf{R}^3$  mit Punkten  $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$  des  $\mathbf{R}^3$  identifiziert werden. Eine Beispiel einer Kurve durch  $\mathbf{r}_0$  mit Tangentenvektor  $v$  ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\lambda$$

Die lineare Struktur des  $\mathbf{R}^3$  liefert also eine *a priori* Möglichkeit, Tangentenvektoren an verschiedenen Punkten  $\mathbf{r}$  zu vergleichen. Zwei Tangentenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind gleich, wenn  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  ist.

Sei nun ein Koordinatensystem auf der Fläche  $M$  gewählt, sodaß ein Punkt  $x \in M$  durch zwei Koordinaten  $(x^1, x^2)$  bestimmt ist. Die Lage der Fläche  $M$  im  $\mathbf{R}^3$  ist dann durch 3 reelle Funktionen bestimmt,

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = (r^1(x^1, x^2), r^2(x^1, x^2), r^3(x^1, x^2)).$$

Die Länge einer Kurve  $\lambda \mapsto \mathbf{r}(\lambda)$  im  $\mathbf{R}^3$  ist durch

$$s = \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \left( \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (1.58)$$

gegeben. Betrachten wir speziell eine Kurve, die auf der Fläche  $M$  liegt, so ist

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(x^1(\lambda), x^2(\lambda)).$$

Wir benutzen die Abkürzungen

$$r^i_{,\mu}(x^1, x^2) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} r^i(x^1, x^2), \quad r^i_{,\mu\nu}(x^1, x^2) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} r^i(x^1, x^2), \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$

Wiederholte Indizes  $\mu, \nu$  werden summiert von 1 bis 2, wiederholte obere Indizes  $i$  von 1 bis 3. Damit ergibt sich nach Gl.(1.58) die Länge der Kurve auf  $M$  zu

$$s = \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} (r^i_{,\mu} r^i_{,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{\frac{1}{2}} d\lambda.$$

Durch Vergleich mit Gl.(1.57) sehen wir, daß der zugehörige metrische Tensor auf  $M$  durch

$$g_{\mu\nu}(x) = r^i_{,\mu}(x^1, x^2) r^i_{,\nu}(x^1, x^2) \quad (\text{Summe über } i = 1 \dots 3) \quad (1.59)$$

gegeben ist. Als nächstes geben wir eine Vorschrift an, wie Tangentenvektoren auf  $M$  paralleltransportiert werden sollen. Zu jedem Punkt  $x$  der Fläche  $M$  können wir den Normalenvektor  $\mathbf{n}(x)$  zu  $M$  definieren. Explizit ist  $\mathbf{n} = c_1 \mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}$ , oder ausführlicher

$$n^i(x) = c_1(x) \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r^j_{,1}(x^1, x^2) r^k_{,2}(x^1, x^2).$$

$\epsilon_{ijk}$  ist der vollständig antisymmetrische Tensor im  $\mathbf{R}^3$  mit  $\epsilon_{123} = 1$ , und Der Normierungsfaktor  $c_1(x) > 0$  kann so bestimmt werden, daß  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  ist.

Ein Vektor  $\mathbf{v}$  im  $\mathbf{R}^3$  ist genau dann Tangentenvektor an eine Kurve in  $M$  bei  $x \in M$  wenn  $\mathbf{v}$  auf dem Normalenvektor  $\mathbf{n}(x)$  senkrecht steht.

Sei nun  $C$  ein infinitesimales Kurvenstück vom Punkt  $x \in M$  mit Koordinaten  $(x^1, x^2)$  zum infinitesimal benachbarten Punkt  $y \in M$  mit Koordinaten  $(x^1 + \delta x^1, x^2 + \delta x^2)$ . Sei  $v \in T_x M$ . Dann ist  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(x) = 0$ . Wir setzen

$$\mathcal{U}(C)\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{n}(y)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(y)) \quad (1.60)$$

Offensichtlich ist der Vektor  $\mathcal{U}(C) \in T_y M$ , denn er steht senkrecht auf  $\mathbf{n}(y)$ . Außerdem ist seine Länge gleich der von  $\mathbf{v}$ , bis auf Korrekturen, die von 2-ter Ordnung in  $\delta x$  sind. Dies folgt daraus, daß die Komponenten von  $\mathbf{n}(y) - \mathbf{n}(x)$  von der Ordnung  $\delta x$  sind. Daher gilt das gleiche für  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(y)$ , denn  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(x) = 0$  für beliebige Tangentenvektoren  $\mathbf{v}$ . Also folgt aus Gl. (1.60), daß

$$\mathcal{U}(C)\mathbf{v} \cdot \mathcal{U}(C)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(y))^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + O(\delta x)^2.$$

Setzen wir einen endlichen Weg  $C$  aus  $N$  infinitesimalen Stücken zusammen, so wird der Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C)$  vermöge der Zusammensetzungsregel (1.4) erklärt sein. Da  $N\delta x = O(1)$  ist, so wird die Länge von  $\mathcal{U}(C)\mathbf{v}$  gleich der von  $\mathbf{v}$  sein bis auf Korrekturen von der Ordnung  $\delta x$ , die gegen 0 streben, wenn  $\delta x \mapsto 0$  geht. Somit ist die Länge von  $\mathcal{U}(C)v$  gleich der Länge von  $v$ .

Der durch Gl.(1.60) definierte Zusammenhang ist also metrisch.

Wir bestimmen nun die Zusammenhangskoeffizienten.

Die durch Koordinaten auf  $M$  bestimmte holonome gleitende Basis in  $T_x M$  ist durch die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien gegeben,

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Die damit zu identifizierenden Vektoren im  $\mathbf{R}^3$  sind

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}(x^1, x^2)}{\partial x^\mu} \equiv \mathbf{r}_{,\mu}(x). \quad (1.61)$$

Wir benutzen die Abkürzung  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Sei nun  $\mathbf{v}$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Nach Gl. (1.60) und der Definition (1.8) ist die kovariante Ableitung von der Form

$$D_\mu \mathbf{v}(x) = \partial_\mu \mathbf{v}(x) - c(x) \mathbf{n}(x) \quad (1.62)$$

Aus der Forderung, daß  $D_\mu \mathbf{v}(x) \in T_x M$  sein muss, und daher auf  $\mathbf{n}(x)$  senkrecht steht, ergibt sich

$$c(x) = \mathbf{n}(x) \cdot \partial_\mu \mathbf{v}(x).$$

Wir werden diesen expliziten Ausdruck aber nicht brauchen. Wir entwickeln nun  $D_\mu \mathbf{v}(x)$  nach den Vektoren  $\mathbf{e}_\mu(x)$  der holonomen gleitenden Basis,

$$D_\mu \mathbf{v}(x) = (D_\mu v)^\nu(x) \mathbf{e}_\nu(x).$$

Aus der Kenntnis der kovarianten Ableitungen für beliebiges  $v$  ergeben sich die Zusammenhangskoeffizienten vermöge

$$(D_\mu v)^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu} v^\rho$$

Die Basisvektoren stehen senkrecht auf  $\mathbf{n}(x)$ , und ihr Skalarprodukt ist durch den metrischen Tensor gegeben, vgl. Gl.(1.59). Bezeichnen wir wie gewöhnlich die Komponenten des inversen metrischen Tensors mit  $g^{\mu\nu}$  so ergeben sich die Komponenten von  $D_\mu \mathbf{v}(x)$  als

$$(D_\mu v)^\nu(x) = g^{\nu\rho}(x) \mathbf{e}_\rho(x) \cdot D_\mu \mathbf{v}(x)$$

Also ist nach Gl.(1.62) wegen  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(x) = 0$ ,

$$(D_\mu v)^\nu = g^{\nu\rho} \mathbf{r}_{,\rho} \partial_\mu \mathbf{v} \quad (1.63)$$

Entwickelt man  $\mathbf{v} = v^\sigma \mathbf{e}_\sigma = v^\sigma \mathbf{r}_{,\sigma}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} (D_\mu v)^\nu &= g^{\nu\rho} \mathbf{r}_{,\rho} \partial_\mu (v^\sigma \mathbf{r}_{,\sigma}) \\ &= g^{\nu\rho} (\mathbf{r}_{,\rho} \cdot \mathbf{r}_{,\sigma} \partial_\mu v^\sigma + \mathbf{r}_{,\rho} \mathbf{r}_{,\sigma\mu} v^\sigma) \end{aligned}$$

Da  $(\mathbf{r}_{,\rho} \cdot \mathbf{r}_{,\sigma} = g_{\rho\sigma})$  ist, so hat dies die Form

$$(D_\mu v)^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\mu} v^\sigma \quad (1.64)$$

mit Zusammenhangskoeffizienten

$$\Gamma^\nu_{\sigma\mu} = g^{\nu\rho} \Gamma_{\rho\sigma\nu}, \quad \Gamma_{\rho\sigma\nu} = \mathbf{r}_{,\rho} \cdot \mathbf{r}_{,\sigma\mu}. \quad (1.65)$$

Andererseits ist nach Gl.(1.59)

$$\partial_\mu g_{\rho\sigma} = \mathbf{r}_{,\rho} \cdot \mathbf{r}_{,\sigma\mu} + \mathbf{r}_{,\sigma} \cdot \mathbf{r}_{,\rho\mu}.$$

Die Zusammenhangskoeffizienten des durch den metrischen Tensor auf  $M$  bestimmten Riemannschen Zusammenhangs ergeben sich daraus nach Gl.(1.52). Das Resultat ist identisch mit Gl.(1.65).

Der durch die Formel (1.60) für den Paralleltransport definierte Zusammenhang auf  $M$  ist also ein Riemannscher Zusammenhang. Die zugehörige Metrik auf  $M$  ist durch die Euklidische Weglänge von Kurven im  $\mathbf{R}^3$  bestimmt.

## 1.4 Das Äquivalenzprinzip

Seit Galilei wissen wir, daß alle Körper gleich schnell fallen. Dies bedeutet, daß träge und schwere Masse einander gleich sind. Diese Gleichheit ist experimentell mit einer Genauigkeit von 1 in  $10^{12}$  bestätigt. Im Rahmen der nichtrelativistischen Mechanik ist die Lagrangefunktion eines Massenpunkts der Masse  $m$  im Gravitationspotential  $\Phi(x)$  bei Abwesenheit anderer Kräfte gegeben durch

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - m\Phi, \quad \left( v^i = \frac{dx^i}{dt} \right) \quad (1.66)$$

Daraus ergibt sich, daß sich die Masse in der Bewegungsgleichung herauskürzt,

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.67)$$

Teilchen mit verschiedener Masse genügen also derselben Bewegungsgleichung - sie fallen gleich schnell.

Durch Übergang zu einem mitfallenden Bezugssystem können wir außerdem den Einfluß der Gravitation lokal eliminieren. Solche Schwerelosigkeit ist dem heutigen Fernsehzuschauer eine von Raumflügen vertraute Tatsache. Die Einschränkung, daß die Elimination des Gravitationsfelds nur lokal - d.h. an einem Punkt - lokal möglich ist wird aus dem folgenden Beispiel klar.

Die Erde bewegt sich freifallend im Gravitationsfeld von Sonne und Mond. Wir betrachten ein mitfallendes (nicht rotierendes) Bezugssystem mit Ursprung im Erdmittelpunkt. Ein im Erdmittelpunkt ruhender Beobachter bleibt relativ zu diesem Bezugssystem in Ruhe, bewegt sich also kräftefrei.



Weg vom Erdmittelpunkt gilt dies jedoch nicht mehr. Dort bleiben Kräfte. Deren Wirkung auf die Wassermoleküle der Ozeane ist verantwortlich für das Entstehen der Gezeiten. Deshalb bezeichnet man Kräfte dieser Art als *Gezeitenkräfte*. Zu jedem gegebenen Zeitpunkt kann man also durch Übergang zu einem geeigneten Bezugssystem die Gravitationskräfte also an einem beliebigen Punkt  $\mathbf{r}$  des Raums wegtransformieren, im allgemeinen jedoch nicht in einer ganzen Umgebung davon - jedenfalls nicht exakt. Wie groß die Gezeitenkräfte sind, hängt vom Abstand vom Punkt  $\mathbf{r}$  ab und von der zweiten Ableitung des Gravitationspotentials. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird an die Stelle der zweiten Ableitung des Potentials eines schwachen Gravitationsfelds der Krümmungstensor treten.

Das Äquivalenzprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie gibt eine mathematische Formulierung der eben beschriebenen Unmöglichkeit, durch lokale Experimente zu unterscheiden zwischen einem in einem Gravitationsfeld freifallenden nichtrotierenden System (lokales Inertialsystem) und einem gleichförmig bewegten System im gravitationsfreien Raum. Verknüpft mit der Forderung, daß in einem lokalen Inertialsystem die spezielle Relativitätstheorie gelten soll, kann es wie folgt formuliert werden.

### Äquivalenzprinzip

i) *Die Geometrie ist lokal Minkowski'sch. D.h., in der Umgebung eines beliebig vorgegebenen Punkts  $\hat{x} \in M$  gibt es ein Koordinatensystem  $\{x^\mu\}$  derart, daß*

$$g_{\mu\nu}(\hat{x}) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (1.68)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho}(\hat{x}) = 0. \quad (1.69)$$

*Ein solches Koordinatensystem nennt man ein lokales Inertialsystem oder auch lokales Lorentzsystem.*

ii) *Bei Abwesenheit von Nichtgravitationskräften bewegt sich ein Massenpunkt bei  $\hat{x}$  relativ zum lokalen Lorentzsystem wie ein freies Teilchen, d.h. die Komponenten  $u^\mu = dx^\mu/cd\tau$  der Vierergeschwindigkeit erfüllen*

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0. \quad (1.70)$$

*Dabei ist  $\tau$  die Eigenzeit, d.h. die von einer mitgeführten Uhr gemessenen Zeit. Allgemeiner gelten bei  $\hat{x}$  im lokalen Lorentzsystem die Bewegungs- bzw. Feldgleichungen der speziellen Relativitätstheorie.*

**Bemerkung:** Die Möglichkeit, nicht nur die Gravitation, sondern alle fundamentalen Kräfte durch Übergang zu einem geeigneten Bezugssystem wegzutransformieren, wird später bei der Behandlung von Eichfeldtheorien diskutiert werden.

Nach Punkt i) des Äquivalenzprinzips werden Längen bei  $\hat{x}$  gemessen wie im Minkowskiraum. Ist  $Y$  ein Tangentenvektor bei  $\hat{x}$  mit Komponenten  $Y^\mu$  (bezüglich der durch das Koordinatensystem bestimmten holonomen Basis), so hat er wegen Gl.(1.69) nach Paralleltransport zu einem infinitesimal benachbarten Punkt  $y$  immer noch die Komponenten  $Y^\mu$  - vgl. Gl.(1.23) für die Paralleltransportmatrix. Auch der Paralleltransport geschieht also bei  $\hat{x}$  im lokalen Lorentzsystem wie im Minkowskiraum. Im Unterschied zur speziellen Relativitätstheorie kann man jedoch im allgemeinen durch keine Wahl des Koordinatensystems die Gültigkeit von Gl.(1.68,1.69) für alle Punkte  $\hat{x} \in M$  gleichzeitig erreichen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß der Punkt  $\hat{x}$  die Koordinaten  $x^\mu = 0$  bekommt. Führen wir nun eine konstante Lorentztransformation der Koordinaten durch

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Lambda \text{ unabhängig von } x, \quad (1.71)$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.72)$$

Dann sehen wir aus den Transformationsgesetzen (1.46) und (1.42), daß die Gültigkeit der Gleichungen (1.68,1.69) erhalten bleibt. *Eine konstante Lorentztransformation führt also ein lokales Lorentzsystem in ein anderes lokales Lorentzsystem über.*

Aus Gl.(1.69) folgt, daß die Torsion in der Allgemeinen Relativitätstheorie verschwindet. Denn  $S^\mu{}_{\nu\rho}(\hat{x}) = \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(\hat{x}) - \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}(\hat{x}) = 0$  im lokalen Lorentzsystem, und damit wegen des Transformationsgesetzes (1.48) in jedem Koordinatensystem. Da  $\hat{x}$  beliebig war, folgt daraus Torsion = 0 überall. Umgekehrt kann man leicht zeigen, daß man für beliebig vorgegebenen pseudo-Riemannschen Zusammenhang (mit 3 positiven und einem negativen Eigenwert von  $g_{\mu\nu}$ ) und beliebige Wahl von  $\hat{x}$  stets ein Koordinatensystem finden kann, sodaß Gl.(??) gelten. Dies sei dem Leser als Übung überlassen.

### 1.4.1 Eigenzeit, und Vierergeschwindigkeit als Tangentenvektor

Betrachten wir eine Kurve  $\lambda \mapsto C(\lambda)$  in der Raum Zeit Mannigfaltigkeit  $M$  mit Tangentenvektor  $Y(\lambda)$  bei  $C(\lambda)$ .

$$\langle Y(\lambda), Y(\lambda) \rangle = g_{\mu\nu}(C(\lambda))Y^\mu(\lambda)Y^\nu(\lambda).$$

Wir nennen die Kurve  $C$  bei  $C(\lambda)$

$$\textit{zeitartig}, \text{ wenn } \langle Y(\lambda), Y(\lambda) \rangle < 0, \quad (1.73)$$

$$\textit{lichtartig}, \text{ wenn } \langle Y(\lambda), Y(\lambda) \rangle = 0, \quad (1.74)$$

$$\textit{raumartig}, \text{ wenn } \langle Y(\lambda), Y(\lambda) \rangle > 0. \quad (1.75)$$

Diese Begriffe sind damit unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems definiert. Eine ganze Kurve wird zeitartig genannt, wenn sie überall zeitartig ist, u.s.w.. In einem lokalen Lorentzsystem bei  $x = C(\lambda)$  ist  $g_{\mu\nu}(C(\lambda)) = \eta_{\mu\nu}$ . Daher stimmen die Definition von zeitartig, lichtartig und raumartig mit den aus der speziellen Relativitätstheorie bekannten überein.

Die Trajektorie eines Massenpunkts bestimmt eine Kurve in der Raum Zeit Mannigfaltigkeit  $M$  bis auf die Parametrisierung; sie wird *Weltlinie* genannt. Da in einem lokalen Lorentzsystem die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten sollen, so folgt, daß die *Weltlinie eines Massenpunkts* stets *zeitartig* sein muß, *die eines Photons lichtartig*.

Die Länge einer zeitartigen Kurve  $C$  von  $x_a = C(\lambda_a)$  nach  $x_e = C(\lambda_e)$  wird definiert durch

$$s(\lambda_a, \lambda_e) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \left( -g_{\mu\nu}(C(\lambda)) \frac{dC^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (1.76)$$

Entsprechend definiert man die Länge einer raumartigen Kurve ohne das -Zeichen vor  $g_{\mu\nu}$ .

Ist die zeitartige Kurve  $C$  Weltlinie eines Massenpunkts, so definiert man das während der Bewegung verstrichene Intervall der Eigenzeit  $\tau$  durch

$$s = c\tau. \quad (1.77)$$

Hier und überall ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit in einem lokalen Lorentzsystem. Es ist also

$$d\tau = \frac{1}{c} \left( -g_{\mu\nu} \frac{dC^\mu}{d\lambda} \frac{dC^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (1.78)$$

Betrachten wir einen Punkt  $\hat{x}$  der Trajektorie, so können wir ein lokales Lorentzsystem finden, in dem das Teilchen (momentan) in Ruhe ist, d.h.  $dC^i/d\lambda = 0$ , für  $i = 1, 2, 3$ . Ausgehend von einem beliebigen lokalen Lorentzsystem lässt sich dies nämlich durch eine lokale Lorentztransformation erreichen. In diesem Bezugssystem vereinfacht sich Gl.(1.78) zu

$$d\tau = \frac{1}{c} dx^0 \equiv dt$$

Der hier eingeführte Begriff der Eigenzeit stimmt daher mit dem aus der speziellen Relativitätstheorie bekannten überein: *Die Eigenzeit ist die mit einer mitgeführten Uhr gemessene Zeit*.

Es ist besonders zweckmäßig, die Weltlinie eines Massenpunkts durch die Eigenzeit  $\tau$  - oder durch  $s = c\tau$  - zu parametrisieren. Die Kurve

$$\tau \mapsto x(\tau)$$

gibt dann an, wo in der Raumzeit  $M$  sich der Massenpunkt aufhält, wenn seine mitgeführte Uhr die Zeit  $\tau$  anzeigt.

Die *Vierergeschwindigkeit*  $u = u(\tau)$  ist der Tangentenvector an die durch die Eigenzeit parametrisierte Weltlinie des Massenpunkts am Punkt  $x(\tau)$ , multipliziert mit  $c^{-1}$ . Seine Komponenten sind

$$u^\mu(\tau) = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}. \quad (1.79)$$

Aus Gl.(1.78) mit  $\lambda = \tau$  folgt, daß  $u(\tau)$  ein zeitartiger Vektor der Länge  $-1$  ist,

$$g_{\mu\nu}(x(\tau))u^\mu(\tau)u^\nu(\tau) = -1. \quad (1.80)$$

### 1.4.2 Die Bewegungsgleichung eines Massenpunkts bei Abwesenheit von Nichtgravitationskräften.

Die Bewegungsgleichung eines Massenpunkts sagt aus, wie sich seine (Vierer-) Geschwindigkeit im Laufe eines infinitesimalen (Eigen-) Zeitintervalls ändert. Aufgrund des Äquivalenzprinzips ist die Bewegungsgleichung in einem lokalen Lorentzsystem gegeben durch Gl.(1.70). Die Form dieser Gleichung in einem beliebigen anderen Koordinatensystem kann man im Prinzip finden, indem man die entsprechende Koordinatentransformation explizit durchführt. Man

kommt jedoch einfacher zum Resultat durch Anwendung eines der beiden folgenden Verfahren.

1.) Man überlegt sich, was die koordinatenunabhängige Bedeutung der gegebenen Gleichung im lokalen Lorentzsystem ist, oder

2.) Man errät das Resultat, schreibt es in koordinatenunabhängiger Form (durch Verwendung der koordinatenunabhängig eingeführten Begriffe von Paragraph 1, oder doch so, daß die Gleichung in einem beliebigen Lorentzsystem ihre Form behält) und verifiziert, daß die Gleichung sich in einem lokalen Lorentzsystem in der vorgegebenen speziell relativistischen Form schreiben lässt. Hierzu benutzt man die Ausdrücke (??) für den metrischen Tensor und die Zusammenhangskoeffizienten im lokalen Lorentzsystem.

Als Ratevorschrift wendet man dabei die sogenannte "Komma wird Semikolon"-Regel an. Sie besagt, daß man die Gleichung im lokalen Lorentzsystem nehmen und überall gewöhnliche durch kovariante Ableitungen ersetzen soll. Außerdem müssen Indizes  $\mu, \nu, \dots$  wenn nötig mit Hilfe des metrischen Tensors gehoben oder gesenkt werden.

Beide Verfahren sollen nun illustriert werden, zuerst 1.).

Nach der Diskussion im Anschluß an die Formulierung des Äquivalenzprinzips geschieht der Paralleltransport im lokalen Lorentzsystem in gleicher Weise wie im Minkowski-Raum, d.h. zwei Tangentenvektoren  $u(\tau)$  und  $u(\tau + \delta\tau)$  gehen auseinander durch infinitesimalen Paralleltransport hervor, wenn sie die gleichen Komponenten haben. Die Bewegungsgleichung (1.70) besagt aber gerade, daß die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sich im infinitesimalen Zeitintervall  $\delta\tau$  nicht ändern. Also geht die Vierergeschwindigkeit  $u(\tau + \delta\tau)$  zur Zeit  $\tau + \delta\tau$  aus der Vierergeschwindigkeit  $u(\tau)$  durch infinitesimalen Paralleltransport längs der Weltlinie hervor. Dies ist bereits die gesuchte invariante Formulierung, die ohne Bezug auf ein Koordinatensystem Sinn hat. Wir können uns ein endliches Eigenzeitintervall aus infinitesimalen zusammengesetzt denken. Da die Vierergeschwindigkeit der Tangentenvektor an die Weltlinie ist, so ergibt sich aus der bisherigen Diskussion die folgende Eigenschaft der Weltlinie eines Massenpunkts: Der Tangentenvektor am Punkt  $x(\tau_2)$  der Weltlinie eines Massenpunkts geht aus dem Tangentenvektor am Punkt  $x(\tau_1)$  durch Paralleltransport längs der Weltlinie hervor. Kurven mit dieser Eigenschaft nennt man *autoparallel*. Bei Abwesenheit von Nicht-Gravitationskräften sind die Weltlinien von Massenpunkten also autoparallele Linien.

In der Euklidischen Geometrie kann man Geraden als Kurven definieren, deren Tangentenvektoren überall parallel sind. Autoparallele Linien sind die

natürliche Verallgemeinerung von Geraden in der Euklidischen Geometrie.

Im Spezialfall einer pseudo-Riemannschen Geometrie sind die autoparallelen Linien mit den Geodäten identisch, wie wir in Kürze sehen werden.

Es wurde gezeigt, daß das Vektorfeld  $u$  längs der Weltlinie parallel ist im Sinne der Definition nach Gl.(1.9). Daher erfüllt sie die Gl.(1.10),

$$\frac{D}{cd\tau}u(\tau) \equiv D_{u(\tau)}u(\tau) = 0. \quad (1.81)$$

In Worten: Die kovariante Ableitung nach dem Parameter Eigenzeit der Vierergeschwindigkeit verschwindet.

Die Ratevorschrift von 2.) führt zum selben Ergebnis. Sie besagt nämlich, daß die gewöhnliche Ableitung  $d/d\tau$  in Gl.(1.70) durch eine kovariante Ableitung  $D/d\tau$  ersetzt werden soll.

In Komponentenschreibweise lautet die so gefundene Bewegungsgleichung (1.81) eines Massenpunkts

$$\frac{du^\mu(\tau)}{cd\tau} + u^\nu(\tau)u^\rho(\tau)\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x(\tau)) = 0. \quad (1.82)$$

Im lokalen Lorentzsystem bei  $\hat{x} = x(\tau)$  ist  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(\hat{x}) = 0$ . Daher stimmt dort Gl.(1.82) mit Gl.(1.70) überein.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet in der speziellen Relativitätstheorie

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

Durch Vergleich mit Gl.(1.82) sehen wir, daß die Größe

$$F^\mu = -mc u^\nu u^\rho \Gamma^\mu_{\nu\rho}$$

als *Schwerkraft* interpretiert werden kann.

Es soll schließlich noch gezeigt werden, daß die Lösungen der Bewegungsgleichung (1.82) die Geodäten auf der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit sind. Dabei wird die Formel (1.52) benutzt, die die Zusammenhangskoeffizienten eines pseudo-Riemannschen Zusammenhangs durch den metrischen Tensor ausdrückt.

*Geodäten* sind Kurven extremaler Länge zwischen vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt. Wir interessieren uns hier für zeitartige Kurven, und ihre Länge  $s$  ist durch Gl.(1.76) gegeben. Wir definieren eine Wirkung  $S_{Materie}$

als Funktion eines Stücks Weltlinie eines Massenpunkts der Masse  $m$  durch die Länge  $s$  des Stücks Weltlinie vermöge

$$S_{Materie} \equiv -mcs = \int L(\dot{x}(\lambda), x(\lambda)) d\lambda,$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &\equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \\ L(\dot{x}, x) &= -mc[-g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.83)$$

Die Extremalbedingung  $\delta s = 0$  führt auf die Euler Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0.$$

Benutzen wir, daß nach der Definition (1.78) der Bahnlänge

$$[-g_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{x}^\mu(\lambda)\dot{x}^\nu(\lambda)]^{1/2} = \frac{cd\tau}{d\lambda} \equiv \dot{s}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{d}{d\lambda} \left( -\frac{1}{\dot{s}} g_{\mu\rho} \dot{x}^\mu \right) + \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Parametrisieren wir die Weltlinie durch die Eigenzeit  $\lambda = \tau$ , so ist  $\dot{s} = c$  konstant, und die obige Gleichung vereinfacht sich zu

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu + \partial_\nu g_{\mu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Wegen der Symmetrie von  $\dot{x}^\nu \dot{x}^\mu$  in den Indizes  $\mu, \nu$  ist der zweite Term gleich  $\frac{1}{2} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu})$ . Setzen wir Gl. (1.52) für die Zusammenhangskoeffizienten ein, so ergibt sich

$$g_{\mu\rho} \ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Gamma_{\rho\mu\nu} = 0,$$

oder

$$\ddot{x}^\rho + \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) = 0. \quad (1.84)$$

Dies stimmt mit Gl.(1.82) überein. Der Punkt bedeutet Ableitung nach der Eigenzeit.

### 1.4.3 Gleichung der geodätischen Abweichung

Wir wollen nun untersuchen, wie sich nahe beieinander befindliche Massenpunkte relativ zueinander bewegen bei Abwesenheit von Nichtgravitationskräften. Wir können ein "mitfallendes" Koordinatensystem wählen, in dessen Ursprung einer der Massenpunkte ruht. Die Frage ist dann, wie sich ein zweiter, nahebei befindlicher Massenpunkt relativ zu diesem Koordinatensystem bewegt. Da Marksteine irgendwelcher Art, die wir uns zu Vermessungszwecken im Universum aufgestellt denken können, ebenfalls der Gültigkeit der physikalischen Bewegungsgleichungen unterworfen sind, so ist die Frage nach der Relativbewegung von Massenpunkten die eigentlich physikalisch interessante Frage; an die Diskussion am Anfang dieses Paragraphen sei erinnert.

Als Massenpunkte betrachten wir Probekörper, deren Masse so klein ist, daß das von Ihnen erzeugte Gravitationsfeld vernachlässigbar ist, sodaß sie sich unabhängig voneinander im äußeren Gravitationsfeld bewegen.

Betrachten wir nun eine Familie von Weltlinien. Jede dieser Weltlinien soll durch die Eigenzeit des jeweiligen Massenpunkts parametrisiert sein, und die verschiedenen Weltlinien der Familie sollen durch einen reellen Parameter  $\xi$  unterschieden werden, vgl. Zeichnung. Damit ist eine 2-Parameter Familie  $x(\xi, \tau) \in M$  von Punkten in  $M$  zu betrachten. Die Abweichung einer infinitesimal benachbarten Weltlinie von der Bezugsweltlinie mit  $\xi = 0$  ist gegeben durch den Tangentenvektor  $n(\tau)$  an die durch  $\xi$  parametrisierte Kurve,

$$\xi \mapsto C_\tau(\xi) = x(\xi, \tau)$$

mit konstantem  $\tau$ . Seine Komponenten sind

$$n^\mu(\tau) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi},$$

denn

$$x^\mu(\xi, \tau) = x^\mu(0, \tau) + \xi n^\mu(\tau) \quad (1.85)$$

für infinitesimales  $\xi$ . Bezeichnen wir die Vierergeschwindigkeit der Teilchen mit  $u = u(\xi, \tau)$ , so gilt die Bewegungsgleichung (1.81)

$$D_u u = 0 \quad \text{für jedes } \xi \text{ und alle } \tau \quad (1.86)$$

$D_{u(\xi, \tau)} u(\xi, \tau)$  ist ein Tangentenvektor in  $T_x(\xi, \tau)M$ . Für festes  $\tau$  definiert daher  $D_u u$  ein Vektorfeld entlang der Kurve  $C_\tau(\xi)$ . Wir können die kovariante



Ableitung dieses Vektorfelds in Tangentialrichtung nehmen (vgl Gl.(1.9)). Diese verschwindet natürlich, da das Vektorfeld nach Gl.(??) identisch Null ist. Also gilt

$$D_n D_u u = 0,$$

insbesondere bei  $\xi = 0$ , und für jedes  $\tau$ .

Wir schreiben diese Gleichung noch etwas um,

$$D_u D_n u + [D_n, D_u] u = 0.$$

Durch Betrachtung von Torsion und Krümmung kann die kovariante Ableitung  $D_n$  in  $\xi$ -Richtung aus dieser Gleichung eliminiert werden. Hierzu bemerken wir zunächst, daß die beiden Vektorfelder  $n$  und  $u$  miteinander kommutieren,

$$[n, u] \equiv [\partial_n, \partial_u] = 0,$$

da die gewöhnlichen Richtungsableitungen  $\partial_n = \partial/\partial\xi$  und  $\partial_u = \partial/\partial\xi$  miteinander kommutieren.

Damit können wir nach Gl.(1.14,1.17) den Kommutator  $[D_n, D_u]$  durch den Krümmungstensor ausdrücken.

$$[D_n, D_u] = \mathcal{R}(n, u) = n^\mu n^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

Weiter folgt aus dem Verschwinden der Torsion, daß

$$D_n u = D_u n,$$

denn nach der koordinatenunabhängigen Definition der Torsion  $S$  in Paragraph 3 ist

$$0 = S(n, u) \equiv D_n u - D_u n - [n, u].$$

Damit erhalten wir schließlich

$$D_u D_u n + \mathcal{R}(n, u)u = 0. \quad (1.87)$$

$D_u$  ist die kovariante Ableitung in Richtung des Tangentenvektors  $u$  an die durch  $\tau$  parametrisierte Bezugsweltlinie. Nach Gl.(1.9) wird diese auch als kovariante Ableitung  $D/d\tau$  nach  $\tau$  bezeichnet. Gl. (1.87) nimmt damit die folgende Form an

$$\frac{D^2}{d\tau^2} n(\tau) + \mathcal{R}(n(\tau), u(\tau))u(\tau) = 0. \quad (1.88)$$

Dabei ist  $u(\tau) = u(0, \tau)$  die Vierergeschwindigkeit auf der Bezugsweltlinie  $\xi = 0$ .

Gl.(1.88) ist die gesuchte "Gleichung der geodätischen Abweichung". Sie sagt uns, wie sich der Vektor  $n$  der Abweichung (1.85) einer infinitesimal benachbarten Weltlinie längs der Bezugsweltlinie ändert. Wie wir schon wissen, sind die Weltlinien von Massenpunkten Geodäten, daher der Name.

Verschwindet die Krümmung nicht, so ist im allgemeinen  $Dn/d\tau \equiv 0$  nicht verträglich mit Gl.(1.88). Den Vektor  $n(\tau_2)$  der Abweichung zur Eigenzeit  $\tau_2$  bekommt man also nicht einfach durch Paralleltransport von  $n(\tau_1)$  längs der Weltlinie mit  $\xi = 0$ ; in diesem Sinne kann  $n$  nicht "konstant" sein längs der Bezugsweltlinie. Einem Beobachter auf der Bezugsweltlinie erscheint die Bewegung längs der Nachbartrajektorie als beschleunigte Bewegung. Man bezeichnet die hierfür verantwortlichen Kräfte als Gezeitenkräfte. Nach Gl.(1.88) sind sie durch die Krümmung der Raum-Zeit bestimmt.

Es ist instruktiv, mit der analogen Rechnung in der Newtonschen Theorie zu vergleichen. Betrachten wir eine Familie von Lösungen  $x^i(\xi, t)$  der Bewegungsgleichung (1.67),

$$\ddot{x}(\xi, t) + \nabla^i \Phi(x(\xi, t)) = 0 \quad (1.89)$$

Der Punkt bedeutet hier Ableitung nach  $t$ . Differenzieren wir diese Gleichung nach  $\xi$ , so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} x^i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial \xi} \nabla^j \nabla^i \Phi = 0.$$

Der Vektor der Abweichung einer benachbarten Trajektorie hat Komponenten

$$n^i(t) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi}(0, t).$$

Vertauschem wir die  $\xi$  und  $t$ -Ableitungen und setzen wir  $\xi = 0$ ,  $x(t) = x(0, t)$ , so erhalten wir

$$\frac{d^2 n^i(t)}{dt^2} + \sum_{j=1}^3 n^j(t) \nabla^j \nabla^i \Phi(x(t)) = 0. \quad (1.90)$$

Der zweite Term enthält den Gradienten der Schwerkraft  $-m\nabla\Phi$ . Er bestimmt die Gezeitenkräfte. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird der entsprechende 2-te Term in Gl.(1.87) durch den Krümmungstensor bestimmt.

In Komponentenschreibweise lautet dieser Term

$$\mathcal{R}(n, u)u = n^\rho u^\sigma u^\mu R^\nu_{\mu\rho\sigma} e_\nu, \quad u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{cd\tau}. \quad (1.91)$$

$e_\nu$  sind die Vektoren der durch das Koordinatensystem bestimmten holonomen Basis.

#### 1.4.4 Bewegung eines nichtrelativistischen Teilchens im schwachen stationären Gravitationsfeld.

Aus der Diskussion der Bewegungsgleichungen (1.82) haben wir gesehen, daß die Schwerkraft durch die Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  bestimmt ist vermöge  $F^\mu = -mcu^\mu u^\rho \Gamma^\mu_{\nu\rho}$ . Nach Gl.(1.52) bekommt man die Koeffizienten  $\mathcal{G}_{mnr}$  als Linearkombination von ersten Ableitungen des metrischen Tensors. Der *metrische Tensor* ist also eine Art von *Potential für die Schwerkraft*. Wir wollen nun untersuchen, wie dieses Potential mit dem Gravitationspotential der Newtonschen Theorie zusammenhängt.

Dazu betrachten wir einen Massenpunkt, der sich relativ zu einem gegebenen Koordinatensystem nichtrelativistisch bewegt,

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll c, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dann ist die Eigenzeit  $t \approx x^0/c$  und

$$u^0 = \frac{1}{c} \frac{dx^0}{d\tau} \approx 1, \quad u^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{d\tau} \ll 1,$$

und Gl.(1.82) vereinfacht sich zu

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\Gamma^i_{00}.$$

Wir wollen weiter annehmen, daß das Gravitationsfeld stationär ist, sodaß  $g_{\mu\nu}$  von  $x$  unabhängig ist, und schwach in dem Sinne, daß

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll 1.$$

Dann ergibt sich aus Gl.(1.52) für die Zusammenhangskoeffizienten

$$\Gamma^i_{00} \approx \Gamma_{i00} = -\frac{1}{2} \{2\partial_0 g_{i0} - \partial_i g_{00}\} = \frac{1}{2} \partial_i g_{00}. \quad (1.92)$$

Also nimmt die Bewegungsgleichung die folgende Form an

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}.$$

Durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung (1.67) der Newtonschen Theorie sehen wir, daß  $\frac{1}{2}\partial g_{00}/\partial x^i = -\partial\Phi/\partial x^i$ . Verfügen wir über die willkürliche additive Konstante im Newtonschen Gravitationspotential  $\Phi$  indem wir  $\Phi = 0$  verlangen, wenn  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  ist - beispielsweise weit weg von aller Materie, die ein Gravitationsfeld erzeugen kann - so ergibt sich das Resultat

$$g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (1.93)$$

### 1.4.5 Vierbein

Nach dem Äquivalenzprinzip gibt es zu jedem Punkt  $x$  ein Koordinatensystem in einer Umgebung von  $x$  derart, dass bezüglich dieses Koordinatensystems

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$$

für das vorgegebene  $x$ . Dabei ist  $\eta_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 0..3$  der metrische Tensor des Minkowski-Raums. Nach dem Transformationsgesetz für den metrischen Tensor unter Koordinatentransformationen gibt es dann für jedes beliebige Koordinatensystem eine Matrix  $h_\mu^\alpha(x)$  derart, dass

$$g_{\mu\nu}(x) = h_\mu^\alpha(x)\eta_{\alpha\beta}h_\nu^\beta(x) \quad (1.94)$$

Wie immer wird über wiederholte Indizes summiert. Ist  $(h_\mu^\alpha(x))$  die zur Matrix  $h_\alpha^\mu(x)$  inverse Matrix, so folgt weiter, dass

$$\eta_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu(x)g_{\mu\nu}(x)h_\beta^\nu(x). \quad (1.95)$$

Dies gilt für jedes  $x$  und jedes Koordinatensystem.

Ist  $\partial_\mu$  die durch das Koordinatensystem bestimmte holonome gleitende Basis, so können wir eine neue gleitende Basis  $(e_\alpha(x))$ ,  $\alpha = 0..3$  durch

$$e_\alpha(x) = h_\alpha^\mu(x)\partial_\mu \in T_xM. \quad (1.96)$$

definieren. Dabei ist  $(h_\mu^\alpha(x))$  die zur Matrix  $h_\alpha^\mu(x)$  inverse Matrix.

Nach Definition (1.45) des metrischen Tensors ist  $\langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle_x = g_{\mu\nu}(x)$ . Daraus ergibt sich, dass die neue gleitende Basis pseudo-orthonormal ist,

$$\langle e_\alpha(x), e_\beta(x) \rangle_x = \eta_{\alpha\beta} . \quad (1.97)$$

Aus dem Äquivalenzprinzip folgt also die Existenz pseudo-orthonormaler gleitender Basen. Ist umgekehrt eine pseudo-orthonormale Basis gegeben, so haben die Entwicklungskoeffizienten  $h_\alpha^\mu(x)$  bezüglich der holonomen Basis und ihr Inverses die Eigenschaften (1.94) und (1.95). Da die durch Gl.(1.96) definierte gleitende Basis  $(e_\alpha(x))$  aus 4 zueinander pseudo-orthonormalen Vektoren besteht, bezeichnet man  $h_\alpha^\mu(x)$  als *Vierbein*.

Eine Basistransformation  $e_\alpha(x) \mapsto e'_\alpha(x) = e_\beta(x)S^\beta_\alpha(x)$  wird eine pseudo-orthonormale Basis genau dann in eine andere pseudo-orthonormale Basis überführen, wenn  $S^\beta_\alpha \eta_{\beta\gamma} S^\gamma_\delta = \eta_{\alpha\delta}$  ist, d.h. wenn  $S$  eine Lorentztransformation ist. Pseudo-orthonormale gleitende Basen, und damit ein Vierbein sind daher durch die Metrik bis auf eine lokale Lorentztransformation bestimmt. Umgekehrt bestimmt ein Vierbein nach Gl.(1.94) die Metrik.

Die Kenntnis der Metrik und Kenntnis eines Vierbeins bis auf lokale Lorentztransformation sind also zueinander äquivalent. Manchmal ist es günstig, im Falle der quantenmechanischen Behandlung von Materie mit Spin  $\frac{1}{2}$  sogar unerlässlich, mit dem Vierbein statt mit der Metrik zu arbeiten. Das Vierbein ist eine Art Quadratwurzel aus der Metrik.

Wir sehen ausserdem, dass nur Lorentztransformationen als Eichtransformationen zugelassen sind, wenn wir nur pseudo-orthonormale gleitende Basen zulassen. Pseudo-orthonormale Basen sind analog zu orthonormalen Basen in Eichtheorien der Elementarteilchenphysik. Aus diesem Grund sagt man, *die Eichgruppe der allgemeinen Relativitätstheorie sei die Lorentzgruppe*.

Wir leiten noch ein später nützliches Resultat her. Da die Determinante eines Produkts von Matrizen gleich dem Produkt der Determinanten ist, so folgt aus Gl.(1.94), dass

$$-\det(g_{\mu\nu}(x)) = \det(h_\mu^\alpha(x))^2 \quad (1.98)$$

Freie Teilchen werden quantenmechanisch durch die allgemein relativistische Dirac Gleichung beschrieben. In diese geht das Vierbein ein. Man braucht jedoch ausserdem den Paralleltransport von Spinoren. Wir stellen daher die Besprechung der Dirac Gleichung bis S2.2.3 zurück.



# Chapter 2

## Die Einsteinschen Feldgleichungen

### 2.1 Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen

Aus dem Studium der Bewegungsgleichungen (1.81) für einen Massenpunkt haben wir gesehen, daß die Schwerkraft in der allgemeinen Relativitätstheorie durch den Zusammenhang bestimmt ist. Im ersten Paragraphen von Kapitel I wurde betont, daß der Zusammenhang auf der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit nicht a priori gegeben, sondern als Lösung dynamischer Gleichungen gefunden werden muß. Es gilt nun, diese Gleichungen anzugeben. Nach dem Äquivalenzprinzip ist der Zusammenhang auf unserer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ein pseudo-Riemannscher, also durch den metrischen Tensor bestimmt. Wir suchen daher nach Gleichungen für den metrischen Tensor. Nach dem in Kapitel I, SS1 diskutierten Lokalitätsprinzip müssen diese Gleichungen lokal sein, d.h. (partielle) Differentialgleichungen, die den metrischen Tensor und seine Ableitungen am selben Punkt  $x$  von  $M$  verknüpfen. Nach dem Naheninformationsprinzip darf die Gültigkeit dieser Gleichungen nicht von einer bestimmten Wahl einer gleitenden Basis oder eines Koordinatensystems auf  $M$  abhängen.

Man fordert weiter, daß die partiellen Differentialgleichungen für den metrischen Tensor von 2-ter Ordnung sind, und sich aus einem Extremalprinzip ableiten lassen. Diese Forderungen sind motiviert dadurch, daß sie auch anderswo in der Physik erfüllt sind. (Sie sind jedoch nicht entscheidend wichtig, man kann auch auf andere Weise zu den Einstein'schen Feldgleichun-

gen kommen.) Beispielsweise ist die Wirkung des freien elektromagnetischen Felds in der speziellen Relativitätstheorie gegeben durch

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x).$$

$\mathcal{S}$  ist als Funktion des Vektorpotentials zu betrachten, d.h. es ist  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  einzusetzen. Die Maxwell'schen Gleichungen  $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$  ergeben sich aus der Forderung, daß  $\mathcal{S}$  extremal ist. Das bedeutet, daß  $\delta\mathcal{S} = 0$  bei einer beliebigen infinitesimalen Variation  $A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \delta A_\mu(x)$  des Vektorpotentials, die im Unendlichen verschwindet.

Für die Wirkung des Gravitationsfelds in Wechselwirkung mit Materie setzt man an

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{geom} + \mathcal{S}_{Materie} \quad (2.1)$$

Dabei hängt  $\mathcal{S}_{geom}$  nur vom metrischen Tensor und seinen Ableitungen ab, nicht jedoch von den Variablen, die die Materie beschreiben. Die Bewegungs- und Feldgleichungen ergeben sich wiederum aus der Forderung  $\delta\mathcal{S} = 0$ .

Variiert man nur die Materie-Variablen, nicht aber den metrischen Tensor, so ergibt sich  $\delta\mathcal{S} = \delta\mathcal{S}_{Materie} \stackrel{!}{=} 0$ . Für ein System von Massenpunkten ist  $\mathcal{S}_{Materie}$  so zu wählen, daß sich aus dieser Forderung die schon bekannten Bewegungsgleichungen ergeben. Das Resultat wird in SS2 angegeben werden.

Die Forderung  $\delta\mathcal{S} = 0$  unter Variation des metrischen Tensors wird die Feldgleichungen ergeben. Da die resultierenden Feldgleichungen lokal sein sollen (vgl. Kapitel I, SS1) so wird man wie im Fall des Elektromagnetismus  $\mathcal{S}$  als Integral über eine lokale Lagrangedichte  $L_x$  ansetzen müssen.

$$\mathcal{S} = \frac{1}{c} \int d^4x L_x \quad (2.2)$$

Dabei darf  $L_x$  nur vom metrischen Tensor und seinen Ableitungen am Punkt  $x \in M$  abhängen.

Außerdem muß  $\mathcal{S}$  natürlich unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems sein. Nun ist das Volumenelement  $d^4x$  nicht invariant unter Koordinatentransformationen. Es gibt jedoch ein *invariantes Volumenelement*, nämlich

$$d^4x \sqrt{-g(x)} \quad (g(x) \equiv \det(g_{\mu\nu}(x))) \quad (2.3)$$

Dies sieht man wie folgt.



## 2.1. FORMULIERUNG DER EINSTEINSCHEN FELDGLEICHUNGEN 43

Wie in der Mathematik üblich, fassen wir  $d^4x$  auf als Produkt antikommutierender Differentiale

$$d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$$

Dabei ist  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  vollständig antisymmetrisch in seinen Indizes, und  $\epsilon_{0123} = 1$ . Die zweite Gleichung gilt, weil in der Summe über  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  alle Terme wegen der Antivertauschbarkeit  $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$  der Differentiale gleich sind. Führt man eine Koordinatentransformation (1.38) durch, so ist

$$d^4x = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^\nu_\omega T^\nu_\phi T^\rho_\kappa T^\sigma_\lambda dx'^\omega \wedge dx'^\phi \wedge dx'^\kappa \wedge dx'^\lambda \quad \text{mit} \quad T^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}.$$

Nun ist der Ausdruck  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\omega} \dots \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}$  offensichtlich vollständig antisymmetrisch unter Permutation von  $\omega, \phi, \kappa, \lambda$  und daher proportional zu  $\epsilon_{\omega\sigma\phi\lambda}$ . Ein bekannter Satz über Determinanten besagt, daß der Proportionalitätsfaktor  $= \det T$  ist. Also ist

$$d^4x = \frac{1}{4!} (\det T) \epsilon_{\omega\sigma\phi\lambda} dx'^\omega \wedge \dots \wedge dx'^\lambda = (\det T) d^4x'$$

Andrerseits transformiert sich der metrische Tensor nach Gl.(1.46)

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\rho\sigma} S^\rho_\mu S^\sigma_\nu \quad \text{mit} \quad S^\rho_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}, \quad \text{also} \quad S = T^{-1}$$

Daher ist

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = g' (\det S)^2 = g' (\det T)^{-2}$$

Somit gilt wie behauptet

$$d^4x \sqrt{-g} = d^4x' \sqrt{-g'}$$

Es ist nun zweckmäßig, aus der Lagrangedichte  $L_x$  einen Faktor  $\sqrt{-g}$  herauszuziehen, und zu schreiben

$$\mathcal{S}_{geom} = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_x \quad , \quad \text{also} \quad L_x = \sqrt{-g} \mathcal{L}_x \quad (2.4)$$

Die Wirkung  $\mathcal{S}_{geom}$  wird von der Wahl eines Koordinatensystems unabhängig sein, wenn  $\mathcal{L}_x$  es ist.

Da wir Differentialgleichungen 2. Ordnung für den metrischen Tensor wollen, liegt es nahe, anzunehmen, daß  $\mathcal{L}_x$  nur vom metrischen Tensor und

seinen ersten Ableitungen abhängen wird, ähnlich wie die Wirkung für das elektromagnetische Feld nur vom Vektorpotential und seinen ersten Ableitungen abhängt. Es ist jedoch unmöglich, ein nichttriviales koordinatenunabhängiges  $\mathcal{L}_x$  dieser Form zu finden. Da  $\mathcal{L}_x$  koordinatenunabhängig sein soll und nur von  $g_{\mu\nu}$  und  $\partial_\rho g_{\mu\nu}$  am Punkt  $x$  abhängen darf, können wir seinen Wert in einem lokalen Lorentzsystem bei  $x$  bestimmen.

Dort ist nach Gl.(1.681.69)  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$  und  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(x) = 0$  daher  $\partial_\rho g_{\mu\nu}(x) = \Gamma_{\mu\nu\rho}(x) + \Gamma_{\nu\mu\rho}(x) = 0$  nach GL.(1.53). Also wäre  $\mathcal{L}_x(g_{\mu\nu}(x), \partial_\rho g_{\mu\nu}(x)) = \mathcal{L}_x(\eta_{\mu\nu}, 0)$  unabhängig vom metrischen Tensor.

Es ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig, daß  $L_x$  keine höheren Ableitungen des metrischen Tensors enthält, wenn die resultierenden Feldgleichungen von 2. Ordnung sein sollen. Addiert man nämlich zu  $L_x = \sqrt{-g}\mathcal{L}_x$  eine totale Divergenz, ändern sich die Feldgleichungen nicht, da sie keinen Beitrag zu  $\delta S$  gibt ( bei Variationen von  $g_{\mu\nu}$ , die im Unendlichen verschwinden). So bekommen wir immer noch Feldgleichungen 2. Ordnung, wenn  $L_x$  die zweiten Ableitungen linear enthält mit Koeffizientenfunktionen  $f(g_{\rho\sigma})$ , die nur vom metrischen Tensor, nicht aber von dessen ersten Ableitungen abhängen. Denn es ist

$$f(g_{\rho\sigma})\partial_\tau\partial_\omega g_{\mu\nu} = \partial_\tau[f(g_{\rho\sigma})\partial_\omega g_{\mu\nu}] - \frac{\partial f}{\partial g_{\rho\sigma}}\partial_\tau g_{\rho\sigma}\partial_\omega g_{\mu\nu} \quad .$$

Der erste Term ist eine Divergenz, und der zweite enthält nur erste Ableitungen des metrischen Tensors.

Der Krümmungstensor hat nach Gl. (1.33) und (1.52) die Komponenten

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\tau\mu}\Gamma^\tau_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\sigma\mu} \quad (2.5)$$

$$\text{mit} \quad \Gamma^\rho_{\sigma\mu} = g^{\rho\tau}(\partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\mu g_{\tau\sigma} - \partial_\tau g_{\sigma\mu}) \quad (2.6)$$

Daraus ergibt sich für  $R_{\tau\sigma\mu\nu} = g_{\rho\tau}R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  der folgende Ausdruck

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\tau \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\tau\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^\tau \partial x^\mu} \right) + g_{\rho\omega}(\Gamma^\rho_{\sigma\mu}\Gamma^\omega_{\tau\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\Gamma^\omega_{\tau\mu}) \quad (2.7)$$

Es enthält also  $\sqrt{-g}R_{\dots}$  die zweiten Ableitungen von  $g_{..}$  nur linear und multipliziert mit einer Funktion von  $g_{..}$ . Einen Skalar erhält man, indem man  $R_{\dots}$  über Paare von Indizes kontrahiert. Dies folgt aus dem Transformationsgesetz (1.43) und ist ein Spezialfall der allgemeinen Tatsache, daß man aus einem Tensor durch Kontraktion wieder einen Tensor erhält (vgl. den nächsten Paragraphen).

## 2.1. FORMULIERUNG DER EINSTEINSCHEN FELDGLEICHUNGEN 45

Aus Gl.(2.7) folgen die Symmetrie-Eigenschaften

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (2.8)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (2.9)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.10)$$

Außerdem gilt noch die folgende Identität

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0 \quad (2.11)$$

Daraus folgt, daß der Krümmungstensor im vierdimensionalen Raum nicht  $4^4 = 256$  unabhängige Komponenten hat, sondern nur 20. (In zwei Dimensionen gibt es sogar nur eine unabhängige Komponente  $R_{1212}$ ).

Wegen der Symmetrie-Eigenschaften (2.8,2.9,2.10) kann man aus dem Krümmungstensor nur auf eine Art einen Tensor 2-ter Stufe bilden, nämlich den *Ricci-Tensor*

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (2.12)$$

Es ist nämlich  $g^{\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0 = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu}$ , und die anderen möglichen Kontraktionen ergeben bis auf das Vorzeichen wieder den Ricci-Tensor.

Aus dem Ricci-Tensor kann man schließlich durch weitere Kontraktion einen Skalar bilden, den sogenannten Krümmungsskalar  $R$ ,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Damit haben wir einen Kandidaten für  $\mathcal{L}_x$  gefunden, der allen unseren Anforderungen genügt. Als Wirkung ergibt sich damit

$$\mathcal{S}_{geom} = \frac{c^3}{16\pi k} \int d^4x \sqrt{-g} R(x) \equiv \frac{c^3}{16\pi k} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad . \quad (2.14)$$

Dabei ist  $k$  eine Konstante mit der Dimension  $cm^3 g^{-2} s^{-2}$ . Die Faktoren  $c^3/16\pi$  sind so gewählt, daß  $k$  sich später als der Newtonschen Gravitationskonstanten gleich herausstellen wird.

Der soeben gefundene Kandidat für  $\mathcal{L}_x$  ist tatsächlich der einzige, der den an ihn gestellten Anforderungen genügt, bis auf die Möglichkeit der Addition einer Konstanten  $\Lambda$ . Die allgemeinste Form von  $\mathcal{L}_x$  wäre also

$$\mathcal{L}_x = \frac{c^4}{16\pi k} (R(x) - 2\Lambda) \quad \Lambda = const \quad (2.15)$$

Wegen des Faktors  $\sqrt{-g}$  in Gl. (2.4) hätte ein nichtverschwindender Wert von  $\Lambda$  einen nichttrivialen Einfluß auf die Bewegungsgleichungen.  $\Lambda$  wird als kosmologische Konstante bezeichnet. Es gibt keinen experimentellen Hinweis darauf, daß in der Natur  $\Lambda \neq 0$  ist. (Die Forderung, daß in einer realistischen einheitlichen Feldtheorie die kosmologische Konstante 0 oder sehr klein sein muß, macht Elementarteilchenphysikern derzeit beträchtliches Kopfzerbrechen. In der modernen Quantenfeldtheorie stellt man sich nämlich das Vakuum nicht schlicht als vollkommene Leere vor, sondern als ausgestattet mit nichttrivialen Eigenschaften, z.B. einer "Vakuumenergie", die zur kosmologischen Konstanten beiträgt. Dabei kann es dann leicht passieren, daß eine erfolglose Theorie einen Wert von  $10^{-120}$  cm für den Radius des Universums ergibt...).

Um die Feldgleichungen aus Gl. (2.14) herzuleiten, müssen wir zunächst die Variation  $\delta\mathcal{S}_{geom}$  von  $\mathcal{S}_{geom}$  bestimmen, wenn der metrische Tensor variiert wird.

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Unter solch einer Variation geht (weil  $0 = \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ )

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu} \quad (2.17)$$

und

$$\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \left( \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} R \delta g \right) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

Nun ist die Determinante  $g$  der Matrix  $g_{\mu\nu}$  gegeben durch

$$g = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu 0} g_{\nu 1} g_{\rho 2} g_{\sigma 3}$$

Also ist  $\partial g / \partial g_{\mu\nu} = \text{Cofaktor von } g_{\mu\nu} \text{ in der Determinante von } g$ . Andererseits sind die Komponenten der zu  $(g_{\mu\nu})$  inversen Matrix  $(g^{\mu\nu})$  gleich den Cofaktoren dividiert durch  $g$ , die Cofaktoren sind also durch  $g g^{\mu\nu}$  gegeben. Daher ist

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Also ist

$$\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

## 2.1. FORMULIERUNG DER EINSTEINSCHEN FELDGLEICHUNGEN 47

Wir werden weiter unten zeigen, daß  $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$  eine totale Divergenz ist, nach Integration über  $d^4x$  also Null ergibt. Damit ist

$$\delta\mathcal{S}_{geom} = \frac{c^3}{16\pi k} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.21)$$

Außerdem müssen wir noch die Variation  $\delta\mathcal{S}_{Materie}$  des Materie-Beitrags zu  $\mathcal{S}$  betrachten.  $\mathcal{S}_{Materie}$  wird ebenfalls vom metrischen Tensor abhängen. Diesen braucht man beispielsweise, um aus den Vieregeschwindigkeiten  $u^\mu$  einen Skalar  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$  zu bilden, allgemeiner überall dort, wo in der speziell relativistischen Form der Wirkung ein  $\eta_{\mu\nu}$  gebraucht wird. Außerdem kommen in manchen Fällen kovariant Ableitungen in  $\mathcal{S}_{Materie}$  vor, und damit Zusammenhangskoeffizienten, die von den ersten Ableitungen des metrischen Tensors abhängen. Wegen der Forderung der Lokalität können wir wieder schreiben

$$\mathcal{S}_{Materie} = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Materie} \quad (2.22)$$

Dann ergibt sich bei einer Variation (??) des metrischen Tensors

$$\delta\mathcal{S}_{Materie} = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie})}{\partial \partial_\rho g^{\mu\nu}} \delta \partial_\rho g^{\mu\nu} \right\}$$

Der zweite Term wird durch eine partielle Integration umgeformt, sodaß

$$\delta\mathcal{S}_{Materie} = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie})}{\delta g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie})}{\partial \partial_\rho g^{\mu\nu}} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.23)$$

Man definiert den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  durch

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie})}{\partial \partial_\rho g^{\mu\nu}} \quad (2.24)$$

Er ist symmetrisch in seinen Indizes:  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ . Damit ergibt sich die Variation der gesamten Wirkung als

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \delta\mathcal{S}_{geom} + \delta\mathcal{S}_{Materie} \quad (2.25) \\ &= \frac{c^3}{16\pi k} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dies soll verschwinden für beliebige Variationen  $\delta g^{\mu\nu}$  (Genauer muß  $\delta g^{\mu\nu} = \delta g^{\nu\mu}$  sein, da  $g^{\mu\nu}$  symmetrisch ist. Da der Koeffizient von  $\delta g^{\mu\nu}$  symmetrisch in

seinen Indizes ist, bedeutet dies keine Einschränkung.) Dies ist nur möglich, wenn der Koeffizient von  $\delta g^{\mu\nu}(x)$  verschwindet. Damit ergeben sich die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

Zur Vervollständigung der Herleitung bleibt noch zu zeigen, daß das Integral über  $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$  verschwindet wie oben behauptet wurde. Dazu brauchen wir eine Formel für die *kovariante Divergenz eines Vektorfelds*. Diese Formel ist auch für andere Anwendungen wichtig (z.B. um die Erhaltung der elektrischen Ladung im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu zeigen). Sie lautet

$$\mathcal{A}^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g}\mathcal{A}^\mu) \quad (2.28)$$

Später werden wir finden, daß

$$\mathcal{A}^\mu{}_{;\mu} = \mathcal{A}^\mu{}_{;\mu} \quad (2.29)$$

Aufgrund der Formel (1.27) für die kovariante Ableitung ist

$$\mathcal{A}^\mu{}_{;\mu} = \partial_\mu \mathcal{A}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\mu} \mathcal{A}^\nu \quad (2.30)$$

Nun ist aber nach Gl. (1.52) für  $\Gamma^\mu{}_{\nu\mu}$

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}$$

Nach Gl. (2.19) ist aber

$$\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\sigma}} = g g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}$$

Also ist

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu}$$

Setzt man dies in Gl. (2.30) ein, so ergibt sich Gl. (2.28). Die kovariante Divergenz eines Vektorfelds ist ein Skalar, also unabhängig vom Koordinatensystem.

Die Größe  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  ist als Differenz zweier Skalare ebenfalls ein Skalar. Wir können sie daher in einem lokalen Lorentzsystem bei  $x$  auswerten. Dort ist  $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) = 0$  und daher ergibt der Ausdruck (1.33) für  $R_{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\rho} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \right)$$

Im zweiten Term können wir die Indizes  $\nu \leftrightarrow \rho$  umbenennen. Da im lokalen Lorentzsystem die ersten Ableitungen des metrischen Tensors verschwinden, läßt sich das Resultat schreiben als

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\rho} \quad (2.31)$$

$$v^\rho = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \quad . \quad (2.32)$$

Im lokalen Lorentzsystem ist die kovariante Ableitung gleich der gewöhnlichen, also können wir das Resultat auch schreiben als

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = v^\rho{}_{;\rho}$$

Da beide Seiten der Gleichung Skalare sind, gilt die Gleichung dann auch in einem beliebigen Koordinatensystem.

Setzen wir schließlich Gl. (2.28) ein, so erhalten wir

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \partial_\rho (\sqrt{-g} v^\rho) = 0$$

da  $v^\rho$  im Unendlichen verschwindet. Damit ist die Herleitung von Gl. (2.27) vollständig.

## 2.2 Tensorkalkül

Ein Zusammenhang erlaubt es, Tangentenvektoren parallel zu transportieren. Wie wir nun sehen werden, ergibt sich damit in natürlicher Weise auch die allgemeine Möglichkeit, Tensoren parallel zu transportieren.

Der zum Tangentenraum  $T_x M$  duale Vektorraum  $T_x^* M$  wird als *Cotangentenraum* bezeichnet. Er besteht aus linearen Abbildungen

$$\omega: T_x M \rightarrow \mathbf{R} \quad (2.33)$$

Für jedes  $v \in T_x M$  ist also  $\omega(v)$  eine reelle Zahl. Statt von Cotangentenvektoren  $\omega$  und von Tangentenvektoren  $v$  spricht man auch einfach von Covektoren und Vektoren. Ist  $C$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  und  $\mathcal{U}(C): T_x M \rightarrow T_y M$  der zugehörige Paralleltransporter, so können wir den *Paralleltransport des Covektors*  $\omega \in T_x^* M$  längs  $C$  nach  $y$  definieren durch

$$(\mathcal{U}(C)\omega)(v) = \omega(\mathcal{U}(C)^{-1}v) \quad \text{für } v \in T_y M \quad (2.34)$$

Damit ist der Paralleltransport von Cotangentenvektoren erklärt.

Der Raum  $T_x M$  kann umgekehrt als Dualraum von  $T_x^* M$  aufgefasst werden vermöge

$$v(\omega) = \omega(v), \quad v \in T_x M, \quad \omega \in T_x^* M. \quad (2.35)$$

Daher folgt aus Gl.(2.34)

$$(\mathcal{U}(C)v)(\omega) = v(\mathcal{U}(C)^{-1}\omega) \quad \text{für } \omega \in T_y^* M \quad (2.36)$$

Der Raum  $T_{s,x}^r M$  von *Tensoren der Stufe*  $(r,s)$  wird als Tensorprodukt

$$T_{s,x}^r M = \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{r \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M}_{s \text{ Faktoren}} \quad (2.37)$$

definiert. Insbesondere wird dadurch  $T_{0,x}^1 M$  identifiziert mit dem Tangentenraum  $T_x M$  und  $T_{1,x}^0 M$  mit dem Cotangentenraum  $T_x^* M$ . Es ist zweckmäßig, auch den Raum  $T_{0,x}^0 M$  zu betrachten und ihn mit dem Raum der reellen Zahlen  $\mathbf{R}$  zu identifizieren.

Das Tensorprodukt von  $N$  Vektorräumen  $V_1, \dots, V_N$  kann als linearer Raum definiert werden, der aus allen multilinearen Abbildungen  $V_1^* \times \dots \times V_N^* \mapsto \mathbf{R}$  besteht. Dementsprechend kann man Tensoren  $\tau \in T_{s,x}^r M$  als multilineare Abbildungen

$$\tau: \underbrace{T_x^* M \times T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{r \text{ Faktoren}} \times \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{s \text{ Faktoren}} \mapsto \mathbf{R} \quad (2.38)$$

auffassen. Jedem  $r + s$  Tupel von  $r$  Covektoren  $\omega^1, \dots, \omega^r$  und  $s$  Vektoren  $v_1, \dots, v_s$  wird also eine reelle Zahl  $\tau(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s)$  zugeordnet. Multilinear bedeutet, daß  $\tau(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s)$  in jedem seiner Argumente linear ist.

Spezielle Tensoren  $\tau = w_1 \otimes \dots \otimes w_r \otimes \psi^1 \otimes \psi^s$  erhält man durch Bildung des Tensorproduktes von  $r$  Vektoren  $w_1, \dots, w_r$  und  $s$  Covektoren  $\psi^1, \dots, \psi^s$ .



Sie sind definiert durch

$$(w_1 \otimes \dots \otimes \psi^s)(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = \omega^1(w_1) \dots \omega^r(w_r) \psi^1(v_1) \dots \psi^s(v_s) \quad (2.39)$$

Paralleltransport von Tensoren definiert man so, daß er mit der Bildung des Tensorprodukts kommutiert. Ist  $C$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , und  $\tau_1 \in T_{s,x}^r M$ ,  $\tau_2 \in T_{s',x}^{r'} M$ , so soll gelten, daß

$$\mathcal{U}(C)(\tau_1 \otimes \tau_2) = \mathcal{U}(C)\tau_1 \otimes \mathcal{U}(C)\tau_2, \quad (2.40)$$

und entsprechend für Tensorprodukte von mehr Faktoren. Insbesondere sollen diese Formeln für den Paralleltransport von Vektoren und Covektoren gelten. Da solche Tensorprodukte  $T_{s,x}^r M$  aufspannen, ist der Paralleltransport in  $T_{s,x}^r M$  dadurch eindeutig definiert.

Fassen wir Tensoren als multilineare Abbildungen auf, so ist diese Definition wegen Gl.(2.34,2.36) äquivalent zur folgenden Definition

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(C)\tau) & (\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) \\ & = \tau(\mathcal{U}(C)^{-1}\omega^1, \dots, \mathcal{U}(C)^{-1}\omega^r, \mathcal{U}(C)^{-1}v_1, \dots, \mathcal{U}(C)^{-1}v_s) \end{aligned} \quad (2.41)$$

für  $\omega^1, \dots, \omega^r \in T_y^* M$ ,  $v_1, \dots, v_s \in T_y M$ . Auf der rechten Seite stehen die schon früher definierten Paralleltransporter für Covektoren und Vektoren.

Ein spezieller Tensor  $g_x \in T_{2,x}^0 M$  ist der metrische Tensor. Als bilineare Abbildung ist er durch

$$g_x(v, w) = \langle v, w \rangle_x \quad (v, w \in T_x M)$$

definiert, wo  $\langle, \rangle_x$  das den metrischen Tensor definierende Skalarprodukt (1.45) ist.

Aus einem Tensor  $\tau$  der Stufe  $(r, s)$  kann man auf verschiedene Weise durch Kontraktion Tensoren  $\tau'$  der Stufe  $(r-1, s-1)$  bilden. Seien  $e_\alpha$  ein Satz von Basisvektoren in  $T_x M$ , dann ist die dazu duale Basis aus Covektoren  $\theta^\alpha$  in  $T_x^* M$  definiert durch

$$\theta^\beta(e_\alpha) = \delta^\beta_\alpha \quad (2.42)$$

definiert. Dann kann man einen Tensor  $\tau'$  der Stufe  $(r-1, s-1)$  definieren

$$\tau'(\psi^1, \dots, \psi^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) = \sum_\alpha \tau(\psi^1, \dots, \psi^{r-1}, \theta^\alpha, v_1, \dots, v_{s-1}, e_\alpha)$$

Man rechnet leicht nach, daß der so definierte Tensor  $\tau'$  unabhängig von der Wahl der Basis  $(e_\alpha)$  ist. Dies folgt aus der Linearität in den Argumenten

$\theta^\alpha$  und  $e_\alpha$ . Da  $r \cdot s$  verschiedene Stellungen der Argumente  $\theta^\alpha$  und  $e_\alpha$  möglich sind, so kann man aus  $\tau$  auf  $r \cdot s$  Arten einen Tensor der Stufe  $(r - 1, s - 1)$  bilden.

Mit Hilfe des metrischen Tensors kann man durch Bildung des Tensorprodukts  $g_x \otimes \tau$  und darauffolgende Kontraktion aus einem Tensor der Stufe  $(r, s)$  Tensoren der Stufe  $(r - 1, s + 1)$  bilden. In der Komponentensprache entspricht dies dem Senken von Indizes (s. unten). Die abstrakte Formulierung ist dem Leser überlassen. Ebenso kann man mit Hilfe des inversen metrischen Tensors Indizes heben.

Ein *Tensorfeld*  $\tau \in T_s^r M$  ist gegeben, wenn für jedes  $x \in M$  ein Element  $\tau(x) \in T_{s,x}^r M$  gegeben ist. Mit dem Begriff "Tensor" ist üblicherweise ein Tensorfeld gemeint, und wir werden uns dieser Sprechweise von nun an anschließen.

Nachdem der Paralleltransport von Tensoren erklärt ist, kann man in der üblichen Weise, d.h. durch Gl. (1.8), die *kovariante Ableitung eines Tensorfelds* definieren. Die kovariante Ableitung eines Tensorfelds  $\tau$  in Richtung eines Tangentenvektors  $Y \in T_x M$  definiert man ganz analog wie bei Tangentenvektorfeldern,

$$D_Y \tau(x) = \frac{d}{d\lambda} [\mathcal{U}(C_\lambda)^{-1} \tau(C(\lambda))]_{\lambda=0} \in T_{s,x}^r M. \quad (2.43)$$

Dabei ist wiederum  $C$  eine Kurve durch  $x = C(0)$  mit Tangentenvektor  $Y$  bei  $x$  und  $C_\lambda$  das Stück dieser Kurve von  $x = 0$  bis  $C(\lambda)$ .

Aus der Regel (2.40) für den Paralleltransport von Tensorprodukten folgt die Produktregel für kovariante Ableitungen,

$$D_Y(\tau_1(x) \otimes \tau_2(x)) = D_Y \tau_1(x) \otimes \tau_2(x) + \tau_1(x) \otimes D_Y \tau_2(x). \quad (2.44)$$

Ist speziell  $f$  eine skalare Funktion,  $f(x) \in T_0^0, xM$ , so ist  $f(x) \otimes \tau(x) = f(x)\tau(x)$  und die kovariante Ableitung von  $f$  ist gleich der gewöhnlichen. Daher gilt

$$D_Y(f(x)\tau(x)) = (\partial_Y f(x))\tau(x) + f(x)D_Y \tau(x). \quad (2.45)$$

### 2.2.1 Transformationsgesetz von Tensorkomponenten

Wir wollen nun die obigen Konstruktionen in Komponentensprache übersetzen.

Sind  $e_\mu(x)$  die Basisvektoren einer holonomen gleitenden Basis in  $T_x M$ , so sind die Covektoren  $\theta^\nu(x)$  der dazu dualen gleitenden Basis im Cotangentenraum  $T_x^* M$  durch Gl. (2.42) definiert. Ist  $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , so schreibt man

$\theta^\nu(x) = dx^\nu$ . Einem allgemeinen Cotangentenvektor  $\omega = \omega_\nu \theta^\nu(x) \in T_x^*M$  wird dadurch eine 1-Form  $\omega_\nu dx^\nu$  zugeordnet. Eine Koordinatentransformation  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^0, \dots, x^3)$  induziert eine Transformation der holonomen gleitenden Basis

$$e_\mu \rightarrow e'_\mu = e_\nu S^\nu_\mu \quad \text{mit } S^\nu_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \quad (2.46)$$

Aus Gl. (2.42) ergibt sich das Transformationsverhalten der dualen Basis als

$$\theta^\mu \rightarrow \theta'^\mu = T^\mu_\nu \theta^\nu \quad \text{mit } T^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.47)$$

Es ist  $S = T^{-1}$ , und Gl.(2.46,2.47) stimmen mit dem bekannten, durch die Kettenregel gegebenen Transformationsverhalten von  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  und  $dx^\mu$  überein.

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \quad \text{und} \quad dx'^\mu = \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu$$

Durch Bildung des Tensorprodukts bekommt man eine Basis  $e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_s}$  des Tensorraums  $T_{s,x}^r M$ . Ein beliebiger Tensor läßt sich nach dieser Basis entwickeln.

$$\tau = \tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_s} \quad (2.48)$$

Tensoren  $\tau$  haben eine koordinatenunabhängige Bedeutung, sie wurden ja auch ohne Bezug auf ein Koordinatensystem definiert. Da eine Koordinatentransformation vermöge Gl. (2.46,2.47) eine Transformation der Basisvektoren induziert, so hat der Tensor  $\tau$  in der neuen Basis die Komponenten

$$\tau'^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} = \tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\rho_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\sigma_s}} \quad (2.49)$$

Damit ist das Transformationsgesetz der Tensorkomponenten unter Koordinatentransformationen gefunden.

Das Tensorprodukt (2.39) von Vektoren  $w_1 = w_1^{\mu_1} e_{\mu_1}, \dots, \psi^s = \psi_{\nu_s}^s \theta^{\nu_s}$  gibt einen Tensor mit den Komponenten

$$\tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \dots w_r^{\mu_r} \psi_{\nu_1}^1 \dots \psi_{\nu_s}^s \quad (2.50)$$

Entsprechend kann man das Tensorprodukt  $\tau_1 \otimes \tau_2$  zweier Tensoren der Stufe  $(r_1, s_1)$  und  $(r_2, s_2)$  bilden durch Multiplikation ihrer Komponenten. Dies gibt einen Tensor der Stufe  $(r_1+r_2, s_1+s_2)$ . Einen Tensor  $\tau(x)$  kann man mit einer

skalaren Funktion  $f(x)$  multiplizieren. Der so entstehende Tensor  $f(x)\tau(x)$  hat Komponenten  $f(x)\tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x)$ . Mit Hilfe des metrischen Tensors und seines Inversen kann man Indizes herauf- und herunterziehen

$$\tau_{\mu_1}^{\mu_2 \dots} = g_{\mu_1 \rho_1} \tau^{\rho_1 \mu_2 \dots} \quad (2.51)$$

$$\tau^{\mu_1 \mu_2 \dots} = g^{\mu_1 \rho_1} \tau_{\rho_1}^{\mu_2 \dots} \quad \text{u.S.w.} \quad (2.52)$$

Schließlich bildet man Kontraktionen, indem ein oberer Index einem unteren Index gleichgesetzt und von 0 bis 3 summiert wird. Über zwei obere bzw. zwei untere Indizes kann man kontrahieren, indem man zuerst einen der Indizes mit Hilfe des (inversen) metrischen Tensors senkt (hebt), und dann kontrahiert wie eben beschrieben.

### 2.2.2 Kovariante Ableitungen in Komponenten

Wir erinnern uns zunächst an die Beschreibung des Paralleltransports von Basisvektoren im Tangentenraum mittels Paralleltransport-Matrizen. Ist  $\{e_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  ein holonome gleitende Basis für den Tangentenraum  $T_x M$ , und  $C$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , so definiert der Zusammenhang  $\mathcal{U}$  die Paralleltransportmatrizen  $\mathbf{U}(C) = (U^\mu_\nu(C))$  vermöge

$$\mathcal{U}(C)e_\mu(x) = e_\nu(y)U^\nu_\mu(C). \quad (2.53)$$

Seien nun  $\{\theta^\nu(x)\}$  die zu  $\{e_\mu(x)\}$  dualen Basisvektoren für  $T_x^* M$ . Deren Paralleltransport läßt sich ebenfalls mit Hilfe derselben Paralleltransportmatrizen beschreiben.

$$\mathcal{U}(C)\theta^\nu(x) = U^\nu_\mu(-C)\theta^\mu(y). \quad (2.54)$$

Dies folgt aus der Definition des Paralleltransports von Cotangentenvektoren, wie wir gleich zeigen werden.  $\mathbf{U}(-C) = \mathbf{U}(C)^{-1}$ .

*Beweis von Gl.(2.54):* Beide Seiten sind Elemente von  $T_y^* M$ , also lineare Abbildungen  $T_y M \mapsto \mathbf{R}$ . Es genügt, die Anwendung dieser Abbildungen auf Basisvektoren  $e_\mu(y)$  zu betrachten. Nach Definition (2.34) des Paralleltransports von Covektoren ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(C)\theta^\nu(x))(e_\mu(y)) &= \theta^\nu(x) (\mathcal{U}(C)^{-1}e_\mu(y)) \\ &= \theta^\nu(x) (e_\rho(x)) U^\rho_\mu(-C) \\ &= U^\nu_\mu(-C). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Wir erweitern die Semicolon Notation auf kovariante Ableitungen von Covektorfelder  $\omega \in T^*M$ , indem wir nach Basisvektoren entwickeln.

$$D_Y \omega(x) = Y^\mu \omega_{\nu;\mu} \theta^\nu(x) \quad (2.56)$$

oder

$$Y^\mu \omega_{\nu;\mu} = D_Y \omega(x)(e_\nu(x)), \quad (2.57)$$

und entsprechend für allgemeine Tensoren.

Aus der allgemeinen Definition ( 2.43) der kovarianten Ableitung ergibt sich damit durch analoge Rechnung wie bei der kovarianten Ableitung von Tangentenvektoren

$$\omega_{\mu;\rho} = \partial_\rho \omega_\mu - \omega_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (2.58)$$

Wir geben noch einen direkteren Beweis dieser Formel, der sich sofort auf allgemeine Tensorfelder verallgemeinern läßt. Hierzu gehen wir von Gl.(2.34) aus, und benutzen wieder die allgemeine Definition ( 2.43) der kovarianten Ableitung.

$$\begin{aligned} Y^\mu \omega_{\nu;\mu}(x) &= \frac{d}{d\lambda} [\mathcal{U}(C_\lambda)^{-1} \omega(C(\lambda))]_{\lambda=0} (e_\nu(x)) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \omega(C(\lambda)) (\mathcal{U}(C_\lambda) e_\nu(x)) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \omega(C(\lambda)) (e_\rho(x) U_\nu^\rho(C_\lambda)) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \omega(C(\lambda)) (e_\rho(x)) U_\nu^\rho(C_\lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \omega_\rho(C(\lambda)) U_\nu^\rho(C_\lambda). \end{aligned}$$

Wie erinnerlich sind die Zusammenhangskoeffizienten durch Paralleltransportmatrizen für infinitesimal kurze Wege definiert,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(C_\lambda) &= \mathbf{1} - \lambda Y^\mu \Gamma_\mu + \dots \\ Y^\mu &= \frac{dC(\lambda)}{d\lambda} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich das behauptete Resultat,

$$Y^\mu \omega_{\nu;\mu}(x) = Y^\mu (\partial_\mu \omega_\nu - \omega_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho). \quad (2.59)$$

Diese Rechnung verallgemeinert sich auf beliebige Tensoren, indem man in obiger Rechnung den Basisvektor  $e_\mu \in T_x M$  durch Basisvektoren (2.48) von  $T_{s,x}^r M$  ersetzt, und die alternative Definition (2.41) des Paralleltransports  $\mathcal{U}(C)$  benutzt. Man benötigt sodann die Formeln (2.53), (2.54) für den Paralleltransport der Basisvektoren sowohl in  $T_x M$  als auch in  $T_x^* M$ . Das Resultat lautet

$$\begin{aligned} \tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s; \rho} &= \partial_\rho \tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &+ \sum_{j=1}^r \Gamma^{\mu_j}_{\mu'_j \rho} \tau^{\mu_1 \dots \mu'_j \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{i=1}^s \tau^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu'_i \dots \nu_s} \Gamma^{\nu'_i}_{\nu_i \rho} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die Gleichung (1.53), die die Invarianz des durch den metrischen Tensor bestimmten Skalarprodukts im Tangentenraum unter Paralleltransport ausdrückt, nimmt in der Notation von Gl. (2.60) die einfache Form

$$g_{\sigma\nu; \mu} = 0 \quad (2.61)$$

an.

Die Produktregel für die kovariante Differentiation schreibt sich in Komponenten

$$\begin{aligned} (\tau_1^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \tau_2^{\rho_1 \dots \rho_t}_{\sigma_1 \dots \sigma_u})_{; \omega} &= \tau_1^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s; \omega} \tau_2^{\rho_1 \dots \rho_t}_{\sigma_1 \dots \sigma_u} \\ &+ \tau_1^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \tau_2^{\rho_1 \dots \rho_t}_{\sigma_1 \dots \sigma_u; \omega} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Schließlich folgt aus Gl. (2.61) und der Produktregel für die kovariante Differentiation, daß das Heben und Senken von Indizes mit der kovarianten Ableitung vertauscht

$$\tau^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{; \rho} = g^{\mu_1 \nu_1} \tau_{\nu_1}^{\mu_2 \dots}_{; \rho} \quad (2.63)$$

und daß auch Kontraktion mit kovarianter Ableitung vertauscht

$$\delta^\mu_\nu (\tau_\mu^{\nu \sigma \dots})_{; \rho} = (\delta^\mu_\nu \tau_\mu^{\nu \sigma \dots})_{; \rho}. \quad (2.64)$$

Häufig bezeichnet man auch den Satz von Tensorkomponenten  $\tau^{\mu_1 \dots}_{\nu_1 \dots}$  als den Tensor. Beispiele sind der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$ , der Krümmungstensor  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ , der Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  und der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$ .

### 2.2.3 Paralleltransport von Spinoren\*

Bisher hatten wir Materie als klassisch zu beschreibende Massenpunkte betrachtet. Wir wollen unsere Betrachtungen auf den Fall ausdehnen, dass die Materie quantenmechanisch beschrieben wird.

Angenommen, wir haben ein Koordinatensystem so gewählt, dass  $ct \equiv x^0 = \text{const}$  raumartige Hyperflächen  $\Sigma$  definiert. Im Schrödingerbild wird der Zustand eines Teilchens zur Zeit  $t$  durch eine Wellenfunktion  $\Psi_t(\mathbf{x}) \in V_x$  auf  $\Sigma$  beschrieben;  $x = (x^0, \mathbf{x})$ . Wir schreiben  $\Psi(x)$  statt  $\Psi_t(\mathbf{x})$ . Der Raum  $V_x$  ist ein komplexer Vektorraum, nicht mehr der Tangentenraum. Es erhebt sich das Problem, wie Vektoren in  $V_x$  parallel transportiert werden.

Das Äquivalenzprinzip sagt uns, wir sollten von der speziell-relativistischen Beschreibung ausgehen, diese in lokale Lorentzsysteme übernehmen, und das Resultat dann in allgemein kovarianter Form schreiben. Sind keine Nichtgravitationskräfte vorhanden, so kann man von der Beschreibung freier Teilchen ausgehen.

Diese Vorschrift ist auch hier noch sinnvoll, denn die speziell relativistischen Verallgemeinerungen der Schrödingergleichungen sind lokal; sie verknüpfen die Werte  $\Psi(x)$  der Wellenfunktion in einer *infinitesimalen* Umgebung eines Punkts  $x$ .

Insbesondere können wir  $V_x$  bis auf Isomorphie aus der speziell relativistischen Physik ablesen. Ist das Teilchen spinlos, so ist  $V_x$  isomorph zu  $\mathbf{C}$ . Jedoch sind die bekannten Elementarteilchen, von den Quanten der Eichfelder abgesehen, entweder Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$ , oder aus solchen zusammengesetzt. In diesem Fall ist  $V_x$  ein Raum von Spinoren. Wie im Anhang C erläutert wird, nehmen die Wellenfunktionen masseloser Teilchen mit Helizität  $\frac{1}{2}$  ihre Werte in einem 2-dimensionalen komplexen Vektorraum  $V^R$  von rechtshändigen Spinoren an, der eine Darstellung der  $SL(2, \mathbf{C})$  trägt. Masselose Teilchen mit Helizität  $-\frac{1}{2}$  hingegen nehmen ihre Werte in einem andern 2-dimensionalen Vektorraum  $V^L$  von linkshändigen Spinoren an, der eine inäquivalente Darstellung der  $SL(2, \mathbf{C})$  trägt. Massive Teilchen schliesslich werden durch Dirac-Spinoren mit Werten in  $V^R \oplus V^L$  beschrieben.  $V^L$  kann mit dem Dualraum von  $V^R$  identifiziert werden.

Wir betrachten zunächst den Paralleltransport  $\mathcal{U}^R$  rechtshändiger Spinoren. Da die quantenmechanische Beschreibung fundamentaler ist als die klassische, stellen wir uns zunächst vor, dass die Paralleltransporter  $\mathcal{U}^R$  gegeben sind. Wir untersuchen, wie man daraus die Paralleltransporter von Tangentenvektoren gewinnen kann. Es wird sich dann herausstellen, dass umgekehrt der Paralleltransport von Spinoren eindeutig bestimmt ist, wenn der Paralleltransport von Tangentenvektoren gegeben ist.

Betrachten wir also ein Vektorbündel  $\mathcal{V}$  über  $M$  mit Fasern  $V_x \approx V$ . Wir nehmen an, dass diese Fasern so wie  $V$  eine antisymmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x^R$  tragen, und dass der Paralleltransport  $\mathcal{U}^R(C) : V_x^R \mapsto V_y^R$  längs eines

Wegs  $C$  diese Bilinearform invariant lässt.<sup>1</sup>

Wir betrachten gleitende Basen  $(e_1(x), e_2(x))$  in  $V_x^R$  die die “Orthonormalitäts”-Bedingung

$$\langle e_a(x), e_b(x) \rangle_x^R = \epsilon_{ab} \quad (2.65)$$

erfüllen. Da  $SL(2, \mathbf{C})$  als die Gruppe derjenigen komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen definiert werden kann, die die Bedingung des Anhangs C erfüllen, so lässt eine Basistransformation

$$e_a(x) \mapsto e'_a(x) S^a_b(x) \quad (2.66)$$

die Orthonormalitätsbedingung (2.65) genau dann invariant, wenn  $S(x) \in SL(2, \mathbf{C})$ . Die Eichgruppe ist also  $SL(2, \mathbf{C})$ . Nach Annahme lässt der Paralleltransport die Bilinearform invariant. Er bildet also orthonormale Basen in orthonormale ab. Also sind die wie üblich durch

$$\mathcal{U}^R(C)e_a(x) = e_b(y)U^{Ra}_b(C)$$

definierten Paralleltransportmatrizen  $U^R(C)$  Elemente von  $SL(2, \mathbf{C})$ . Sei nun  $V_x^L$  der Dualraum von  $V_x^R$ . Er ist ebenfalls ein 2-dimensionaler komplexer Vektorraum. Er besteht aus  $\mathbf{C}$ -linearen Abbildungen  $\chi : \varphi \mapsto \chi(\varphi) \in \mathbf{C}$  von  $V_x^R$  in  $\mathbf{C}$ , und  $(\lambda\chi_1 + \mu\chi_2)(\varphi) = \lambda\chi_1(\varphi) + \mu\chi_2(\varphi)$ . Dabei ist  $\bar{\lambda}$  das komplex konjugierte von  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

Ähnlich, wie wir den Paralleltransport von Tangentenvektoren auf Cotangentenvektoren übertragen konnten, weil der Cotangentenraum der Dualraum des Tangentenraums ist, können wir auch hier den Paralleltransport  $\mathcal{U}^L(C) : \mathcal{V}_x^L \mapsto \mathcal{V}_y^L$  durch die Gleichung

$$(\mathcal{U}^L(C)\chi)(\varphi) = \chi(\mathcal{U}^R(C)^{-1}\varphi)$$

definieren, wobei  $\chi \in V_x^L, \varphi \in V_y^R$ .

Ebenso wie die Invarianz des durch den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  bestimmten Skalarprodukts im Tangentenraum die Invarianz des durch den inversen metrischen Tensor  $g^{\mu\nu}$  bestimmten Skalarprodukt im Cotangentenraum unter Paralleltransport impliziert, bestimmt die invariante Bilinearform  $\langle, \rangle^R$  auch hier eine unter Paralleltransport  $\mathcal{U}^L$  invariante Bilinearform  $\langle, \rangle^L$  in  $V^R$ . Sind

---

<sup>1</sup>NB: Eine Bilinearform, keine Sesquilinearform. Bilinearität und Antisymmetrie bedeuten  $\langle \lambda e + \mu f, g \rangle = -\langle g, \lambda e + \mu f \rangle = \lambda \langle e, g \rangle + \mu \langle f, g \rangle$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ .



$(e^1(x), e^2(x))$  die zu  $(e_1(x), e_2(x))$  dualen Basisvektoren in  $V_x^L$ , so ist die Bilinearform durch

$$\langle e^a(x), e^b(x) \rangle_x^L = \epsilon^{ab}$$

gegeben. Dabei ist  $(\epsilon^{ab})$  der zu  $(\epsilon_{ab})$  inverse Tensor. Die Paralleltransportmatrizen sind für die erwähnten Basen verknüpft durch

$$U^L(C) = U^R(C)^{*^{-1}} \in SL(2, \mathbf{C}).$$

Schliesslich betrachten wir Paralleltransport  $\mathcal{U}(C)$  von Vektoren im Tensorprodukt  $V_x^L \otimes V_x^R$ . Wie üblich wird er durch

$$\mathcal{U}(C)(\chi \otimes \varphi) = \mathcal{U}^L \chi \otimes \mathcal{U}^R(C)\varphi.$$

definiert. Wir benutzen die gleitenden Basen in den Spinorräumen um eine gleitende Basis  $(e_\alpha(x))$ ,  $\alpha = 0 \dots 3$  in  $V_x^L \otimes V_x^R$  zu definieren.

$$e_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_\alpha)_a^b e^a(x) \otimes e_b(x)$$

Dabei sind die hermiteschen  $2 \times 2$ -Matrizen  $\sigma_\alpha$  wie im Anhang C definiert, viz.  $\sigma_0 = I$ ,  $\sigma_i$  Pauli-Matrizen für  $i = 1, 2, 3$ .

$V_x^L \otimes V_x^R$  ist ein 4-dimensionaler komplexer Vektorraum. Wir betrachten den reellen Unterraum  $V_x$ , der aus Linearkombinationen von Basisvektoren  $e_\alpha(x)$  mit reellen Koeffizienten besteht. Paralleltransport bildet den reellen Unterraum  $V_x$  in den reellen Unterraum  $V_y$  ab. Explizit errechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(C)e_\alpha(x) &= e_\beta(y)U_\alpha^\beta(C), \\ U_\alpha^\beta(C) &= \Lambda_\alpha^\beta(U^L(C)), \end{aligned} \quad (2.67)$$

wobei  $\Lambda(A)$  die  $A \in SL(2, \mathbf{C})$  gemäss der Fundamentalformel (??) des Spinorkalküls zugeordnete Lorentztransformation ist.

Als Tensorprodukt ererbt  $V_x^L \otimes V_x^R$  eine Bilinearform, die sich zu einem indefinites Skalarprodukt auf  $V_x$  einschränkt.

$$\langle \chi_1 \otimes \varphi_1, \chi_2 \otimes \varphi_2 \rangle_x = \langle \chi_1, \chi_2 \rangle_x^L \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_x^R.$$

Mit der Formel (??) des Anhangs und der Hermitizität von  $\sigma_\alpha$  errechnet man durch Einsetzen, dass

$$\langle e_\alpha(x), e_\beta(x) \rangle_x = \eta_{\alpha\beta}$$

Die Basis ist also pseudo-orthonormal, und der Paralleltransport (2.67) bildet pseudo-orthonormale Basen in ebensolche ab.

Um den Paralleltransport von Tangentenvektoren von  $M$  zu definieren, müssen wir die Vektorräume  $V_x$  mit den Tangentenräumen identifizieren. Dies geschieht mit Hilfe eines Vierbeins

$$V_x \ni e_\alpha(x) \mapsto e_\alpha^\mu(x) \partial_\mu \in T_x M \quad (2.68)$$

Um den Paralleltransport von Tangentenvektoren aus dem Paralleltransport von Spinoren zu konstruieren, brauchen wir also ein Vierbein als dynamisches Feld. Dieses Vierbein übersetzt auch das Skalarprodukt auf  $V_x$  in ein Skalarprodukt in  $T_x M$ . Es bestimmt also die Metrik (wie wir schon wissen).

Umgekehrt werden die Paralleltransportmatrizen  $U^R$  für Spinoren aus den Paralleltransportmatrizen  $U(C)$  für Tangentenvektoren bezüglich einer pseudo-orthonormalen Basis durch Gl.(2.67) und Stetigkeit eindeutig bestimmt. Zwar ist die einer Lorentztransformation  $\Lambda(A)$  zugeordnete Matrix  $A \in SL(2, \mathbf{C})$  zunächst nur bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Wegen der Zusammensetzungsregel für Paralleltransporter genügt es jedoch,  $U^R(C)$  für hinreichend kurze Wege  $C$  zu kennen. Dann muss aber die Matrix  $U^R(C)$  in der Nähe von 1 sein, und diese Forderung eliminiert das unbestimmte Vorzeichen. Die Paralleltransportmatrizen für rechtshändige Spinoren sind  $U^R(C) = U^L(C)^{* -1}$ . Für Dirac-Spinoren ergeben sich die Paralleltransportmatrizen

$$U^D(C) = S(U^L(C)) = \begin{pmatrix} U^L(C) & \boldsymbol{\sigma}_\mu \\ 0 & U^L(C)^{* -1} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Sei die Paralleltransportmatrix für Tangentenvektoren längs eines infinitesimalen Wegs von  $x$  nach  $x + \delta x$  gegeben durch

$$U(C) = 1 - \gamma_\mu(x) \delta x^\mu$$

dann gilt nach Gl. (??) in Anhang C

$$U^D(C) = 1 - \text{fraci}2\gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)\sigma_\alpha^\beta\delta x^\mu \quad (2.70)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha\beta] \quad (2.71)$$

Dies ist zu Gl.(2.67) für infinitesimale Wege äquivalent. Die Wirkung von  $\gamma^\alpha$  auf  $V^R \oplus V^L$  ist in der oben erwähnten gleitenden Basis durch die in Anhang C definierten Dirac'schen  $\gamma$ -Matrizen gegeben.

Schliesslich können wir die allgemein relativistische Dirac- Gleichung für massive Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen angeben.

Die auf Dirac Spinoren wirkende kovariante Ableitung  $D_\mu$  wird mit Hilfe der Paralleltransporter  $\mathcal{U}^D(C)$  in der üblichen Weise definiert.

Die Dirac-Gleichung lautet nun

$$(i\hbar\gamma^\mu(x)D_\mu - mc)\Psi(x) = 0. \quad (2.72)$$

In Matrix-Darstellung ist nach Gl.(2.71)

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}\gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)\sigma^\beta_\alpha. \quad (2.73)$$

$\gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)$  sind die Zusammenhangskoeffizienten bezüglich der orthonormalen Basis im Tangentenraum.

Man beachte aber, dass die Basis im Spinorraum und die pseudo-orthonormale Basis im Tangentenraum verknüpft sind. Führt man eine  $SL(2, \mathbf{C})$ -Eichtransformation (2.66) im Spinorraum durch (samt zugehöriger Transformation der dualen Basis), so transformiert sich das Vierbein nach

$$e_\alpha^\mu(x) \mapsto e_\alpha^{\mu'}(x) = e_\beta^\mu(x)\Lambda^\beta_\alpha(S) \quad (2.74)$$

### 2.2.4 Invarianten und globale Bedeutung

Betrachten wir Paralleltransport als eine Art von Kommunikation, so bestimmen die Eigenschaften des Paralleltransports, welchen Kommunikationseinhalten eine globale Bedeutung zugewiesen werden kann. Global heisst, dass verschiedene Kommunikanden sich darüber in konsistenter Weise einigen könnten.

Lokale Grössen und Operationen, für die eine Paralleltransport längs Kurven  $C$  von Punkten  $x$  zu Punkten  $y$  von  $M$  erklärt ist, nennen wir *Invarianten*, wenn das Resultat des Paralleltransport unabhängig vom Weg von  $x$  nach  $y$  ist.

Es folgt dann unmittelbar, dass der Paralleltransport einer solchen Invarianten  $\xi$  von  $x$  nach  $x$  längs einer beliebigen Schleife  $C : x \mapsto x$  wieder  $\xi$  liefert, denn unter den Schleifen befindet sich die triviale Schleife  $C = \emptyset$  und ihr ist die identische Abbildung zugeordnet. Solche Paralleltransporter längs Schleifen bilden die Holonomiegruppe.

Ist die Eichgruppe der Holonomiegruppe gleichgesetzt, so folgt, dass Invarianten eichinvariant sind.

Angenommen, eine lokale Grösse oder Operation  $\xi_x$  sei bei  $x$  erklärt, und sei eine Invariante. Dann können wir für jedes  $y$  in  $M$  eindeutig ein  $\xi_y$  als Ergebnis des Paralleltransports von  $\xi_x$  nach  $y$  längs eines beliebig gewählten Wegs erklären.<sup>2</sup>

Damit erhält jede Invariante  $\xi$  eine globale Bedeutung. Die eben beschriebene Prozedur nennen wir *verallgemeinerte Synchronisation*. Sie ist nur für Invarianten erklärt.

Hat eine pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $M$  nichtverschwindende Krümmung, so macht es keinen Sinn zu sagen, ein Tangenten-Vektorfeld  $v$  bestimme für alle  $x$  denselben Vektor  $v_x$  - die Richtung eines Tangentenvektors hat keine globale Bedeutung, weil das Ergebnis des Paralleltransports von Tangentenvektoren wegabhängig ist. In einem flachen Raum wäre die Situation anders.

Hingegen ist das durch die Metrik definierte Skalarprodukt  $\langle v_x, w_x \rangle_x = g_{\mu\nu}(x)v_x^\mu w_x^\nu$  zweier Tangentenvektoren in jeder pseudo-Riemann'schen Raum-Zeit Mannigfaltigkeit  $M$  Invariante. Daraus folgt die globale Bedeutung des Begriffs der Eigenzeit.

Ebenso sind beliebige aus Tensoren durch Kontraktion gewonnene Skalare Invarianten.

Invariante Operationen kennen wir ebenfalls schon. Die Linearität des Paralleltransports  $\mathcal{U}(C) : V_x \mapsto V_y$  besagt, dass die Addition  $+$  globale Bedeutung hat, ebenso die Multiplikation mit Zahlen. Ist Addition in  $V_x$  erklärt, so kann die Addition in  $V_y$  dadurch erklärt werden, dass man beide Summanden längs eines beliebigen Wegs  $C$  nach  $x$  transportiert, dort addiert, und dann das Resultat längs  $-C$  zurücktransportiert. Da  $\mathcal{U}(-C) = \mathcal{U}(C)^{-1}$ , ist dies gleichbedeutend damit, dass Paralleltransport und Addition kommutieren,

$$\mathcal{U}(C)v_x + \mathcal{U}(C)w_x = \mathcal{U}(C)(v_x + w_x) \quad (2.75)$$

Ebenso verhält es sich mit dem Tensorprodukt. Dass die Bildung des (gewöhnlichen) Tensorprodukts eine invariante Operation ist, und dass physikalische Grössen Tensoren sind, die sich dementsprechend parallel transportieren, ist ein der Allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegendes physikalisches Postulat. Entsprechendes gilt in den Eichtheorien der Elementarteilchen. Das Postulat ist nicht selbstverständlich und es gilt auch nicht deshalb, weil die Mathematik es so will. Es gibt Eichtheorien in zwei Raum-Zeit-Dimensionen, bei denen die Eichgruppe durch eine Quantengruppe oder

---

<sup>2</sup>Wir nehmen an, dass  $M$  topologisch zusammenhängend ist

noch allgemeiner durch eine (schwache) Quasi-Quantengruppe  $G$  ersetzt ist. Physikalische Grössen transformieren sich auch dann nach gewissen Darstellungen von  $G$ , und es gibt auch eine geeignet definierte Verallgemeinerung des Tensorprodukts von Darstellungsräumen. Aber dieses ist vom gewöhnlichen Tensorprodukt verschieden, und teilt nicht dessen Eigenschaften.<sup>3</sup>

## 2.3 Der Energie-Impuls-Tensor

In den Einstein'schen Feldgleichungen (2.27) steht auf der rechten Seite der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$ . Er ist durch Gl. (2.24) definiert.

### 2.3.1 Energie-Impuls-Tensor eines Massenpunkts

Für den Spezialfall, wo die Materie nur aus einem Massenpunkt besteht, können wir  $T_{\mu\nu}$  aus der Definitionsgleichung (2.24) und dem bekannten Ausdruck für die Wirkung  $S_{Materie}$  bestimmen. Das Resultat verallgemeinert sich sofort auf ein System von Massenpunkten, die keiner Nicht-Gravitationswechselwirkung unterliegen. Der Energie-Impuls-Tensor eines solchen Systems ist gleich der Summe der Beiträge von den einzelnen Massenpunkten, da das gleiche für  $S_{Materie}$  gilt.

Für einen einzelnen Massenpunkt ist nach Gl. (I-4.9a) die Wirkung durch seine Weltlinie  $\lambda \mapsto C(\lambda)$  bestimmt.

$$\begin{aligned} S_{Materie} &= -mc \int d\lambda \left( -g_{\mu\nu}(C(\lambda)) \frac{dC^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -mc \int d^4x \int d\lambda \delta^4(x - C(\lambda)) \left( -g_{\mu\nu}(x) \frac{dC^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Dabei ist  $\delta(\dots)$  die vierdimensionale  $\delta$ -Funktion, die definiert ist durch

$$\delta^4(y) = \delta(y^0)\delta(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3) \quad (2.77)$$

Durch Vergleich mit (2.22) sehen wir, daß die Lagrangefunktion

$$\sqrt{-g}\mathcal{L}_{Materie}(x) = -mc^2 \int d\lambda \delta^4(x - C(\lambda)) \left( -g_{\mu\nu}(x) \frac{dC^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.78)$$

---

<sup>3</sup>G. Mack, V. Schomerus, *Quasi-Hopf quantum symmetry in quantum theory*, Nucl.Phys. **B 370**, 185 (1992)

ist. Wir benötigen die Ableitung davon nach  $g^{\rho\sigma}$  bei festgehaltener Weltlinie  $C(\lambda)$ . Auch das Koordinatensystem soll nicht verändert werden, so daß die Koordinaten  $C^\mu(\lambda)$  als konstant zu betrachten sind. Bei einer Änderung des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  geht  $g^{\rho\sigma} \rightarrow g^{\rho\sigma} + \delta g^{\rho\sigma}$ , wobei  $\delta g_{\mu\nu}$  und  $\delta g^{\rho\sigma}$  verknüpft sind durch

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} \delta g^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu}$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß  $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$  ist. Somit ist  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g^{\rho\sigma}} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}$  und es ergibt sich aus Gl. (2.78) und der Definition des metrischen Tensors, daß

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = -mc^2 \int d\lambda \delta^4(x - C(\lambda)) \left( -g_{\mu\nu} \frac{dC^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\nu(\lambda)}{d\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} g_{\mu\rho}(x) g_{\nu\sigma}(x) \frac{dC^\rho(\lambda)}{d\lambda} \frac{dC^\sigma(\lambda)}{d\lambda}$$

Wählen wir den Parameter  $\lambda$  gleich  $c$ -Eigenzeit,  $\lambda = c \cdot \tau$ , so ist  $(\ )^{-\frac{1}{2}} = 1$  und  $\frac{dC^\mu}{d\lambda} = u^\mu$  die Vierergeschwindigkeit des Teilchens. Damit vereinfacht sich der obige Ausdruck zu

$$T_{\mu\nu}(x) = mc^2 \int cd\tau \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \delta^4(x - C(\tau)) u_\mu(\tau) u_\nu(\tau) \quad (2.79)$$

$T_{\mu\nu}(x)$  ist also durch die Vierergeschwindigkeit des Massenpunktes bestimmt, wenn er sich im Raum-Zeit-Punkt  $x$  befindet.

### 2.3.2 Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors

Wir kehren zurück zur Betrachtung des Energie-Impuls-Tensors für ein beliebiges System. In der speziellen Relativitätstheorie gilt der Erhaltungssatz

$$\partial_\mu T_\nu{}^\mu = 0 \quad (2.80)$$

Nach dem Äquivalenzprinzip sollte dann in der allgemeinen Relativitätstheorie gelten, daß

$$T_\nu{}^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (2.81)$$

In der Tat ist Gl. (2.81) allgemein kovariant, gilt also bei beliebiger Wahl des Koordinatensystems, wenn sie für irgendeine Wahl des Koordinatensystems

gilt. In einem lokalen Lorentzsystem bei  $x$  reduziert sich aber Gl. (2.81) auf Gl. (2.80), denn

$$\begin{aligned} T_{\nu}{}^{\mu}{}_{;\mu}(x) &= g^{\mu\rho}(x)T_{\nu\rho;\mu}(x) \\ &= g^{\mu\rho}(x)(\{\partial_{\mu}T_{\nu\rho}(x) - T_{\nu\sigma}(x)\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}(x) - T_{\sigma\rho}(x)\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}(x)\}) \end{aligned}$$

und in einem lokalen Lorentzsystem bei  $x$  ist  $g^{\mu\rho}(x) = \eta^{\mu\rho}$  und  $\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}(x) = 0$ .

Wie wir nun zeigen wollen, folgt Gl. (2.81), wenn die Bewegungsgleichungen für die Materie erfüllt sind.

Aus der Mechanik ist bekannt, daß nach dem Noetherschen Satz Symmetrien der Wirkung zu Erhaltungssätzen führen. Wir werden Gl. (2.81) aus der Invarianz der Wirkung  $S_{Materie}$  unter Koordinatentransformationen (und der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen für die Materie) herleiten.

Wir betrachten Änderungen  $\delta g_{\mu\nu}$  der Metrik von der Form

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \epsilon(\xi^{\mu;\nu}(x) + \xi^{\nu;\mu}(x)) \quad (2.82)$$

Dabei ist  $\epsilon$  ein infinitesimaler reeller Parameter, und  $\xi^{\mu}(x)$  sind beliebige Funktionen von  $x$ , die außerhalb eines beschränkten Bereichs verschwinden.

Es wird weiter unten gezeigt werden, daß unter einer solchen Variation der Metrik

$$\delta S_{Materie} = 0 \quad (2.83)$$

ist, vorausgesetzt, die Bewegungsgleichungen der Materie sind erfüllt. Wir nehmen dies zunächst als gegeben an, und drücken  $\delta S_{Materie}$  durch den Energie-Impuls-Tensor aus. Nach Gl. (2.26) ist

$$\begin{aligned} \delta S_{Materie} &= -\frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{\epsilon}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) = -\frac{\epsilon}{c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \xi^{\mu;\nu} \end{aligned}$$

Nach der Produktregel des Tensorkalküls von SS2 ist dies gleich

$$\delta S_{Materie} = -\frac{\epsilon}{c} \int d^4x \sqrt{-g} (T_{\mu\nu} \xi^{\mu}){}^{;\nu} + \frac{\epsilon}{c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}{}^{;\nu} \xi^{\mu} \quad (2.84)$$

Der erste Term läßt sich mit Hilfe der Formel (2.28) für die kovariante Divergenz eines Vektorfeldes umformen

$$1\text{-ter Term} = -\frac{\epsilon}{c} \int d^4x \partial_{\nu} (\sqrt{-g} T_{\mu\nu} \xi^{\mu}) = 0 \quad (2.85)$$

Somit kann  $\delta S_{Materie} = 0$  für beliebige Funktionen  $\xi^\mu$  nur gelten, wenn  $T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$  ist. Da man Indizes frei heben und senken kann, ist dies die gewünschte Aussage (2.81).

Es bleibt zu zeigen, daß  $\delta S_{Materie} = 0$  unter Variation (2.82) der Metrik.

Hierzu fassen wir zeitweise  $g^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3)$  als Funktion der reellen Koordinaten  $x^0, \dots, x^3$  auf (statt als Funktion des Raum-Zeit-Punkts  $x$ ), und  $S_{Materie}$  als ein Funktional dieser Funktionen. Wir betrachten nun infinitesimale Koordinatentransformationen

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x) \quad (2.86)$$

$S_{Materie}$  hat eine koordinatenunabhängige Bedeutung, seine Änderung  $\delta_{K.Tr.} S_{Materie}$  unter einer Koordinatentransformation verschwindet also

$$\delta_{K.Tr.} S_{Materie} \equiv 0 \quad (2.87)$$

Unter Koordinatentransformation (2.86) ändert sich der metrische Tensor gemäß Tensorkalkül

$$\begin{aligned} g'^{\rho\sigma}(x'^0, \dots, x'^3) &= g^{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \\ &= g^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) + \epsilon (g^{\mu\sigma} \partial_\mu \xi^\rho + g^{\rho\nu} \partial_\nu \xi^\sigma) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} g'^{\rho\sigma}(x'^0, \dots, x'^3) &= g'^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) + \epsilon \xi^\mu \partial_\mu g'^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) + O(\epsilon^2) \\ &= g'^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) + \epsilon \xi^\mu \partial_\mu g^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

weil  $g' - g = O(\epsilon)$ . Somit ergibt sich schließlich

$$g'^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) = g^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3) + \delta g^{\rho\sigma}(x^0, \dots, x^3)$$

mit

$$\delta g^{\rho\sigma} = \epsilon \{-\xi^\mu \partial_\mu g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} \partial_\mu \xi^\rho + g^{\rho\nu} \partial_\nu \xi^\sigma\}$$

Mit Hilfe von Formel (1.52) und der Riemannschen Formel für die Zusammenhangskoeffizienten verifiziert man, daß sich dies auch schreiben läßt als

$$\delta g^{\rho\sigma} = \epsilon (\xi^{\rho;\sigma} + \xi^{\sigma;\rho}) \quad (2.88)$$

Die Änderung von  $S_{Materie}$  unter einer solchen infinitesimalen Änderung der Metrik wurde mit  $\delta S_{Materie}$  bezeichnet.



Die Koordinatentransformation (2.86) führt außerdem zu einer Änderung der reellen Funktionen, die die Materie beschreiben, beispielsweise ändern sich die Koordinaten  $C^\mu(\lambda)$  der Weltlinie eines Teilchens um  $\delta C^\mu(\lambda) = \epsilon \xi^\mu(C(\lambda))$ . Die dadurch verursachte Änderung  $\delta_{Mat} S_{Materie}$  verschwindet aber, wenn die Bewegungsgleichungen gelten, denn diese sind äquivalent zu der Aussage, daß die Änderung von  $S_{Materie}$  bei einer beliebigen Variation der Materievariablen verschwindet. Somit ist nach Gl. (2.87)

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \delta_{K.Tr.} S_{Materie} = \delta S_{Materie} + \delta_{Mat} S_{Materie} \\ &= \delta S_{Materie}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

wenn die Bewegungsgleichungen erfüllt sind.

Damit ist Gl. (2.83) hergeleitet. Dies vervollständigt den Beweis der Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors.

Das eben gegebene Argument zeigt gleichzeitig, daß aus  $T_{\mu;\nu}^\nu = 0$  umgekehrt die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen folgt, zumindest für Materie, die aus einem System aus Massenpunkten besteht, von denen keine zwei am selben Raum-Zeit-Punkt sind. Denn aus  $T_{\mu;\nu}^\nu = 0$  folgt wegen Gl. (2.84), (2.85), daß  $\delta S_{Materie} = 0$ . Da aber  $\delta_{K.Tr.} S_{Materie} = 0$  gilt auch  $\delta_{Mat} S_{Materie} = 0$ , vgl. bei Gl. (2.89). Dies ist aber die Änderung von  $S_{Materie}$  unter einer beliebigen infinitesimalen Variation der Materievariablen, denn da  $\xi^\mu$  beliebige Funktionen von  $x$  sind, so sind auch  $\delta C_i^\mu(\lambda_i) = \epsilon \xi^\mu(C_i(\lambda_i))$  beliebige Variationen der Koordinaten der Weltlinie  $C_i$  des Teilchens  $i$ .  $\delta_{Mat} S_{Materie} = 0$  ist daher äquivalent zur Gültigkeit der Bewegungsgleichungen.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die Einsteinschen Feldgleichungen die Gleichung  $T_{\mu;\nu}^\nu = 0$  implizieren. Die Einsteinschen Feldgleichungen enthalten also bereits die Bewegungsgleichungen für die Materie mit.

### 2.3.3 Bianchi-Identitäten

Man führt die Bezeichnung

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

ein, und bezeichnet  $G_{\mu\nu}$  als Einstein-Tensor. Die Einsteinschen Feldgleichungen nehmen dann die Form an

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.90)$$

Wenn  $T_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$  ist, wird dann auch gelten müssen, daß

$$G_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (2.91)$$

In Wahrheit sollte man aber nicht Gl. (2.91) als Konsequenz der Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors betrachten, sondern gerade umgekehrt die Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors als Konsequenz von (2.91) und der Einsteinschen Feldgleichungen. Denn (2.91) ist eine Identität; sie gilt für jede Metrik, gleichgültig, ob diese die Einsteinschen Feldgleichungen erfüllt oder nicht. Gl. (2.91) wird als kontrahierte Bianchi-Identität bezeichnet. Sie ist eine Konsequenz der Bianchi-Identität für den Krümmungstensor, die wie folgt lautet

$$D_{\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu} + D_{\nu}\mathcal{F}_{\lambda\mu} + D_{\mu}\mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0 \quad (2.92)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der 2-ten Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik und gilt in jeder Eichtheorie ebenso wie in der allgemeinen Relativitätstheorie.  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$  ist eine Abbildung  $V_x \rightarrow V_x$  und  $D_{\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu}$  ist definiert durch

$$(D_{\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x))v(x) \equiv D_{\lambda}(\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)v(x)) - \mathcal{F}_{\mu\nu}(x)D_{\lambda}v(x) \quad (2.93)$$

für ein beliebiges (Tangenten)vektorfeld  $v$ . Die kovariante Ableitung  $D_{\lambda}v$  von Vektorfeldern wurde in SS1 von Kapitel I erklärt. Da  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)v(x) \in V_x$  wieder ein Vektorfeld definiert, und  $D_{\lambda}v(x) \in V_x$  ist, so sind beide Terme der rechten Seite erklärt. In der allgemeinen Relativitätstheorie ist  $V_x = T_xM$  der Tangentenraum.

Die Gültigkeit von Gl. (2.92) folgt unmittelbar aus Gl. (1.16):

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = [D_{\mu}, D_{\nu}] \equiv D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu} \quad (2.94)$$

Nach Gl. (2.98) müssen wir zeigen, daß

$$([D_{\lambda}, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + [D_{\nu}, \mathcal{F}_{\lambda\mu}] + [D_{\mu}, \mathcal{F}_{\nu\lambda}])v = 0$$

gilt für ein beliebiges Vektorfeld  $v$ . Nach Gl. (1.16) ist aber

$$[D_{\lambda}, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + [D_{\nu}, \mathcal{F}_{\lambda\mu}] + [D_{\mu}, \mathcal{F}_{\nu\lambda}] \quad (2.95)$$

$$= [D_{\lambda}, [D_{\mu}, D_{\nu}]] + [D_{\nu}, [D_{\lambda}, D_{\mu}]] + [D_{\mu}, [D_{\nu}, D_{\lambda}]] = 0 \quad (2.96)$$

Dies verschwindet aufgrund der Jacobi-Identität für Kommutatoren. Man sieht sie ein, indem man die Kommutatoren alle ausschreibt,  $[D_{\mu}, D_{\nu}] =$

$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$ , usw.. Dann kürzen sich alle Terme paarweise weg. Damit ist die Bianchi-Identität (2.92) bewiesen.

In Komponentenschreibweise lautet Gl. (2.92)

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu;\lambda} + R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu;\nu} + R^\rho{}_{\sigma\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (2.97)$$

Wir wollen hieraus die kontrahierte Bianchi-Identität (2.91) ableiten. Es ist

$$g_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu{}^\nu \quad (2.98)$$

Also ist

$$G_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = R_\mu{}^\nu{}_{;\nu} - \frac{1}{2}(\delta_\mu{}^\nu R)_{;\nu} = R_\mu{}^\nu{}_{;\nu} - \frac{1}{2}R_{;\mu} \quad (2.99)$$

Aus Gl. (2.97) folgt durch Summation über  $\rho = \nu$  und Kontraktion mit  $g^{\sigma\mu}$

$$0 = g^{\sigma\mu}(R^\nu{}_{\sigma\mu\nu;\lambda} + R^\nu{}_{\sigma\lambda\mu;\nu} + R^\nu{}_{\sigma\nu\lambda;\mu})$$

Wegen der Symmetrie-Eigenschaften (2.8,2.9,2.10) des Krümmungstensors und der Definition (2.12), (2.13) des Ricci-Tensors  $R_{\mu\nu}$  und der skalaren Krümmung  $R$  ist die rechte Seite gleich

$$-R_{;\lambda} + R^\nu{}_{\lambda;\nu} + R^\mu{}_{\lambda;\mu} = 2G^\mu{}_{\lambda;\mu}$$

Also ist  $G^\mu{}_{\lambda;\mu} = 0$ , und damit auch  $G_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0$ , denn der Einstein-Tensor  $G_{\mu\nu}$  ist symmetrisch, und das Heben und Senken von Indizes kommutiert nach SS2 mit der kovarianten Ableitung. ( $G_{\mu\nu}$  ist symmetrisch, weil  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ , dies wiederum folgte aus den Symmetrie-Eigenschaften (2.8,2.9,2.10) des Krümmungstensors.) Die Gültigkeit der kontrahierten Bianchi-Identitäten (2.91) ist damit gezeigt für ganz beliebige pseudo-Riemannsche Zusammenhänge.

Aus dem Erhaltungssatz  $T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0$  folgt *nicht*, daß Energie und Impuls der Materie erhalten sind. Es ist aufgrund von Gl. (1.52)

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}T_\mu{}^\nu)}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} T^{\rho\nu} = 0 \quad (2.100)$$

Betrachte nun eine raumartige Hyperfläche  $x^0 = ct = \text{const}$ . Definieren wir Impulskomponenten ,

$$P_\mu = \int_{x^0=ct} d^3x \sqrt{-g} T_{\mu 0},$$

so sind diese Ausdrücke unter Koordinatentransformationen invariant, die  $x^0$  und damit auch die Hyperfläche invariant lassen. Die zeitliche Ableitung von  $P_\mu$  ergibt sich nach Gl.(2.100) als

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} P_\mu = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T_\mu{}^\nu) = \frac{1}{2} \int_{x^0=ct} d^3x \sqrt{-g} T^{\rho\nu} \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \neq 0.$$

# Chapter 3

## Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

### 3.1 Die Schwarzschild-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen

Sterne, wie z.B. die Sonne, sind in sehr guter Näherung kugelsymmetrisch. Außerhalb des Sterns wird der metrische Tensor die Einsteinschen Feldgleichungen mit  $T_{\mu\nu} = 0$  erfüllen müssen. Dies führt uns dazu, kugelsymmetrische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit  $T_{\mu\nu} = 0$  zu suchen. Gelingt es uns, die allgemeinste kugelsymmetrische Lösung dieser Gleichungen zu finden, so werden sich darunter auch die einer beliebigen Materie-Verteilung im Stern entsprechenden kugelsymmetrischen Lösungen im Außenraum des Sterns finden. Allerdings müssen wir Singularitäten zulassen, denn im Inneren des Sterns ist die Lösung der Gleichungen mit  $T_{\mu\nu} = 0$  unphysikalisch.

Kugelsymmetrie bedeutet abstrakt, daß eine Wirkung der (aus der Theorie des Drehimpulses bekannten) 3-dimensionalen Drehgruppe  $SO(3)$  auf  $M$  definiert werden kann, derart, daß die Metrik unter den Drehungen  $O: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ( $O \in SO(3)$ ) invariant bleibt.

Man kann zeigen, daß es sich bei Kugelsymmetrie durch geeignete Wahl der Koordinaten immer erreichen läßt, daß das Linienelement  $ds^2$  von der Form

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

ist.  $\vartheta, \varphi$  haben die Bedeutung von Polarkoordinaten auf einer Kugelschale

$r = \text{const}$ . Die Länge eines (raumartigen) Großkreises auf der Kugelschale  $r = \text{const}$  ist  $2\pi r$ . Die Vorfaktoren von  $c^2 dt^2$  und  $dr^2$  wurden als  $e^\nu$  und  $e^\lambda$  geschrieben, da wir erwarten, daß sie positiv sein werden, doch können wir auch negative Werte zulassen, indem wir imaginäre Werte von  $\nu$  und  $\lambda$  erlauben.

Wir numerieren die Koordinaten

$$ct = x^0 \quad , \quad r = x^1 \quad , \quad \vartheta = x^2 \quad , \quad \varphi = x^3 \quad (3.2)$$

Dann lesen wir aus Gl. (3.1) die Formeln für den metrischen Tensor ab. Es ist  $ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , also

$$\begin{aligned} g_{00} &= -e^\nu \quad , \quad g_{11} = e^\lambda \quad , \quad g_{22} = r^2 \quad , \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta \quad , \\ \text{andere} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da die Matrix  $(g_{\mu\nu})$  diagonal ist, ist ihr Inverses sofort gefunden. Der inverse metrische Tensor hat also Matrixelemente

$$\begin{aligned} g^{00} &= -e^{-\nu} \quad , \quad g^{11} = e^{-\lambda} \quad , \quad g^{22} = \frac{1}{r^2} \quad , \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \quad , \\ \text{andere} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wir müssen nun mit Hilfe von Gl. (1.52) die Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  bestimmen. Da  $g_{\mu\nu}$  diagonal ist, kann nach Gl. (1.52)  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  nur dann  $\neq 0$  sein, wenn mindestens zwei der drei Indizes gleich sind. Außerdem trägt dann nur einer der drei Terme in (I-3.12) etwas bei. Denn ist  $\mu = \nu = \rho$ , so kürzen sich zwei Terme heraus, und im anderen Fall ist nur ein Term von Null verschieden. Aus Gl. (3.3) ergibt sich so

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{\nu}}{2} \quad , \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2} \quad , \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \quad (3.5) \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \quad , \quad \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \quad , \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \\ \Gamma^1_{22} &= -r e^{-\lambda} \quad , \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2 \vartheta e^{-\lambda} \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \vartheta \cos \vartheta \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \cot \vartheta \end{aligned}$$

Die anderen  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  sind Null, mit Ausnahme derer, die sich von den in (3.5) angegebenen nur durch Vertauschen der beiden unteren Indizes unterscheiden.  $' \equiv \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\dot{\phantom{x}} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ .

### 3.1. DIE SCHWARZSCHILD-LÖSUNG DER EINSTEINSCHEN FELDGLEICHUNGEN 73

Der Krümmungstensor ergibt sich nun durch eine etwas längere Rechnung aus Gl. (1.33). Der Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$  ergibt sich dann daraus als

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right] - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \quad (3.6)$$

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + e^{\lambda-\nu} \left[ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right] \quad (3.7)$$

$$R_{10} = R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (3.8)$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2} (\nu' - \lambda') \right] + 1 \quad (3.9)$$

$$R_{33} = -\sin^2 \vartheta R_{22} \quad (3.10)$$

Die Einsteinschen Vakuum-Feldgleichungen verlangen nach (??)

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Die Bedingung  $R_{10} = 0$  gibt  $\dot{\lambda} = 0$ , also hängt  $\lambda$  nur von  $r$  ab.

$$\lambda = \lambda(r)$$

Die Bedingung  $R_{00} + e^{\nu-\lambda} R_{11} = 0$  gibt

$$\frac{1}{r} (\nu' + \lambda') = 0$$

Also ist  $\nu(r, t) = -\lambda(r) + f(t)$ . Da  $\nu$  in die Metrik nur in der Kombination  $e^{\nu} dt^2 = e^{-\lambda(r)} (e^{\frac{1}{2}f(t)} dt)^2$  eingeht, kann man durch eine Transformation der Zeitkoordinate  $t \rightarrow t' = \int e^{\frac{1}{2}f} dt$  den Beitrag von  $f$  zu  $\nu$  wegtransformieren. Also ist bei geeigneter Koordinatenwahl

$$\nu(r, t) = -\lambda(r) \quad (3.11)$$

Damit sind alle Komponenten  $g_{\mu\nu}$  des metrischen Tensors  $t$ -unabhängig. Dies ist der *Birkhoffsche Satz*: Ein kugelsymmetrisches Gravitationsfeld ist automatisch statisch. Beispielsweise führt also eine mögliche Pulsation eines kugelsymmetrischen Sterns nicht zu einer Zeitabhängigkeit des von ihm erzeugten Gravitationsfeldes, er strahlt also keine Gravitationswellen ab. Dies ist analog zu einem Resultat der Elektrodynamik: Eine pulsierende kugelsymmetrische Ladungsverteilung strahlt nicht.

Es ist allerdings zu bemerken, daß die Bezeichnung “statisch” für  $t$ -unabhängig in Wirklichkeit nur gerechtfertigt ist, wenn  $t$  eine zeitartige Koordinate ist, d.h. wenn  $-g_{00} = e^\nu > 0$  ist. Wir werden später sehen, daß dies innerhalb des Horizonts eines schwarzen Lochs nicht erfüllt ist - das Gravitationsfeld eines schwarzen Lochs ist nur außerhalb des Horizonts wirklich statisch.

Die Bedingung  $R_{22} = 0$  liefert nun wegen (3.11)

$$e^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 = 0$$

Setze  $e^{-\lambda} = \alpha$ . Dann ist  $\lambda' = \frac{\alpha'}{\alpha}$  und die obige Bedingung ergibt

$$\alpha' + \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Gleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung ist  $\alpha = 1$ . Die allgemeine Lösung der Gleichung  $\alpha' + \frac{\alpha}{r} = 0$  ergibt sich durch Separation der Variablen,  $\frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dr}{r}$ , also  $\alpha = \frac{const}{r}$ . Somit ist

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \quad (3.12)$$

Dabei ist  $\mathcal{M}$  eine Konstante, die verschiedene Lösungen unterscheidet. Ihre physikalische Bedeutung wird später bestimmt werden.

Mit  $R_{22} = 0$  ist automatisch auch  $R_{33} = 0$  wegen Gl. (3.10). Damit sind Gl. (3.8,??,??) und eine Linearkombination von Gl. (3.6) und (3.7) erfüllt. Es wird also  $R_{\mu\nu} = 0$  sein, wenn außerdem noch  $R_{11}$  verschwindet. Wegen (3.11) vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\frac{\lambda''}{2} - \frac{\lambda'^2}{2} + \frac{\lambda'}{r} = 0$$

Man rechnet leicht nach, daß der Ausdruck (3.12) für  $\lambda$  diese Gleichung erfüllt.

Damit ist die allgemeinste kugelsymmetrische Lösung der Vakuum-Feldgleichungen gefunden. Sie hängt von einem willkürlichen Parameter  $\mathcal{M}$  ab. Das Linienelement lautet

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2] \quad (3.13)$$



Für große  $r$  strebt dieser Ausdruck dem Linienelement im Minkowskiraum zu; das Gravitationsfeld wird also schwach. In diesem Grenzfall drückt sich nach Gl. (??)  $g_{00}$  durch das Newtonsche Gravitationspotential aus gemäß  $g_{00} = 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$ . Also ist

$$\Phi = \frac{-\mathcal{M}}{c^2 r}$$

Andererseits ist das Newtonsche Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen Quelle der Gesamtmasse  $m'$  gegeben durch  $\Phi = -\frac{km'}{r}$ . Durch Vergleich sehen wir, daß

$$\mathcal{M} = \frac{km'}{c^2} \quad (k = \text{Newtonsche Grav. - Konstante})$$

$\mathcal{M}$  wird als Gravitationsradius, oder Schwarzschildradius, bezeichnet. Für die Sonne ist  $\mathcal{M} = 2.96$  km, für die Erde  $\mathcal{M} = 8.8$  mm. Der Radius der Materieverteilung ist demgegenüber viel größer. Der Ausdruck (3.13) hat also keine Singularität im Außenraum, wo er physikalische Gültigkeit hat.

## 3.2 Periheldrehung der Planeten und Lichtablenkung an der Sonne

Wir betrachten nun die Bewegung eines Massenpunkts der Masse  $m$  in der Schwarzschildgeometrie. Seine Weltlinie sei  $x = x(\lambda)$ . Seine Wirkung ist

$$S = -mc \int \left( -g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (3.14)$$

Die Wirkung hängt nicht ab von der Parametrisierung der Weltlinie, sie ist invariant unter Reparametrisierungstransformationen  $\lambda \rightarrow \lambda' = f(\lambda)$ . Insbesondere können wir daher als Parameter die Zeit wählen,  $\lambda = t = \frac{x^0}{c}$ . Damit wird

$$S = \int L(\dot{x}(t), x(t)) dt \quad (3.15)$$

mit

$$L(\dot{x}, x) = -mc \left\{ c^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) - \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 [\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Der Punkt bedeutet hier Ableitung nach  $t$ .

Das weitere Verfahren ist nun wie bei der Behandlung eines Massenpunkts im Zentralfeld in der nichtrelativistischen Mechanik. Einziger Unterschied ist die etwas komplizierte Gestalt der Lagrangefunktion. Der Formalismus der analytischen Mechanik gilt allgemein und kann in der gewohnten Form angewandt werden.

Wir sehen, daß  $L$  nicht von der Koordinate  $\varphi$  abhängt,  $\varphi$  ist also eine zyklische Koordinate. Daraus folgt, daß der zu  $\varphi$  kanonisch konjugierte Impuls  $p_\varphi$  erhalten ist

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \equiv \frac{c}{\{ \}^{\frac{1}{2}}} m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = l \quad (3.17)$$

Dabei ist  $\{ \}$  der Ausdruck in  $\{ \}$  in Gl. (3.16). Zeit  $t$  und Eigenzeit  $\tau$  des Massenpunkts sind verknüpft durch

$$c \frac{d\tau}{dt} = \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$= \left\{ c^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) - \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 [\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

Daher können wir Gl. (3.17) auch schreiben als

$$m r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{d\tau} = l = \text{const.} \quad (3.20)$$

Dies drückt die Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses aus. Wir schreiben

$$\vec{r} = (r^1, r^2, r^3) = (r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta)$$

und definieren

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

Dann ist

$$L^3 \equiv p_\varphi = l$$

konstant. Da wegen der Kugelsymmetrie keine Achse ausgezeichnet ist, sind daher auch  $L^1$  und  $L^2$  zeitlich konstant.  $\vec{L}$  steht senkrecht auf dem Radiusvektor  $\vec{r}$  und auf  $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ . Aus der Konstanz der Richtung von  $\vec{L}$  folgt dann wie beim Keplerproblem, daß die Bewegung eben ist. Die Bahnkurve liegt in

einer Ebene, die den Ursprung enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir daher  $\vartheta = \pi/2$  annehmen. Damit vereinfacht sich Gl. (3.20) zu

$$mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = l$$

Die Lagrangefunktion hängt außerdem nicht explizit von der Zeit ab. Daraus folgt, daß die Energie erhalten ist

$$H = E$$

Definitionsgemäß ist

$$H = p_r \dot{r} + p_\vartheta \dot{\vartheta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$$

Dabei ist

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{mcr}{\{ \}^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})} = m \frac{dr}{d\tau} \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

$$p_\vartheta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{mc}{\{ \}^{\frac{1}{2}}} r^2 \dot{\vartheta} = mr^2 \frac{d\vartheta}{d\tau} \quad , \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = s.o. \quad (3.22)$$

Somit ergibt sich

$$H = \frac{mc}{\{ \}^{\frac{1}{2}}} \left[ \dot{r}^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \{ \} \right] = mc^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \frac{c}{\{ \}^{\frac{1}{2}}}$$

$\{ \}$  ist eine Funktion von  $\dot{r}$ ,  $\dot{\varphi}$ , wenn  $\dot{\vartheta} = 0$ . Für die folgende Rechnung ist es günstiger, die Gleichung  $H = E$  als eine Beziehung zwischen  $\frac{dr}{d\tau}$  und  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  aufzufassen statt zwischen  $\dot{r}$  und  $\dot{\varphi}$ . Benutzen wir Gl. (3.19) und (3.22), so lautet die Gleichung  $H = E$

$$mc^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = E \quad (3.23)$$

Multiplizieren wir Gl. (3.19) mit  $\frac{dt}{d\tau}$ , so ergibt sich für  $\vartheta \equiv \pi/2$

$$\left\{ c^2 \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = c$$

Einsetzen von Gl. (3.23) für  $\frac{dt}{d\tau}$  liefert schließlich die gewünschte Beziehung zwischen  $\frac{dr}{d\tau}$  und  $\frac{d\varphi}{d\tau}$

$$\frac{E^2}{m^2 c^2} \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} - \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = c^2$$

Wie bei der Lösung des Keplerproblems benutzt man nun die Drehimpulserhaltung, um hieraus eine Gleichung für  $\frac{dr}{d\varphi}$  herzuleiten, aus der sich die Bahnkurve bestimmt. Es ist

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{mr^2}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\frac{E^2}{m^2 c^2} \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{l^2}{m^2 r^4} - \frac{l^2}{m^2 r^2} = c^2$$

Durch Auflösen ergibt sich

$$d\varphi = \frac{l}{r^2} \left[ \frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (3.24)$$

Durch unbestimmte Integration ergibt sich daraus die Bahnkurve

$$\varphi(r) = \int^r \frac{l dr}{r^2 \left[ \frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.25)$$

Minimum  $r_{\min}$  und Maximum  $r_{\max}$  von  $r$  sind bestimmt durch die Forderung, daß dort  $\frac{dr}{d\varphi} = 0$  sein muß. Sie sind daher die beiden Nullstellen des Ausdrucks [ ] mit  $r > 2\mathcal{M}$ . Die Punkte der Bahn mit  $r = r_{\min}$  werden als Perihelie der Bahnkurve bezeichnet. Von Perihel zu Perihel der Bahn ändert sich der Winkel  $\varphi$  um

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr}{r} \left[ \frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Die Größe  $\Delta\varphi - 2\pi$  bezeichnet man als Periheldrehung. Sie ist durch ein elliptisches Integral gegeben.

Es ist interessant, Gl. (3.25) für die Bahnkurve mit dem Resultat für das nichtrelativistische Keplerproblem zu vergleichen. Setzen wir  $\mathcal{M} = \frac{km'}{c^2}$  ein ( $m' = \text{Sonnenmasse}$ ), so wird

$$[ ] = \frac{1}{c^2} (E^2 - m^2 c^4) + 2m \frac{km m'}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2\mathcal{M} l^2}{r^3}$$

Nun ist  $\frac{1}{c^2}(E^2 - m^2c^4) = p^2 = 2mE_{n.r.}$  im nichtrelativistischen Grenzfall. Somit ist

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int^r \frac{ldr}{r^2} \left[ 2m(E_{n.r.} - U(r)) - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2\mathcal{M}l^2}{r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \text{mit } \mathcal{U}(r) &= m\Phi(r) = -\frac{km m'}{r}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dies unterscheidet sich vom Resultat für das Keplerproblem durch den Term  $\frac{2\mathcal{M}l^2}{r^3}$  in der Klammer. Man kann diesen Term als kleine Störung betrachten. Bis zu Gliedern niedrigster nichtverschwindender Ordnung in dieser Störung ergibt sich für die Periheldrehung

$$\Delta\varphi - 2\pi = \frac{6\pi k^2 m^2 m'^2}{c^2 l^2} \quad (3.28)$$

Zu niedrigster Ordnung kann man für  $l$  das Resultat der Keplerbewegung einsetzen,  $\frac{l^2}{km'm^2} = a(1 - e^2)$ . Dies ergibt

$$\Delta\varphi - 2\pi = \frac{6\pi km'}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (3.29)$$

$m'$  ist die Sonnenmasse,  $a$  die große Halbachse und  $e$  die Exzentrizität der Bahn. Die Periheldrehung ist positiv, die Bahn sieht also qualitativ wie in der Zeichnung aus. Numerisch ergibt sich für

<i>rmMerkur</i>	43''
Venus	8.6''
Erde	3.8''

pro Jahrhundert.

Als nächste Anwendung betrachten wir die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne. Aus dem Äquivalenzprinzip folgt, daß ein Lichtstrahl eine lichtartige Geodäte durchläuft. Am anschaulichsten stellt man sich diese als Bahnkurve eines masselosen Teilchens, des Photons, vor. Die Gültigkeit von Drehimpuls- und Energieerhaltung in der Schwarzschildgeometrie folgt aus ihrer Kugelsymmetrie und  $t$ -Unabhängigkeit. Diese Erhaltungssätze gelten daher auch für Photonen. Andererseits folgt die Gleichung für die Bahnkurve aus diesen Erhaltungssätzen. Wir erhalten daher die Bahnkurve für ein masseloses Teilchen, indem wir in Gl. (3.24)  $m = 0$  setzen

$$d\varphi = \frac{l}{r^2} \left[ \frac{E^2}{c^2} - \frac{l^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (3.30)$$

Die Lösung ist wiederum durch ein elliptisches Integral gegeben. Um einen expliziten Näherungsausdruck zu erhalten, setzen wir  $u = r^{-1}$ ,  $r^{-2}dr = -du$ ,  $u' \equiv \frac{du}{d\varphi}$  etc.. Gl. (3.30) gibt dann

$$u'^2 = \frac{1}{l^2} \left[ \frac{E^2}{c^2} - l^2 u^2 (1 - 2\mathcal{M}u) \right]$$

Wir differenzieren nach  $\varphi$  und kürzen einen Faktor  $2u'$  heraus.

$$u'' + u = 3\mathcal{M}u^2 \quad (3.31)$$

Wir betrachten  $\mathcal{M}$  als kleine Größe. Für  $\mathcal{M} = 0$  reduziert sich die Gleichung auf die Form  $u''_0 + u_0 = 0$ . Die Lösung dieser Gleichung ist aus der Theorie des harmonischen Oszillators bekannt

$$u_0 \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{D} \sin(\varphi - \varphi_0) \quad (3.32)$$

Dies ist eine Gerade. Beispielsweise ist für  $\varphi_0 = 0$ ,  $y \equiv r \sin \varphi = D = \text{const.}$  Am sonnennächsten Punkt der Bahn ist  $r = D$ .

Wir schreiben  $u = u_0 + O(\mathcal{M})$ . Zu erster Ordnung in  $\mathcal{M}$  können wir dann auf der rechten Seite von Gl. (3.31)  $u$  durch  $u_0$  ersetzen, sodaß

$$u'' + u = \frac{3\mathcal{M}}{D^2} \sin^2(\varphi - \varphi_0) = \frac{3\mathcal{M}}{2D^2} (1 - \cos 2\varphi)$$

Dieselbe mathematische Gleichung beschreibt die erzwungene Schwingung eines harmonischen Oszillators mit zeitlich periodischer äußerer Kraft. Die Gleichung kann daher mit denselben Methoden gelöst werden, wie sie bei der erzwungenen Schwingung angewandt werden.

Setzen wir o.B.d.A.  $\varphi_0 = 0$  oder  $\pi$ , so nimmt die rechte Seite dieselbe Form an. Eine partikuläre Lösung ist  $u = (3\mathcal{M}/2D^2)(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi)$ . Addieren wir die homogene Lösung (3.32) so erhalten wir diejenige Lösung, die im Grenzfall  $\mathcal{M} \rightarrow 0$  in die Lösung (3.32) übergeht,

$$u \equiv \frac{1}{r} = \pm \frac{\sin \varphi}{D} + \frac{3\mathcal{M}}{2D^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) \quad (3.33)$$

Es ist  $r = \infty$  wenn  $u = 0$ . Wir suchen Nullstellen nahe  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$ . Verschiebung von  $\varphi$  um  $\pi$  substituiert in der Lösung  $\mp$  für  $\pm$ . Es bleibt, Nullstellen  $\varphi_\infty$  der Ausdrücke mit beiden Vorzeichen nahe  $\varphi = 0$  zu suchen.

Durch Potenzreihenentwicklung in  $\varphi$  bis zu erster Ordnung findet man  $\varphi_\infty = \pm \frac{2\mathcal{M}}{D} + O(\mathcal{M}^2)$ . Ein aus der einen Richtung einfallender Lichtstrahl wird also um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{4\mathcal{M}}{D} + O(\mathcal{M}^2)$$

abgelenkt. Für Licht, das am Sonnenrand vorbeiläuft, ist  $\Delta\varphi = 1.75''$ . Experimente bestätigen diesen Wert.

Gravitationsfelder können einen Linseneffekt haben. Beispielsweise werden Lichtstrahlen, die an entgegengesetzten Seiten eines massiven Körpers vorbeilaufen, in entgegengesetzter Richtung abgelenkt.

### 3.3 Zeit und Zeitdilatation

Nach den Postulaten der allgemeinen Relativitätstheorie zeigt eine vom Beobachter mitgeführte Uhr die Eigenzeit an, und deren Verlauf wird durch die Metrik bestimmt. Ist  $x(\lambda)$  die Weltlinie des Beobachters, so ändert sich die Eigenzeit um

$$\delta\tau = \frac{1}{c} \left( -g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (3.34)$$

während der Beobachter vom Raum-Zeit-Punkt  $x = x(\lambda_0)$  zu  $x(\lambda_0 + d\lambda)$  gelangt. Als Uhr kann man sich eine Atomuhr vorstellen.

[Es erhebt sich natürlich die Frage nach dem Gültigkeitsbereich dieser Hypothese. Man glaubt, daß es in der Geschichte des Universums eine Phase gab, in der die heute bekannten Elementarteilchen noch nicht existierten, also auch keine Atomuhren o.ä.. Außerdem sind Atome nicht exakt punktförmig. Verschiedenartige Atomuhren werden deshalb verschieden schnell gehen, wenn die Krümmung so stark ist, daß Gezeitenkräfte innerhalb der Atome nicht mehr vernachlässigbar sind. Derzeit ist es nicht möglich, solch extreme Bedingungen experimentell zu studieren. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird angenommen, daß ideale Uhren prinzipiell existieren könnten. ]

Koordinaten können in der allgemeinen Relativitätstheorie in ganz willkürlicher Weise gewählt werden. Beispielsweise ist  $x^0 \rightarrow x'^0 = x^1$ ,  $x^1 \rightarrow x'^1 = x^0$  eine erlaubte Koordinatentransformation. Die Koordinatenzeit  $\frac{x^0}{c} = t$  hat daher nicht a priori eine physikalische Bedeutung als von einer Uhr angezeigte Zeit. Sie kann eine solche Bedeutung nur dadurch bekommen,

daß man  $t$  durch die Eigenzeit eines geeigneten Beobachters ausdrückt, mit Hilfe von Gl. (3.34).

Auch in der speziellen Relativitätstheorie erhält  $\frac{x^0}{c} = t$  die Bedeutung einer Zeit durch die Feststellung, daß  $t$  gleich der Eigenzeit eines im Lorentz-Bezugssystem ruhenden Beobachters ist. (Für einen solchen Beobachter ist  $x^i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .)

Die Zeitdilatation in der speziellen Relativitätstheorie ist ein beobachtbarer Effekt. Ihr Nachweis geschieht durch Vergleich der abgelaufenen Eigenzeit für zwei Beobachter, die sich längs zweier verschiedener Weltlinien von einem Raum-Zeit-Punkt zu einem anderen begeben. Fährt der eine Beobachter mit dem Schnellzug von Hamburg nach München und zurück und vergleicht nach der Rückkehr seine Uhr mit der eines in Hamburg verbliebenen Beobachters, so würde er feststellen daß sie zurückgeblieben ist (wenn die Uhr genau genug ginge und der Schnellzug schnell genug führe ...).

Auf ganz entsprechende Weise findet man im Gravitationsfeld eine beobachtbare Zeitdilatation.

Wir betrachten ein statisches Gravitationsfeld - beispielsweise die Schwarzschild-Lösung der Feldgleichungen - so daß der metrische Tensor bei geeigneter Koordinatenwahl unabhängig von  $x^0$  ist:  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\underline{x})$ ,  $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ . Wir betrachten nun zwei Beobachter, die längs zweier verschiedener Weltlinien von einem Punkt in der Raum-Zeit zu einem anderen kommen. Beobachter 1 bleibe in Ruhe am Punkt  $x^{(1)}$  während eines langen Zeitintervalls  $0 \dots t$ . Die von seiner Uhr angezeigte verstrichene Eigenzeit ist dann

$$\tau^{(1)} = \left( -g_{00}(\underline{x}^{(1)}) \right)^{\frac{1}{2}} t$$

Der 2-te Beobachter begeben sich zunächst zum Raumpunkt  $\underline{x}^{(2)}$ , innerhalb eines Intervalls der Eigenzeit  $\ll \Delta\tau^{(1)}$ , bleibe dort lange in Ruhe und kehre dann zur Koordinatenzeit  $t$  zum Raumpunkt  $\underline{x}^{(1)}$  zurück. Das von seiner mitgeführten Uhr angezeigte Intervall der Eigenzeit ist dann näherungsweise gleich

$$\tau^{(2)} = \left( -g_{00}(\underline{x}^{(2)}) \right)^{\frac{1}{2}} t$$

Somit ist

$$\frac{\tau^{(2)}}{\tau^{(1)}} = \left( \frac{-g_{00}(\underline{x}^{(2)})}{-g_{00}(\underline{x}^{(1)})} \right)^{\frac{1}{2}}$$



In einem schwachen Gravitationsfeld ist  $g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}$ , somit

$$\frac{\tau^{(2)}}{\tau^{(1)}} = \left( \frac{1 + 2c^{-2}\Phi(\underline{x}^{(2)})}{1 + 2c^{-2}\Phi(\underline{x}^{(1)})} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{c^2} [\Phi(\underline{x}^{(2)}) - \Phi(\underline{x}^{(1)})]$$

Ist die Uhr 1 am Erdboden, die Uhr 2 in einem Flugzeug in der Höhe  $h$ , so ist  $\Phi(\underline{x}^{(2)}) - \Phi(\underline{x}^{(1)}) \approx gh$ ,  $g$  = Erdbeschleunigung. Also ist  $\tau^{(1)} < \tau^{(2)}$ . Der Effekt wurde experimentell bestätigt.

Die Zeitdilatation im Gravitationsfeld führt auch zu einer Laufzeitverzögerung für elektromagnetische Signale, die am Sonnenrand vorbei zu einem anderen Planeten oder Satelliten gesandt und von dort reflektiert werden. Wir nehmen an, daß  $g_{0i} = 0$  ist. Da die beiden Stücke der Weltlinie  $x(\lambda)$  des Signals lichtartige Geodäten sind, so ist  $0 = -g_{00}c^2dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ . Also ist die bis zum Wiedereintreffen des Signals verstrichene Zeit

$$\Delta t = \int \left( \frac{g_{ij}(x(\lambda)) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}{g_{00}(x(\lambda))} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

Das Resultat hängt von der Metrik ab. Wenn die Position des reflektierenden Objekts genügend genau bekannt ist, kann  $\Delta t$  berechnet und mit dem Experiment verglichen werden. Der Einfluß der Abweichung von  $g_{\mu\nu}$  von  $\eta_{\mu\nu}$  wurde experimentell bis zu einer Genauigkeit von etwa 5% verifiziert.

### 3.4 Allgemein relativistische Elektrodynamik und Rotverschiebung

Die allgemein relativistische Form der Maxwell-Gleichungen ergibt sich aus dem Äquivalenzprinzip.

In der speziellen Relativitätstheorie ist der elektromagnetische Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  durch das elektromagnetische Vektorpotential bestimmt

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

Daraus folgt die Gültigkeit der 2-ten Gruppe der Maxwellschen Gleichungen

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \quad (3.35)$$

Nach der ‘‘Komma-wird-Semicolon-Regel’’ wird Gl. (3.35) in der allgemeinen Relativitätstheorie zu ersetzen sein durch

$$F_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\mu;\nu} - \mathcal{A}_{\nu;\mu}$$

Nun ist aber

$$\mathcal{A}_{\mu;\nu} = \partial_\nu A_\mu - \mathcal{A}_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

Weil  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$  ist, kürzt sich der  $\Gamma$ -abhängige Term heraus, so daß wiederum wie in der speziellen Relativitätstheorie gilt

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

Daraus folgt, daß auch Gl. (3.35) ihre Gültigkeit behalten. Sie können auch in der äquivalenten Form geschrieben werden  $\mathcal{F}_{\mu\nu;\lambda} + \mathcal{F}_{\lambda\mu;\nu} + \mathcal{F}_{\nu\lambda;\mu} = 0$ . Dies folgt daraus, daß Gl. (3.35) nach Herleitung in jedem Koordinatensystem gilt, und in einem lokalen Lorentzsystem mit der eben genannten allgemein kovarianten Gleichung übereinstimmt.

Die erste Gruppe der Maxwell’schen Gleichungen lautet in der speziellen Relativitätstheorie

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Aus der Antisymmetrie von  $F_{\mu\nu}$  folgt, daß  $\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$  ist, also muß der Strom erhalten sein:  $\partial_\nu j^\nu = 0$ . Daraus wiederum folgt die Erhaltung der elektrischen Ladung.

Die allgemein relativistische Form der 1-ten Gruppe der Maxwell-Gleichungen wird lauten müssen

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (3.36)$$

Aus Gl. (1.52) folgt, daß für antisymmetrische Tensoren  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) \quad (3.37)$$

Damit ergibt sich aus der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu}$ , daß  $\partial_\nu \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0$  ist. Daher muß

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} j^\nu) \equiv j^\nu_{;\nu} = 0 \quad (3.38)$$

sein. Aus der ersten Form dieser Gleichung folgt wie in der Elektrodynamik, daß

$$Q = \int_{x^0=const} d^3x \sqrt{-g} j^0 \quad (3.39)$$

erhalten, d.h. von  $x^0$  unabhängig ist.

Wegen Gl. (??) bleibt  $F_{\mu\nu}$  invariant unter Eichtransformationen

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (3.40)$$

genau wie in der speziell relativistischen Elektrodynamik.

Wir betrachten nun ein statisches Gravitationsfeld, so daß  $g_{\mu\nu}$  von  $x^0 = ct$  unabhängig ist. Außerdem sei  $g^{0i} = 0$  und der Strom  $j^\mu \equiv 0$ . Wir zeigen, daß die Maxwell-Gleichungen in diesem Fall durch einen zeitlich periodischen Ansatz der Form

$$A_\mu(x) = a_\mu(\underline{x}) e^{i\omega t} \quad (\underline{x} = (x^1, x^2, x^3) \quad , \quad t = \frac{x^0}{c}) \quad (3.41)$$

“gelöst” werden können, in dem Sinne, daß sie sich dadurch auf  $t$ -unabhängige lineare Differentialgleichungen für die  $a_\mu$  reduzieren.

Die vier Maxwell-Gleichungen  $F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$  lassen sich mit Hilfe von Gl. (??) und (3.37) in der folgenden Form schreiben (Kommas , stehen für gewöhnliche partielle Ableitungen)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (\mathcal{A}_{\sigma,\rho} - \mathcal{A}_{\rho,\sigma})]_{,\nu} = 0 \quad (3.42)$$

Die Freiheit der Eichtransformation (3.40) kann benutzt werden, um

$$\mathcal{A}_0 \equiv 0 \quad (3.43)$$

zu erreichen. Es bleibt dann noch die Freiheit  $x^0$ -unabhängiger Eichtransformationen.

Wir betrachten nun zuerst die Gl. (3.42) mit  $\mu = 0$ . Da  $g^{0i} = 0$  ist, trägt dann nur der Term mit  $\rho = 0$  bei. Mit  $\partial_0 \mathcal{A}_\sigma = \frac{i\omega}{c} \mathcal{A}_\sigma$  laut Ansatz (3.42) reduziert sich die Gleichung wegen  $\mathcal{A}_0 = 0$  auf

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} g^{00} \mathcal{A}^i]_{,i} = 0 \quad \text{Summe über } i = 1, 2, 3$$

Dies läßt sich durch eine zeitunabhängige Eichtransformation immer erreichen, ähnlich wie in der Elektrodynamik die Eichbedingung  $\partial_i \mathcal{A}^i = 0$  gesetzt werden kann.

In den Gleichungen mit  $\mu = i = 1, 2, 3$  läßt sich der zeitabhängige Faktor  $e^{i\omega t}$  herauskürzen, und es ergibt sich die zeitunabhängige Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} g^{ik} g^{jl} (a_{l,k} - a_{k,l})]_{,j} + \frac{\omega^2}{c^2} g^{00} a^i = 0$$

Dies sind drei partielle lineare Differentialgleichungen für die drei Funktionen  $a_i(\underline{x})$ . Der Ansatz (3.42) leistet also, was er soll.

Betrachten wir nun eine zeitlich periodische Lösung der Maxwell-Gleichungen von der Form (3.42). Ein Beobachter wird die Frequenz der Strahlung mit seiner mitgeführten Uhr messen als

$$\nu = \frac{\text{Zahl der Wellenberge}}{\text{Eigenzeitintervall}} = \frac{\omega dt}{2\pi d\tau}$$

Für einen bei  $\underline{x}$  ruhenden Beobachter ist

$$d\tau = (-g_{00}(\underline{x}))^{\frac{1}{2}} dt$$

Für zwei verschiedene Beobachter ergibt sich als Verhältnis

$$\frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}} = \left( \frac{-g_{00}(\underline{x}^{(2)})}{-g_{00}(\underline{x}^{(1)})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Im schwachen Gravitationsfeld drückt sich dies durch das Newtonsche Gravitationspotential aus

$$\frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}} = \left( \frac{1 + \frac{2}{c^2}\Phi(\underline{x}^{(2)})}{1 + \frac{2}{c^2}\Phi(\underline{x}^{(1)})} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{2}{c^2}(\Phi(\underline{x}^{(1)}) - \Phi(\underline{x}^{(2)}))$$

Der Beobachter mit dem größeren Gravitationspotential  $\Phi$  beobachtet eine kleinere Frequenz ("Rotverschiebung").

### 3.5 Lineare Näherung der Einstein'schen Feldgleichungen und Gravitationswellen

Die Einstein'schen Feldgleichungen kann man in der äquivalenten Form

$$R_{\mu\nu} = \kappa \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \kappa \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\rho{}_\rho \right] \quad (3.45)$$

schreiben. Dabei ist  $R_{\mu\nu}$  der Ricci-Tensor,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}. \quad (3.46)$$

### 3.5. LINEARE NÄHERUNG DER EINSTEIN'SCHEN FELDGLEICHUNGEN UND GRAVITATION

Die Einstein'schen Feldgleichungen sind nichtlinear - insbesondere enthalten sie Terme, die quadratisch in den Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma_{..}$  sind. Das bedeutet, daß das *Gravitationsfeld Selbstwechselwirkung besitzt*.

Hier betrachten wir Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen, die vom Minkowskiraum nur wenig abweichen. Dazu setzen wir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu} \quad (3.47)$$

Die Linearisierung der Einsteinschen Gleichungen besteht darin, daß man in  $f_{\mu\nu}$  bis zu Termen 1. Ordnung entwickelt. Die Zusammenhangskoeffizienten sind von erster Ordnung in  $f$ . Daher verschwinden in linearer Näherung die in  $\Gamma$  quadratischen Terme im Ricci-Tensor, und die Feldgleichungen nehmen die Form

$$\partial_\mu \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} = \kappa \bar{T}_{\mu\nu}$$

an. Setzen wir den Riemann-Ausdruck (1.52) für die Zusammenhangskoeffizienten ein, so ergibt sich daraus

$$-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho}) = \kappa \bar{T}_{\mu\nu} \quad (3.48)$$

Der Faktor  $g^{\rho\sigma}$  kann in der betrachteten Ordnung durch  $\eta^{\mu\nu}$  ersetzt werden, und zu den Ableitungen des metrischen Tensors trägt nur  $f$  etwas bei.

Analog, wie man die Wellengleichung in der Elektrodynamik durch die Wahl einer geeigneten Eichung vereinfacht, kann man hier durch eine geeignete Koordinatenwahl erreichen, daß alle Terme auf der linken Seite bis auf den ersten verschwinden, sodaß man die Gleichung  $\square f_{\mu\nu} = -2\kappa \bar{T}_{\mu\nu}$  erhält.

Führen wir

$$\bar{f}_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} f^\rho_\rho \quad (3.49)$$

ein, so läßt sich diese Gleichung auch schreiben als

$$\square \bar{f}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} \quad (3.50)$$

wobei  $\square = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma$  ist.

Aus der Definition von  $\bar{f}_{\mu\nu}$  folgt daß  $\bar{f}^\rho_\rho = -f^\rho_\rho$ , daher ist

$$f_{\mu\nu} = \bar{f}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \bar{f}^\rho_\rho. \quad (3.51)$$

Geeignete Koordinaten sind die sogenannten *harmonischen Koordinaten*  $x^a$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ . Sei  $\square$  der auf *skalare* Funktionen wirkende kovariante Laplace Operator. Harmonische Koordinaten erfüllen die Gleichung

$$\square x^a = 0.$$

Da  $x^a$  hier wie skalare Funktionen behandelt werden, ist dies keine unter Koordinatentransformationen kovariante Gleichung. Das darf sie auch nicht sein, denn sie soll ja gerade spezielle Koordinatensysteme auszeichnen.

Es ist immer möglich, harmonische Koordinaten zu wählen. In linearer Näherung ist leicht zu sehen, daß man durch eine Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x^a &\mapsto x^a + b^a(x) \\ \square b^a &= -\square x^a \end{aligned} \quad (3.52)$$

die Harmoynizitätsbedingung erfüllen kann. Denn  $\square x^a$  ist klein von erster Ordnung. Daher kann auch  $b^a$  klein gewählt werden, sodaß zu erster Ordnung  $\square b^a = \square b^a$  gilt.

Die Wahl der Koordinaten führt zu einer Nebenbedingung

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0. \quad (3.53)$$

In unserer linearen Näherung werden Indizes mit dem metrischen Tensor  $\eta$  des Minkowskiraums herauf und heruntergezogen. Wir stellen den Beweis zunächst zurück, und diskutieren zuerst die Lösung der Wellengleichung (3.50) bei Abwesenheit von Materie samt Nebenbedingung (3.53).

Die Lösungen der Wellengleichung haben die Form

$$\begin{aligned} \bar{f}^{\mu\nu} &= a_{\mu\nu} e^{ik_\mu x^\mu} = a_{\mu\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \\ \omega^2 &= c^2 \mathbf{k}^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Da  $\bar{f}_{\mu\nu} = \bar{f}_{\nu\mu}$  so haben wir hierin 10 freie Konstanten. Die Nebenbedingung führt auf vier Transversalitätsbedingungen

$$k^\mu a_{\mu\nu} = 0. \quad (3.55)$$

Damit verbleiben 6 freie Konstanten. Nun lässt aber die Harmonizitätsbedingung noch die Wahl von Koordinatentransformationen der Form (3.52) mit  $\square b^a = 0$ . Die Lösungen sind von der Form

$$b^a(x) = \beta^a e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$$

### 3.5. LINEARE NÄHERUNG DER EINSTEIN'SCHEN FELDGLEICHUNGEN UND GRAVITATION

Wir wissen aus Gl.(2.88), daß sich der inverse metrische Tensor unter infinitesimalen Koordinatentransformationen (3.52) wie folgt transformiert

$$g^{\mu\nu} \mapsto g^{\mu\nu} + b^{\mu;\nu} + b^{\nu;\mu}.$$

Bei endlichen Transformationen gilt dies zu erster Ordnung. Hier können wir kovariante Ableitungen durch gewöhnliche approximieren, und erhalten daraus das Transformationsgesetz für  $f^{\mu\nu}$ . Für  $\bar{f}^{\mu\nu}$  geschrieben lautet es

$$\bar{f}^{\mu\nu} \mapsto \bar{f}^{\mu\nu} - \partial^\mu b^\nu - \partial^\nu b^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\rho b^\rho$$

Wir sehen, daß Freiheit von Koordinatentransformationen vier freie Konstanten einführt. Damit bleiben in der Lösung modulo Koordinatentransformationen noch zwei freie Konstanten. Gravitationswellen haben also zwei Polarisationszustände, genauso wie elektromagnetische Wellen.

#### 3.5.1 Nebenbedingungen für harmonische Koordinaten

Ist  $f$  eine reelle Funktion, so ist die Wirkung des kovarianten Laplace-Operators  $\square$  auf sie durch

$$\square f = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = D^\mu D_\mu f$$

definiert. Für reelle Funktionen ist  $D_\nu f = \partial_\nu f$ , und für kovariante Vektoren  $j_\nu$  ist bekanntlich

$$D^\mu j_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} j_\nu).$$

Somit nimmt die Harmonizitätsbedingung  $\square x^a$  für die reellen Funktionen  $x^a$  die folgende Form an

$$\square x^a = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu x^a) = 0 \quad (3.56)$$

Nun ist aber  $\partial_\mu x^a = \delta^a_\mu$ . Damit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{a\nu}) = 0 \quad (3.57)$$

Die Differentiation wird mit Hilfe der Produktregel ausgeführt. Wir wissen schon, daß  $\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \sqrt{-g} = \Gamma^\mu_{\nu\mu}$  ist. Andererseits verschwindet die kovariante Ableitung des inversen metrischen Tensors ebenso wie die des metrischen

Tensors selbst, sodaß  $\partial_\nu g^{a\nu} + \Gamma^a_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\nu} g^{a\mu} \equiv g^{a\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Deshalb folgt aus Gl.(3.57), daß

$$0 = g^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left( \partial_\nu g_{\rho\mu} - \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\mu\nu} \right)$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach  $x^\sigma$  und vernachlässigen dabei Glieder höherer Ordnung in  $g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$ . Dies gibt

$$g^{\mu\nu} \left( \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \frac{1}{2} \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (3.58)$$

Vertauschen der Indizes  $\rho, \sigma$  liefert

$$g^{\mu\nu} \left( \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (3.59)$$

Addieren wir die beiden Gleichungen (3.58) und (3.59), so sehen wir, daß in Gl. (3.48) die letzten drei Terme der linken Seite wie gewünscht wegfallen.

Andererseits entwickelt man

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{m\nu\nu} - \bar{f}^{\mu\nu} \quad (3.60)$$

und daher ist die Gleichung (3.57) der Nebenbedingung  $\partial_\nu \bar{f}^{\mu\nu} = 0$  äquivalent.

Die Entwicklungsformel (3.60) bekommt man aus schon bekannten Formeln für Ableitungen von  $\sqrt{-g}$ , oder auch mit Hilfe folgender Identität. Diese Identität ist sehr oft nützlich, daher soll ihre Nutzung kurz illustriert werden.

Ist  $A$  eine nichtsinguläre diagonalisierbare Matrix, so gilt

$$\det A = e^{Sp \ln A} \quad (3.61)$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \exp \left( \frac{1}{2} Sp \ln [-\eta(1 + \eta^{-1} f + \dots)] \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} Sp \ln(-\eta) + \frac{1}{2} Sp \ln(1 + \eta^{-1} f + \dots) \right) \\ &= \sqrt{\det(-\eta)} \left( 1 + \frac{1}{2} Sp(\eta^{-1} f) + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} f^\rho{}_\rho + \dots \end{aligned}$$

Die Zerteilung  $Sp \ln ab = Sp \ln a + Sp \ln b$  ist auch für Matrizen  $a, b$  erlaubt, sie ist der Formel  $\det(ab) = \det(a) \det(b)$  äquivalent.

Andererseits liefert die Bildung des inversen metrischen Tensors  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}$ . Setzt man dies zusammen, so erhält man Gl.(3.60).



# Chapter 4

## Maxwell- und Yang Mills Theorie

### 4.1 Maxwell- und Yang-Mills Gleichungen

#### 4.1.1 Feldgleichungen im Minkowskiraum

Wir suchen nun nach Feldgleichungen für das Vektorpotential in Eichfeldtheorien im Minkowskiraum

Sie sollen wiederum aus einem Variationsprinzip abgeleitet werden. Wir schreiben

$$S = S_{geom} + S_{Materie} \quad (4.1)$$

Dabei wird  $S_{geom}$  nur vom Vektorpotential abhängen, während  $S_{Materie}$  zusätzlich von den Wellenfunktion für quantenmechanisch beschriebene Materie abhängen wird.

Die Einstein'schen Feldgleichungen sind nicht brauchbar, weil ein Analog des Ricci Tensors nicht definiert werden kann. In einer allgemeinen Eichfeldtheorie sind die Indizes  $\alpha$  und  $\mu$  im Feldstärketensor  $F_{\beta\mu\nu}^\alpha$  von verschiedener Art, daher kann man sie nicht kontrahieren.

$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$  bildet den Vektorraum  $V_x$  in sich ab. Da für lineare Operatoren in endlichdimensionalen Vektorräumen die Spur definiert ist, so ist der Ausdruck

$$S_{geom} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x Sp(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(x)) \quad (4.2)$$

$$S_{Materie} = \int d^4x L_x \quad (4.3)$$

wohldefiniert und Lorentzinvariant.  $g$  ist eine zunächst unbestimmte Konstante. Im Fall der Maxwelltheorie wird sie sich als elektrische Elementarladung entpuppen.

Gehen wir zu einer Beschreibung durch Matrizen über, so erhalten wir

$$S_{geom} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x Sp(\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}(x)),$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\mu. \quad (4.4)$$

Wir bestimmen nun die zugehörigen Feldgleichungen. Wir definieren den Strom  $\mathbf{j}_\mu(x)$  als Variationsableitung von  $S_{Materie}$  unter Variationen des Vektorpotentials

$$\delta S_{Materie} = Sp(\mathbf{j}^\mu \delta \mathbf{A}_\mu) \quad (4.5)$$

$$j^\beta{}_\alpha{}^\mu(x) = \frac{\partial L_x}{\partial A^\alpha{}_{\beta\mu}(x)}. \quad (4.6)$$

Benutzen wir die Antisymmetrie in  $\mu$  und  $\nu$ , und die Möglichkeit, Indizes herauf und herunter zu ziehen, so berechnet sich die Variation von  $S_{geom}$  bei Variation von  $\mathbf{A}_\mu$  wie folgt

$$\begin{aligned} \delta S_{geom} &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x Sp(\mathbf{F}^{\mu\nu}(x) \delta \mathbf{F}_{\mu\nu}(x)) \\ &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x Sp(\mathbf{F}^{\mu\nu}(x) (\partial_\mu \delta \mathbf{A}_\nu + \delta \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\mu \delta \mathbf{A}_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu))) (x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nun führen wir im ersten Term eine partielle Integration aus, und benutzen wieder die Antisymmetrie von  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  in  $\mu, \nu$ , sowie die zyklische Vertauschbarkeit von Faktoren unter der Spur. Dies liefert

$$\begin{aligned} \delta S_{geom} &= \frac{1}{g^2} \int d^4x Sp((\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{A}_\mu(x) \mathbf{F}^{\mu\nu}(x) - \mathbf{F}^{\mu\nu}(x) \mathbf{A}_\mu(x)) \delta \mathbf{A}_\nu), \\ &= \frac{1}{g^2} \int d^4x Sp(D_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} \delta \mathbf{A}_\nu). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wie erinnerlich ist die kovariante Ableitung des Feldstärketensors wie folgt definiert

$$(D_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv \mathbf{F}^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\lambda} \quad (4.9)$$

$$= (\partial_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu} + [\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{F}_{\mu\nu}])^\alpha{}_\beta. \quad (4.10)$$

Verlangen wir nun, daß die Variation  $\delta S = 0$  unter beliebigen Variationen des Vektorpotentials, so erhalten wir die Feldgleichung in der Form

$$-\frac{1}{g^2} D_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}(x) = \mathbf{j}^\nu(x). \quad (4.11)$$

Dies sind die Yang-Mills Feldgleichungen für allgemeine Eichfeldtheorien.

Im Fall der Elektrodynamik vereinfacht sich die Gleichung. Hier ist  $\mathbf{A}_\mu(x)$  eine  $1 \times 1$ -Matrix. Sie kommutiert daher mit  $\mathbf{F}_{|\mu\nu}(x)$ , sodaß die kovariante Ableitung des Feldstärketensors gleich der gewöhnlichen ist. Somit mit  $g = e = \text{Elementarladung}$  (wir schreiben  $F$  statt  $\mathbf{F}$  für  $1 \times 1$  Matrizen)

$$-\frac{1}{e} \partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu(x). \quad (4.12)$$

Unsere Größen  $F_{\mu\nu}$  und  $A_\mu$  unterscheiden sich um einen Faktor  $ie$  von den in der Elektrodynamik üblichen Größen, und  $j^\mu$  unterscheidet sich deshalb um einen Faktor  $(ie)^{-1}$ . Wir erhalten also die bekannten inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind automatisch erfüllt, weil

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

als Spezialisierung von Gl.(4.4)



# Chapter 5

## Quantentheorie der Eichfelder

### 5.1 Erinnerung an die Prinzipien der Quantenmechanik

Der Zustand eines quantenmechanischen Systems zu einer Zeit  $t$  wird durch einen Zustandsvektor  $\Psi_t \in \mathcal{H}$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  bestimmt. Ist  $c$  ein Phasenfaktor, d.h. eine komplexe Zahl vom Betrag  $|c| = 1$ , so beschreiben  $\Psi_t$  und  $c\Psi_t$  denselben Zustand.

Observablen werden selbstadjungierte lineare Operatoren  $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$  zugeordnet. Insbesondere ist die Energie eine Observable. Der ihr zugeordnete Operator  $H$  heißt Hamiltonoperator. Er bestimmt die Zeitentwicklung eines Zustandsvektors

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t = H \Psi_t. \quad (5.1)$$

Kanonisch konjugierten Variablen der klassischen Theorie werden nicht miteinander vertauschende Operatoren zugeordnet.

Betrachten wir als Beispiel ein quantenmechanisches System aus  $N$  nicht-relativistischen spinlosen Teilchen. In der Schrödinger-Darstellung wird der Zustandsvektor  $\Psi_t$  durch eine über  $\mathbf{R}^{3N}$  quadratintegrierbare komplexe Funktion  $\Psi_t(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  der  $N$  Koordinaten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  dargestellt. Sind die Teilchen ununterscheidbar, so gibt es noch eine Nebenbedingung. Die Wellenfunktion  $\Psi_t$  muß unter Vertauschen der  $N$  Koordinaten invariant sein, denn spinlose Teilchen sind Bosonen. Das Skalarprodukt zweier Vektoren im Hilbertraum ist

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{N!} \int d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \bar{\Phi}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Dabei steht  $\bar{\Phi}$  für die komplex konjugierte Funktion.

Es ist wohl zu beachten, daß die Wellenfunktion nur von den Koordinaten und nicht etwa von Koordinaten und Impulsen abhängt. Die Impulse werden durch Differentialoperatoren dargestellt,

$$\mathbf{p}_a = \frac{\hbar}{i} \nabla_a \quad \text{wobei} \quad \nabla_a = \left( \frac{\partial}{\partial x_a}, \frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial z_a} \right) \quad (5.2)$$

ist, falls  $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$ ,  $a = 1 \dots N$ . Die Koordinaten der Teilchen werden zu Multiplikationsoperatoren. Alle Observablen sind Funktionen der Koordinaten und Impulse. Observable, die nur von den Koordinaten abhängen, werden zu Multiplikationsoperatoren. Nehmen wir eine Zweiteilchenwechselwirkung an, so wird die potentielle Energie ein Multiplikationsoperator, und der Hamiltonoperator hat die Gestalt

$$H = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2m} \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b:a \neq b} V(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b).$$

Es ist im allgemeinen nicht wahr, daß die quantenmechanische Observable eindeutig durch den klassischen Ausdruck gegeben ist, denn es kann wegen der Nichtvertauschbarkeit Ordnungsprobleme geben. Manchmal geben physikalische Betrachtungen Einschränkungen. Beispielsweise ist in einem speziell relativistischen System der Energie-Nullpunkt festgelegt. Dies verfügt über eine sonst unbestimmte additive Konstante.

## 5.2 Freies elektromagnetisches Feld im kontinuierlichen Raum

Wir betrachten das elektromagnetische Feld in einem Raum ohne Ladungen. Die Komponenten  $E_i(\mathbf{r})$  des elektrischen Felds und die Komponenten  $B_i(\mathbf{r})$  des magnetischen Felds sind Observable. Ihnen müssen daher selbstadjungierte Operatoren zugeordnet werden. Genauer gesagt gibt es keine Messung exakt an einem Punkt. Es braucht daher nur  $\int d^3\mathbf{r} \sum_i f_i(\mathbf{r}) E^i(\mathbf{r})$  für Testfunktionen  $f_i(\mathbf{r})$  ein guter Operator zu sein. (Wir können uns vorstellen, daß  $f_i(\mathbf{r})$  nur in einer kleinen Umgebung eines Punkts von 0 verschieden sind). Man nennt deshalb  $E^i(\mathbf{r})$  eine operatorwertige Distribution. Dies erklärt, warum in den Vertauschungsrelationen  $\delta$ -Funktionen vorkommen dürfen.

In diesem Abschnitt benutzen wir die in der Elektrodynamik üblichen Konventionen für  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und das Vektorpotential  $\mathbf{A}$ . Wie verschiedentlich betont wurde, weichen diese Konventionen von den im Hauptteil dieses Buchs benutzten Konventionen um Faktoren  $i$  und Ladung  $e$  ab. Dies wird später zu berücksichtigen sein.

### 5.2.1 Vertauschungsrelationen von $E$ und $B$

Wir betrachten zunächst die möglichen Vertauschungsrelationen zwischen  $E_i(\mathbf{r})$  und  $B_j(\mathbf{r}')$ .

Beobachtungen an zwei relativ raumartigen Punkten der Raum-Zeit dürfen sich nicht gegenseitig stören. Entsprechende Observable müssen daher kommutieren. Wir betrachten hier eine feste Zeit  $t$ . Verschiedene Punkte des Raums zu einer Zeit sind immer raumartig zueinander. Daher müssen die Kommutatoren verschwinden, wenn  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ . Der Kommutator wird daher zu  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  oder einer Ableitung davon proportional sein.

Wir nehmen weiter an, daß keine fundamentalen Konstanten mit einer nichtverschwindenden Massendimension in die Vertauschungsrelation eingehen. Die  $\delta$ -Funktion kann im Prinzip mit einer bei  $\mathbf{r}$  lokalisierten Observablen  $O(\mathbf{r})$  multipliziert erscheinen. In natürlichen Einheiten  $\hbar = 1, c = 1$  haben  $E_i$  und  $B_j$  die Dimension  $[\text{Masse}]^2$ , und die  $\delta$ -Funktion verhält sich wie eine Größe der Dimension  $[\text{Masse}]^3$ , denn  $\delta^{(3)}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^{-3}\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ . Entsprechend verhalten sich die ersten Ableitungen  $\nabla\delta((\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$  wie eine Größe der Dimension  $[\text{Masse}]^4$ . Nun haben wir aber außer dem (von  $\mathbf{r}$  unabhängigen) 1-Operator mit Dimension  $[\text{Masse}]^0$  keine Observable mit Dimension  $[\text{Masse}]^n$ ,  $n < 2$  zur Verfügung. Daher kommt nur eine 1-te Ableitung der  $\delta$ -Funktion multipliziert mit dem 1-Operator in Frage. Den 1-Operator schreibt man üblicherweise nicht explizit.

Schließlich muß man noch die Rotations- und Spiegelungsinvarianz berücksichtigen. Das elektrische Feld ist ein Vektor, und das magnetische Feld ein Axialvektorfeld. Die Kovarianzbedingung läßt dann nur die folgende Möglichkeit

$$[E_i(\mathbf{r}), B_j(\mathbf{r}')] = -\frac{\hbar}{i} \sum_k \epsilon_{ijk} \nabla_k \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} [E_i(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r}')] &= 0, \\ [B_i(\mathbf{r}), B_j(\mathbf{r}')] &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei ist  $\epsilon_{ijk}$  der vollständig antisymmetrische Tensor in 3 Dimensionen mit  $\epsilon_{123} = 1$ . Alle Summationen laufen von 1 bis 3. Der  $\nabla$ -Operator differenziert nach  $\mathbf{r}$ .  $\hbar$  ist eine zunächst unbekanntes Konstante. Nimmt man das Adjungierte der Operatoren auf beiden Seiten, so sieht man, daß  $\hbar$  reell sein muß. Als Konsequenz der Theorie wird sich ergeben, daß die Energie von Photonen der Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$  gleich  $\hbar\omega$  ist. Daher ist  $2\pi\hbar$  das Planck'schen Wirkungsquant.

## 5.2.2 Wellenfunktion für freie elektromagnetische Felder

Ein Zusammenhang auf dem 3-dimensionalen Raum liefert nach Wahl einer gleitenden Basis ein Vektorpotential mit Raumkomponenten  $A_i(\mathbf{r})$ . Wegen der in diesem Abschnitt gewählten Konventionen ist  $A_i(\mathbf{r})$  reell. Mit unseren Standardkonventionen wäre  $A_i(\mathbf{r})$  eine antihermitesche  $1 \times 1$ -Matrix, also eine rein imaginäre Zahl.

Wir nehmen  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  als Ersatz für Koordinaten  $\mathbf{r}_a$  in einem System von  $N$  Teilchen. Das Argument  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$  substituiert für die Teilchen-Nummer  $a = 1 \dots N$ , und die drei Komponenten  $A_i(\mathbf{r})$  von  $\mathbf{A}$  substituieren für die drei Komponenten  $\mathbf{r}_a$  von  $\mathbf{r}$ . Dementsprechend setzen wir die Wellenfunktion als Funktion

$$\Psi_t(A)$$

dieser "Koordinaten" an. Sie hängt von  $A_i(\mathbf{r})$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) für alle  $\mathbf{r}$  ab, ist also Funktion von Funktionen. Es wird sich gleich zeigen, daß  $\Psi_t(A)$  eine eichinvariante Funktion von  $A$  sein muß. Wir können sie also auch als *Funktion  $\Psi_t(\mathcal{U})$  des Zusammenhangs* auffassen.

Da

$$B_j(\mathbf{r}) = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \nabla_k A_l(\mathbf{r})$$

werden aus den Magnetfeldkomponenten  $B_j(\mathbf{r})$  Multiplikationsoperatoren. Wir suchen nun einen Differentialoperator  $E_i$  so daß die Vertauschungsrelationen (5.4) erfüllt sind. Dies läßt sich durch die Wahl

$$E_i(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{r})} \quad (5.5)$$

erreichen. Die hier auftretende Funktionalableitung  $\delta/\delta A_i(\mathbf{r})$  ist wie folgt definiert. Ihre Anwendung liefert eine verallgemeinerte Funktion (Distribu-



tion) von  $\mathbf{r}$ . Es ist also nur

$$h \cdot \frac{\delta}{\delta A} \equiv \int \delta^3 \mathbf{r} \sum_i h_i(\mathbf{r}) \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{r})}$$

für Testfunktionen  $h_i(\mathbf{r})$  eine "gute Ableitung". Sie wirkt wie folgt auf Funktionen von  $A$ .

$$h \cdot \frac{\delta}{\delta A} \Psi(A) = \frac{d}{d\tau} \Psi(A + \tau h)|_{\tau=0}. \quad (5.6)$$

Die Notation ist die offensichtliche,

$$(A + \tau h)_i(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{r}) + \tau h_i(\mathbf{r}).$$

Man kann formal  $\delta/\delta A_i(\mathbf{r}')$  selbst durch Grenzübergang  $h_j(\mathbf{r}) \mapsto \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  bekommen. Die Definition der Funktionalableitung ist die  $\infty$ -dimensionale Version der Richtungsableitung in einem  $n$ -dimensionalen Raum von Vektoren  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\tau} f(\mathbf{x} + \tau \mathbf{h})|_{\tau=0}. \quad (5.7)$$

### 5.2.3 Gauss' Gesetz und Eichinvarianz der Wellenfunktion

In der Elektrodynamik gilt bei Abwesenheit von elektrischen Ladungen das Gauss' sche Gesetz in der Form

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.8)$$

Dies ist eine Nebenbedingung der klassischen Elektrodynamik an die möglichen Zustände zu einer Zeit  $t = 0$ .

In der Quantentheorie wird dementsprechend gelten müssen, daß für alle physikalisch möglichen quantenmechanischen Zustände  $\Psi$

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Psi(A) = 0. \quad (5.9)$$

Wir zeigen, daß daraus die Eichinvarianz der Wellenfunktion eines beliebigen Zustands folgt,

$$\Psi(A) = \Psi(A + \nabla f) \quad (5.10)$$

für beliebige Testfunktionen  $f$  von  $\mathbf{r}$ . Die Wellenfunktion kann deshalb in der freien Elektrodynamik auch als Funktion des Magnetfelds  $\mathbf{B}$  betrachtet

werden. Wir werden die Formeln für den Grundzustand und für Zustände mit endlich vielen Photonen später explizit angeben.

$\mathbf{E}$  ist eine operatorwertige Distribution, und das Gauss Gesetz (5.9) ist daher gleichbedeutend mit der Gültigkeit der folgenden Gleichung für beliebige Testfunktionen  $f$  von  $\mathbf{r}$ .

$$0 = \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Psi(A).$$

Durch partielle Integration, Einsetzen des Differentialoperators, und Erinnerung an die Definition (5.6) der Funktionalableitung lässt sich dies umschreiben (Summation über  $i = 1, 2, 3$  versteht sich).

$$\begin{aligned} 0 &= - \int d^3\mathbf{r} \nabla_i f(\mathbf{r}) E_i(\mathbf{r}) \Psi(A) \\ &= \int d^3\mathbf{r} \nabla_i f(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{r})} \Psi(A) \\ &= - \frac{d}{d\tau} \Psi(A + \tau \nabla f) |_{\tau=0}. \end{aligned}$$

Dies sagt aus, daß die Wellenfunktion unter infinitesimalen Eichtransformationen invariant ist. Die Invarianz unter endlichen Transformationen folgt daraus.

Die Betrachtungen haben bisher formalen Charakter, da wir nicht darauf geachtet haben, daß alle Größen auch mathematisch wohldefiniert sind. Später werden wir Theorien auf einem Raumgitter betrachten. Dort ist alles mathematisch wohldefiniert, und die Eichinvarianz der Wellenfunktion wird auch im nichtabelschen Fall noch gelten. Für die freie Elektrodynamik im Kontinuum werden wir Zustandswellenfunktionen angeben, die manifest eichinvariant sind

### 5.2.4 Hamiltonoperator und Schrödingergleichung

In der klassischen Elektrodynamik ist die Energie des elektromagnetischen Felds gleich  $\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ . Daher setzen wir für den Hamiltonoperator des freien elektromagnetischen Felds

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int (E_i(\mathbf{r})^2 + B_i(\mathbf{r})^2) - const \quad (5.11)$$

Die additive Konstante wird durch die Forderung bestimmt werden, daß der Grundzustand (das Vakuum) die Energie 0 haben soll. Es gibt ein Operator-Ordnungsproblem, das hier noch nicht manifest ist, das aber sehr bald sichtbar werden wird. Dieses Problem ist hier wegen des quadratischen Charakters des Ausdrucks von relativ harmloser Form, und führt nur zu einer Willkür in Form einer möglicherweise unendlichen additiven Konstanten. Es wird sich zeigen, daß man über die Operatorordnung so verfügen kann, daß der resultierende Ausdruck für  $H$  mathematisch wohldefiniert ist, und die additive Konstante zu Null wird.

Setzen wir den Ausdruck für den Differentialoperator  $\mathbf{E}$  und für das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ein, so erhalten wir

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int \left( -\hbar^2 \frac{\delta^2}{\delta A_i(\mathbf{r}) \delta A_i(\mathbf{r})} + [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})]_i^2 \right) - const.$$

Damit können wir die zeitabhängige Schrödingergleichung aufstellen. Deren Lösung zu finden, ist allerdings bisher noch kein wohldefiniertes mathematisches Problem. Wir haben nicht genau gesagt, aus welcher Art von Funktionen  $\Psi(A)$  der Hilbertraum  $\mathcal{H}$  physikalischer Zustände bestehen soll, und wir haben das Skalarprodukt darin bisher nicht angegeben. Außerdem ist der Hamiltonoperator noch nicht sauber als ein selbstadjungierter Operator in diesem Raum definiert worden. Physiker sind es gewohnt, mit solchen Verhältnissen klarzukommen. Wir werden alle Probleme gleichzeitig lösen. Der Hilbertraum wird als Vervollständigung eines Raums  $\mathcal{H}^0$  von Funktionen  $\Psi(A)$  bezüglich eines positiv definiten Skalarprodukts konstruiert. Das Skalarprodukt wird angegeben, und der Raum wird von explizit angegebenen Funktionen aufgespannt, die Eigenvektoren zu einem in dem Raum definierten Hamiltonoperator mit reellen Eigenwerten sind. Der Hamiltonoperator ist eine Präzisierung des oben angegebenen formalen Ausdrucks. Damit ist eine Quantentheorie des freien elektromagnetischen Felds konstruiert.

Wir haben damit eine Lösung des uns gestellten Problems gefunden, aber es erhebt sich die Frage der Eindeutigkeit. Man weiß heute aus Arbeiten von Buchholz, daß dies nicht die einzige Lösung ist. Unser Raum  $\mathcal{H}^0$  wird von Zuständen mit endlich vielen Photonen aufgespannt. Die Algebra des Observablen der freien Quantenelektrodynamik, die wir (im wesentlichen) angegeben haben, besitzt weitere Darstellungen, die den Forderungen positiver Energie und Lokalität genügen. Grob gesprochen enthalten sie un-

endlich viele sehr weiche Photonen. Die Lorentzinvarianz ist in diesen andern Darstellungen spontan gebrochen.

Die Eigenzustände des Hamiltonoperators sind Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$H\Psi = E\Psi. \quad (5.12)$$

Dies ist eine Funktionaldifferentialgleichung, d.h. eine partielle Differentialgleichung in  $\infty$  vielen Variablen. Sie läßt sich aber dennoch leicht lösen, da sie sich wie die Schrödingergleichung für harmonische Oszillatoren behandeln läßt.

Um die Translationsinvarianz im Raum auszunutzen, führt man zunächst eine Fouriertransformation aus.

$$A_i(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\mathbf{k} \tilde{A}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (5.13)$$

Mit Funktionalableitungen rechnet man analog wie mit partiellen Ableitungen, insbesondere gilt die Kettenregel, siehe Fußnote weiter unten. Man findet damit

$$H = \sum_{i=1}^3 \int d^3\mathbf{k} \left( -\hbar^2 \frac{\delta^2}{\delta \tilde{A}_i(\mathbf{k}) \delta \tilde{A}_i(-\mathbf{k})} + [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})]_i [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k})]_i \right) - const.$$

Im folgenden lassen wir die Tilde auf  $\tilde{A}_i(\mathbf{k})$  weg, da keine Verwirrung auftreten kann.

Da  $A_i(\mathbf{r})$  reell ist, gilt für die Fourierkomponenten

$$A_i(-\mathbf{k}) = \overline{A_i(\mathbf{k})}.$$

Zerteilen wir in Real- und Imaginärteil, so sind diese symmetrisch bzw. antisymmetrisch

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{k}) &= A_i^R(\mathbf{k}) + iA_i^I(\mathbf{k}), \\ A_i^R(-\mathbf{k}) &= A_i^R(\mathbf{k}), \\ A_i^I(-\mathbf{k}) &= -A_i^I(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die komplexe Funktionalableitung ist durch

$$\frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{k})} = \left( \frac{\delta}{\delta A_i^R(\mathbf{k})} - i \frac{\delta}{\delta A_i^I(\mathbf{k})} \right).$$

definiert. Hieraus ergeben sich die Vertauschungsrelationen

$$\left[ \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{k})}, A_j(\mathbf{k}') \right]_- = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Wegen der Symmetrie  $A_i^{R,I}(-\mathbf{k}) = \pm A_i^{R,I}(\mathbf{k})$  ergeben die Ableitungen nach  $A^R$  und  $A^I$  zunächst auch Beiträge proportional  $\delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ , diese kürzen sich aber heraus. Da man in der Differentialrechnung effektiv nur diese Vertauschungsrelationen braucht, kann man rechnen als seien  $A_i(\mathbf{k})$  und  $A_i(-\mathbf{k})$  reell und unabhängig.

Zum Zweck der weiteren Analyse zerteilen wir die Fourierkomponenten  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  des Vektorpotential in ihre *transversalen und longitudinalen Anteile*

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{k}) + \mathbf{A}^{long}(\mathbf{k}).$$

Nach Definition hat der longitudinale Anteil die Richtung von  $\mathbf{k}$ , während  $\mathbf{A}^{tr}(\mathbf{k})$  auf  $\mathbf{k}$  senkrecht steht,

$$\mathbf{k} \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{k}) = 0.$$

Man führt nun für jedes  $\mathbf{k}$  eine orthonormale Basis aus Vektoren

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\mathbf{k}), \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{k}), \boldsymbol{\epsilon}^{(3)}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

ein. Wir wählen  $\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ ,  $\lambda = 1, 2$  komplex, und so daß

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(-\mathbf{k}) = \overline{\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})}.$$

$\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})$  sind Einheitsvektoren, die zueinander und auf  $\mathbf{k}$  senkrecht stehen, d.h.

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \overline{\boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k})} = \delta_{\lambda\mu}. \quad (5.15)$$

Wir entwickeln  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  nach dieser Basis,

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) A^\lambda(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} A^{long}(\mathbf{k}).$$

Dabei ist  $A^{long}$  der Betrag von  $\mathbf{A}^{long}$ . Unter einer Eichtransformation geht

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k}\Lambda(\mathbf{k}).$$

Es wird hierdurch nur der longitudinale Anteil von  $\mathbf{A}$  verändert. Ihm kann durch eine Eichtransformation ein beliebiger Wert gegeben werden. Der transverse Anteil ist eichinvariant. Da die Wellenfunktion  $\Psi(A)$  eichinvariant ist, kann sie nur vom transversalen Anteil  $\mathbf{A}^{tr}(\mathbf{k})$  des Vektorpotentials abhängen. Da das Vektorpotential bis auf eine Eichtransformation durch das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  bestimmt ist, ist  $\mathbf{A}^{tr}$  durch  $\mathbf{B}$  bestimmt. Wir rechnen jetzt  $H$  in die Komponenten  $A^\lambda, A^{long}$  um. Nach den Regeln der Vektorrechnung ist

$$[\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})] \cdot [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k})] = \mathbf{k}^2 \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}^{tr}(-\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2 \sum_{\lambda=1}^2 A^\lambda(\mathbf{k}) A^\lambda(-\mathbf{k}). \quad (5.16)$$

$H$  wirkt auf Wellenfunktionen  $\Psi$ , die von  $A^{long}$  nicht abhängen. Ableitungen nach  $A^{long}$  können daher weggelassen werden. Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 d^3 \mathbf{k} \left( \frac{\delta^2}{\delta A^\lambda(\mathbf{k}) \delta A^\lambda(-\mathbf{k})} + \omega(\mathbf{k})^2 A^\lambda(\mathbf{k}) A^\lambda(-\mathbf{k}) \right) + const. \\ \omega(\mathbf{k}) &= |\mathbf{k}| \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die eichabhängige Größe  $A^{long}$  tritt in diesem Ausdruck nicht auf.  $A^\lambda(-\mathbf{k})$  ist das komplex konjugierte zu  $A^\lambda(\mathbf{k})$ .

Es ist instruktiv, den Ausdruck (5.17) für den Hamiltonoperator mit dem Hamiltonoperator für einen anisotropen harmonischen Oszillator mit Masse  $m = 1$  in  $d$  Dimensionen zu vergleichen,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d \left( -\hbar^2 \nabla_\alpha \nabla_{-\alpha} + \omega_\alpha^2 x_\alpha x_{-\alpha} \right), \quad (5.18)$$

$$x_{-\alpha} \equiv \overline{x_\alpha}. \quad (5.19)$$

Da die Koordinaten hier reell sind, ist tatsächlich  $x_{-\alpha} = x_\alpha$ . Statt der durch  $\alpha$  nummerierten endlichen Anzahl von Variablen  $x_\alpha$  haben wir im Ausdruck (5.17) eine durch  $(\mathbf{k}, \lambda)$  nummerierte unendliche Anzahl von Variablen  $A^\lambda(\mathbf{k})$ . Ansonsten sind die Ausdrücke analog. Die Schrödingergleichung kann daher mit denselben Methoden wie für harmonische Oszillatoren gelöst werden. Ein harmonischer Oszillator in  $n$  Dimensionen ist mathematisch zu  $n$  harmonischen Oszillatoren in 1 Dimension äquivalent, denn der Hamiltonoperator lässt sich als Summe von miteinander kommutierenden Hamiltonoperatoren für 1-dimensionale harmonische Oszillatoren schreiben. Für jeden davon führt man Auf- und Absteigeoperatoren  $a^*$  und  $a$  ein. In unserem Problem werden

diese als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bezeichnet. Es wird sich zeigen, daß sie Photonen mit Impuls  $\hbar\mathbf{k}$  und Polarisationszustand  $\lambda$  erzeugen und vernichten.

### 5.2.5 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für freie Photonen

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren werden wie folgt eingeführt

$$a_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \omega(\mathbf{k})^{1/2} A^\lambda(\mathbf{k}) + i\omega(\mathbf{k})^{-1/2} \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta A^\lambda(-\mathbf{k})} \right), \quad (5.20)$$

$$a_\lambda^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \omega(\mathbf{k})^{1/2} A^\lambda(-\mathbf{k}) - i\omega(\mathbf{k})^{-1/2} \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta A^\lambda(\mathbf{k})} \right). \quad (5.21)$$

Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen ( $\lambda, \mu = 1, 2$ )

$$[a_\lambda^*(\mathbf{k}), a_\mu(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda,\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.22)$$

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_\mu(\mathbf{k}')] = 0, \quad (5.23)$$

$$[a_\lambda^*(\mathbf{k}), a_\mu^*(\mathbf{k}')] = 0. \quad (5.24)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\begin{aligned} \hbar\omega(\mathbf{k}) a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) &= -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta A^\lambda(\mathbf{k}) \delta A^\lambda(-\mathbf{k})} + \frac{\omega(\mathbf{k})^2}{2} A^\lambda(\mathbf{k}) A^\lambda(-\mathbf{k}) \\ &\quad - \frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2} \left( A^\lambda(\mathbf{k}) \frac{\delta}{\delta A^\lambda(\mathbf{k})} - A^\lambda(-\mathbf{k}) \frac{\delta}{\delta A^\lambda(-\mathbf{k})} \right) \\ &\quad - \frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta A^\lambda(\mathbf{k})}, A^\lambda(\mathbf{k}) \right]_-. \end{aligned}$$

Der zweite Term ist antisymmetrisch in  $\mathbf{k}$  und trägt daher zum Integral über  $\mathbf{k}$  nichts bei. Der letzte Term kann mit den oben angegebenen Vertauschungsrelationen ausgewertet werden. Es ergibt sich

$$H = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega(\mathbf{k}) \left( a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right) + const. \quad (5.25)$$

Ein unschöner Zug dieses Ausdrucks ist das Auftreten der unendlichen Summe der Nullpunktsenergien von kontinuierlich vielen Oszillatoren,

$\int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} \hbar \omega(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(0)$ . Dies bedeutet, daß man von dem durch formales Ersetzen der Felder durch Operatoren erhaltenen formalen Ausdruck für die Energie eine unendliche Konstante abziehen muß, um einen sinnvollen Hamiltonoperator zu erhalten. Wir verfügen über die Konstante so, daß

$$H = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} \hbar \omega(\mathbf{k}) a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \quad (5.26)$$

Es wird sich zeigen, daß sich damit die Energie des Vakuums zu Null ergibt, wie die relativistische Invarianz dies fordert. In der speziellen Relativitätstheorie ist bekanntlich die Wahl des Energie-Nullpunkts nicht beliebig, da sich Energie unter Lorentztransformationen wie die 0-te Komponente des Energie-Impuls-Vierervektors transformiert. Das Vakuum, interpretiert als Zustand ohne Teilchen, muß Lorentz-invariant sein, und damit auch seine Energie. Das ist nur möglich, wenn sein Energie-Impuls-Vierervektor verschwindet.

Das Problem der unendlichen Nullpunktsenergie kann auch als ein Aspekt des schon erwähnten Operatorordnungsproblems verstanden werden, das auftritt, wenn man durch formales Ersetzen von kanonischen Variablen durch Operatoren Hamiltonfunktionen in Hamiltonoperatoren übersetzt. Dieses Problem tritt schon in der nichtrelativistischen Quantenmechanik auf. Man kann die in den Hamiltonoperator eingehenden elektrischen und magnetischen Felder als Linearkombinationen der durch Gl. (5.21) definierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren betrachten. Die expliziten Formeln werden gleich noch angegeben. Die Operatoren  $a$  und  $a^*$  erscheinen dann im Hamiltonoperator miteinander multipliziert, sie kommutieren aber nicht miteinander. Man muß also noch eine Verfügung über die Anordnung treffen. Eine solche Verfügung ist die sogenannte *Normalordnung*.

### 5.2.6 Normalprodukte

Die Definition normalgeordneter Operatorprodukte lautet wie folgt. Man drückt zunächst die Observablen durch Summen von Produkten von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus. Das normalgeordnete Produkt ist dadurch definiert, daß alle Erzeugungsoperatoren als links von allen Vernichtungsoperatoren stehend zu betrachten sind. Es ist üblich, Normalprodukte durch das Symbol  $::$  anzuzeigen. Dieses Symbol ist als Umordnungsvorschrift zu lesen. Zwischen den Doppelpunkten ist die Reihenfolge von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren nicht durch die Reihenfolge bestimmt, in der



man die Operatoren hinschreibt, sondern durch die eben angegebene Regel. Also ist z.B.

$$: a_\lambda^*(\mathbf{k}_1) a_\mu(\mathbf{k}_2) : = : a_\mu(\mathbf{k}_2) a_\lambda^*(\mathbf{k}_1) : = a_\lambda^*(\mathbf{k}_1) a_\mu(\mathbf{k}_2).$$

Für unser elektromagnetisches Feld im Schrödingerbild (oder zur Zeit 0) ergibt sich die Darstellung durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in folgender Form <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^2 i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2}} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left( a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \\ B_i(\mathbf{r}) &= \left( \nabla \times \mathbf{A}^{tr} \right)_i(\mathbf{r}), \\ \mathbf{A}^{tr} &= \sum_{\lambda=1}^2 i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\mathbf{k})}} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left( a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Unter Benutzung der Definition der Normalordnung kann der Hamiltonoperator (5.26) in der Form

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int d^3\mathbf{r} : \left( E_i(\mathbf{r})^2 + B_i(\mathbf{r})^2 \right) := \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega(\mathbf{k}) a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}). \quad (5.28)$$

geschrieben werden.

### 5.2.7 Lösung der Schrödingergleichung

Der Hamiltonoperator (5.26) lässt sich als Summe - genauer Integral - von miteinander vertauschenden Hamiltonoperatoren für 1-dimensionale harmonische Oszillatoren schreiben

$$H = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} H_{\lambda,\mathbf{k}}, \quad (5.29)$$

$$H_{\lambda,\mathbf{k}} = \hbar\omega(\mathbf{k}) a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}). \quad (5.30)$$

<sup>1</sup>Man benutzt die Kettenregel. Es ist  $A^\lambda(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_i \int d^3\mathbf{r} \bar{\epsilon}_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) A_i(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  für  $\lambda = 1, 2$ ,  $\epsilon^{(3)} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  und  $A^3 = A^{long}$ . Daher wird nach der Kettenregel

$$\frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{r})} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3\mathbf{k} \frac{\delta A^\lambda(\mathbf{k})}{\delta A_i(\mathbf{r})} \frac{\delta}{\delta A^\lambda(\mathbf{k})} = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\epsilon}_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \frac{\delta}{\delta A^\lambda(\mathbf{k})}.$$

Der Term  $\lambda = 3$  kann weggelassen werden, da die Wellenfunktion nicht von  $A^{long} = A^3$  abhängt.

Wir können daher seine Eigenfunktionen als simultane Eigenfunktionen aller  $H_{\lambda, \mathbf{k}}$  bestimmen. Da dies Hamiltonoperatoren für 1-dimensionale harmonische Oszillatoren sind, wird der Grundzustand durch die Bedingung

$$A_{\lambda}(\mathbf{k})\Omega = 0 \quad (5.31)$$

charakterisiert sein. Es folgt daraus

$$H_{\lambda, \mathbf{k}}\Omega = 0$$

für alle  $\lambda, \mathbf{k}$ . Somit

$$H\Omega = 0. \quad (5.32)$$

$\Omega$  ist also Eigenvektor zum Eigenwert 0, und da  $H$  manifest positiv ist, muß dies der tiefste Eigenwert sein. Weitere Eigenzustände erhält man durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren auf  $\Omega$ ,

$$\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n} = a_{\lambda_1}^*(\mathbf{k}_1) \dots a_{\lambda_n}^*(\mathbf{k}_n)\Omega. \quad (5.33)$$

Man berechnet den Eigenwert, indem man  $H$  durch die Erzeugungsoperatoren durchkommutiert, bis er auf  $\Omega$  wirkt. Dies ist von der Behandlung harmonischer Oszillatoren vertraut. Aus den Vertauschungsrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgt,

$$[H, a_{\lambda}^*(\mathbf{k})]_- = \hbar\omega(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}) \quad (5.34)$$

Mit  $H\Omega = 0$  folgt daraus, daß

$$H\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n} = \left( \sum_{a=1}^n \hbar\omega(\mathbf{k}_a) \right) \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n}. \quad (5.35)$$

Insbesondere ist für  $n = 1$

$$H\Psi_{\lambda, \mathbf{k}} = \hbar\omega(\mathbf{k})\Psi_{\lambda, \mathbf{k}}.$$

Man kann auch den Impuls dieser Zustände berechnen. Es ergibt sich, daß sie Eigenzustände zum Gesamtimpuls  $\hbar\mathbf{k}$  bzw.  $\sum_a \hbar\mathbf{k}_a$  sind. Daher hat  $\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n}$  die Eigenschaften eines Zustands von  $n$  freien Teilchen mit Impulsen  $\hbar\mathbf{k}_1 \dots \hbar\mathbf{k}_n$  und Energien  $\hbar\omega(\mathbf{k}_1) \dots \hbar\omega(\mathbf{k}_n)$ . Wie erinnerlich ist  $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|c$ . Es ergibt sich also die Abhängigkeit  $E = pc$  der Energie vom Impuls für *masselose Teilchen*. Die Teilchen können in zwei Polarisationszuständen

$\lambda = 1, 2$  existieren. Sie werden als *Photonen* oder *Lichtquanten* bezeichnet. Daß die Photonen frei sind, äußert sich in der Additivität ihrer Energie - es gibt keine Wechselwirkungsenergie. Schließlich folgt aus der Vertauschbarkeit der Erzeugungsoperatoren, daß Photonen Bosonen sind. Es können beliebig viele Photonen mit denselben Quantenzahlen  $(\lambda, \mathbf{k})$  in einem Zustand vorkommen.

### 5.2.8 Wellenfunktion des Grundzustands

Die Wellenfunktion des Grundzustands eines harmonischen Oszillators mit Masse 1 in  $d$  Dimensionen findet man als Produkt der Grundzustandswellenfunktionen für 1-dimensionale harmonische Oszillatoren,  $\Omega = \prod_{a=1}^d \Omega_a(x_a)$ . Also

$$\Omega(x_1, \dots, x_d) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \sum_{a=1}^d \omega_a |x_a|^2\right)$$

mit einem Normierungsfaktor  $\mathcal{N}$ .

Wir haben in der Elektrodynamik mit einem Kontinuum von durch  $(\mathbf{k}, \lambda)$  nummerierten harmonischen Oszillatoren zu tun. Wir erwarten daher, daß die Summe über  $a$  durch ein Integral ersetzt wird. Da wir einen reellen Exponenten erwarten, das komplex Konjugierte von  $A^\lambda(\mathbf{k})$  aber  $A^\lambda(-\mathbf{k})$  ist, werden wir zu folgendem Ansatz geführt ( $\mathcal{N}$  ist wieder ein Normierungsfaktor).

$$\Omega(A) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) A^\lambda(\mathbf{k}) A^\lambda(-\mathbf{k})\right) \quad (5.36)$$

Man rechnet nach, daß dies in der Tat die Gleichung  $a_\mu(\mathbf{k})\Omega(A) = 0$  für alle  $\mathbf{k}$  und für alle Polarisierungen  $\mu = 1, 2$  erfüllt.  $a_\mu(\mathbf{k})$  ist nach Gl.(5.21) ein Differentialoperator, und es gilt

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu(\mathbf{l})} \Omega(A) = -\frac{1}{2\hbar} \sum_{\lambda} \left[ \frac{\delta}{\delta A^\mu(\mathbf{l})}, \int d^3\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) A^\lambda(\mathbf{k}) A^\lambda(-\mathbf{k}) \right]_- \quad (5.37)$$

$$\mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) A^\lambda(\mathbf{k}) A^\lambda(-\mathbf{k})\right) \quad (5.38)$$

$$= -\omega(\mathbf{l}) A^\mu(-\mathbf{l}) \Omega(A) / \hbar. \quad (5.39)$$

Zur Herleitung der letzten Gleichung wurden die früher gezeigten Vertauschungsrelationen zwischen  $\delta/\delta A^\mu(\mathbf{l})$  und  $A^\lambda(\mathbf{k})$  benutzt. Dies vermeidet das

etwas mühsame Rechnen mit Ableitungen nach den reellen unabhängigen Größen  $A_i^R(\mathbf{k})$  und  $A_i^I(\mathbf{k})$ .

Da  $\Omega(A)$  eichinvariant ist, kann man es auch als Funktion des Magnetfelds  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  auffassen. Aus  $\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$  folgt für die Fouriertransformierte  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0$ . Daher hat auch  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  nur zwei nichtverschwindende Komponenten senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . Aus  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^{tr}$  folgt, daß

$$\omega(\mathbf{k}) \sum_{\lambda} A^{\lambda}(\mathbf{k}) A^{\lambda}(-\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{k}) \mathbf{B}(-\mathbf{k}).$$

in Einheiten  $c = 1$ . Wir führen die Fouriertransformierte  $\widetilde{\omega}^{-1}(\mathbf{r})$  von  $\omega^{-1}(\mathbf{k})$  ein. Diese existiert als Distribution und verhält sich wie  $|\mathbf{r}|^{-2}$ . Damit nimmt  $\Omega$  die folgende Form an

$$\Omega(A) = \mathcal{N} \exp \left( -\frac{1}{2\hbar} \int \int \delta^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \mathbf{B}(\mathbf{r}) \widetilde{\omega}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{B}(\mathbf{r}') \right). \quad (5.40)$$

Wegen des langsamen Abfalls von  $\widetilde{\omega}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  mit dem Abstand  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  ist der Exponent eine sehr nichtlokale Funktion des Magnetfelds. Dies bedeutet, daß es im Vakuum Korrelationen zwischen den Fluktuationen des Magnetfelds an verschiedenen Punkten des Raums gibt, die nicht schnell mit dem Abstand der Punkte abfallen.

### 5.2.9 Skalarprodukt im Hilbertraum

Wir können schließlich auch den Hilbertraum und sein Skalarprodukt angeben.

Wir können annehmen, daß das Vakuum normiert ist,

$$\langle \Omega, \Omega \rangle = 1. \quad (5.41)$$

Das Skalarprodukt muß so definiert werden, daß  $a_{\lambda}^*(\mathbf{k})$  der zu  $a_{\lambda}(\mathbf{k})$  adjungierte Operator ist. Es zeigt sich, daß es dadurch bis auf einen durch die Normierung des Vakuums festgelegten konstanten Faktor schon eindeutig festgelegt ist. Denn aus den Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, der Normierung des Vakuums und der das Vakuum charakterisierenden Bedingung  $a_{\lambda}(\bar{k})\Omega = 0$  kann man die Skalarprodukte der Zustände  $\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n}$  berechnen.

$$\langle \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n}, \Psi_{\mu_1, \mathbf{l}_1, \dots, \mu_m, \mathbf{l}_m} \rangle = \delta_{mn} \sum_{\pi} \delta_{\lambda_{\pi 1}, \mu_1} \delta(\mathbf{k}_{\pi 1} - \mathbf{l}_1) \dots \delta_{\lambda_{\pi n}, \mu_n} \delta(\mathbf{k}_{\pi n} - \mathbf{l}_n). \quad (5.42)$$

Die Summe läuft über alle Permutationen  $\pi$  von  $1 \dots n$ .

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\lambda \mathbf{k}}, \Psi_{\mu \mathbf{l}} \rangle &= \langle a_{\lambda}^*(\mathbf{k})\Omega, a_{\mu}^*(\mathbf{l}) \rangle \\ &= \langle \Omega, a_{\lambda}(\mathbf{k})a_{\mu}^*(\mathbf{l})\Omega \rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \Omega, [a_{\lambda}(\mathbf{k}), a_{\mu}^*(\mathbf{l})]_{-} \Omega \rangle + \langle \Omega, a_{\mu}^*(\mathbf{l})a_{\lambda}(\mathbf{k})\Omega \rangle \\ &= \delta_{\lambda, \mu} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \langle \Omega, \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Zustände  $\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n}$ , sind uneigentliche Zustände, d.h. nicht normierbar. Dies ist nicht überraschend, denn auch in der nichtrelativistischen Quantenmechanik sind Impulseigenzustände nicht normierbar. Um normierbare Zustände zu bekommen, muß man mit Testfunktionen ausschmieren; z.B. ist

$$\Psi_f = \sum_{\lambda} \int d^3k f_{\lambda}(\mathbf{k}) \Psi_{\lambda, \mathbf{k}}$$

normierbar, wenn  $f_{\lambda}$  quadratintegrierbare Funktionen von  $\mathbf{k}$  sind.

Man kann auch eine Formel für das Skalarprodukt als Integral angeben, das dem Ausdruck für das Skalarprodukt in der Schrödingerdarstellung der nichtrelativistischen Quantenmechanik entspricht. Um den resultierenden Ausdrücken einen mathematischen Sinn zu geben müssen wir Gauß'sche Maße auf  $\infty$ -dimensionalen Hilberträumen  $\mathcal{H}^1$  von quadratintegrierbaren Funktionen  $f_{\lambda}(\mathbf{k})$  betrachten. (Physikalisch sind dies Hilberträume von 1-Teilchen Zuständen).

Im Raum  $\mathbf{R}^n$  von reellen Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ist für jede positiv definite  $n \times n$  Matrix  $C$  das Gauß'sche Maß mit Kovarianz  $C$  und Mittel 0 wie folgt definiert.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} d\mu_C(x) &= \det(2\pi C)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, C^{-1}x \rangle\right) dx_1 \dots dx_n, \quad (5.45) \\ \langle x, k \rangle &= \sum_{a=1}^n x_a k_a \end{aligned}$$

Das Maß ist auf 1 normiert, d.h.

$$\int_{\mathbf{R}^n} d\mu_C(x) = 1,$$

---

<sup>2</sup>Positive Matrizen oder Operatoren sind selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten. Sind auch Eigenwerte 0 zugelassen, so nennt man sie positiv semidefinit. Sie können immer in der Form  $C = B^*B$  geschrieben werden; umgekehrt sind solche Operatoren positiv semidefinit.

und es gilt allgemeiner die folgende Formel für die charakteristische Funktion (Fouriertransformierte) ( $k \in \mathbf{R}^n$ )

$$\int d\mu_C(x) e^{i\langle k, x \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle k, Ck \rangle}. \quad (5.46)$$

Für positive semidefinite Matrizen  $C$  ist das Gauß'sche Maß durch Grenzwertbildung definiert; es gilt Formel (5.46) für die charakteristische Funktion.

Ein mathematischer Satz besagt, daß das Gauß'sche Maß  $d\mu_C(x)$  mit Kovarianz  $C$  für jeden Hilbertraum  $\mathcal{H}^1$  mit Skalarprodukt  $\langle, \rangle$  wohldefiniert ist, vorausgesetzt  $C$  ist positiv semidefinit. Weiter gilt Formel (5.46) für die charakteristische Funktion. In der praktischen Rechnung führt man die Auswertung von Integralen  $\int d\mu_A(x) F(x)$  stets auf die Anwendung dieser Formel zurück.

In unserer Anwendung werden die endlich vielen Integrationsvariablen  $x_1, \dots, x_n$  durch ein Kontinuum  $A^\lambda(\mathbf{k})$  ersetzt. Wir definieren den positiv semidefiniten Operator  $\hbar\omega^{-1}$  im Raum  $\mathcal{H}^1$  der quadratintegrierbaren Funktionen  $A^\lambda(\mathbf{k})$  als Multiplikationsoperator

$$(\hbar\omega^{-1}A)^\lambda(\mathbf{k}) = \hbar\omega(\mathbf{k})^{-1}A^\lambda(\mathbf{k}).$$

Anwendung der Differentialoperatoren  $a_\lambda^*(\mathbf{k})$  auf den expliziten Ausdruck für  $\Omega(A)$  zeigt, daß die Zustandsvektoren  $\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{k}_n}$  und ihre endlichen Linearkombinationen die Form

$$\Psi(A) = F(A)\Omega(A)$$

haben, wobei  $F(A)$  Polynome in den Variablen  $A^\lambda(\mathbf{k})$  sind.

Das Skalarprodukt eines solchen Zustands  $\Psi$  mit einem andern Zustand  $\Phi = G\Omega$  ist

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int d\mu_{\frac{1}{2}\hbar\omega^{-1}}(A) \overline{F(A)} G(A).$$

Mit Hilfe der Formel (5.46) für die charakteristische Funktion kann man zeigen, daß dieses Skalarprodukt mit dem durch Gl.(5.42) übereinstimmt.

Das Gauß'sche Maß  $d\mu_{\frac{1}{2}\hbar\omega^{-1}}(A)$  ist der mathematisch wohldefinierte Ersatz für den formalen Ausdruck

$$\mathcal{N}|\Omega(A)|^2 \prod_{\lambda, \mathbf{k}} dA^\lambda(\mathbf{k}).$$

Setzt man dies in Gl.(5.2.9) ein, so sieht man die Entsprechung mit dem Skalarprodukt in der Schrödingerdarstellung der nichtrelativistischen Quantenmechanik.

### 5.2.10 Lösungen der Maxwell-Gleichungen

Wir wollen jetzt von der Zeit  $t$  abhängige Felder  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  bestimmen, die den Maxwell-Gleichungen genügen. Wir betrachten hier Zustände ohne elektrische Ladungen. Die Maxwell-Gleichungen kommen in zwei Gruppen. Die erste Gruppe lautet

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (5.47)$$

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5.48)$$

Dies sind Einschränkungen an den Zustand zu einer Zeit  $t$ . Die erste dieser Gleichungen wird durch den Ansatz  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r}, t)$  gelöst, und die zweite Gleichung ist das Gauß'sche Gesetz, das durch die Eichinvarianz der Wellenfunktion gewährleistet sein wird.

Die zweite Gruppe besteht aus Gleichungen, die die Zeitentwicklung der Felder bestimmen. In Einheiten  $c = 1$  lauten sie

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (5.50)$$

Wir zeigen zunächst, daß die zeitabhängigen Feldoperatoren im Heisenberg-Bild diese Gleichungen erfüllen. Die Felder im Heisenbergbild hängen mit den schon bekannten Feldern im Schrödingerbild wie folgt zusammen.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= U(t)^* \mathbf{E}(\mathbf{r}) U(t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= U(t)^* \mathbf{B}(\mathbf{r}) U(t). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Dabei ist  $U(t)$  der Zeitentwicklungsoperator,

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}. \quad (5.52)$$

Insbesondere ist  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ .

Die Gültigkeit der ersten Gruppe der Gleichungen zu allen Zeiten  $t$  folgt nun unmittelbar aus der Gültigkeit zur Zeit  $t = 0$ .

Der Hamiltonoperator im Heisenbergbild ist mit dem Hamiltonoperator im Schrödingerbild identisch, weil  $H$  mit sich selbst vertauscht,

$$H(t) = U(t)^* H U(t) = H.$$

Die zweite Gruppe der Maxwell-Gleichungen ist mit den folgenden Gleichungen identisch

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (5.54)$$

In andern Worten, sie sind mit den Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik mit dem uns schon bekannten Hamiltonoperator identisch. Die Übereinstimmung der rechten Seiten zur Zeit  $t = 0$  folgt aus der Formel für  $H$  und den Vertauschungsrelationen für die Felder  $\mathbf{E}(\mathbf{0})$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Die Übereinstimmung für alle Zeiten folgt dann durch Anwendung des Zeitentwicklungsoperators.

Die Gültigkeit der Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen folgt aber aus der Definition (5.51) der Felder im Heisenbergbild. Dies gilt allgemein in der Quantenmechanik (für nicht explizit zeitabhängige Hamiltonoperatoren), und wird durch Differenzieren nach  $t$  bewiesen.

Damit ist gezeigt, daß die Feldoperatoren im Heisenbergbild die Maxwellgleichungen erfüllen werden.

Damit bleibt nur noch, sie auszurechnen. Wir kennen einen vollständigen Satz  $\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n}$  von Eigenfunktionen von  $H$  und damit von  $U(t)$ .

$$U(t) \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n} = e^{-i \sum \omega(\mathbf{k}_a) t} \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n}.$$

Wir berechnen nun zunächst die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Heisenbergbild,

$$a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) = U(t)^* a_\lambda^*(\mathbf{k}) U(t) \quad (5.55)$$

und entsprechend für  $a$ . Wenden wir diese Definition auf  $\Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n}$  an, so erhalten wir

$$a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n} = U(t)^* a^*(\mathbf{k}) \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n} e^{-i \sum \omega(\mathbf{k}_a) t} \quad (5.56)$$

$$= U(t)^* \Psi_{\lambda, \mathbf{k}, \lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n} e^{-i \sum \omega(\mathbf{k}_a) t} \quad (5.57)$$

$$= e^{i\omega(\mathbf{k})t} a_\lambda^*(\mathbf{k}) \Psi_{\lambda_1, \mathbf{k}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{k}_n}. \quad (5.58)$$

Da der Basisvektor beliebig ist, folgt das Resultat

$$a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) = e^{i\omega(\mathbf{k})t} a_\lambda^*(\mathbf{k}). \quad (5.59)$$



Hermitesche Konjugation liefert

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega(\mathbf{k})t} a_\lambda(\mathbf{k}). \quad (5.60)$$

Wir hatten schon früher die Feldoperatoren im Schrödingerbild durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Schrödingerbild ausgedrückt. Die Feldoperatoren im Heisenbergbild bekommen wir daraus durch Substitution der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Heisenbergbild. Dies liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r}, t), \quad (5.61) \\ \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\lambda=1}^2 i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\mathbf{k})}} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left( a_\lambda(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \\ &= \sum_{\lambda=1}^2 i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\mathbf{k})}} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left( a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} - a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \end{aligned}$$

und entsprechend für  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Durch Vergleich mit dem so erhaltenen Ausdruck sieht man, daß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r}, t). \quad (5.62)$$

Dies reproduziert eine bekannte Formel der klassischen Elektrodynamik mit skalarem Potential  $\Phi = 0$ .

### 5.2.11 Lokalität

Wir hatten unsere elektromagnetischen Feldoperatoren so konstruiert, daß

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\rho\sigma}(0)]_- = 0 \quad (5.63)$$

wenn  $x = (\mathbf{r}, t)$  mit  $t = 0$ ,  $\mathbf{r} \neq 0$ . Ist  $x$  ein raumartiger Vektor, so gibt es ein Bezugssystem derart, daß  $x = (\mathbf{r}, ct)$  mit  $t = 0$  und  $\mathbf{r} \neq 0$ . Daher folgt aus der Lorentzinvarianz, daß der obige Kommutator für beliebige raumartige  $x$  verschwinden muß. Dies ist im Einklang mit dem physikalischen Prinzip, daß Messungen an relativ raumartigen Punkten der Raum-Zeit sich nicht gegenseitig stören dürfen.

Es ist von Interesse, den Kommutator auch explizit auszurechnen. Wir betrachten zunächst den Kommutator

$$\left[ A_i^{tr}(\mathbf{r}, t) A_j^{tr}(\mathbf{0}, 0) \right]_- = i\hbar D_{ij}^{tr}(x), \quad x = (\mathbf{r}, ct). \quad (5.64)$$

Das Vektorpotential ist zunächst keine Observable, denn es gibt keine Meßvorschrift, die Vektorpotentiale unterscheiden könnte, die durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen. Vektorpotentiale, die keiner Eichbedingung unterworfen worden sind, sind auch nicht etwa Multiplikationsoperatoren im physikalischen Hilbertraum, denn das Resultat ihrer Anwendung wäre nicht eichinvariant. Jedoch kann man aus dem Vektorpotential durch Eichfixierung eine Observable machen. Beispielsweise kann dies durch die Coulomb-Eichbedingung geschehen,

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Für die Fouriertransformierte bedeutet dies  $\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = 0$ , d.h.  $\mathbf{A}$  ist transversal,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{tr}$ .  $\mathbf{A}^{tr}$  ist durch das observable Magnetfeld eindeutig bestimmt. Man kann auch eine explizite Formel angeben,

$$\mathbf{A}^{tr}(\mathbf{r}, t) = - \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{B}(\mathbf{r}') \times \nabla v_{Cb}(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Dabei ist  $v_{Cb}$  das Coulomb-Potential, Es erfüllt die Gleichung

$$-\Delta v_{Cb}(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}).$$

Man sieht daraus, daß  $A^{tr}(\mathbf{r})$  zwar observabel, aber nicht durch eine Messung in einer kleinen Umgebung von  $\mathbf{r}$  alleine bestimmbar ist; es hängt vom Magnetfeld im ganzen Raum ab. Man kann daher nicht erwarten, daß der Kommutator (5.64) für raumartige  $(\mathbf{r}, t)$  verschwinden wird. Tatsächlich verschwindet er selbst für  $t = 0$ ,  $\mathbf{r} \neq 0$  nicht, wie wir gleich sehen werden.

Drücken wir  $A_i^{tr}(\mathbf{r}, t)$  gemäß Gl.(5.62) durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus, so sehen wir aus den  $c$ -Zahl Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $a_\lambda(\mathbf{k})$ ,  $a_\mu^*(\mathbf{k}')$  sofort, daß  $D_{ij}^{tr}(\mathbf{r})$  ein reelles Vielfaches des 1-Operators ist, und zwar ist

$$iD_{ij}^{tr}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda)}(\mathbf{k}) (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \quad (5.65)$$

Die Vektoren  $\epsilon^{(1)}(\mathbf{k})$ ,  $\epsilon^{(2)}(\mathbf{k})$ ,  $\epsilon^{(3)}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  bilden ein Orthonormalsystem gemäß Gl.(5.15), und es gilt für  $\lambda = 1, 2$  daß  $\bar{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \epsilon^{(\lambda)}(-\mathbf{k})$ . Somit ist

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda)}(-\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \quad (5.66)$$

Damit wird der Kommutator

$$iD_{ij}^{tr}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right) (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \quad (5.67)$$

Der gleichzeitige Kommutator

$$[\dot{A}_i^{tr}(\mathbf{r}, 0), A_j^{tr}(0, 0)] = i \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}^{tr}(\mathbf{r}, 0) \quad (5.68)$$

$$= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \quad (5.69)$$

$$= -i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) - i \nabla_i \nabla_j v_{Cb}(\mathbf{r}). \quad (5.70)$$

Der nichtlokale zweite Term trägt zum Kommutator zwischen  $E_i = -\dot{A}_i^{tr}$  und  $B_j = (\nabla \times \mathbf{A}^{tr})_j$  nichts bei, und wir erhalten den gleichzeitigen Kommutator zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  zurück, von dem wir ausgingen.

Allgemeiner trägt der "longitudinale Term"  $\propto k_i k_j$  in  $D_{ij}^{tr}(\mathbf{r}, t)$  zum Kommutator der elektrischen und magnetischen Felder nichts bei. Definieren wir  $A_0^{tr} = 0$  und entsprechend  $D_{\mu\nu}^{tr} = 0$  wenn  $\mu = 0$  oder  $\nu = 0$ , so verallgemeinert sich die oben angegebene Formel für  $D_{ij}^{tr}$  zu

$$D_{ij}^{tr}(x) = iD_{\mu\nu}(x) - \quad (5.71)$$

$$-i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})} \frac{k_\mu k_\nu - k \cdot \eta (k_\nu \eta_\mu + \eta_\nu k_\mu)}{|\mathbf{k}|^2} (e^{-ikx} - e^{ikx}).$$

$$D_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\nu} \Delta(x), \quad (5.72)$$

$$i\Delta(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})} (e^{-ikx} - e^{ikx})$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{sign}(k^0) \delta(k^2) e^{-ikx} \quad (5.73)$$

$$= \frac{i}{4\pi} \text{sign}(x^0) \delta(x^2). \quad (5.74)$$

Dabei ist  $\eta^\mu = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ , und  $k_\mu = (\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))$ . Wir benutzen hier 4-dimensionale Skalarprodukte  $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ .

Der Beitrag  $\propto D_{\mu\nu}$  zu  $D_{\mu\nu}^{tr}(x)$  ist also lokal. Der andere Beitrag aber trägt wegen der Faktoren  $k_\mu, k_\nu$  zu den Kommutatoren der elektromagnetischen Feldstärken nichts bei,

$$[F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x')] = i \nabla_\mu D_{\nu[\sigma}^{tr}(x - x') \nabla'_{\rho]} \quad (5.75)$$

$$= i \nabla_\mu D_{\nu[\sigma}(x - x') \nabla'_{\rho]}. \quad (5.76)$$

Dabei ist  $\nabla'$  die nach *links* wirkende Ableitung nach  $x'$ , und die eckigen Klammern stehen für Antisymmetrisierung,  $f_{[\mu}g_{\nu]} = f_{\mu}g_{\nu} - f_{\nu}g_{\mu}$ , usw.

Wir sehen aus diesen Formeln, daß der Kommutator zwischen elektromagnetischen Feldern auf dem Lichtkegel  $(x - x')^2$  konzentriert ist. Dies ist ein quantenmechanischer Ableger des Huygens'schen Prinzips. Außerdem ist der Kommutator Lorentz-invariant wie es sein muß, denn  $D_{\mu\nu}$  ist nach obiger Definition Lorentz-invariant.

# Appendix A

## Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Ein topologischer Raum  $\mathcal{M}$  wird als *Mannigfaltigkeit* bezeichnet, wenn er lokal homöomorph zu  $\mathbf{R}^n$  ist. Dies bedeutet, daß es eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{M}$  mit offenen Teilmengen  $U_i, i \in \Lambda$  gibt, und zu jedem  $i \in \Lambda$  gibt es eine injektive Abbildung  $\varphi_i : U_i \mapsto \mathbf{R}^n$  die  $U_i$  homeomorph in eine offene Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  abbilden. Die Paare  $(\varphi_i, U_i)$  nennt man *Karten*. Die Gesamtheit der Karten  $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_i$  heißt ein *Atlas*.

In der eben gegebenen Definition ist angenommen, daß  $\mathcal{M}$  schon eine Topologie hat. Diese Topologie ist jedoch durch die Topologie von  $\mathbf{R}^n$  und die Abbildungen  $\varphi_i$  eindeutig festgelegt. Die Konsistenz der dadurch auf verschiedenen, möglicherweise überlappenden Gebieten  $U_i$  festgelegten Topologien verlangt, daß die Abbildungen

$$\psi_{ji} : \varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \mapsto \varphi_j(U_i \cap U_j) \quad (\text{A.1})$$

zwischen Teilmengen des  $\mathbf{R}^n$  Homeomorphismen, d.h. bijektiv stetig sind. Dies folgt aus der Definition, denn Zusammensetzungen und Inverse von Homeomorphismen sind Homeomorphismen. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so wird dadurch schon auf  $\mathcal{M}$  als Menge in konsistenter Weise eine Topologie definiert.

Mannigfaltigkeiten können also aus Karten zusammengeklebt werden. Die Abbildungen  $\psi_{ji}$  in (A.1) heißen *Koordinatentransformationen*. Sie beschreiben den Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern in dem Gebiet, wo beide Koordinatensysteme definiert sind.

Die Mannigfaltigkeit heißt differenzierbar vom Grad  $C^r$ , wenn die Abbildungen  $\psi_{ji}$  alle  $r$ -mal stetig differenzierbar sind, und wenn ihr Inverses  $\varphi_i\varphi_j^{-1}$  dieselbe Differenzierbarkeitseigenschaft hat.

## A.1 Beispiel Kugel $S^n$

Betrachten wir die Einheitskugel im  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Sie besteht aus Punkten  $x = (x^0, x^1, \dots, x^n)$  die der Bedingung  $\sum_{\mu=0}^n |x^\mu|^2 = 1$  genügen. Wir können die Kugel mit zwei Karten  $U_1, U_2$  überdecken.  $U_1$  enthält alle Punkte der Kugel außer dem Nordpol  $(1, 0 \dots 0)$ , und  $U_2$  enthält alle Punkte außer dem Südpol  $(-1, 0 \dots 0)$ . Die Koordinaten im  $\mathbf{R}^n$  werden mit  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  bezeichnet. Wir wählen stereographische Koordinaten. Die Gebiete  $U_i$  werden dabei auf ganz  $\mathbf{R}^n$  abgebildet.  $x = \varphi_1^{-1}(\xi) \in U_1$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x^i &= \frac{2\xi^i}{1 + |\xi|^2}, \\ x^0 &= \frac{1 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

während  $x = \varphi_2^{-1}(\xi) \in U_2$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x^i &= \frac{2\xi^i}{1 + |\xi|^2}, \\ x^0 &= \frac{|\xi|^2 - 1}{1 + |\xi|^2}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Der Durchschnitt der Karten ist die Kugel ohne Nord- und Südpol, und das Bild unter  $\varphi_1$  und unter  $\varphi_2$  ist beidemale der punktierte Raum  $\mathbf{R}^n$  ohne den Ursprung. Die Koordinatentransformation ist durch

$$\varphi_2\varphi_1^{-1}(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|^2} \tag{A.4}$$

gegeben. Dies ist auf dem punktierten Raum wohldefiniert. Ebenso ist

$$\varphi_1\varphi_2^{-1}(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|^2}. \tag{A.5}$$

Die Abbildungen sind  $C^\infty$ . Die Kugel wird damit eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit.

# Appendix B

## Die Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform

Wir haben einen Zusammenhang definiert als gegeben durch Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C)$ , die den Zusammensetzungsregeln (1.4) und (1.5) genügen. Da ein beliebiger Weg  $C$  aus infinitesimalen Stücken zusammengesetzt werden kann, wird es wegen der Zusammensetzungsregeln genügen,  $\mathcal{U}(C)$  für infinitesimale Wege  $C$  zu kennen. Es erhebt sich die Frage: was ist die infinitesimale Version von  $\mathcal{U}$  (als mathematisches Objekt)? Es ist *nicht* das Vektorpotential, denn dieses ist nicht durch den Zusammenhang alleine gegeben, sondern hängt außerdem von der Wahl einer gleitenden Basis ab.

Die Antwort wurde von Mathematikern vor längerer Zeit gefunden. Das natürliche Objekt, das als infinitesimale Version der Paralleltransporter  $\mathcal{U}$  betrachtet werden kann, ist die Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform  $\omega$  auf dem Hauptfaserbündel. Sie soll nun definiert werden.

In der hier gewählten Darstellungsweise geht man aus von einem *Vektorbündel*  $V$ , dessen Punkte Paare  $(x, v)$  sind mit  $x \in M$ ,  $v \in V_x$ . Es wird angenommen, daß definiert ist, was ein glattes Vektorfeld  $x \rightarrow v(x) \in V_x$  ist. (Erst dadurch wird der Raum von Paaren  $(x, v)$  zu einem Vektorraumbündel.) Gegeben  $V$ , so besteht das dazu *assoziierte Hauptfaserbündel*  $B$  aus Paaren

$$b = (x, e) \quad , \quad e = (e_1, \dots, e_n) \quad \text{mit } e_\alpha \in V_x \quad (\text{B.1})$$

derart, daß  $e$  eine Basis für  $V_x$  bildet ( $n = \dim V_x$ ). Läßt man ganz beliebige Basen zu, so sagt man,  $B$  habe die *Strukturgruppe*

$$G = GL(n, \mathbf{R}),$$

wenn  $V_x$  reelle  $n$ -dimensionale Vektorräume sind.

Ein Tangentenvektor  $\tilde{X} \in T_b B$  am Punkt  $b = (\hat{x}, \hat{e})$  ist gegeben durch eine Äquivalenzklasse von Kurven durch  $b$ ,

$$\tau \rightarrow \tilde{C}(\tau) = (C(\tau), e(\tau)) \quad (\text{B.2})$$

derart, daß

$$\begin{aligned} C(\tau) \in M \quad , \quad e(\tau) \text{ Basis in } V_{C(\tau)}, \\ C(\sigma) = \hat{x} \quad , \quad e(\sigma) = \hat{e}. \end{aligned}$$

Die Kurve  $\tilde{C}$  in  $B$  bestimmt eine Kurve  $C$  in  $M$ . Deren Tangentenvektor bei  $\hat{x} = C(\sigma)$  wird mit  $X$  bezeichnet. Eine reelle 1-Form  $\omega$  definiert für jeden Punkt  $b \in B$  des Hauptfaserbündels  $B$  eine lineare Abbildung  $\omega_b \in T_b^* B$ :

$$\omega_b: \tilde{X} \rightarrow \omega_b(\tilde{X}) \in \mathbf{R} \quad \text{für } \tilde{X} \in T_b B.$$

Sie ordnet jedem Tangentenvektor  $\tilde{X}$  bei  $b$  eine reelle Zahl zu.

Statt solcher reeller 1-Formen müssen wir hier 1-Formen mit Werten in der Lie-Algebra  $\mathcal{G}$  von  $G$  betrachten. Dies sind lineare Abbildungen

$$\omega_b: \tilde{X} \rightarrow \omega_b(\tilde{X}) \in \mathcal{G} \quad \text{für } \tilde{X} \in T_b B.$$

Die Lie-Algebra  $\mathcal{G}$  von  $G = GL(n, \mathbf{R})$  besteht aus allen reellen  $n \times n$  Matrizen.

Die *Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform* ist eine  $\mathcal{G}$ -wertige 1-Form  $\omega$  auf dem Hauptfaserbündel. Sie ist durch  $\mathcal{U}$  bestimmt wie folgt.

Sei  $\tilde{C}$  eine Kurve auf  $B$  mit  $\tilde{C}(\sigma) = b$  und Tangentenvektor  $\tilde{X}$  bei  $b$ , wie oben beschrieben. Sei  $C_{\tau\sigma}$  das durch  $\tilde{C}$  bestimmte Kurvenstück auf  $M$  von  $\hat{x} = C(\sigma)$  nach  $C(\tau)$ . Dann ist  $\mathcal{U}(C_{\tau\sigma})\hat{e}_\alpha \in V_{C(\tau)}$  und kann daher nach der (durch  $\tilde{C}$  bestimmten) Basis  $e(\tau)$  in  $V_{C(\tau)}$  entwickelt werden

$$\mathcal{U}(C_{\tau\sigma})e_\alpha(\sigma) = e_\beta(\tau)g_\alpha^\beta(\tau, \sigma) \quad \text{mit } g(\tau, \sigma) = \left(g_\alpha^\beta(\tau, \sigma)\right) \in G. \quad (\text{B.3})$$

Man setzt

$$\omega_b(\tilde{X}) = - \left. \frac{d}{d\tau} g(\tau, \sigma) \right|_{\tau=\sigma} \in \mathcal{G}. \quad (\text{B.4})$$

Man rechnet nach, daß  $\omega_b(\tilde{X})$  wirklich nur von der Äquivalenzklasse  $\tilde{X}$  der Kurve  $\tilde{C}$  abhängt.

Wir zeigen nun, daß umgekehrt der Zusammenhang  $\mathcal{U}$  durch seine Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform  $\omega$  eindeutig bestimmt ist.



Es soll gezeigt werden, daß für beliebig vorgegebene Kurve  $C$  auf  $M$  die Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C_{\tau\sigma})$  längs Kurvenstücken  $C_{\tau\sigma}$  eindeutig bestimmt sind durch  $\omega$ . Wähle eine Kurve  $\tilde{C}$  auf  $B$  deren Projektion auf  $M$  gleich  $C$  ist.  $\tilde{C}$  bestimmt eine Basis  $e(\tau)$  in  $V_x$  für jedes  $x = C(\tau)$  auf der Kurve  $C$ . Durch Gl. (B.3) ist  $\mathcal{U}(C_{\tau\sigma})$  bestimmt, wenn  $g(\tau, \sigma)$  bekannt ist. Wegen der Zusammensetzungsregeln für Paralleltransporter folgt aus Gl. (B.3), daß

$$g(\tau, \nu)g(\nu, \sigma) = g(\tau, \sigma) \quad \text{für } \tau \geq \nu \geq \sigma. \quad (\text{B.5})$$

Daher gilt nach Gl. (B.4)

$$\left[ \frac{d}{d\tau} g(\tau, \sigma) \right] g(\tau, \sigma)^{-1} = -\omega_{\tilde{C}(\tau)}(\tilde{X}(\tau)). \quad (\text{B.6})$$

$\tilde{X}(\tau) =$  Tangentenvektor an  $\tilde{C}$  bei  $\tilde{C}(\tau)$ .  $g(\tau, \sigma)$  ist eindeutig bestimmt als Lösung einer Differentialgleichung, die der Anfangsbedingung  $g(\tau, \sigma) = 1$  genügt. Damit ist gezeigt, daß die Paralleltransporter  $\mathcal{U}(C)$  durch die Zusammenhangsform  $\omega$  eindeutig bestimmt sind.

Eine Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform erfüllt kraft ihrer Definition (B.3, B.4) zwei Identitäten, die jetzt hergeleitet werden sollen.

Jedes Element  $S$  der Strukturgruppe  $G$  definiert eine Abbildung des Hauptfaserbündels auf sich

$$S: b \rightarrow b' = bS. \quad (\text{B.7})$$

Ist  $b = (x, e)$ , so ist  $b' = (x', e')$  mit

$$x' = x \quad , \quad e'_\alpha = e_\beta S^\beta_\alpha. \quad (\text{B.8})$$

(Die Strukturgruppe ist stets als eine Gruppe von Matrizen zu betrachten!) Durch diese Abbildung des Hauptfaserbündels  $B$  wird eine Kurve  $\tilde{C}$  auf  $B$  in eine neue Kurve  $\tilde{C}'$  abgebildet

$$\tilde{C}'(\tau) = (C(\tau), e'(\tau)) \quad , \quad e'_\alpha(\tau) = e_\beta(\tau) S^\beta_\alpha. \quad (\text{B.9})$$

Die Projektion  $C$  der Kurve auf  $M$  ändert sich dabei nicht. Da Tangentenvektoren auf  $B$  als Äquivalenzklassen von Kurven  $\tilde{C}$  erklärt sind, ist damit auch eine Abbildung  $S_*$  von Tangentenvektoren erklärt

$$S_*: T_b B \rightarrow T_{bS} B. \quad (\text{B.10})$$

Die erste Identität für Cartan-Ehresmann Zusammenhangsformen lautet

$$\omega_{bS}(S_*\tilde{X}) = S^{-1}\omega_b(\tilde{X})S \quad \text{für } \tilde{X} \in T_bB. \quad (\text{B.11})$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist als Produkt dreier Matrizen  $S$ ,  $\omega_b(\tilde{X})$  und  $S^{-1}$  zu verstehen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition (B.3B.4). Ist nämlich  $\tilde{X}$  Tangentenvektor an  $\tilde{C}$  bei  $b$ , so ist  $\tilde{X}' = S_*\tilde{X}$  Tangentenvektor an  $\tilde{C}'$  bei  $b' = bS$ , wo  $\tilde{C}'$  durch Gl. (B.9) gegeben ist. Durch Einsetzen von Gl. (B.9) in (B.3,B.4) erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(C_{\tau\sigma})e'_\alpha(\sigma) &= \mathcal{U}(C_{\tau\sigma})e_\beta(\sigma)S^\beta_\alpha \\ &= e_\gamma(\tau)g^\gamma_\beta(\tau, \sigma)S^\beta_\alpha = e'_\delta(\tau)g'^\delta_\alpha(\tau, \sigma) \end{aligned}$$

mit

$$g'(\tau, \sigma) = S^{-1}g(\tau, \sigma)S.$$

Daher folgt aus Gl. (B.4) (wegen  $C = C'$ )

$$\omega_{b'}(\tilde{X}') = - \left. \frac{d}{d\tau} g'(\tau, \sigma) \right|_{\tau=\sigma} = -S^{-1} \frac{d}{d\tau} g(\tau, \sigma) S = S^{-1} \omega_b(\tilde{X}) S,$$

was zu beweisen war.

Um die zweite Identität zu bekommen, betrachten wir Kurven  $\tilde{C}$  auf  $B$ , deren Projektion  $C$  auf  $M$  eine triviale einpunktige Kurve ist

$$C(\tau) = \hat{x} = C(0) \quad \text{für alle } \tau.$$

Es ist natürlich

$$\mathcal{U}(C_{\tau\sigma}) = id \quad , \quad \text{wenn } C(\tau) \equiv C(0). \quad (\text{B.12})$$

Daher hängt  $\omega_b(\tilde{X})$  für Tangentenvektoren  $\tilde{X}$  an solche Kurven  $C$  "in der Faser" nach Definition (B.3,B.4) nicht vom Zusammenhang ab. Es erfüllt die nun zu besprechende Identität.

Ein Element  $A \in \mathcal{G}$  der Lie-Algebra  $\mathcal{G}$  der Strukturgruppe bestimmt ein Tangentenvektorfeld  $\tilde{A}$  auf  $B$  wie folgt.  $\tilde{A}(b) \in T_bB$  ist der Tangentenvektor an die Kurve  $\tilde{C}$  durch  $b$ , die gegeben ist durch

$$\tilde{C}(\tau) = bS(\tau) \quad \text{mit } S(\tau) = e^{\tau A} \in G. \quad (\text{B.13})$$

$\tilde{A}$  nennt man das durch  $A$  bestimmte fundamentale Vektorfeld auf  $B$ . Die angekündigte zweite Identität lautet

$$\omega_b(\tilde{A}(b)) = A \quad \text{für alle } b \in B. \quad (\text{B.14})$$

Der Beweis folgt wiederum unmittelbar aus der Definition (B.3,B.4). Ist  $b = (x, \hat{e})$ , so ist  $\tilde{A}(b)$  Tangentenvektor an  $\tilde{C}$ ,

$$\tilde{C}(\tau) = (x, e(\tau)) \quad , \quad e_\alpha(\tau) = \hat{e}_\beta S_\alpha^\beta(\tau).$$

Daher ist wegen Gl. (B.12)

$$\begin{aligned} \hat{e}_\alpha &= \mathcal{U}(C_{\tau\sigma})\hat{e}_\alpha = e_\beta(\tau)g_\alpha^\beta(\tau, 0) \\ &= \hat{e}_\gamma S_\beta^\gamma(\tau)g_\alpha^\beta(\tau, 0). \end{aligned}$$

Also ist  $g(\tau, 0) = S(\tau)^{-1}$ . Daher ist

$$\omega_b(\tilde{A}(b)) = - \left. \frac{d}{d\tau} g(\tau, 0) \right|_{\tau=0} = - \left. \frac{d}{d\tau} e^{-\tau A} \right|_{\tau=0} = A,$$

was zu beweisen war.

Schließlich soll diskutiert werden, wie die Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform mit dem Vektorpotential  $\Gamma_\mu$  des Zusammenhangs  $\mathcal{U}$  verknüpft ist. Das Vektorpotential ist erst definiert, wenn neben dem Zusammenhang  $\mathcal{U}$  eine gleitende Basis  $x \rightarrow e(x)$  erklärt ist. (Ist  $M$  eine topologisch nichttriviale Mannigfaltigkeit, so wird dies nur lokal möglich sein. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung einer Umgebung eines Punktes  $\hat{x} \in M$ .) Sei also eine gleitende Basis  $e$  gegeben. Dies definiert eine Abbildung

$$M \rightarrow B \quad \text{vermöge} \quad x \rightarrow (x, e(x)).$$

Diese Abbildung werde ebenfalls mit  $e$  bezeichnet. (Genauer gesagt ist die Abbildung  $e$  nur auf einer Umgebung des Punktes  $\hat{x} \in M$  erklärt.) Die Abbildung  $e$  induziert eine Abbildung von Kurven  $C$  auf  $M$  in Kurven  $\tilde{C}$  auf  $B$ . Da Tangentenvektoren als Äquivalenzklassen von Kurven definiert sind, ist damit eine Abbildung

$$e_*: T_x M \in T_{(x, e(x))} B \quad (\text{B.15})$$

von Tangentenvektoren erklärt. Gegeben  $\Gamma_\mu$  (bezüglich eines lokalen Koordinatensystems auf  $M$ ) so definiert

$$\Gamma_x \equiv \Gamma_\mu(x) dx^\mu$$

eine 1-Form auf  $M$ <sup>1</sup>. Die gesuchte Relation zwischen Vektorpotential  $\Gamma$  und Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform  $\omega$  lautet

$$\Gamma_x(X) = \omega_b(e_*X) \quad \text{für } X \in T_xM \quad , \quad b = (x, e(x)). \quad (\text{B.16})$$

Führt man die zu  $e_*$  duale Abbildung  $e^*$  von 1-Formen auf  $B$  in 1-Formen auf  $M$  ein durch

$$(e^*\omega)_x(X) = \omega_b(e_*X) \quad \text{für } X \in T_xM \quad , \quad b = (x, e(x)),$$

so lautet Gl. (B.16)

$$\Gamma = e^*\omega. \quad (\text{B.17})$$

Zum Beweis von Gl. (B.16) gehen wir von der Definition (1.23) des Vektorpotentials aus. Ist  $X$  Tangentenvektor an die Kurve  $C: \tau \rightarrow C(\tau)$  bei  $\tau = 0$ , so besagt Gl. (2.5), daß

$$\Gamma_x(X) = - \left. \frac{d}{d\tau} \mathbf{U}(C_{\tau 0}) \right|_{\tau=0}. \quad (\text{B.18})$$

Dabei sind  $\mathbf{U}(\cdot)$  die durch den Zusammenhang  $\mathcal{U}$  und die gleitende Basis  $e$  bestimmten Paralleltransportmatrix

$$\mathcal{U}(C_{\tau\sigma})e_\alpha(x) = e_\beta(C(\tau)) \mathbf{U}^\beta_\alpha(C_{\tau 0}) \quad \text{für } x = C(0).$$

Zum Vergleich berechnen wir  $\omega_b(e_*X)$ .  $\tilde{X} = e_*X$  ist Tangentenvektor an die durch  $C$  und  $e$  bestimmte oben beschriebene Kurve  $\tilde{C}$  auf  $B$  am Punkt  $b = (x, e(x))$ . Wir bestimmen die durch Gl. (B.3) definierten Matrizen  $g(\tau, 0)$ .

Durch Vergleich von Gl. (B.3) mit der eben wiederholten Definition von  $\mathbf{U}$  sieht man, daß

$$g(\tau, 0) = \mathbf{U}(C_{\tau 0}).$$

---

<sup>1</sup>Die Differentiale  $dx^\mu$  bestimmen lineare Abbildungen der Tangenträume von  $M$  nach  $\mathbf{R}$  vermöge  $dx^\mu: \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rightarrow \delta^\mu_\nu$ .

Gl. (B.4) liefert dann

$$\omega_b(\tilde{X}) = - \left. \frac{d}{d\tau} g(\tau, 0) \right|_{\tau=0} = - \frac{d}{d\tau} \mathbf{U}(C_{\tau 0}).$$

Nach Gl. (B.18) ist dies gleich  $\Gamma_x(X)$ , was zu beweisen war.

Schließlich mag es von Interesse sein, einen Ausdruck für  $\omega$  in lokalen Koordinaten auf dem Hauptfaserbündel  $B$  anzugeben. Im Fall der Strukturgruppe  $GL(n, \mathbf{R})$  ist ein lokales Koordinatensystem auf  $B$  bestimmt durch ein lokales Koordinatensystem  $x \rightarrow \{x^\mu\}$  auf  $M$  und eine gleitende Basis  $e^o$ . Die Koordinaten eines Punktes  $b = (x, e)$  sind dann  $(x^\mu, g^\alpha_\beta)$ , wenn

$$e_\beta = e^o_\alpha(x) g^\alpha_\beta \quad , \quad g = (g^\alpha_\beta) \in G. \quad (\text{B.19})$$

$x^\mu$  und  $g^\alpha_\beta$  sind unabhängige reelle Zahlen, da  $GL(n, \mathbf{R})$  mit einer offenen Untermenge des  $\mathbf{R}^{n^2}$  identifiziert werden kann. In diesen Koordinaten ist

$$\omega_b = \{B_\mu(x, g) dx^\mu + g^{-1} dg\} \quad \text{für } b = (x, e^o(x)g). \quad (\text{B.20})$$

Die  $n \times n$  Matrix-Funktion  $B_\mu$  hat die Kovarianzeigenschaft

$$B_\mu(x, gS) = S^{-1} B_\mu(x, g) S \quad \text{für } S \in G, \quad (\text{B.21})$$

und es ist

$$(g^{-1} dg)^\alpha_\beta = \sum_\gamma (g^{-1})^\alpha_\gamma dg^\gamma_\beta. \quad (\text{B.22})$$

Für eine beliebige 1-Form  $\omega$  auf  $B$  wäre  $B_\mu(x, g)$  beliebig, und anstelle von  $g^{-1} dg$  träte ein Ausdruck  $h(x, g) dg$ . Die explizite Form des zweiten Terms in Ausdruck (B.20) für eine Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform  $\omega$  folgt aus der Identität (B.14), und die Kovarianzeigenschaft (B.21) folgt aus der zusätzlichen Gültigkeit der Identität (B.11). Für das Vektorpotential  $\Gamma_x \equiv \Gamma_\mu(x) dx^\mu$  ergibt sich aus Gl. (B.17)

$$\Gamma_x = (e^* \omega)_x = \left\{ B_\mu(x, g(x)) + g(x)^{-1} \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} \right\} dx^\mu \quad , \quad (\text{B.23})$$

wenn die gleitende Basis  $e$  in lokalen Koordinaten gegeben ist durch

$$e(x) = e^o(x)g(x).$$

Wir erinnern nochmals daran, daß das Vektorpotential nicht nur vom Zusammenhang, sondern außerdem von der Wahl einer gleitenden Basis  $e$  abhängt. Ist  $e$  gleich der das Koordinatensystem auf  $B$  definierenden gleitenden Basis  $e^o$ , so ist  $g(x) \equiv 1$ . Daher vereinfacht sich Gl. (B.23) zu

$$\Gamma_\mu(x) = B_\mu(x, 1) \quad \text{falls } e = e^o. \quad (\text{B.24})$$

Es wird für den Leser instruktiv sein, nachzurechnen, daß der Ausdruck (B.23) nur von der Cartan-Ehresmann Zusammenhangsform  $\omega$  und der gleitenden Basis  $e$  abhängt, und nicht außerdem noch von der Wahl des Koordinatensystems auf  $B$  (d.h. insbesondere nicht von  $e^o$ , für gegebenes  $e$ ).

# Appendix C

## Dirac Gleichung für Wellenfunktionen der speziell relativistischen Quantenmechanik

Wir interessieren uns hier für die Beschreibung der quantenmechanischen Zustände eines einzelnen Teilchens zur Zeit  $t$  durch Wellenfunktionen  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ . Hinfort schreiben wir  $\Psi(x)$ ,  $x = (\mathbf{r}, t)$ . Für Teilchen mit Spin, die mehrere Polarisationszustände haben können, wird  $\Psi(x)$  mehrere Komponenten haben müssen. Im allgemeinen wird also

$$\Psi(x) \in \Omega \tag{C.1}$$

sein, wo  $\Omega$  ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Dieser globale Vektorraum  $\Omega$  soll Spin-Raum genannt werden.

**Bemerkung:** Der Raum  $\Omega$  kommt aus einem Vektorraum  $\Omega_x$  für jeden Raum-Zeit Punkt  $x$  in der allgemeinen Relativitätstheorie. Der Minkowski-Raum ist flach, und man kann dort die Räume  $\Omega_x$  alle durch wegunabhängigen Paralleltransport miteinander identifizieren.

Die spezielle Relativitätstheorie verlangt Kovarianz unter Lorentztransformationen. Deshalb muß sich die Wellenfunktion wie folgt unter einem Element  $A$  der quantenmechanischen Lorentzgruppe transformieren

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = S(A)\Psi(\Lambda(A)^{-1}x) \tag{C.2}$$

wobei  $S(A)$  eine endlich-dimensionale Darstellung der q.m. Lorentzgruppe ist, d.h.  $S(A)$  sind lineare Abbildungen von  $\Omega$  mit der Eigenschaft

$$S(A_1)S(A_2) = S(A_1A_2) \quad (\text{C.3})$$

$\Lambda(A)$  ist die  $A$  zugeordnete Lorentztransformation. Wir kommen darauf gleich noch zurück.

Eine speziell relativistische Form der Schrödinger Gleichung muß unter solchen Transformationen ihre Form behalten.

**Bemerkung:** Die zugeordnete Lorentztransformation  $\Lambda$  bestimmt  $A$  bis auf ein Vorzeichen  $\pm 1$ , wie wir sehen werden. Die Unbestimmtheit eines Vorzeichens im Transformationsgesetz für die Wellenfunktion unter Lorentztransformationen  $\Lambda$  ist zulässig, weil Wellenfunktionen, die sich nur um einen Phasenfaktor  $c \in \mathbf{C}$ ,  $|c| = 1$  unterscheiden, den selben physikalischen Zustand beschreiben. Man bekommt also ein wohldefiniertes Transformationsgesetz von Zuständen unter Lorentztransformationen.

Die Operatoren des räumlichen Impulses sind wie gewöhnlich

$$P_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.4})$$

### C.0.1 Die quantenmechanische Lorentzgruppe

Die quantenmechanische Lorentzgruppe ist isomorph zur Gruppe  $SL(2\mathbf{C})$  der komplexen  $2 \times 2$  Matrizen  $A$  mit Determinante 1,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ac - bd = 1. \quad (\text{C.5})$$

Zu jedem Element  $A \in SL(2\mathbf{C})$  gehört eine eindeutig bestimmte Lorentztransformation  $\Lambda(A)$ , die wie folgt bestimmt ist. Sei

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

$\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sind die *Pauli-Matrizen*. Wir benutzen im folgenden die Notation  $A^\dagger$  für das Adjungierte einer Matrix  $A$ , und  $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$  für Minkowski-raum Indizes. Es gilt die *Fundamentalformel des Spinorkalküls*

$$A\sigma_\alpha A^\dagger = \sigma_\beta \Lambda(A)^\beta_\alpha. \quad (\text{C.7})$$



Umgekehrt ist  $A$  durch  $\Lambda$  bis auf ein Vorzeichen bestimmt.

Wir werden im folgenden noch einige weitere Eigenschaften der Elements  $A$  der q.m. Lorentzgruppe brauchen. Definiert man den antisymmetrischen Tensor  $(\epsilon_{ab})$  in 2 Dimensionen,

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ , sowie  $\sigma_0 = \mathbf{1}$  ( $2 \times 2$  Einheitsmatrix) und

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_i = -\sigma_i$$

so gilt

$$\epsilon A \epsilon^{-1} = A^{\dagger-1}, \quad (\text{C.8})$$

$$\epsilon \bar{\sigma}_\alpha \epsilon^{-1} = \tilde{\sigma}_\alpha \quad (\text{C.9})$$

$$A^{\dagger-1} \tilde{\sigma}_\alpha A^{-1} = \tilde{\sigma}_\beta \Lambda_\alpha^\beta \quad (\text{C.10})$$

Dabei steht  $A^t$  für das Transponierte der Matrix  $A$ , und  $\bar{A}$  für die Matrix mit den komplex konjugierten Matrixelementen. Da die Matrizen  $\sigma_\alpha$  hermitisch sind, ist  $\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha^t$ .

Die erste Gleichung ist äquivalent zu

$$\epsilon \bar{A} \epsilon^{-1} = A^{\dagger-1}. \quad (\text{C.11})$$

Dies beinhaltet die Aussage, daß die Darstellungen  $S(A) = \bar{A}$  und  $S(A) = A^{\dagger-1}$  äquivalent sind.

Die Gleichung (C.8) drückt die Eigenschaft aus, daß  $SL(2, \mathbf{C})$  eine symplektische Gruppe ist. Sie läßt daher die antisymmetrische Bilinearform

$$(z, w) = z^t \epsilon w = z_1 w_2 - z_2 w_1 \quad (\text{C.12})$$

in  $\mathbf{C}^2$  invariant.

Zur Beschreibung von Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  braucht man die folgenden Darstellungen der  $SL(2, \mathbf{C})$ :

1.

$$S(A) = A \quad \text{Dimension 2} \quad (\text{Fundamentale Darstellung})$$

2.

$$S(A) = A^{\dagger-1} \quad \text{Dimension 2} \quad (\text{dazu konjugierte Darstellung})$$

3.

$$S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger-1} \end{pmatrix} \quad \text{Dimension 4} \quad (\text{Dirac-Darstellung}). \quad (\text{C.13})$$

Die Dirac-Darstellung ist reduzibel; sie zerfällt in die andern beiden Darstellungen. Diese sind irreduzibel.

### C.0.2 Dirac- und Weyl-Gleichungen

Wir suchen eine zeitabhängige Schrödinger Gleichung der Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \quad (\text{C.14})$$

mit einem geeigneten Operator  $H$ .

Da Lorentztransformationen Zeitableitung in Raumbildungen transformiert, ist klar, daß die relativistische Invarianz nur erfüllbar sein wird, wenn  $H$  in den Raum-Ableitungen höchstens linear ist, also von der Form

$$H = \frac{\hbar c}{i} \sum_{i=1}^3 \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta m c^2. \quad (\text{C.15})$$

mit linearen Abbildungen (Matrizen)  $\alpha^i, \beta : \Omega \mapsto \Omega$ .

Wegen des speziell relativistischen Zusammenhangs zwischen Energie und Impuls muß außerdem gelten, daß

$$H^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4,$$

$m$  = Ruhemasse. Diese Bedingungen sind erfüllt, falls

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = \delta_{ij} \quad (\text{C.16})$$

und, im Falle der Ruhemasse  $\neq 0$  außerdem

$$\beta \alpha^i + \alpha^i \beta = 0. \quad (\text{C.17})$$

Die erste Gleichung alleine kann auf zwei Weisen durch Pauli's  $2 \times 2$  Matrizen erfüllt werden:

$$\alpha^i = \sigma_i, \quad \text{oder} \quad \alpha^i = -\sigma_i \quad (\text{C.18})$$

Dies führt auf die Weylgleichung für rechts oder linkshändig polarisierte masselose Teilchen vom Spin  $\frac{1}{2}$ , mit 2-komponentiger Wellenfunktion  $\Psi(x) \in \Omega = \mathbf{C}^2$ .  $\Psi$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\hbar c}{i} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \nabla_i \Psi \text{ (rechtshändig)}, \quad (\text{C.19})$$

bzw.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \nabla_i \Psi \text{ (linkshändig)}. \quad (\text{C.20})$$

Man definiert die *Helizität* als Komponente des Spins in Bewegungsrichtung. Für masselose Teilchen ist  $E = |p|c$ , und der Spin-Drehimpuls-Operator ist  $\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ . Die Weyl-Gleichungen sagen, daß  $E = |p|c$  und die Helizität gleich  $\frac{1}{2}$  bzw.  $-\frac{1}{2}$  ist.

Im Fall mit Ruhemasse definiert man die vier neuen Matrizen (sogenannte Dirac  $\gamma$ -Matrizen)

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.21})$$

Die Schrödingergleichung nimmt dann nach Multiplikation mit  $\beta$  die Form an

$$(i\hbar\gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - mc)\Psi = 0. \quad (\text{C.22})$$

Dies ist die Dirac-Gleichung für massive Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$ .

Die Forderung an die Matrizen  $\beta$  und  $\alpha^i$  nimmt die folgende Form an

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = -2\eta^{\alpha\beta}. \quad (\text{C.23})$$

$\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  ist der inverse metrische Tensor im Minkowski-Raum. Diese Forderung kann durch  $4 \times 4$  Matrizen der Form  $\gamma^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \gamma_\beta$ ,

$$\gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ \tilde{\sigma}_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

erfüllt werden. Es gilt

$$\beta = \beta^\dagger, \quad \beta\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^\dagger\beta^\dagger. \quad (\text{C.25})$$

Sowohl die Antivertauschungsrelationen (C.23) als auch die Hermitizitätseigenschaften (C.25) sind unter beliebigen Ähnlichkeitstransformationen

$$\gamma_\alpha \mapsto S^{-1}\gamma_\alpha S, \quad \beta \mapsto S^\dagger\beta S$$

invariant, nicht jedoch die Identifikation  $\beta = \gamma^0$ . Es ist daher klug, diese beiden Grössen zu unterscheiden.

Die Wellenfunktion  $\Psi(x) \in \Omega$  ist nun ein Spaltenvektor mit 4 komplexen Komponenten.  $\Psi^\dagger$  ist demnach ein Zeilenvektor, und man definiert

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \beta \quad (\text{C.26})$$

Die Lorentzkovarianz ist erfüllt, wenn sich die Wellenfunktionen nach den 2-dimensionalen Darstellungen bzw. nach der 4-dimensionalen Darstellung transformieren. Für die Dirac-Gleichung folgt dies aus der folgenden Lorentz-Kovarianz-Eigenschaft der Dirac-Matrizen, die aus den Kovarianzeigenschaften der Matrizen  $\sigma_\alpha$  und  $\tilde{\sigma}_\alpha$  folgt.

$$S(A)\gamma_\alpha S(A)^{-1} = \gamma_\beta \Lambda(A)^\beta{}_\alpha.$$

Im masselosen Fall zerfällt die Dirac-Gleichung in die beiden Weyl-Gleichungen für 2-komponentige Wellenfunktionen. Diese transformieren sich unter der Transformation  $S(A)$  gemäss Gl.(C.13) in sich. Die Kovarianzaussage gilt also auch für die Weyl-Gleichungen. Die oberen 2 Komponenten bilden einen rechtshändigen Weyl-Spinor, die unteren einen linkshändigen. Definiert man

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.27})$$

so projiziert  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$  auf den rechtshändigen Teil und  $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$  auf den linkshändigen.

Schliesslich definieren wir noch die Ladungskonjugation  $\Psi \mapsto \Psi^c$ . Da  $\bar{\Psi}$  ein Zeilenvektor ist, so ist  $\bar{\Psi}^t$  ein Spaltenvektor. Man definiert

$$\Psi^c = \mathcal{C}\bar{\Psi}^t \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{C.28})$$

Die Ladungskonjugationsmatrix  $\mathcal{C}$  erfüllt

$$\mathcal{C}\gamma_\alpha\mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\alpha^t.$$

Als *Majorana-Spinoren* bezeichnet man solche Dirac-Spinoren, die der Bedingung  $\Psi^c = \Psi$  genügen. In Komponenten,  $\Psi = (\phi_1, \phi_2, -\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_1)^t$ . Ein Majoranan Spinor kann aus einem Weyl-Spinor  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^t$  konstruiert werden.