Mathematischer Vorkurs

11.3.2019

Vorlesung 1

Organisatorisches

- Warum Mathe-Vorkurs?

Die Mathematik liefert die bei weitem präziseste und effizienteste Sprache zur Beschreibung und Vorhersage phys. Phänomene!

→ $\boxed{\text{Frühe Aneignung der relevanten mathematischen Techniken ist ganz wesentlicher Teil des Physikstudiums}}$

Mathematik im Physikstudium:

(i) Mathematik für Physiker I – IV
(→ FB Mathematik)
(1.–4. Semester, $\underbrace{\text{2.–5. Semester}}_{\text{Hier relevant}}$)

→ $\boxed{\text{Formal sauberer Aufbau der für die Physik besonders wichtigen Mathematik-Bereiche}}$

(ii) Einführung in die Theoretische Physik I und II

(→ FB Physik) (1.–2. Semester)

→ Frühes Einüben und Anwenden wichtiger Rechentechniken, insbes. für die Klassische Mechanik und Elektrodynamik

(iii) Mathematischer Vorkurs

(→ FB Physik) (11.3.2019 – 29.3.2019)
(= Drei Wochen)

→ Konsolidierung, Auffrischung und Homogenisierung des für die Physik besonders wichtigen Schulwissens sowie erste Erweiterungen.

Vorlesung: Täglich 9:00 – 10:30 Uhr

Dozent: Marco Zagermann
Email: Marco.Zagermann@desy.de

Übungen: Täglich 10:45 – 12:15 Uhr
und
13:45 – 15:15 Uhr

Wichtig!

→ **Vier Gruppen**

Mewes (SR 2)
Leppla-Weber (SR 3)
Otterpohl (SR 4)
Frahm (SR 5)

<u>Darüber hinaus:</u>

<u>Zwei Zusatztutorien:</u>

(Jeweils Dienstag, Mittwoch, Donnerstag)
15:30 Uhr – 17:00 Uhr

(i) <u>Grundkurs:</u>

Sandner-Rodriguez (SR2)

<u>oder</u>

(ii) <u>Fortgeschrittene</u>:

Baktash (SR 1)

→ Eins von beiden wärmstens empfohlen.

Inhalt und Vorlesungsplan

1. Funktionen
2. Diffentiation
3. Integration
4. Komplexe Zahlen
5. Vektorrechnung

1 Funktionen

1.1 Grundlegende Begriffe

(Reelle) Funktionen

Seien $\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$ Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{D}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$$

"ist Teilmenge von"
(Kann auch ganz $\mathbb{R}$ sein)

Eine (reelle) Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in \mathbb{D}$ genau ein Element $y = f(x) \in \mathbb{W}$ zuordnet:

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$$
$$f : x \mapsto f(x) = y$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{D} = \text{"Definitionsbereich" (alias "Urbildmenge", "Urbild")} \\ \mathbb{W} = \text{"Wertebereich" (alias "Wertevorrat", "Zielmenge")}\end{array}}$$

"Argument"
"Urbild"

$$x \in \mathbb{D} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{W}$$

"Funktionswert"
"Bild"

"Verarbeitungsvorschrift"

Zur Bedeutung von "jedem" und "genau ein":

Wird einem Urbild $x \in \mathbb{D}$

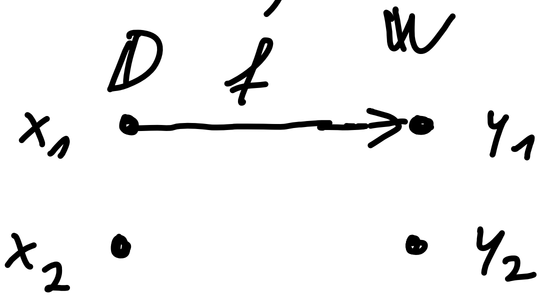
(i) kein Bild

oder

(ii) mehr als ein Bild

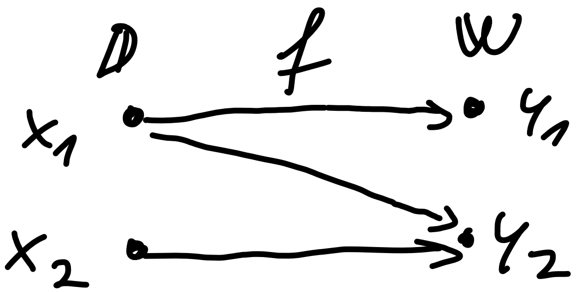
zugeordnet, so ist dies <u>keine</u> Funktion, z.B.

(i)



→ <u>Keine</u> Funktion, denn x_2 hat <u>kein Bild</u>!

(ii)



→ <u>Keine</u> Funktion, denn x_1 hat <u>zwei Bilder</u>

Beispiele für Funktionen:

(i) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\setminus$ "ohne"

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

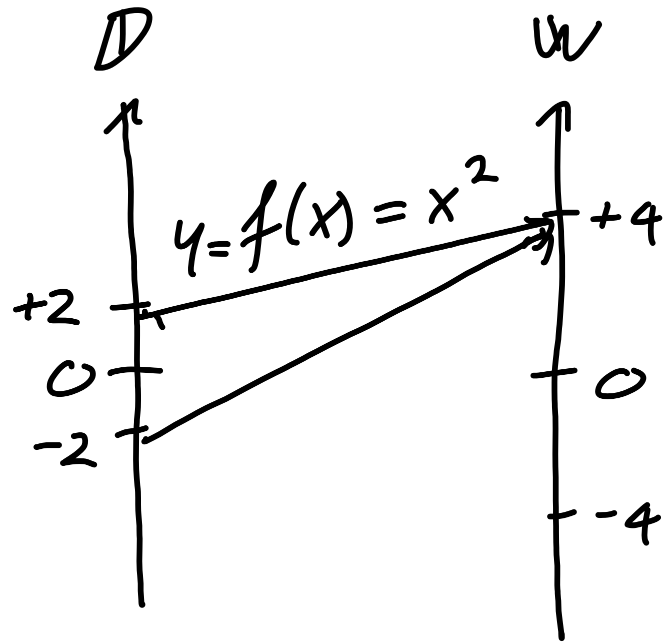
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$\to$ keine Funktion, da $0 \in \mathbb{D}$ kein Bild hat)

(ii) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$$y = f(x) = x^2 \geq 0$$



An diesem zweiten Beispiel sieht man:

(i) Der <u>Wertebereich</u> $\mathbb{W}$ muss <u>nicht</u> notwendigerweise komplett ausgeschöpft werden, d.h. es kann Elemente $y \in \mathbb{W}$ geben, die nicht als Funktionswerte $f(x)$ eines Elementes $x \in \mathbb{D}$ auftreten (Hier z.B. $y = -4$)
($\exists\ y \in \mathbb{W}$ ohne Urbild)
"Es gibt"

(ii) Es <u>kann</u> Elemente $y \in \mathbb{W}$ geben, die Funktionswerte mehrerer Argumente $x \in \mathbb{D}$ sind, z.B. hier

$$y = 4 = \begin{cases} 2^2 & = f(2) \\ (-2)^2 & = f(-2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\ y \in \mathbb{W} \text{ mit} \\ \text{mehr als einem} \\ \text{Urbild} \end{array} \right)$$

Definition:

Die Menge der tatsächlich auftretenden Funktionswerte,

$$\boxed{f(\mathbb{D}) := \{ f(x) \in \mathbb{W} \mid x \in \mathbb{D} \}}$$

"ist definiert durch"

"Für die gilt"

heißt "Bildbereich" (oder "Bild von $\mathbb{D}$ unter f")

(→ Der Bildbereich ist eine Teilmenge des Wertebereichs)

⇒ Jedes Element $y \in f(\mathbb{D})$ hat mindestens ein Urbild in $\mathbb{D}$

Im Beispiel $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{+,0} := \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$

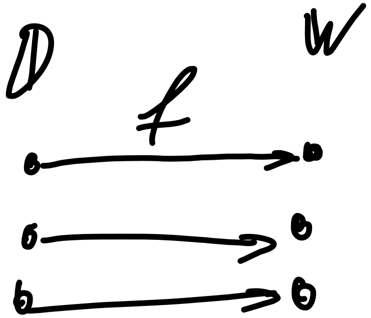
<u>Terminologie:</u>

(i) Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt <u>injektiv</u>, wenn gilt:

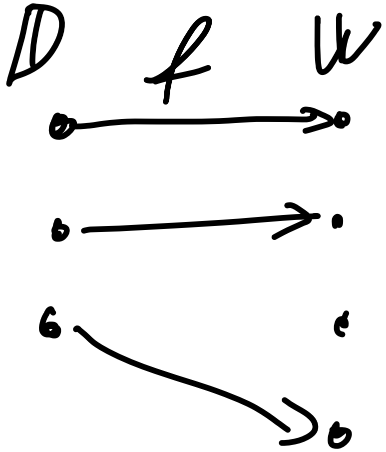
$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

$\Longrightarrow$ Jedes <u>Element</u> y im Wertebereich $\mathbb{W}$ wird <u>höchstens einmal angenommen</u>.

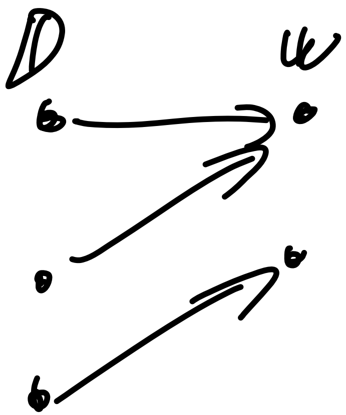
Illustration:



$\Rightarrow$ injektiv



$\Rightarrow$ injektiv



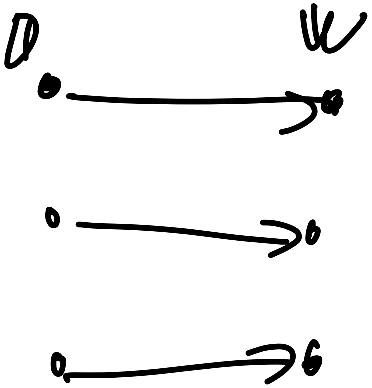
$\Rightarrow$ nicht injektiv.

(ii) Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt <u>surjektiv</u>, wenn gilt

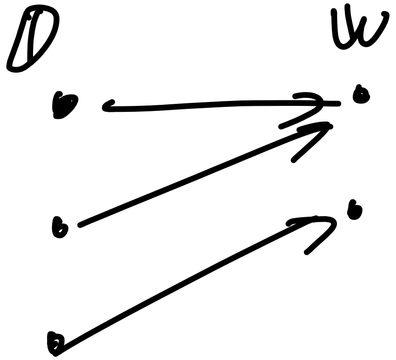
$$\boxed{f(\mathbb{D}) = \mathbb{W}} \quad (\text{Bildbereich} = \text{Wertebereich})$$

$\Longleftrightarrow$ Jedes Element y im Wertebereich $\mathbb{W}$ wird <u>mindestens einmal angenommen</u>

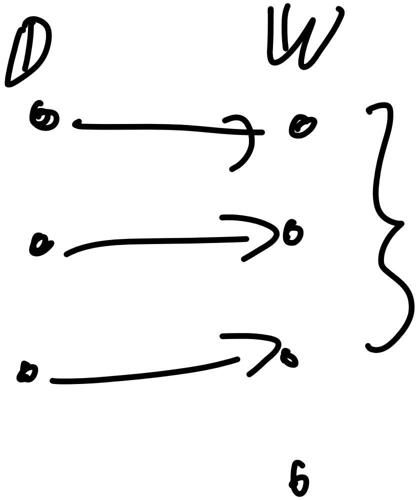
<u>Illustration</u>



$\to$ Surjektiv



→ surjektiv

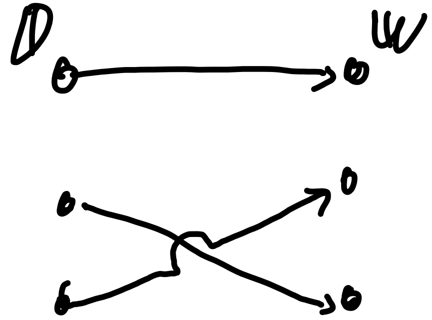


$f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{W}$ → nicht surjektiv.

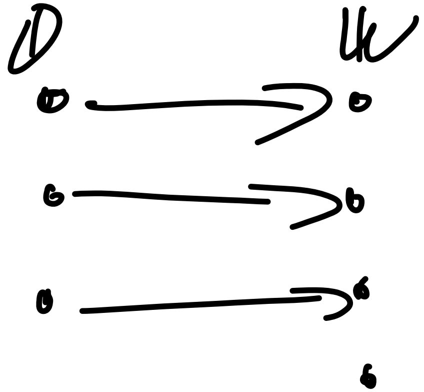
<u>Bem:</u> Durch Verkleinerung von $\mathbb{W}$ auf $f(\mathbb{D})$ kann eine nicht surjektive Funktion surjektiv "gemacht" werden.

(iii) Eine Funktion $f : D \to W$ heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl **injektiv** als auch **surjektiv** ist.

Illustration:

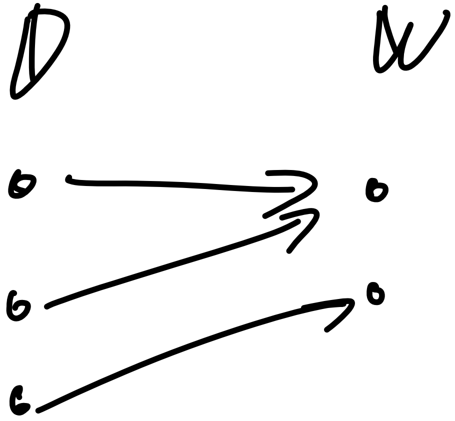


$\Rightarrow$ bijektiv



$\Rightarrow$ injektiv, aber nicht surjektiv

$\Rightarrow$ **nicht bijektiv**



→ surjektiv, aber nicht injektiv

→ nicht bijektiv

⇒ <u>Bijektive</u> Funktionen lassen sich <u>umkehren</u>!

→ Details später.

Vorlesung 2

12. 3. 2019

https://unith.desy.de/teaching/lectures/vorkurs2019

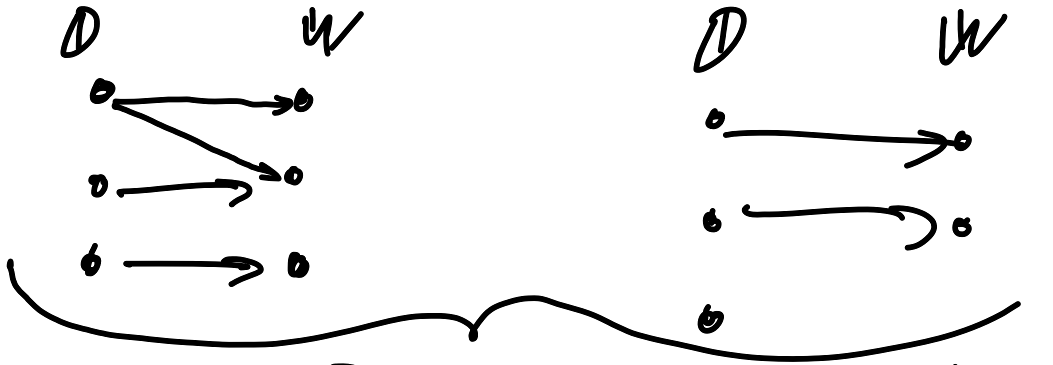
Letztes Mal: Reelle Funktionen

$\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} f &: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W} \\ f &: x \longmapsto f(x) = y \in \mathbb{W} \end{aligned}\right\}$$

Jedem $x \in \mathbb{D}$ wird genau ein $y = f(x) \in \mathbb{W}$ zugeordnet

Dies sind keine Funktionen:



(sonden Beispiele für "Relationen")

Der Graph einer Funktion:

$\mathbb{D}\times\mathbb{W} \ni (x,y)$

Kartesisches Produkt

Die Menge $\Gamma_f := \{(x,y) \mid x \in \mathbb{D},\ y = f(x)\} \subset \mathbb{D}\times\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^2$

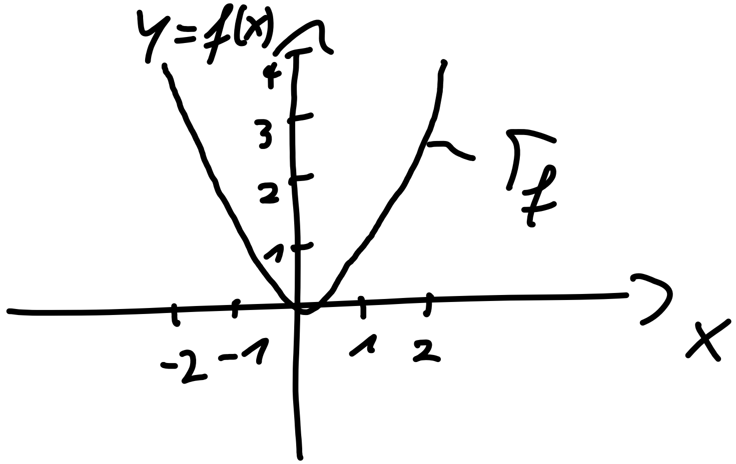
heißt der "Graph der Funktion f"

Beispiel:

$\mathbb{D} = [-2,2] \leftarrow$ Alle reellen Zahlen x mit $-2 \leq x \leq 2$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



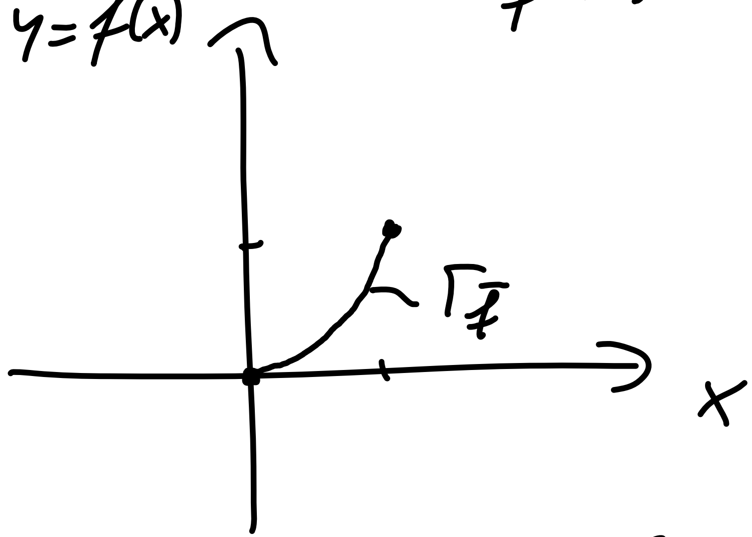
Beispiel 2:

$$\tilde{f} : \tilde{\mathbb{D}} \to \tilde{\mathbb{W}}$$

$$\tilde{\mathbb{D}} = [0,1] \quad , \quad \tilde{\mathbb{W}} = \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$

$$\tilde{f}(x) = x^2$$

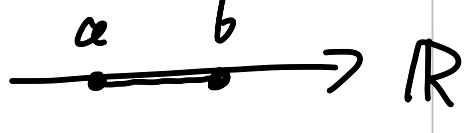


Achtung: f und $\tilde{f}$ haben dieselbe Funktionsvorschrift, sind aber aufgrund des unterschiedlichen Definitionsbereiches ($\mathbb{D}$ vs. $\tilde{\mathbb{D}}$) nicht dieselben Funktionen. (z.B. ist f weder surjektiv noch injektiv, $\tilde{f}$ ist injektiv)

Notation für reelle Intervalle:

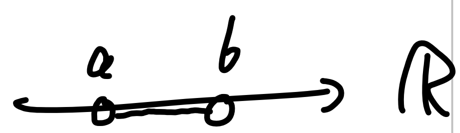
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



$=$ geschlossenes Intervall (von a bis b)
(enthält beide Randpunkte a, b)

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



$=$ offenes Intervall
(enthält a, b nicht)

- $\left.\begin{array}{l} (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \end{array}\right\}$ halboffene Intervalle

1.2 Eigenschaften von Funktionen

Nullstellen

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{D}$ ein Punkt mit

$$\boxed{f(x_0) = 0}$$

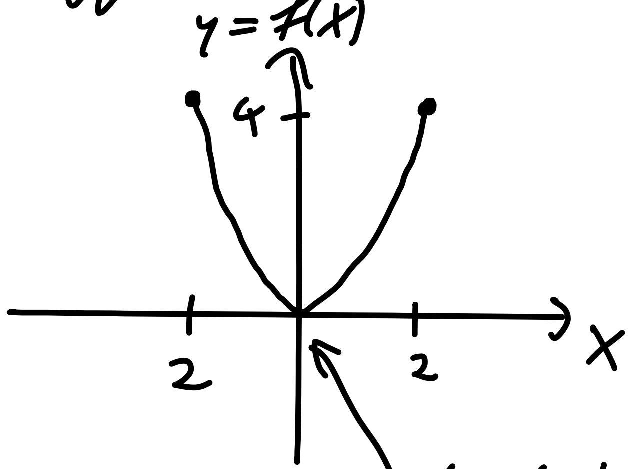
Dann heißt x_0 eine Nullstelle von f und

$$\boxed{N_f := \{ x \in \mathbb{D} \mid f(x) = 0 \}}$$

die Menge der Nullstellen von f.

Beispiele.

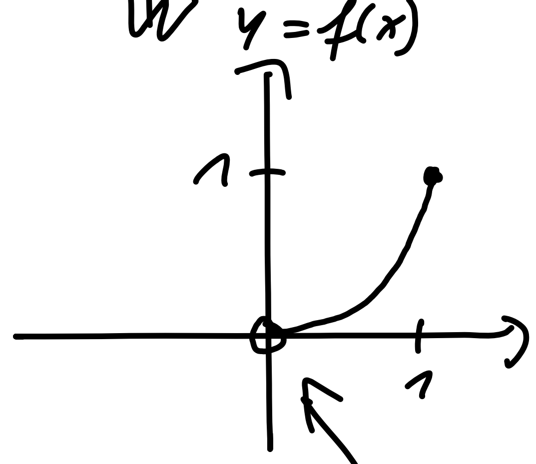
(i) $f: \underbrace{[-2,2]}_{D} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{W}$, $f(x) = x^2$



Nullstelle bei $x = 0$

$\Rightarrow N_f = \{0\}$

(ii) $f : \underbrace{(0,1]}_{D} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{W}$, $f(x) = x^2$

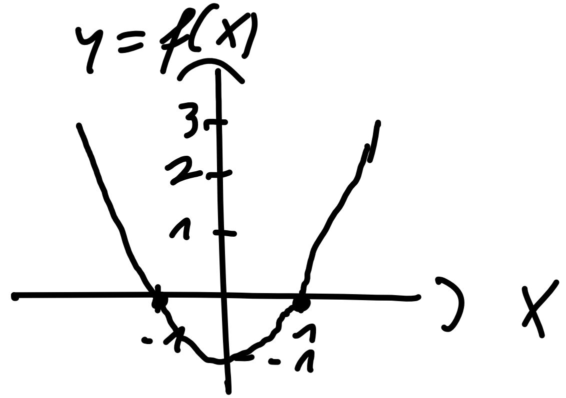


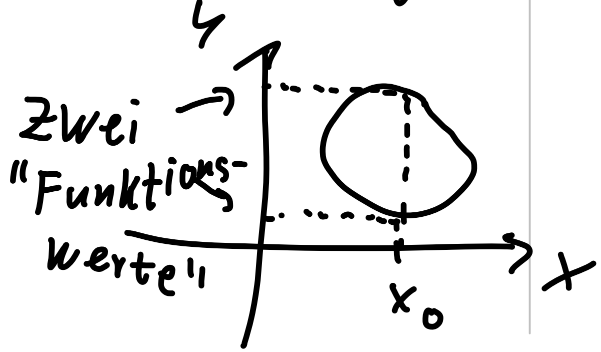
$\Rightarrow$ Keine Nullstelle

$\Leftrightarrow N_f = \emptyset$

(iii) $f : \underbrace{\mathbb{R}}_{D} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{W}$, $f(x) = x^2 - 1$

Kein Graph einer Funktion





$\Rightarrow$ Zwei Nullstellen

$\Rightarrow N_f = \{-1, 1\}$

Nullstellen findet man durch Auflösen von $f(x)=0$ nach x.

Symmetrie von Funktionen

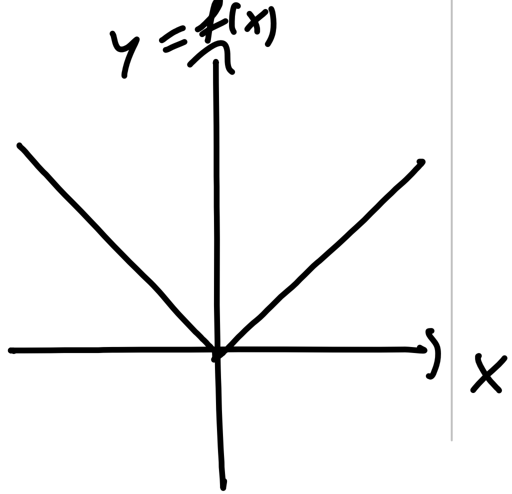
- Eine Funktion f heißt gerade, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

$\rightarrow$ Der Graph Γ_f ist dann spiegelsymmetrisch zur y-Achse:

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= |x| \end{aligned}\right\} \quad f(x) = |x| = |-x| = f(-x)$$



- Eine Funktion f heißt <u>ungerade</u>, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

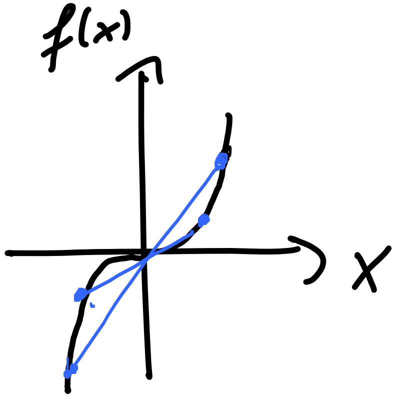
$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

→ Der Graph Γ_f ist dann <u>punktsymmetrisch zum Ursprung</u> $(x,y) = (0,0)$.

<u>Beispiel:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

$(-x)^3 = (-x)\cdot(-x)(-x) = -x^3$

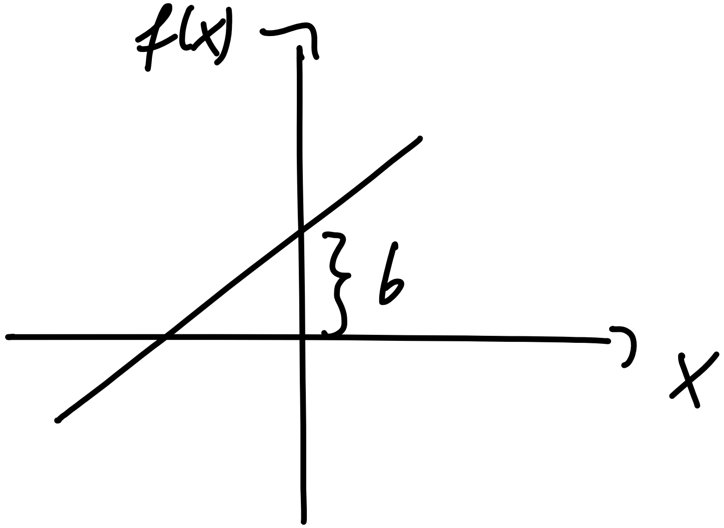
$$f(x) = x^3 = -\underbrace{(-x)^3}_{-x^3} = -f(-x)$$



Bemerkung:

Die meisten Funktionen sind **weder gerade noch ungerade**,

z.B. $f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0 \neq b$

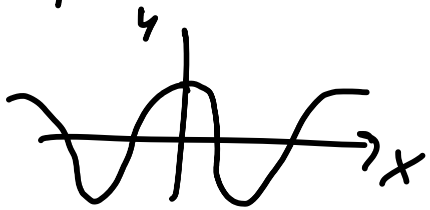


Weitere Beispiele

$(\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R})$

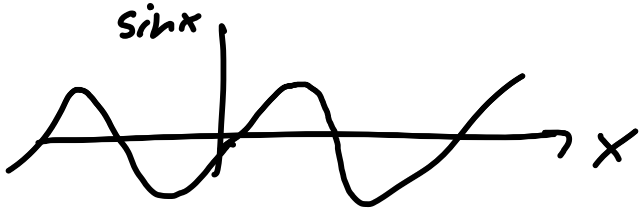
Gerade

- $f(x) = x^2 \quad \left(f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x) \right)$
- $f(x) = \cos x \quad \left(f(x) = \cos x = \cos(-x) = f(-x) \right)$



Ungerade:

- $f(x) = x \quad \left(f(x) = x = -(-x) = -f(-x) \right)$
- $f(x) = \sin x \quad \left(f(x) = \sin x = -\sin(-x) = -f(-x) \right)$



Monotonie von Funktionen

Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine reelle Funktion.

f heißt...

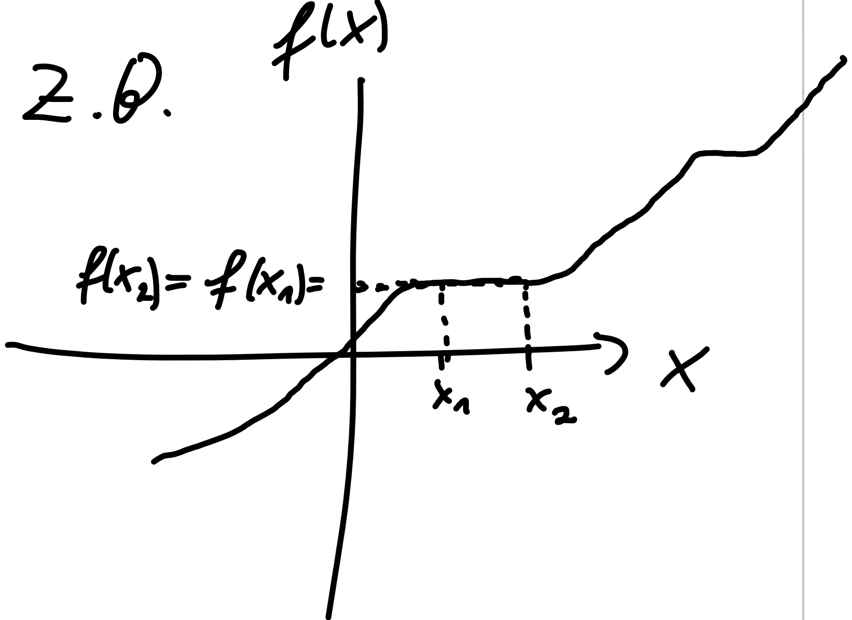
(i) ... monoton steigend, Falls $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ mit

"Für alle"

$x_1 < x_2$ gilt:

$$\boxed{f(x_1) \leq f(x_2)}$$

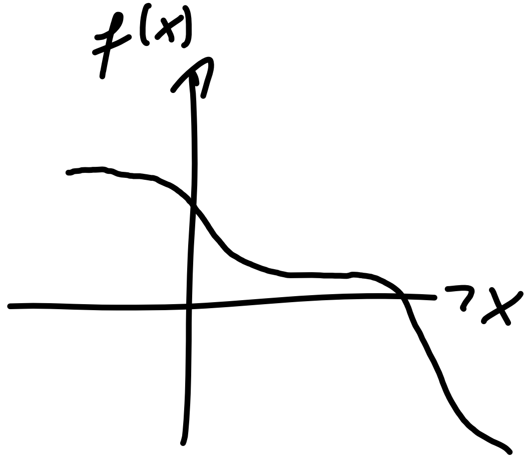
z.B.



(ii) ... <u>monoton fallend</u> falls $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$

mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$\boxed{f(x_1) \geq f(x_2)}$$

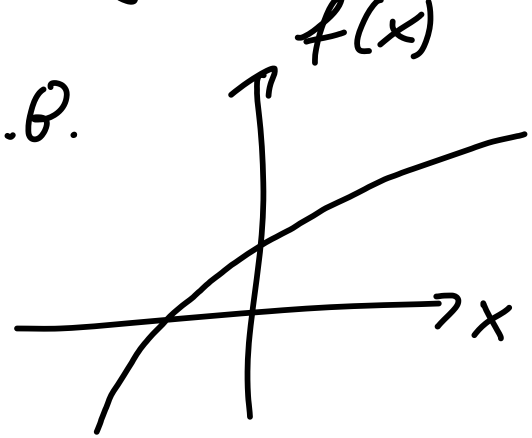


(iii) ... <u>streng monoton steigend</u>, falls

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ mit $x_1 < x_2$ gilt

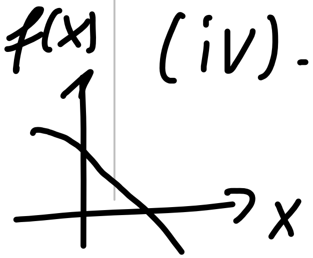
$$\boxed{f(x_1) < f(x_2}$$

z.B.



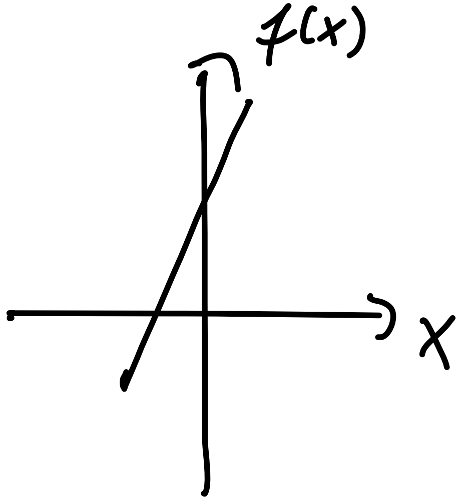
(iv) ... <u>streng monoton fallend</u>, falls

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$



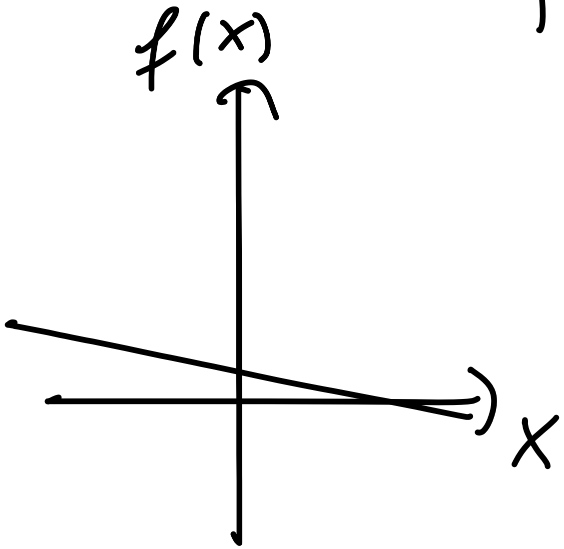
Beispiele:

- $f(x) = 2x + 3$



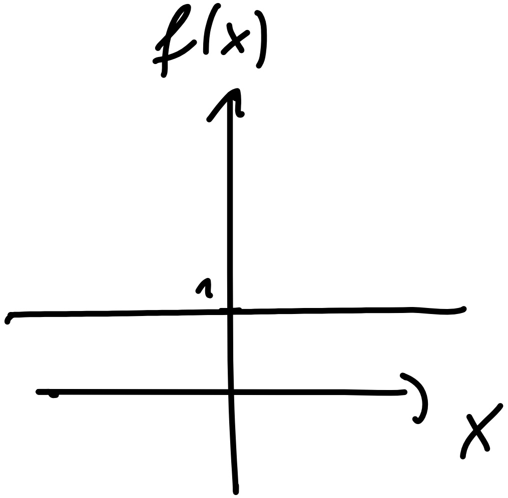
(streng) monoton steigend

- $f(x) = -x + 2$



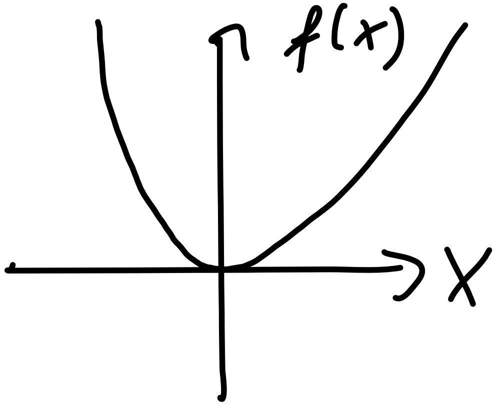
(streng) monoton Fallend.

- $f(x) = 1$



Sowohl monoton steigend als auch monoton Fallend nicht jedoch streng monoton steigend oder streng monoton Fallend.

- $f(x) = x^2$



weder (streng) monoton steigend noch (streng) monoton fallend.

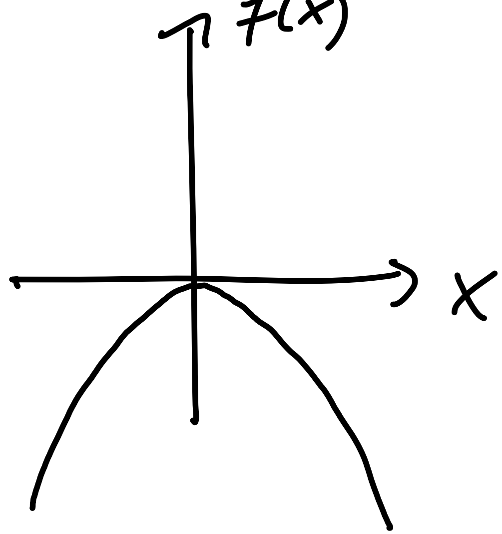
<u>Aber:</u>
- streng monoton steigend für $x > 0$
- streng monoton fallend für $x < 0$.

Beschränktheit

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt nach oben beschränkt, falls es ein $B \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\boxed{B \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D}}$$

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$

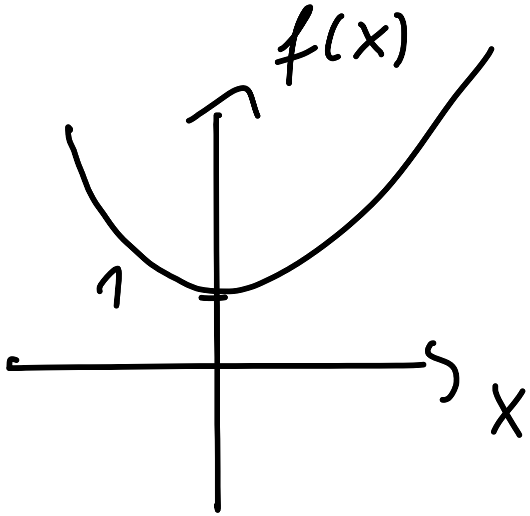


ist nach oben beschränkt mit $B = 0$ (oder $B > 0$)

Analog: $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt *nach unten beschränkt*, Falls es ein $B \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\boxed{B \leq f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{D}}$$

Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$



Wähle $B \leq 1$

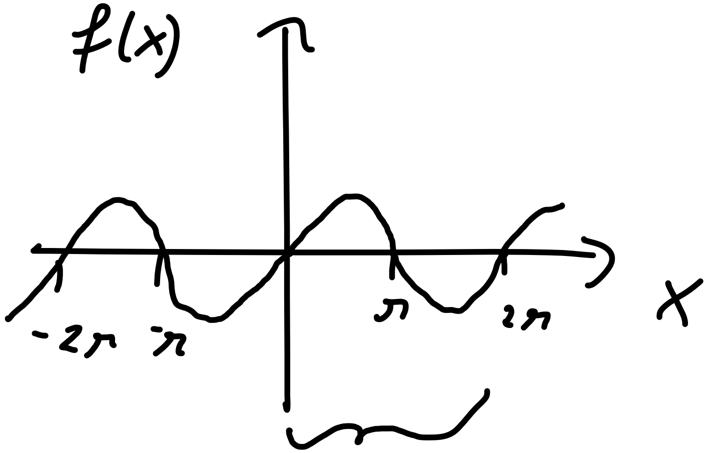
Periodizität

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt __periodisch__ (mit Periode P), falls für alle $x \in D$ gilt:

$$\boxed{f(x+P) = f(x)}$$

__Beispiele__:

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \implies P = 2\pi$



$P = 2\pi$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin(\omega x) \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega}$$

<u>denn</u>: $f(x+p) = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$

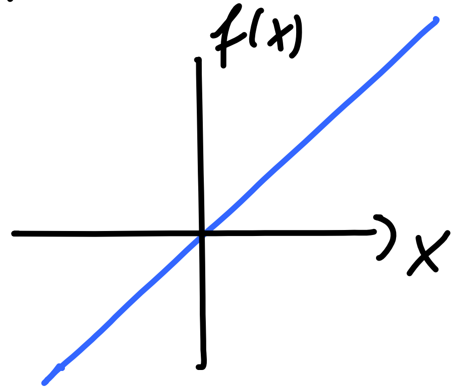
$= \sin(\omega x + 2\pi) = \sin(\omega x) = f(x)$

Weil sin die Periode $p = 2\pi$ hat

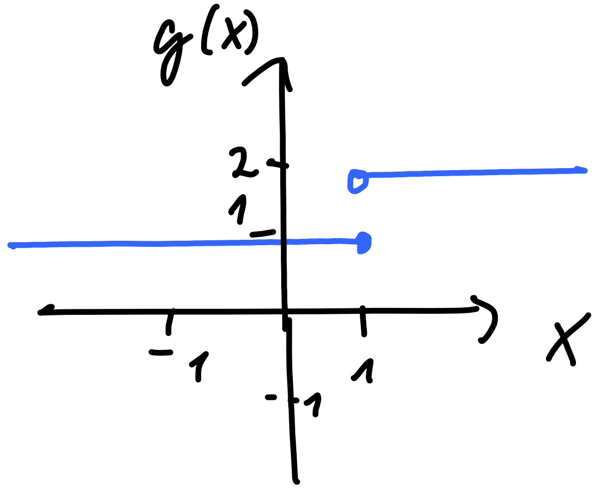
Stetigkeit

Betrachte die beiden Funktionen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{Für alle } x \leq 1 \\ 2 & \text{Für alle } x > 1 \end{cases}$



<u>Wichtiger Unterschied</u>:

f hat <u>keine "Sprünge"</u> (Diskontinuitäten), aber g hat <u>einen "Sprung"</u> (Diskontinuität) bei $x=1$.

f ist ein Beispiel für eine "<u>stetige</u>" Funktion, g ist dagen nicht "<u>stetig</u>"

Genaue Definition von "stetig":
nächstes Mal.

Vorlesung 3

13.3.2019

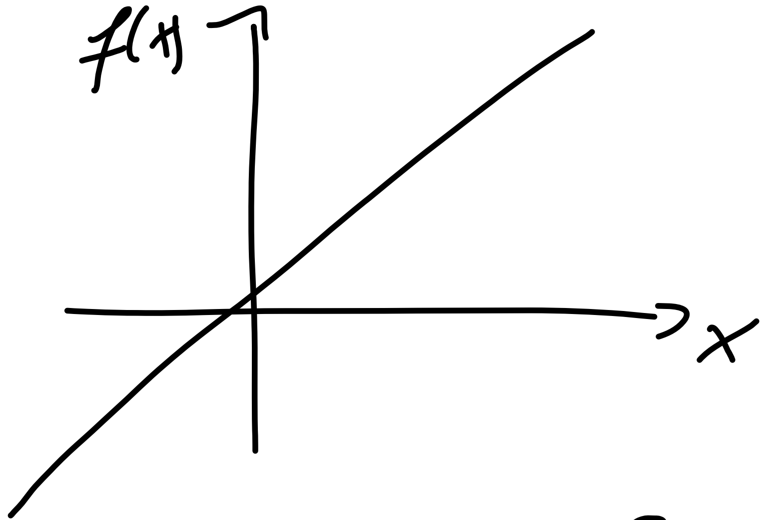
Literatur:

- Michael Ruhrländer
  "Brückenkurs Mathematik"
- Klaus Hefft
  "Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik"

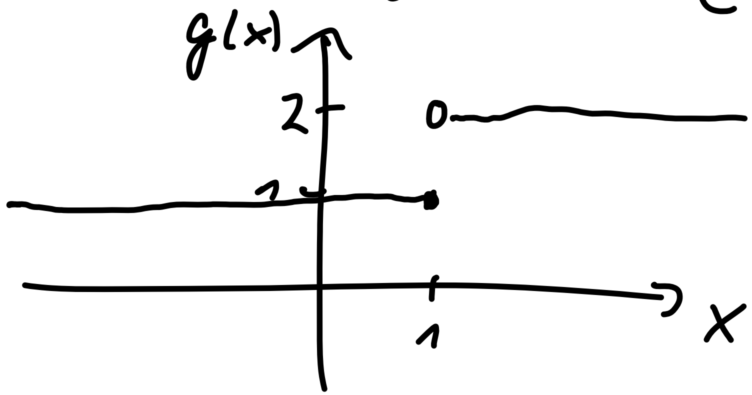
Stetigkeit von Funktionen

Betrachte:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (Identitätsabbildung)



- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \leq 1 \\ 2 & \text{für alle } x > 1 \end{cases}$



Wichtiger Unterschied:

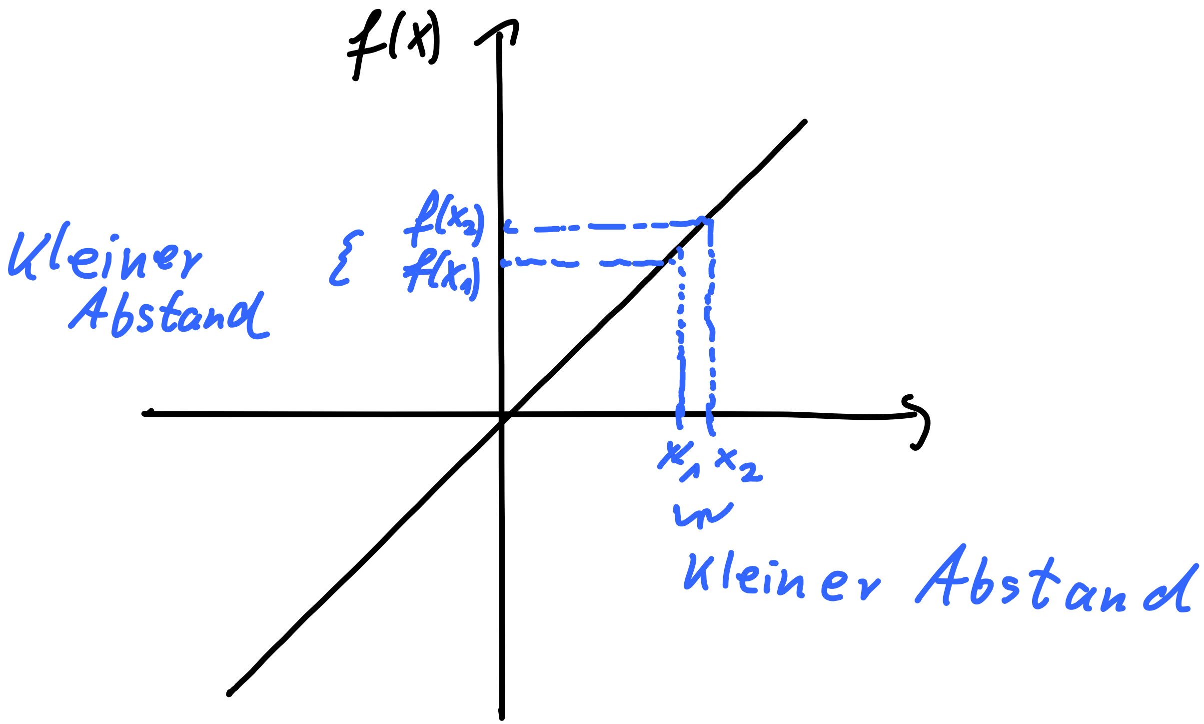
$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ hat keine "Sprünge"} \\ g \text{ hat einen "Sprung" bei } x=1 \end{array}}$

Man sagt: f ist überall "stetig"
g ist bei $x=1$ nicht "stetig"

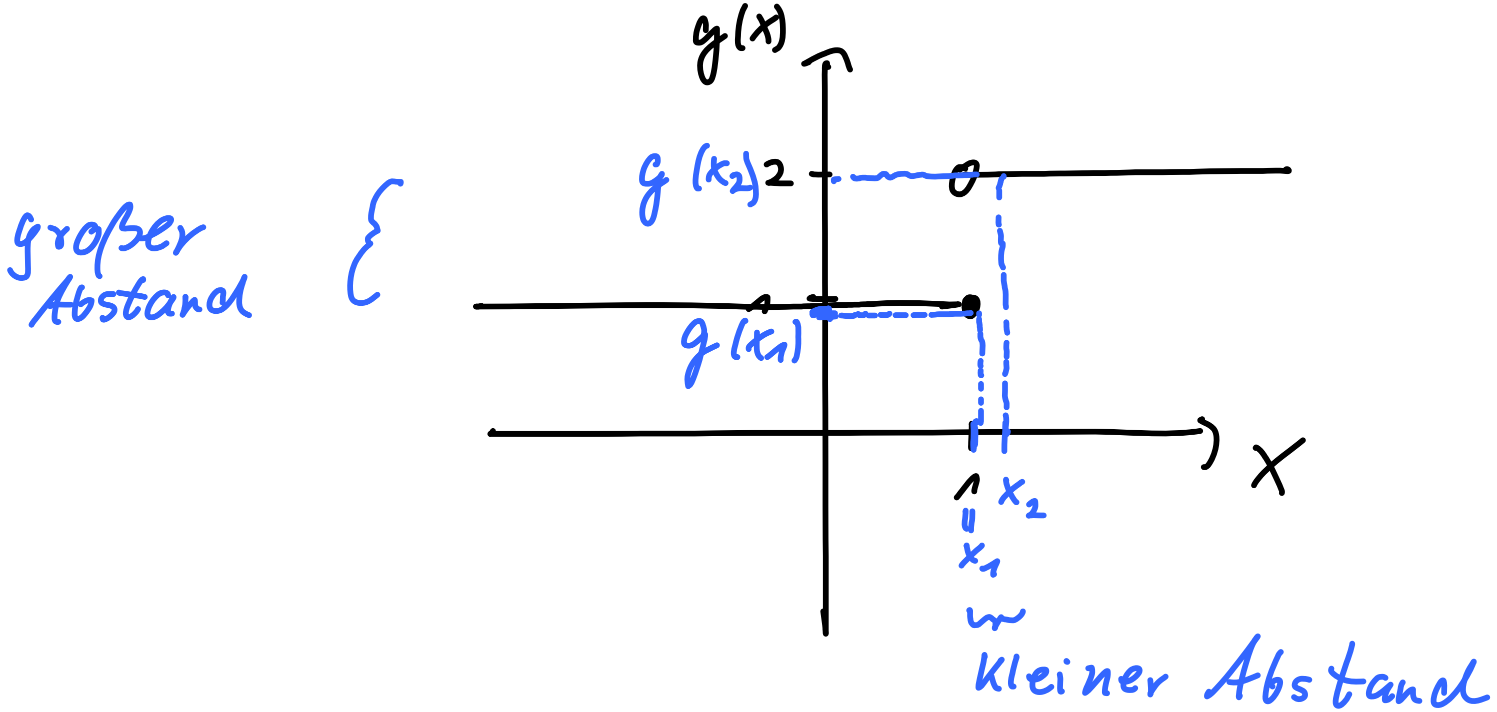
Zwei mathematisch besser handhabbare Formulierungen des obigen Sachverhalts:

Formulierung 1:

Liegen $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ nah beieinander, so liegen auch $f(x_1), f(x_2) \in \mathbb{W}$ nah beieinander:



Bei g ist dies für $x_1 = 1$ und $x_2 > 1$
nicht der Fall:

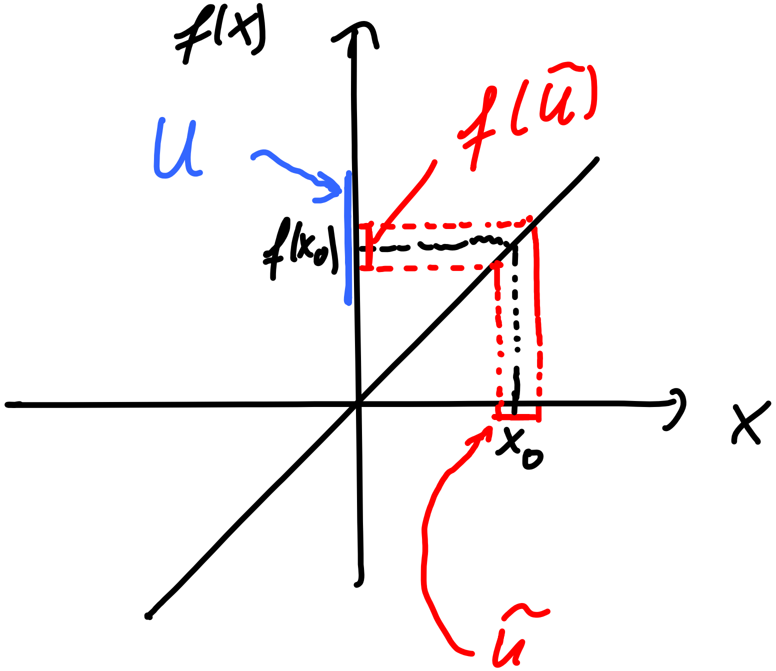


$\Rightarrow$ Eine stetige Funktion bildet benachbarte Argumente aus $\mathbb{D}$ auf benachbarte Funktionswerte in $\mathbb{W}$ ab.

Formulierung 2 :

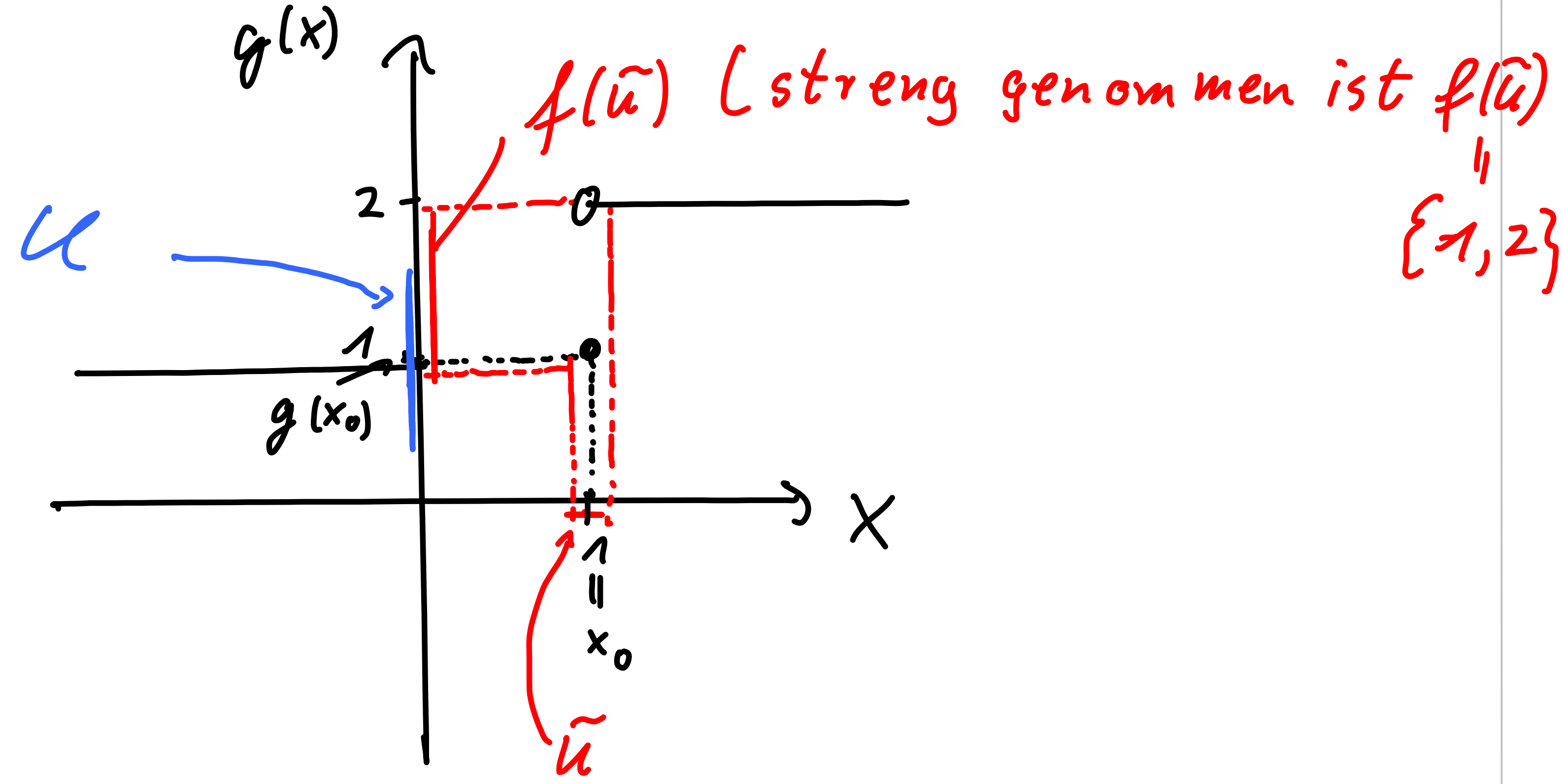
Sei $x_0 \in \mathbb{D}$ mit Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{W}$.

$\Rightarrow$ Zu jeder noch so kleinen Umgebung U von $f(x_0)$ in $\mathbb{W}$ gibt es stets eine hinreichend kleine Umgebung $\hat{U}$ von x_0 in $\mathbb{D}$, sodass alle Funktionswerte von Punkten aus $\hat{U}$ auch vollständig in U liegen : $f(\hat{U}) \subset U$



Für g ist dies bei $x_0 = 1$ <u>nicht</u> der Fall:

$x_0 = 1$ heit $g(x_0) = 1$



Formulierung 2 ist die Grundlage für die in der Mathematik häufig benutzte Definition der Stetigkeit:

Def.1:

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt in einm Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\boxed{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{D} \text{ mit } |x - x_0| < \delta}$$

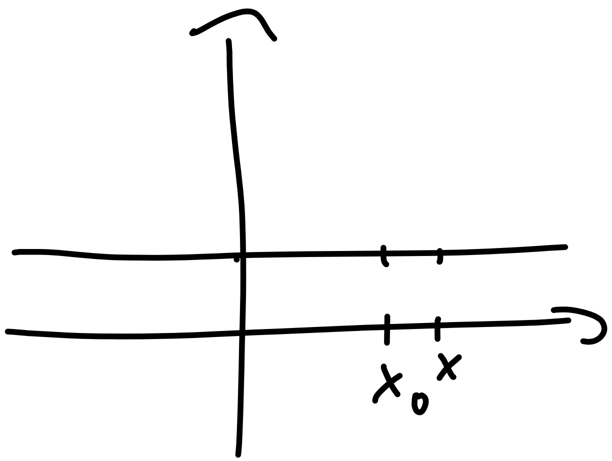
Übersetzung in die Formulierung 2 von oben:

$$U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$$\hat{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$|\underbrace{x_0 - \delta}_{x} - x_0| = |-\delta| = \delta$$

Frage: $f(x) = 1$



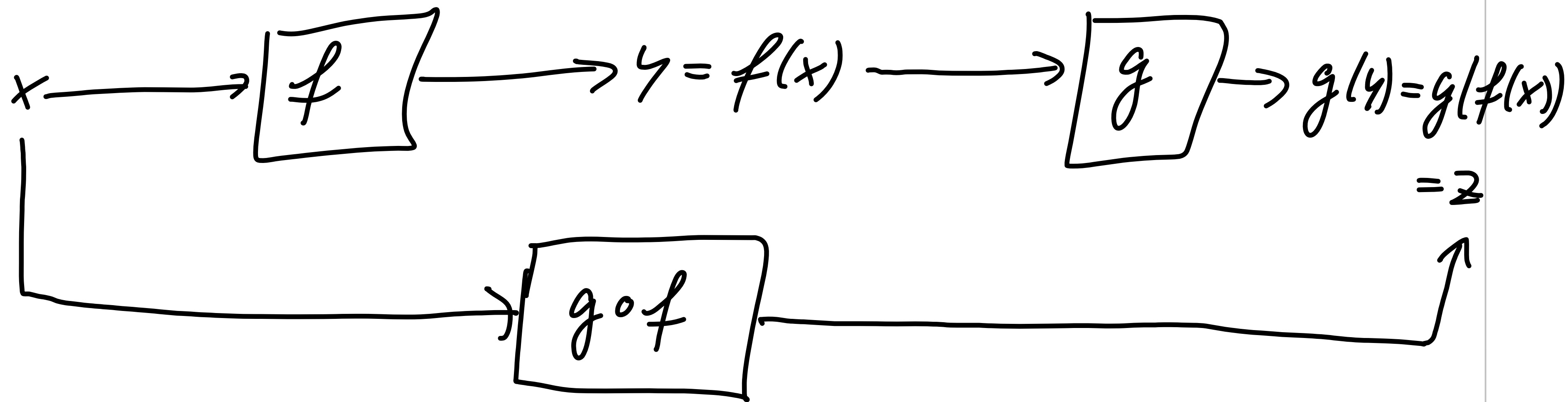
Def 2:

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt stetig wenn sie an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig ist (im Sinne von Def 1).

1.3 Verkettung und Umkehrung von Funktionen

Verkettung (alias "Hintereinanderausführung") von Funktionen

Grundidee:



("g Kringel f" oder "g nach f")

M.a.W. $g \circ f$ ist die Funktion, die denselben Effekt hat wie die Hintereinanderausführung von (erst) f und (dann) g

<u>Etwas genauer:</u>

Seien $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$

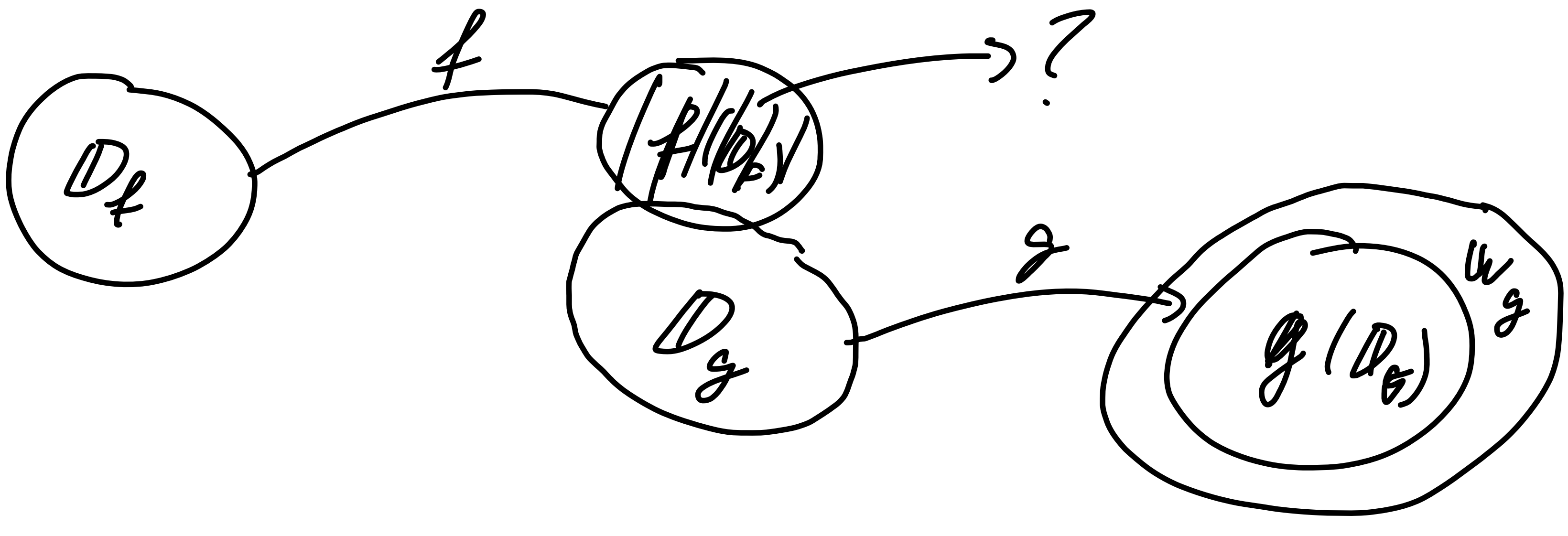
$g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{W}_g$

zwei Funktionen mit

$$f(\mathbb{D}_f) \subset \mathbb{D}_g$$

($\to$ g kann nur dann auf alle Bilder von f wirken)

Gegenbeispiel:



Dann ist die Verkettung $g \circ f$ die Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} g \circ f &: \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_g \\ g \circ f &: x \longmapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{aligned}}$$

Beispiele:

(i) $f(x) = x + 10$ $\quad (\mathbb{D}_f = \mathbb{R},\ f(\mathbb{D}_f) = \mathbb{R} = \mathbb{W})$

$g(x) = x^2$ $\quad (\mathbb{D}_g = \mathbb{R},\ g(\mathbb{D}_g) = \mathbb{R}_{+,0} \subset \mathbb{R} = \mathbb{W})$

(bzw. $g(y) = y^2$)

$\Rightarrow f(\mathbb{D}_f) \subset \mathbb{D}_g$

$(\mathbb{R} \subset \mathbb{R})$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{x+10}_{y}) = (x+10)^2$$

$$\Rightarrow g \circ f : x \mapsto (x+10)^2$$

<u>Bemerkung:</u>

Für $f \circ g$ ergibt sich stattdessen:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 10$$

$$\neq (x+10)^2 = g \circ f(x)$$

$\Rightarrow$ Verkettungen sind i.d.R. <u>nicht vertauschbar</u>.

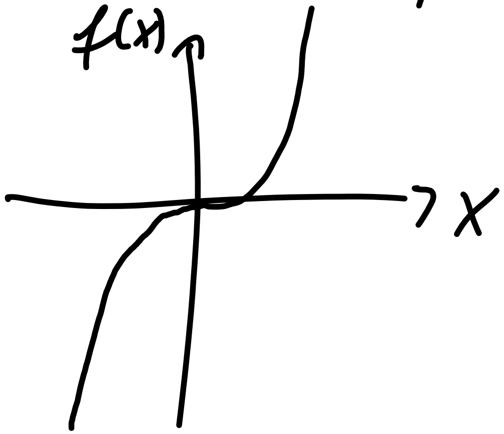
(ii) $f(x)=x^3 \quad (\mathbb{D}_f=\mathbb{R},\ \mathbb{W}_f=f(\mathbb{D}_f)=\mathbb{R})$

$g(x)=\frac{1}{x-8} \quad (\mathbb{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{8\},\ \mathbb{W}_g=\mathbb{R})$

"ohne"

Problem:

Für $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ist $f(\mathbb{D}_f)=\mathbb{R}$



Aber: $\mathbb{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{8\}$

Also: $f(\mathbb{D}_f)\not\subset \mathbb{D}_g \Rightarrow g\circ f$ ist nicht auf ganz $\mathbb{D}_f$ wohldefiniert.

<u>Ausweg</u>: Wähle $\tilde{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = x^3$

$\Rightarrow f(\tilde{D}_f) = \mathbb{R} \setminus \{8\} = D_g$

$8 = 2^3$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ existiert auf ganz $\tilde{D}_f$ und ist gegeben durch:

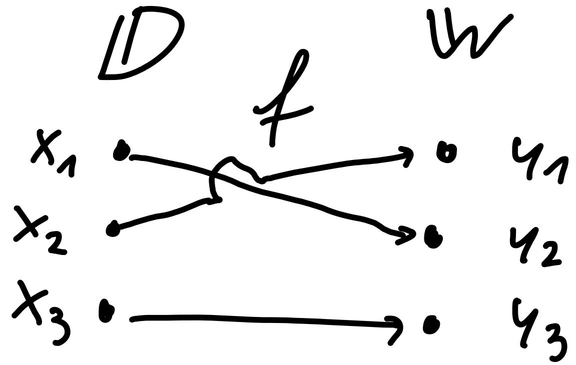
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \frac{1}{x^3 - 8}$$

$$g(y) = \frac{1}{y-8}$$

Umkehrfunktionen

Idee: Für eine bijektive Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$

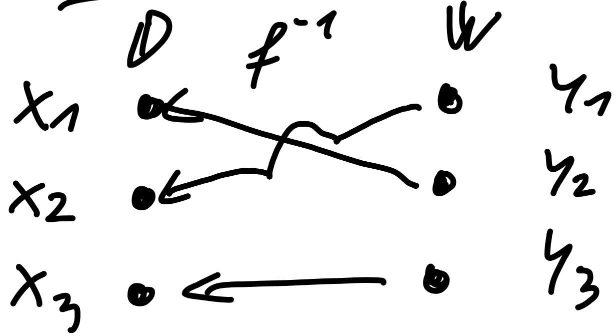
(z.B.



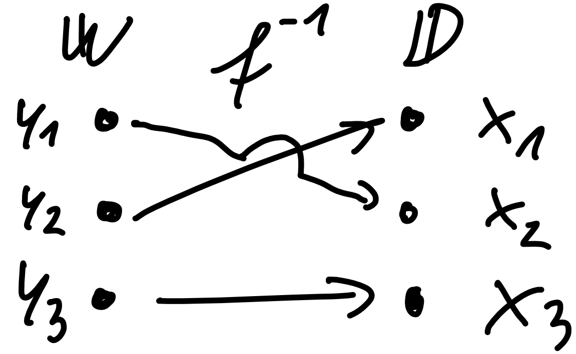
)

Kann man die Zuordnungen auch in umgekehrter Richtung vornehmen und erhält man wieder eine Funktion, die man die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ nennt.

Für das obige Beispiel:



bzw.



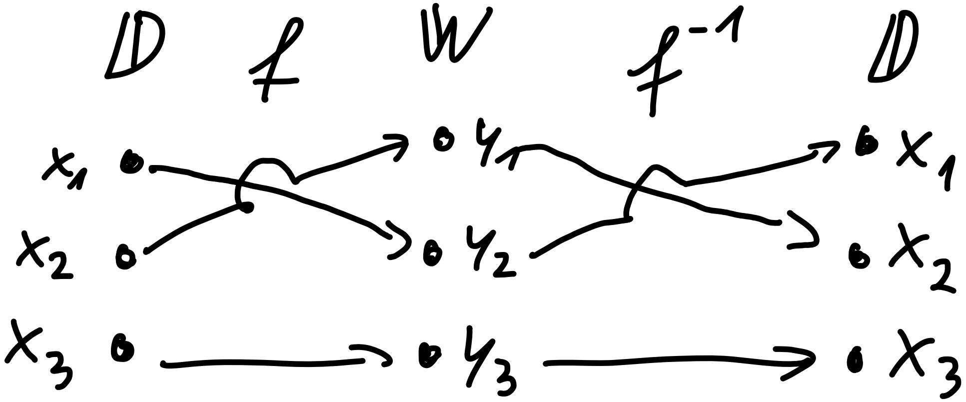
Die Verkettung $f^{-1} \circ f$ (ebenso für $f \circ f^{-1}$) ergibt die Identitätsfunktion:

$$f^{-1} \circ f\,(x) = x$$

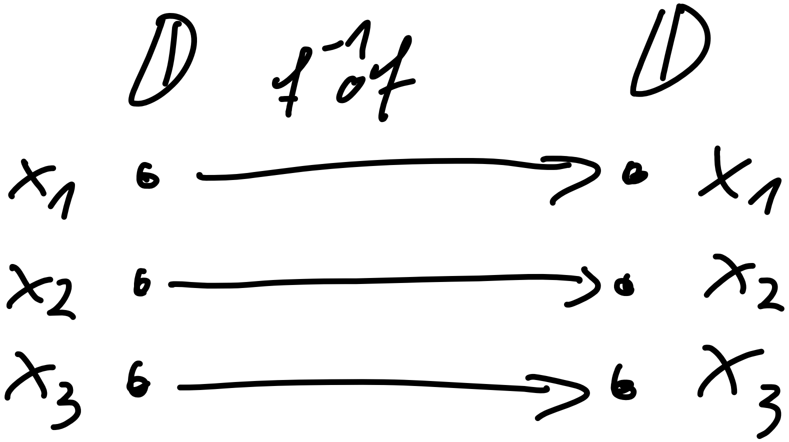
$$\left(f \circ f^{-1}(x) = x \right),$$

denn f^{-1} macht ja die Auswirkungen von f genau rückgängig:

z.B.



$\Longleftrightarrow$



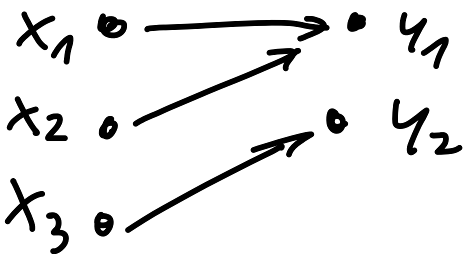
$$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = x$$

bzw.

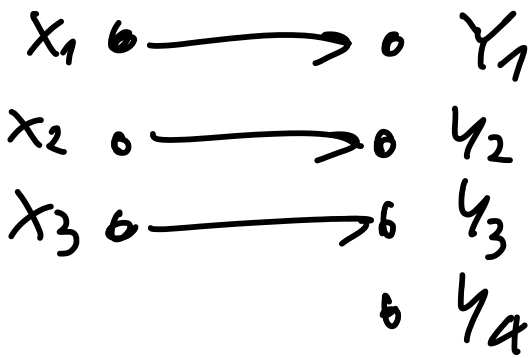
$$f^{-1} \circ f(x_1) = x_1$$
$$f^{-1} \circ f(x_2) = x_2$$
$$f^{-1} \circ f(x_3) = x_3$$

Warum bijektiv?

Falls f nicht injektiv:



Falls f nicht surjektiv:



<u>Man definiert daher:</u>

Für eine <u>bijektive</u> Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ gibt es eine Funktion $g: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ mit

$$\boxed{g \circ f(x) = x \quad \underset{\uparrow \text{ „für alle"}}{\forall} \; x \in \mathbb{D}}$$

Diese Funktion g heißt die <u>Umkehrfunktion</u> von f und wird mit f^{-1} bezeichnet. (also $g = f^{-1}$)

Vorlesung 4 — 14. 3. 2019

Letztes Mal:

Umkehrfunktionen:

Sei $f: D \to W$ bijektiv. Dann existiert eine Funktion $f^{-1}: W \to D$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in D}$$

f^{-1} heißt die Umkehrfunktion von f.

Bemerkungen:

(i) $f^{-1}(x)$ ist nicht der Kehrwert von $f(x)$, also i. A. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

Beispiel: $f(x) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x$

$(f^{-1}(y) = y)$

Denn: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x$ ✓

Insbesondere: $f^{-1}(x) = x \neq \frac{1}{x} = \frac{1}{f(x)}$

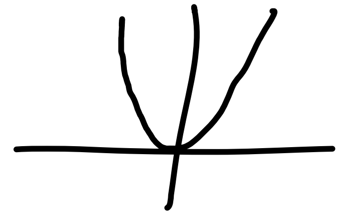
(ii) Ist $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ <u>injektiv</u>, aber <u>nicht surjektiv</u>, z.B.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & & \mathbb{W} \\ & & \\ \left.\begin{array}{ccc} x_1 & \longrightarrow & y_1 \\ x_2 & \longrightarrow & y_2 \\ x_3 & \longrightarrow & y_3 \end{array}\right\} f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{W} \\ \quad\quad\quad\quad\quad y_4 \end{array}$$

So gibt es zwar keine Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$, wohl aber $f^{-1}: f(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$, da $\tilde{f}: \mathbb{D} \to f(\mathbb{D})$ bijektiv ist.

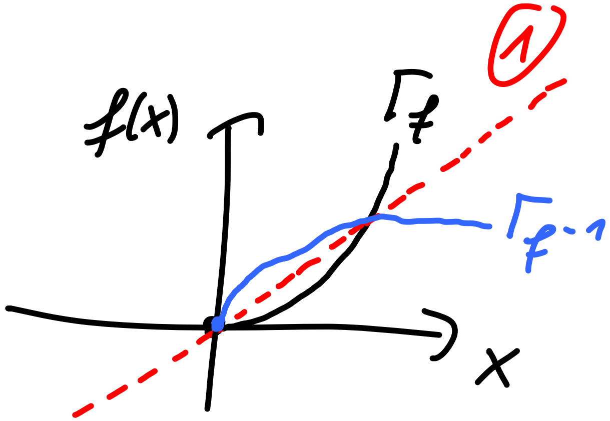
(iii) Der <u>Graph</u> $\Gamma_{f^{-1}}$ von f^{-1} ergibt sich durch Spiegelung von Γ_f an der Winkelhalbierenden durch den 1. Quadranten, z.B.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



$\Rightarrow$ nicht bijektiv

$\Rightarrow$ Schränke D auf $[0,\infty) = \mathbb{R}_{+,0}$ ein und wähle $W = f(D)$



M.a.W.: $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$

$$f(x) = x^2$$

ist bijektiv auf $D \subset [0,\infty)$ und somit umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Denn: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

(iv) Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ bestimmt man wie folgt:

(1) Funktionsgleichung hinschreiben:

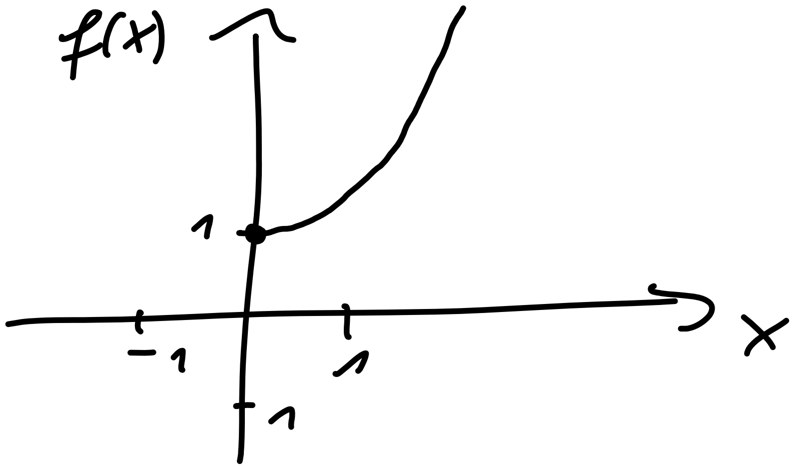
$$y = f(x)$$

(2) Auflösen nach x : $x = f^{-1}(y)$

(3) Überprüfen, ob $f^{-1} \circ f(x) = x$ ist.

Beispiel:

$$f: \underbrace{[0,\infty)}_{\mathbb{D}} \to \underbrace{[1,\infty)}_{\mathbb{W} = f(\mathbb{D})}, \quad f(x) = 1 + x^2$$



ist bijektiv und somit umkehrbar.

(1) $\quad y = 1 + x^2$

(2) $\quad x^2 = y - 1 \iff x = \pm\sqrt{y-1}$

Plus oder Minus

Welches Vorzeichen muss man nehmen?

x muss in $\mathbb{D}$ sein $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow$ Pluszeichen ist richtig

$$x = f^{-1}(y) = +\sqrt{y-1}$$

(3) Probe:

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\underbrace{1+x^2}_{y}) = \sqrt{\underbrace{(1+x^2)}_{y}-1}$$

$$= \sqrt{x^2} = x \quad \checkmark$$

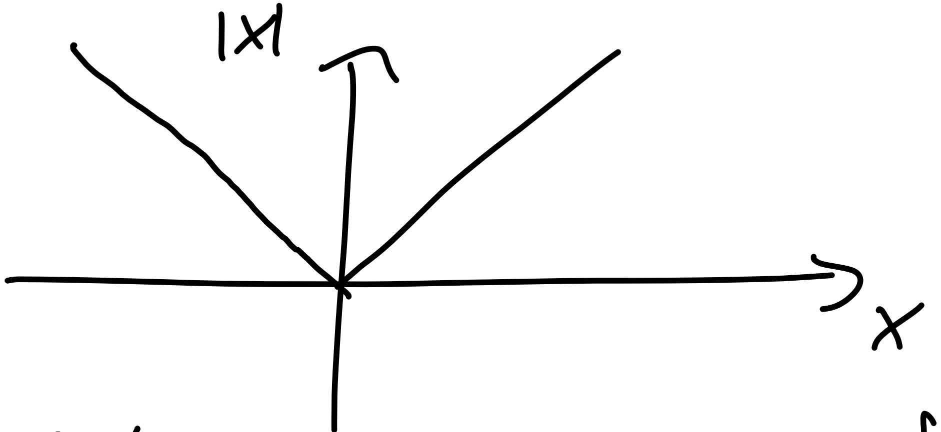
$x \geq 0$

1.4 Spezielle Funktionen

Funktionen mit "Knicken" oder "Sprüngen"

(i) Betragsfunktion

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



$\Rightarrow f(x) = |x|$ ist:

- stetig
- nach unten beschränkt
- nicht monoton steigend oder fallend
- nicht periodisch
- gerade
- nicht injektiv
- nicht surjektiv

$\Rightarrow$ nicht umkehrbar (es sei denn, $\mathbb{D}$ wird verkleinert)

Bemerkung:

Es gilt:

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} \quad \forall \; x \in \mathbb{R}}$$

Beweis:

Für jedes $a \geq 0$ gilt: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a} = a$

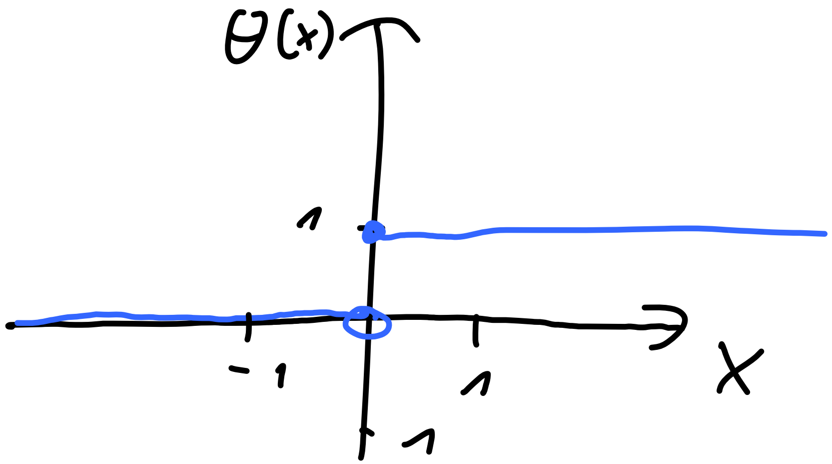
$\Rightarrow x \geq 0 = \sqrt{x^2} = x = |x|$

$x < 0 = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\underbrace{(-x)}_{a>0} \cdot \underbrace{(-x)}_{a>0}} = \underbrace{(-x)}_{a>0} = |x|$

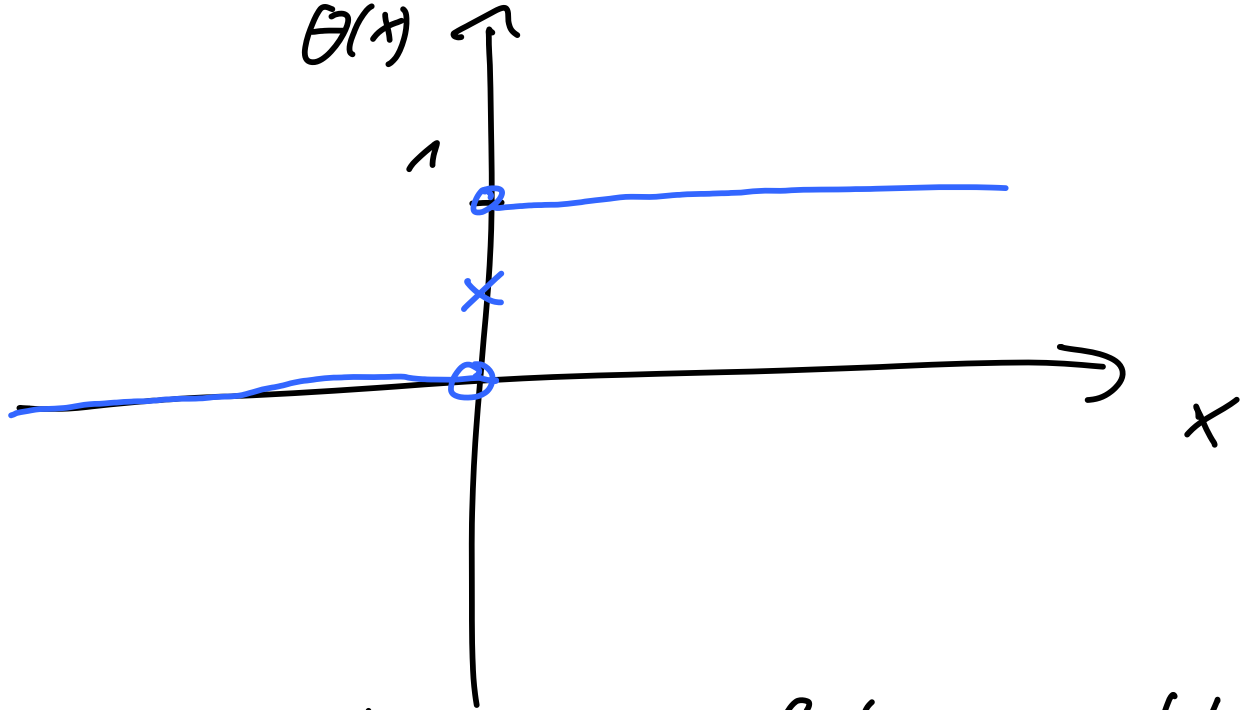
(ii) Die Heaviside'sche Sprungfunktion

$$\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (\text{bzw. } \Theta : \mathbb{R} \to \{0,1\})$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



Bemerkung: Für den Funktionswert $\Theta(0)$ gibt es auch andere Konventionen, z. B. $\Theta(0) = \frac{1}{2}$



(Der genaue Wert von $\Theta(0)$ spielt in vielen Anwendungen keine Rolle)

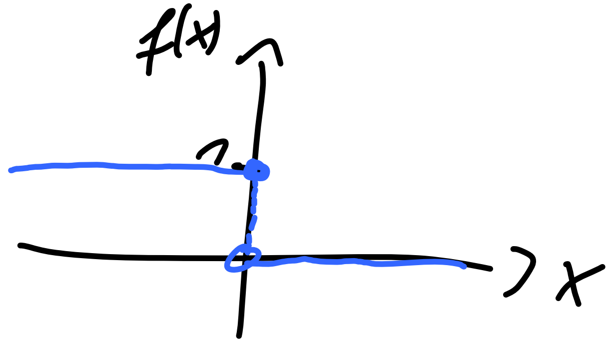
Θ ist:

- bei $x = 0$ nicht stetig
- monoton steigend (aber nicht streng monoton steigend)
- nach oben und unten beschränkt
- Nicht periodisch
- Weder gerade noch ungerade
- Nicht injektiv und nur für $W = \{0, 1\}$ surjektiv $\rightarrow$ nicht umkehrbar

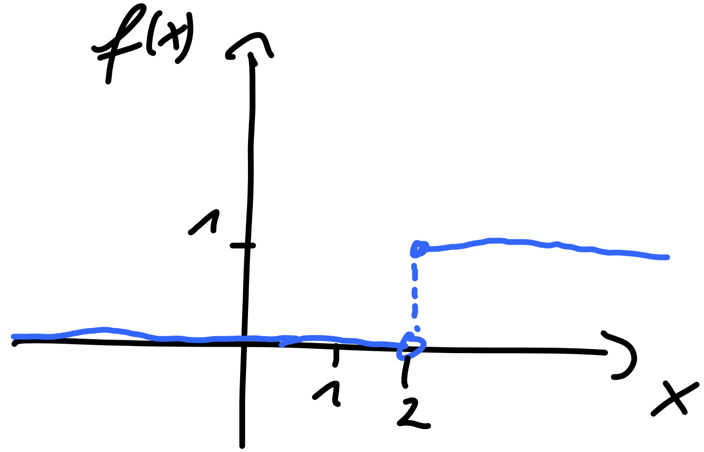
Mit Θ lassen sich viele weitere Funktionen konstruieren:

z. B.

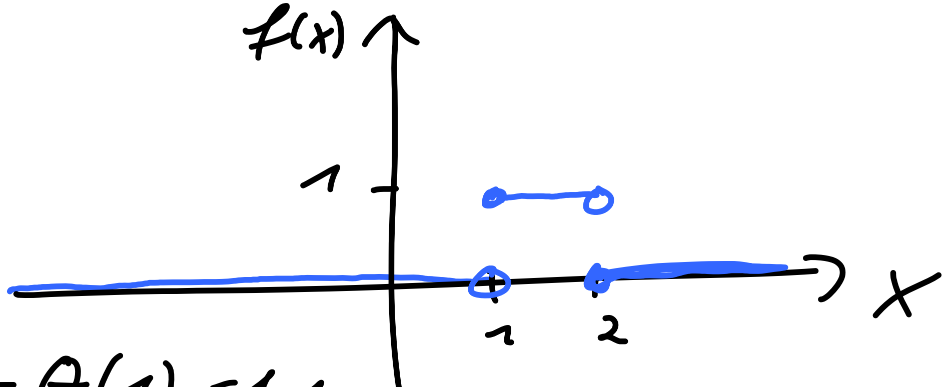
- $f(x) = \Theta(-x)$



- $f(x) = \Theta(x-2)$



- $f(x) = \Theta(x-1) - \Theta(x-2)$

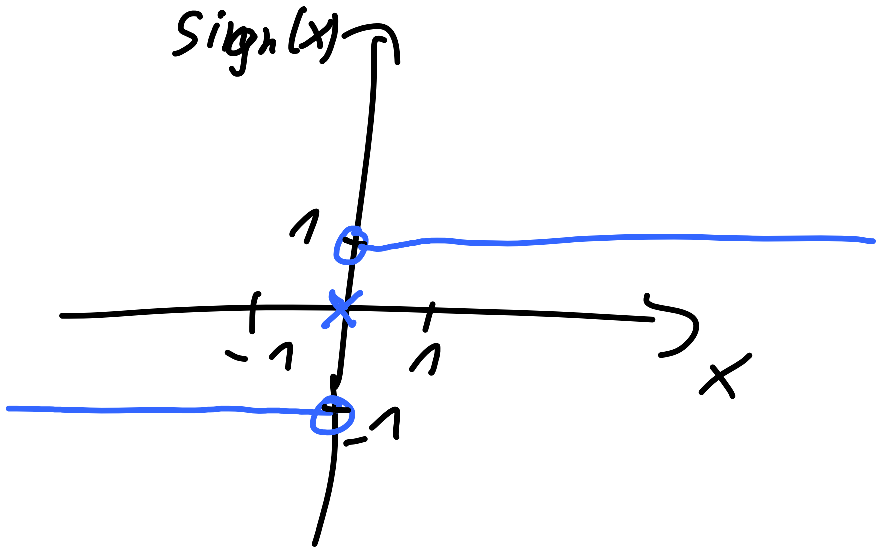


$$f(2) = \Theta(2-1) - \Theta(2-2)$$
$$= \underbrace{\Theta(1)}_{1} - \underbrace{\Theta(0)}_{1} = 1-1=0$$

$$f(3) = \Theta(3-1) - \Theta(3-2) = \Theta(2) - \Theta(1) = 1-1=0$$

(iii) Die Vorzeichenfunktion ("Signumfunktion")

$$\boxed{\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}}$$



(Für $x \neq 0$ gilt: $\operatorname{sign} x = \frac{x}{|x|}$)

Potenz Funktionen

(i) Natürliche Exponenten

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}) \\ = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}}$$

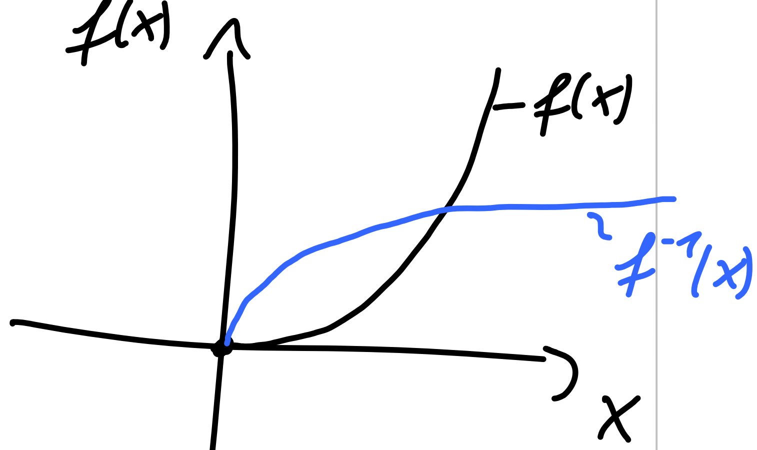
Fall 1 n = gerade $(n = 2m)$

- gerade
- nicht injektiv
- nicht surjektiv

$\hookrightarrow$ Nicht umkehrbar, es sei denn, man verkleinert $\mathbb{D}$ und wählt $\mathbb{W} = f(\mathbb{D})$

Standardmäßig nimmt man zum Umkehren:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{D} &= [0,\infty) = \mathbb{R}_{+,0} \\ \tilde{W} &= f(\tilde{D}) = [0,\infty) \end{aligned}}$$



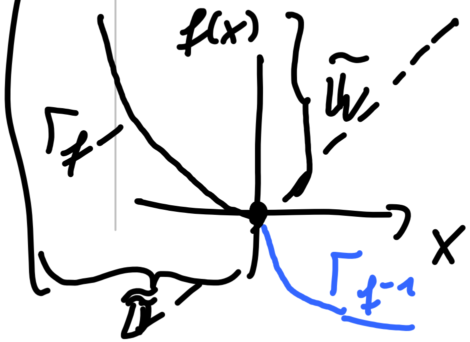
→ ist <u>bijektiv</u> und somit <u>umkehrbar</u>

$$\boxed{f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}}$$ ("<u>n-te Wurzel aus y</u>")

<u>Probe</u>: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^n) = \sqrt[n]{x^n} = x$

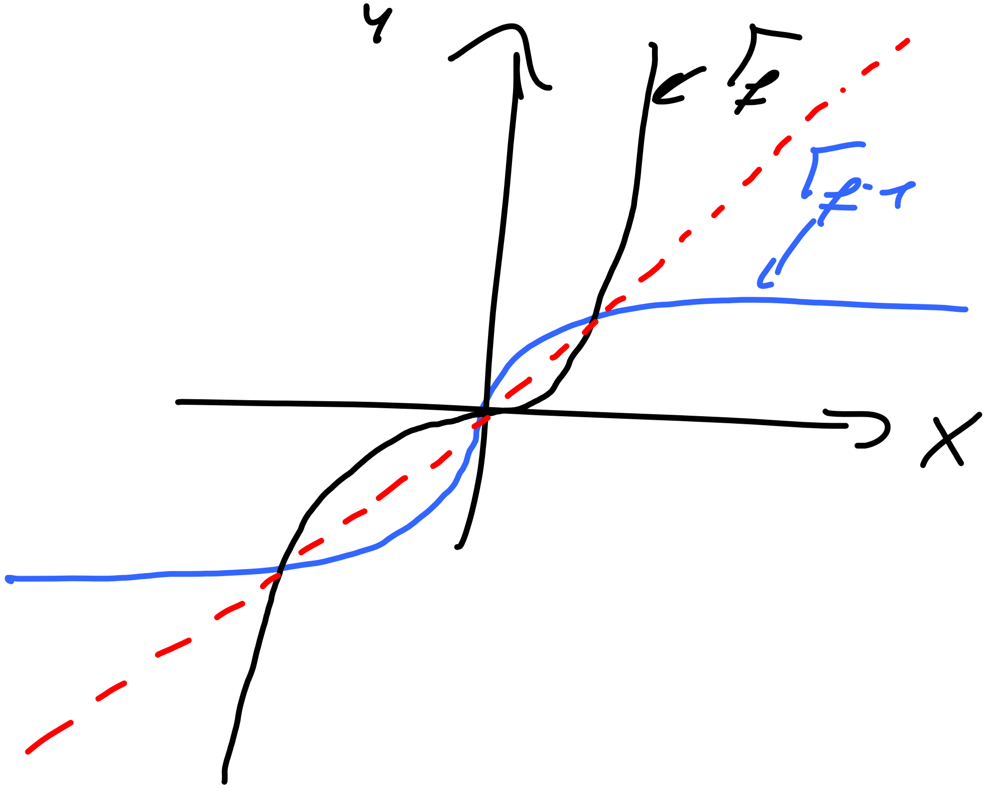
(<u>Alternativ</u>: $\tilde{D} = (-\infty, 0]$, $\tilde{W} = f(\tilde{D}) = [0,\infty)$

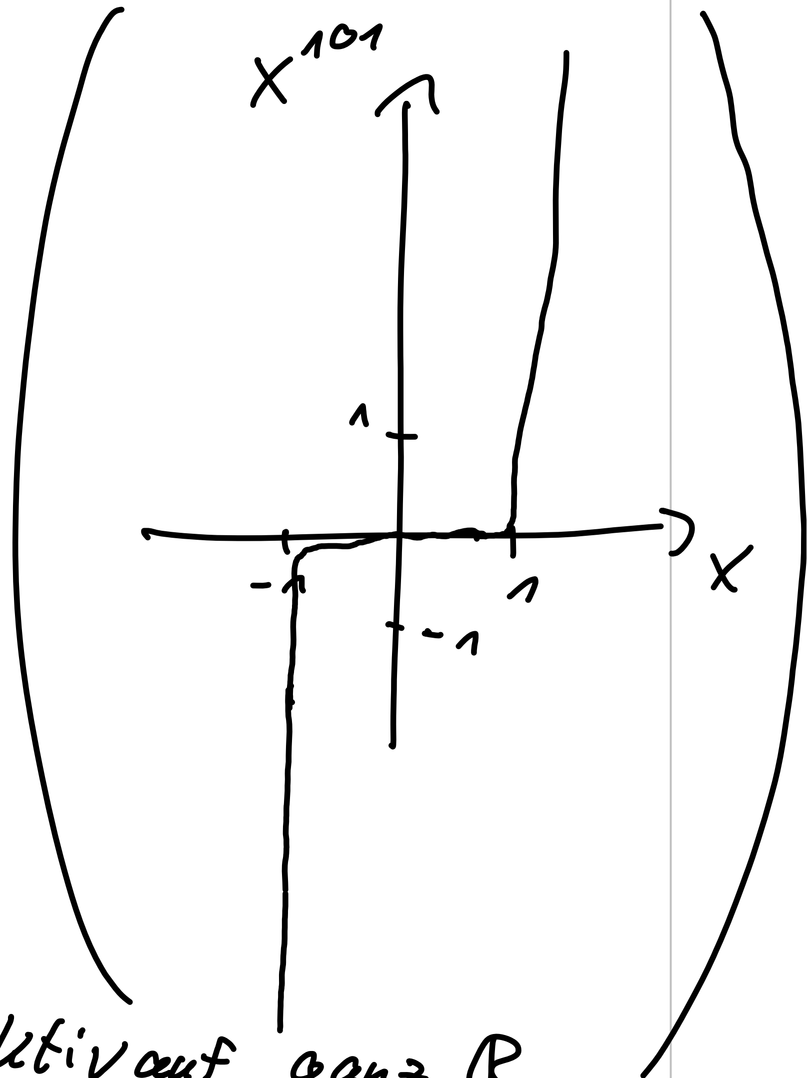
$$f^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$$)



Fall 2: n ungerade ($n = 2m+1$)

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n}$$





Unterschiede zu n = gerade:

f ist
- ungerade
- unbeschränkt
- streng monoton steigend
- bijektiv auf ganz $\mathbb{R}$

↳ umkehrbar mit $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

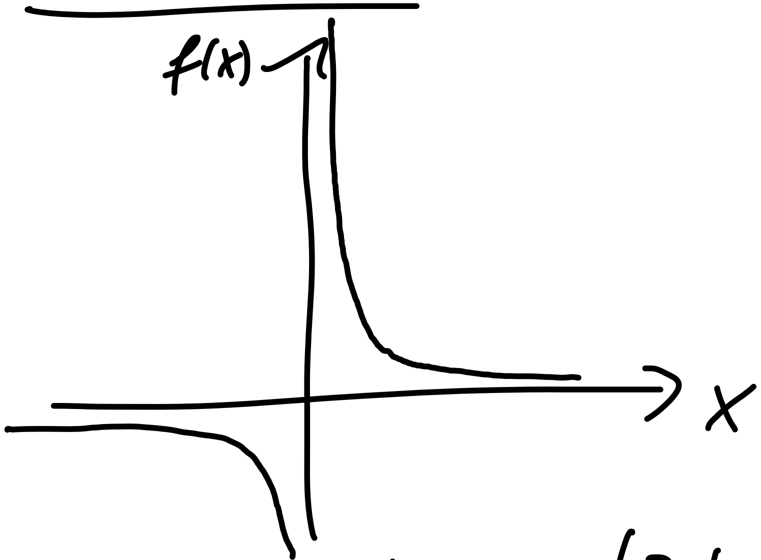
(ii) Negative Potenzen

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad \mathbb{R}\setminus\{0\} \\[1em] f(x) = x^{-n} := \dfrac{1}{x^n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{array}}$$

Nicht definiert für $x=0$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Qualitativ:



n ungerade

n gerade

(Pole n-ter Ordnung bei $x=0$)

(iii) Gebrochene Potenzen

$$f: \mathbb{R}_{+,0} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = (x^n)^{\frac{1}{m}}$$

$$(n, m \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$x^0 := 1 \quad (\text{Konvention})$$

Beispiel: $x^{\frac{(-3)}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{x^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$

Polynomfunktionen

$$\boxed{\begin{aligned} &f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}}$$

$\Big($ mit $N \in \mathbb{N}$

$a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N \in \mathbb{R}$ $\Big)$

Terminologie:

- $f(x)$ ist ein Polynom vom Grad N
- $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N$ = "Die Koeffizienten des Polynoms"

Vorlesung 5 15.3.2012

Letztes Mal:

Polynomfunktionen:

$$\boxed{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{array}}$$

$N \in \mathbb{N} \Rightarrow$ "Grad des Polynoms"
(Falls $a_N \neq 0$)

$a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N \in \mathbb{R}$ ("Koeffizienten des Polynoms")

Schreibweise:

Man schreibt auch:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n}$$

"Summationssymbol", "Summenzeichen"

z.B. • $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} a_n x^n$, mit $a_1 = a_2 = 0$, $a_0 = 3$, $a_3 = 2$

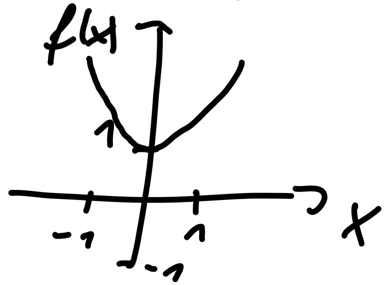
$\quad\parallel$

$2x^3 + 3$

Einige Eigenschaften:

- Polynome sind überall <u>stetig</u>
- Jedes Polynom N-ten Grades hat <u>höchstens N Nullstellen</u>

(Können auch weniger oder gar keine sein, z.B.: $f(x) = x^2+1$ $\Rightarrow N_f = \emptyset$



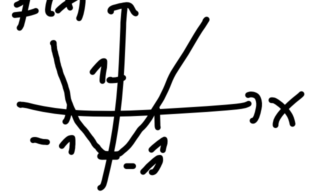
- $f(x) = x^2 \Rightarrow N_f = \{0\}$)

- Besitzt ein Polynom $f(x)$ N-ten Grades N Nullstellen $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, so faktorisiert es:

$$\boxed{f(x) = a_N (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{N-1})(x-x_N)}$$

("<u>Linearfaktorzerlegung</u>")

Beispiel: $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow N_f = \{-1, 1\}$



$\Rightarrow f(x) = 1 \cdot (x+1)(x-1)$ → stimmt
(3. Binomische Formel)

- Existiert eine Faktorisierung der Form

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot \left(\begin{array}{l}\text{Rest-Polynom, bei}\\ \text{dem } x_0 \text{ keine Nullstelle}\\ \text{mehr ist}\end{array}\right)$$

$(k \in \mathbb{N})$

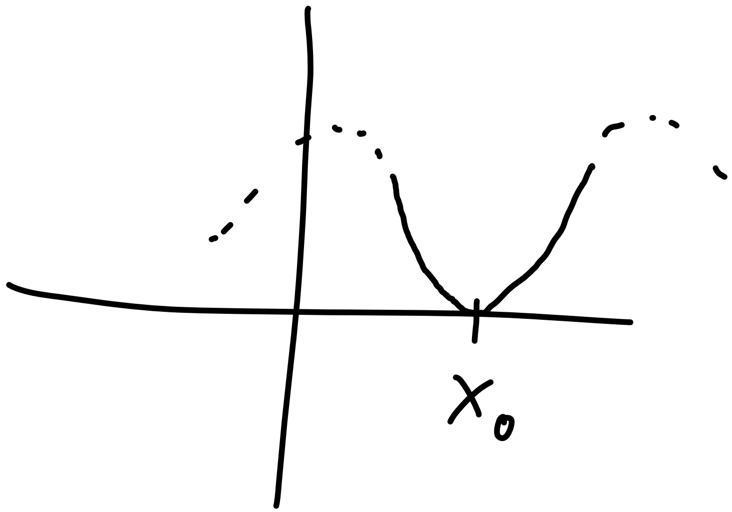
$\Rightarrow$ Man sagt: "$f(x)$ hat bei $x = x_0$ eine
<u>k-fache Nullstelle</u> (bei $k=2$ "doppelte")"

Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1)$

$$= x^2(x-1)^2$$
$$= (x-0)^2(x-1)^2$$

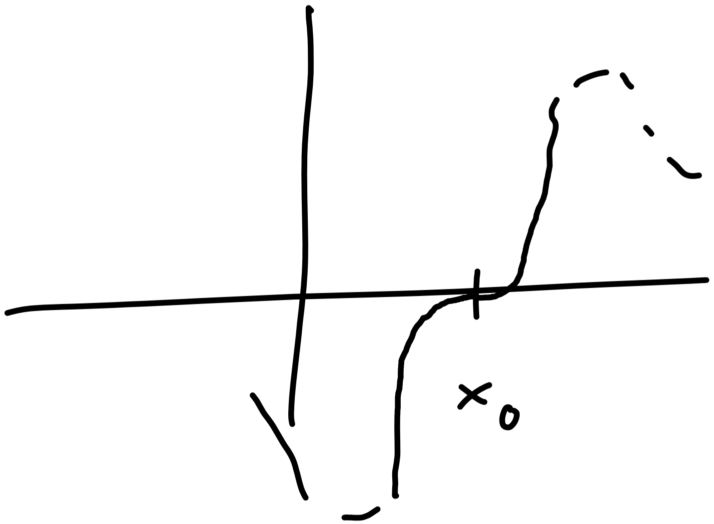
$\Rightarrow$ $x=0$ und $x=1$ sind jeweils doppelte Nullstellen.

Bei einer doppelten Nullstelle x_0:

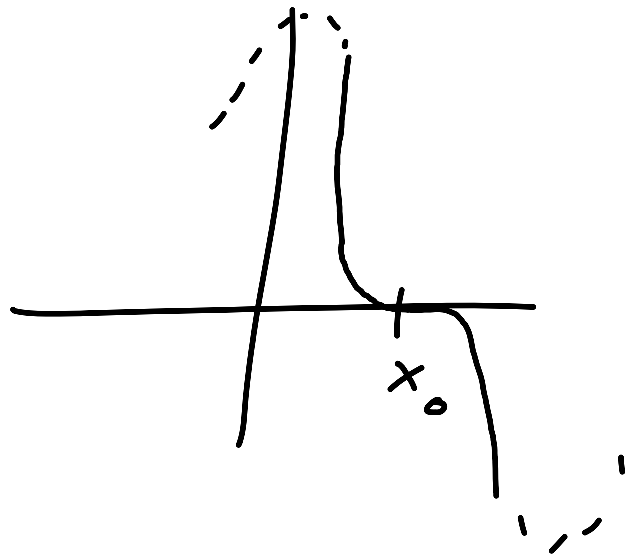


oder

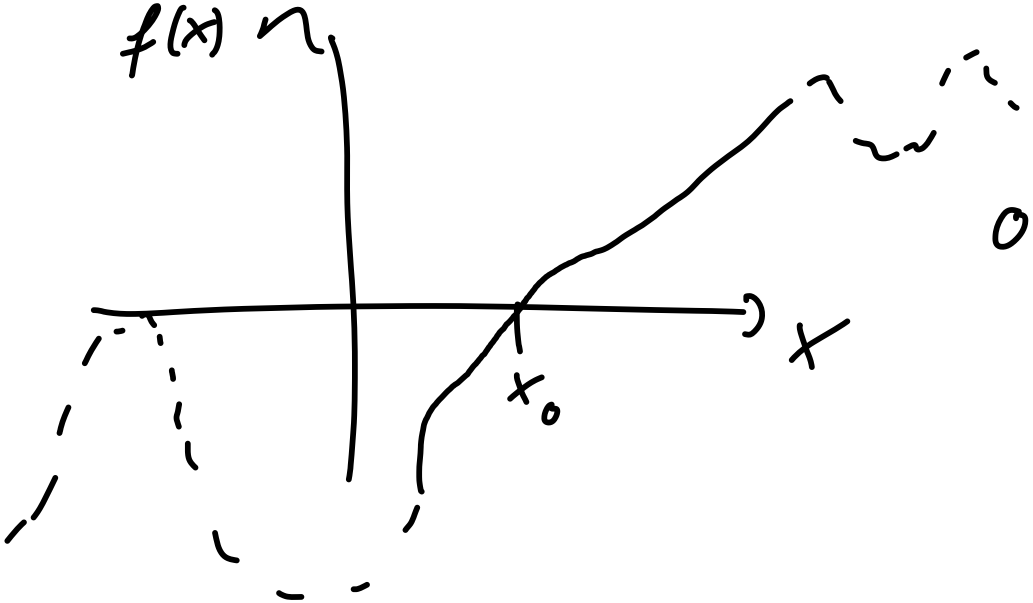
Bei einer dreifachen Nullstelle x_0:



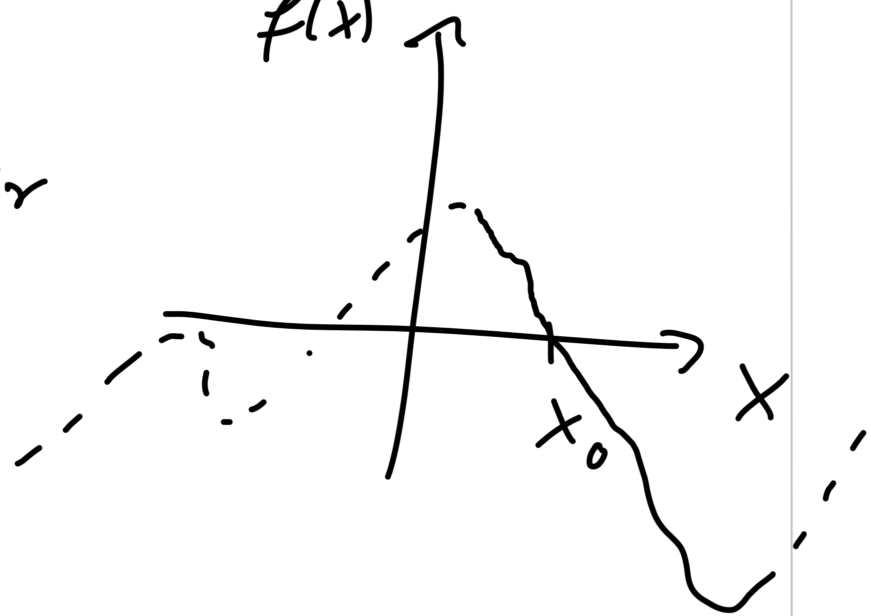
oder



Bei einfacher Nullstelle bei x_0:



oder



Rational Funktionen (auch "gebrochen rationale Funktion")

Seien

- $g(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ ein Polynom N-ten Grades
- $h(x) = \sum_{m=0}^{K} b_m x^m$ ein Polynom K-ten Grades

$(K, N \in \mathbb{N})$

dann bezeichnet man die Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}{\sum_{m=0}^{K} b_m x^m}}$$

als (gebrochen) rationale Funktion.

Wichtig:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus N_h$$

Nullstellen von $h(x)$ müssen aus D_f herausgenommen werden, damit $f = \frac{g}{h}$ überhaupt wohldefiniert ist.

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0 \}$$

Beispiele:

- $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+5}$, $D_f = \mathbb{R}$, weil $3x^2+5=0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat (Nenner hat <u>keine</u> Nullstellen)
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \equiv \mathbb{R}^*$

- $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- $f(x) = x^2 = \frac{x^2}{1}$ $\quad , D_f = \mathbb{R}$

(Polynome sind spezialfäle rationaler Funktionen (solche mit $h(x) = 1$))

Polstellen

x_0 heißt Polstelle von f, wenn

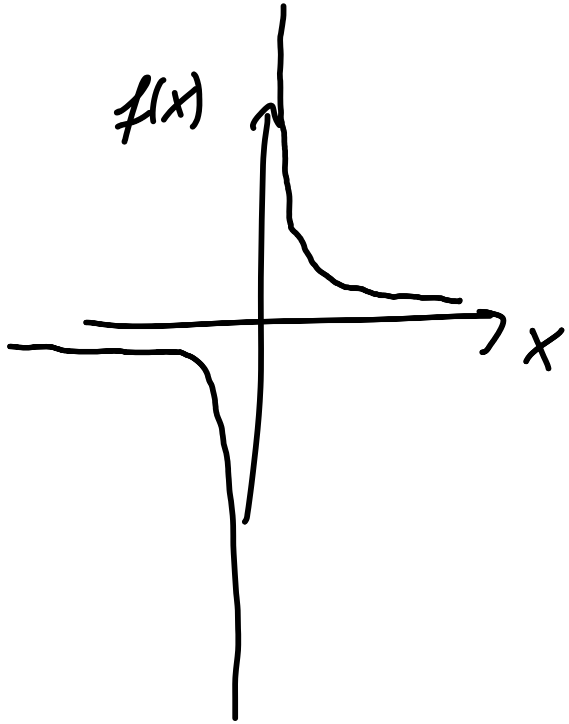
- x_0 eine Definitionslücke von $f = \frac{g}{h}$ (also eine Nullstelle von h)

und

- der Betrag $|f(x)|$ immer größer wird (gegen ∞ strebt) wenn x sich x_0 annähert.

<u>Beispiele:</u>

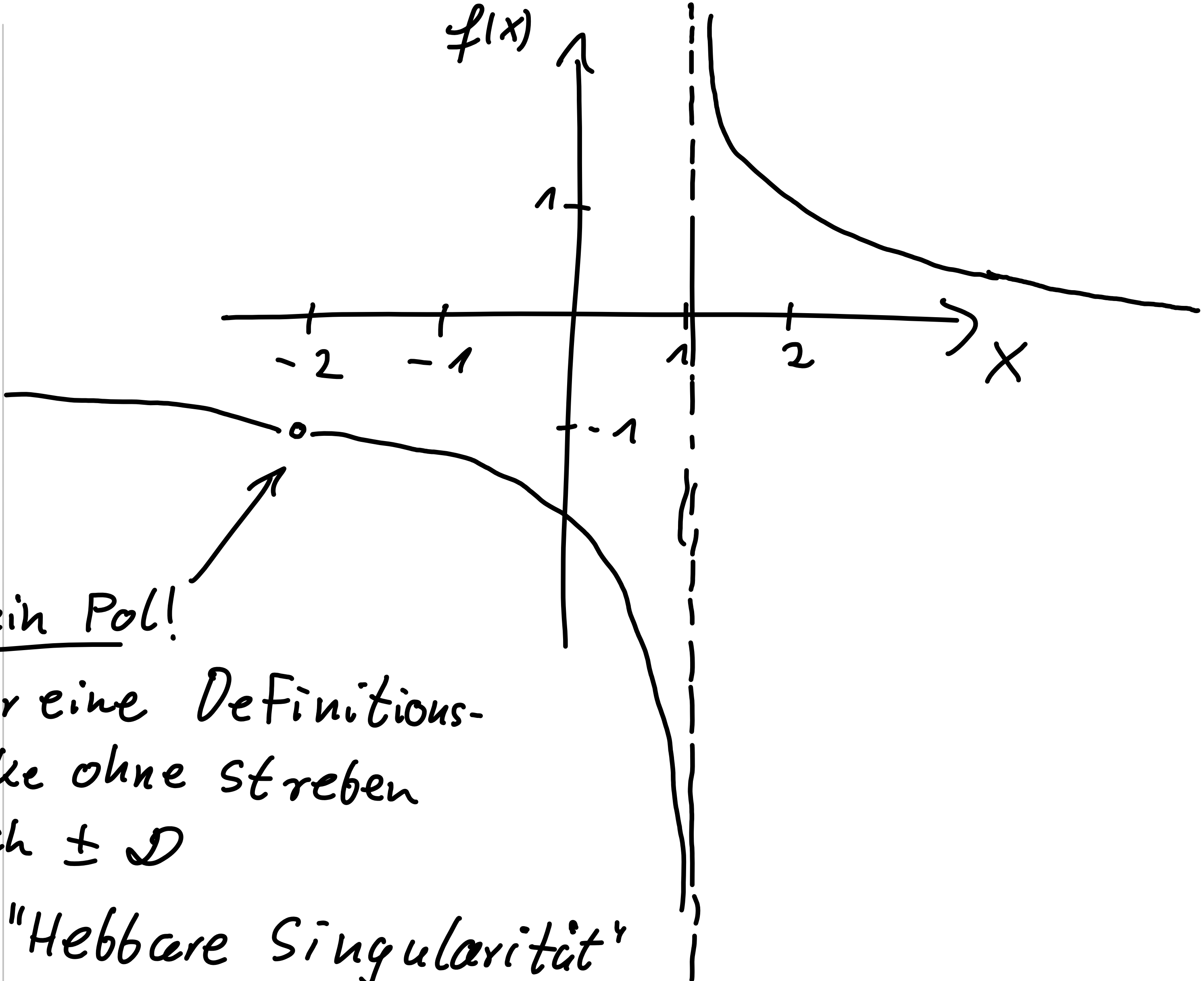
(i) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathbb{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\Rightarrow x = 0$ ist eine Polstelle.

(ii) $f(x) = \frac{\overbrace{2x+4}^{g(x)}}{\underbrace{x^2+x-2}_{h(x)}}$ $\quad N_h = \{-2, 1\} \Rightarrow \mathbb{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

<u>Aber:</u> $f(x) = \frac{2x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}$



Kein Pol!

Nur eine Definitions-
lücke ohne streben
nach $\pm\infty$

→ "Hebbare Singularität"

bei $x = -2$

echte Polstelle bei $x = 1$

$\tilde{f}(x) = \frac{2}{(x-1)}$ hat $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cancel{(x+2)}} = \tilde{f}(x) \quad \forall\; x \neq -2$

$\Rightarrow$ Ersetze f durch $\tilde{f}$ und eliminiere die (etwas künstliche) Definitionslücke bei $x = -2$ ($\Rightarrow$ "Hebbare Singularität)

Anderes Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$$

Die Exponentialfunktion

$$\boxed{\begin{aligned} &\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ &\exp : x \mapsto \exp(x) := e^x \end{aligned}}$$

Hierbei:

$$\boxed{\begin{aligned} &e = 2{,}71828182\ldots \\ &\text{(Euler'sche Zahl)} \end{aligned}}$$

Eigenschaften:

- $\exp(0) = e^0 = 1$
- $\exp(1) = e^1 = e$
- $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

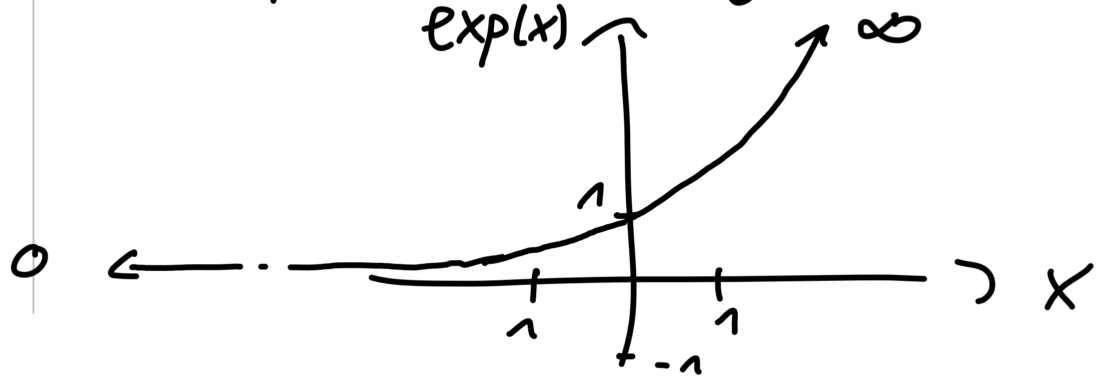
- $\exp(x_1 \cdot x_2) = (\exp(x_1))^{x_2} = (\exp(x_2))^{x_1}$

- $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

  $\Rightarrow e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$

- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- exp ist streng monoton steigend und stetig:



<u>Wichtig:</u>

$\exp(x)$ wächst schneller als jede Potenz von x:

$$\boxed{\frac{\exp(x)}{x^n} \xrightarrow{x \to \infty} \infty \quad \text{(egal wie groß } n \text{ ist!)}}$$

<u>Umkehrfunktion:</u> ($\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv)

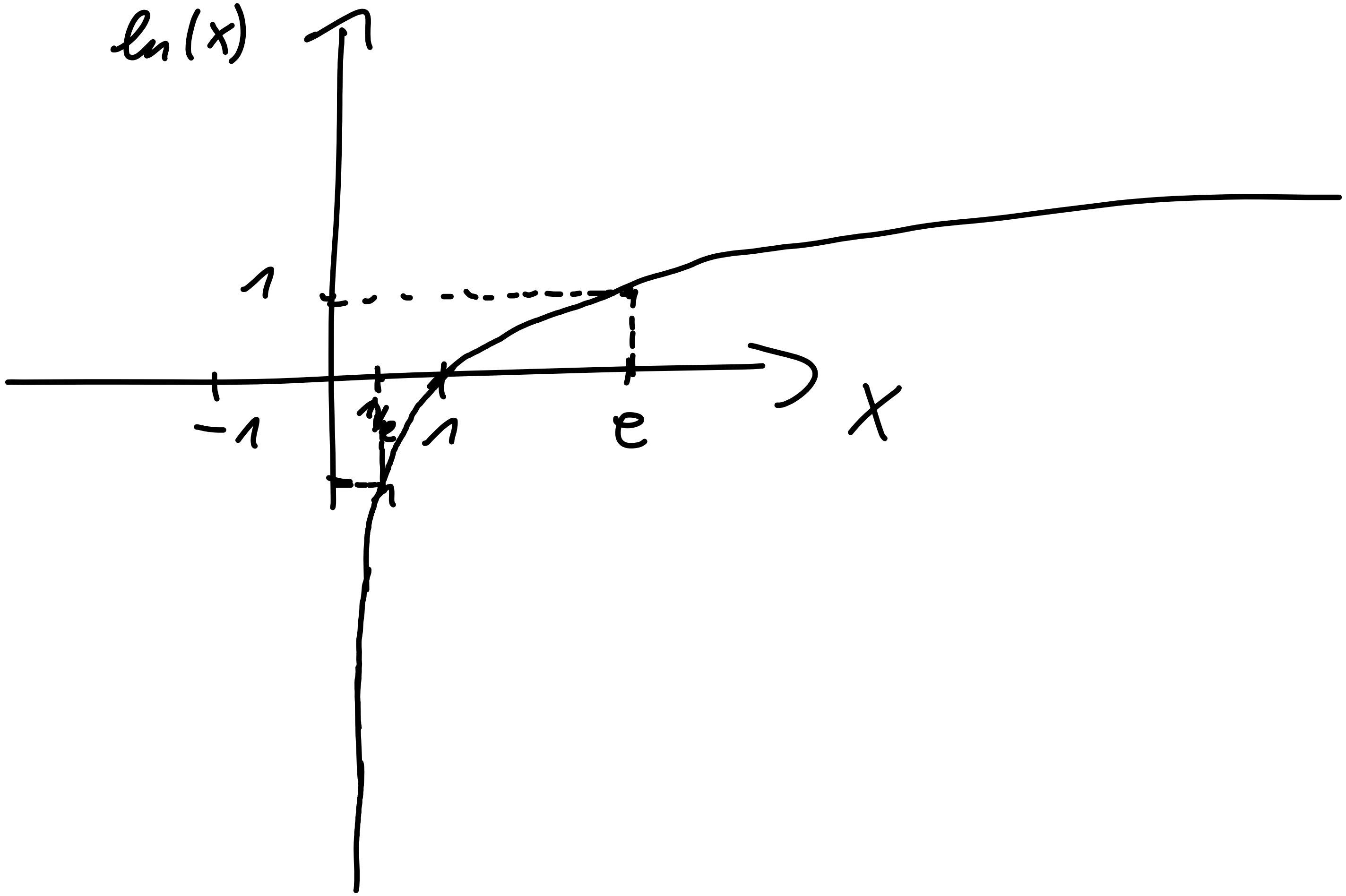
$$\boxed{\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x) \end{aligned}}$$

Umkehrfunktion, nicht Kehrwert!

"Logarithmus naturalis" alias

"Natürlicher Logarithmus" alias

"Logarithmus"



Eigenschaften:

- $\ln(1) = 0$ (denn $e^0 = 1$)
- $\ln(e) = 1$ (denn $e^1 = e$)
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ (denn $e^{-1} = \frac{1}{e}$)

- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$

  $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \cdot \ln(x)$
- $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$

  ($\ln = \exp^{-1}$)
- $\ln(0)$ ist nicht wohldefiniert ($\ln(x) \xrightarrow{x \to 0} -\infty$)

- ln ist monoton steigend und stetig
- ln wächst langsamer als jede n-te Wurzel:

$$\boxed{\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \qquad \left(\text{obwohl } \ln x \xrightarrow{x\to\infty} \infty\right)}$$

Wichtige, aus exp oder ln ableitbare Funktionen:

Exponentialfunktion mit Basis $a>0$

$$\boxed{f(x) = a^x = (\underbrace{e^{\ln a}}_{a})^x = e^{x \ln a} = (e^x)^{\ln a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ a^{x_1 \cdot x_2} = (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} \end{array}}$$

Lorithmus zur Basis $a>0$

$\log_a(x) :=$ Umkehrfunktion von a^x

(also: $\log_a(a^x) = x$)

$$\Rightarrow \log_a(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

<u>Probe:</u> Es muss gelten: $\log_a(a^x) \overset{!}{=} x$

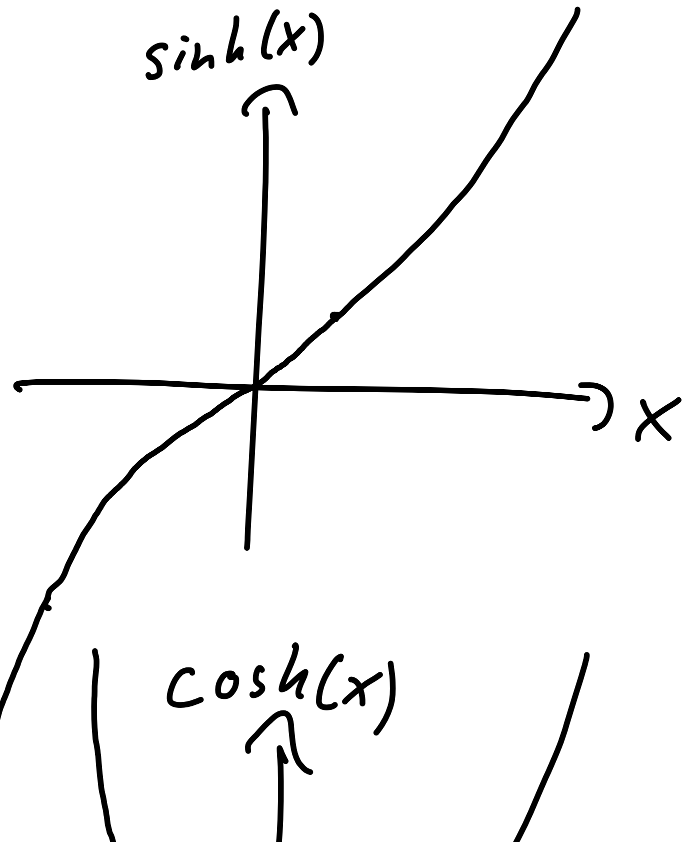
$$\log_a(a^x) = \log_a\left(e^{x \ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln\left(e^{x \ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\ln a}} \cdot x \cancel{\ln a} = x$$

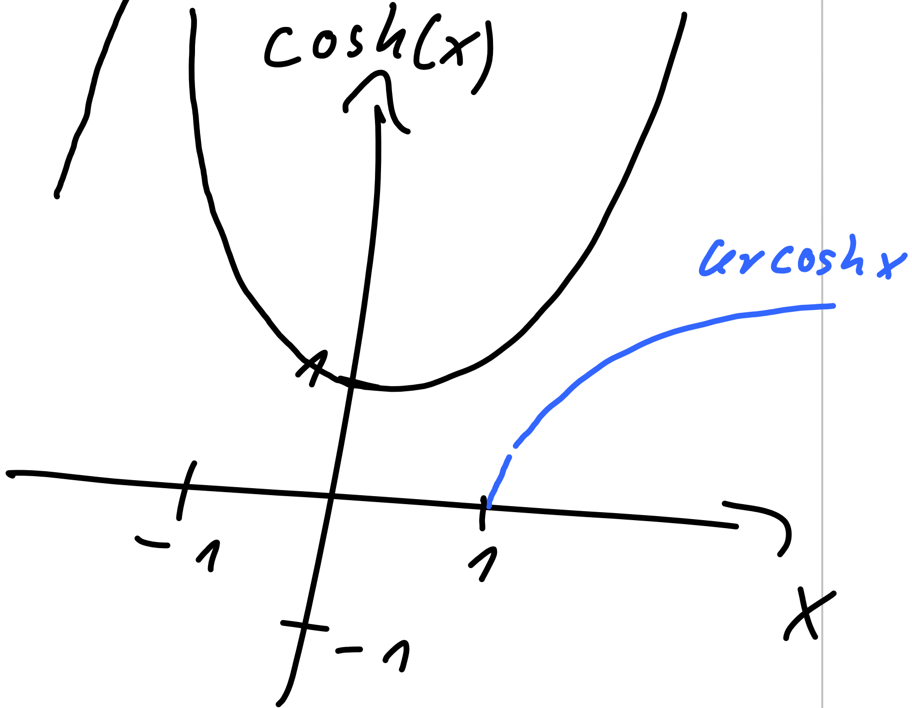
✓

Hyperbolische Funktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\sinh(x) := \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} &\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty) \\ &\cosh(x) := \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \end{aligned}}$$

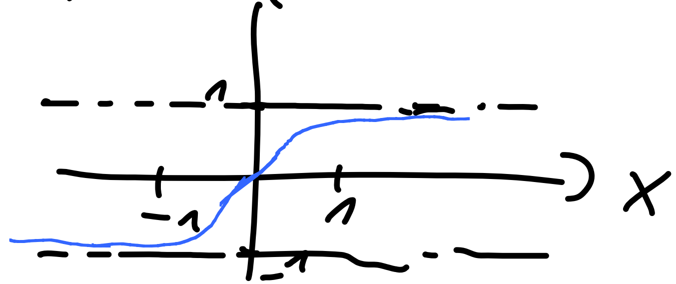


$$\Rightarrow \boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

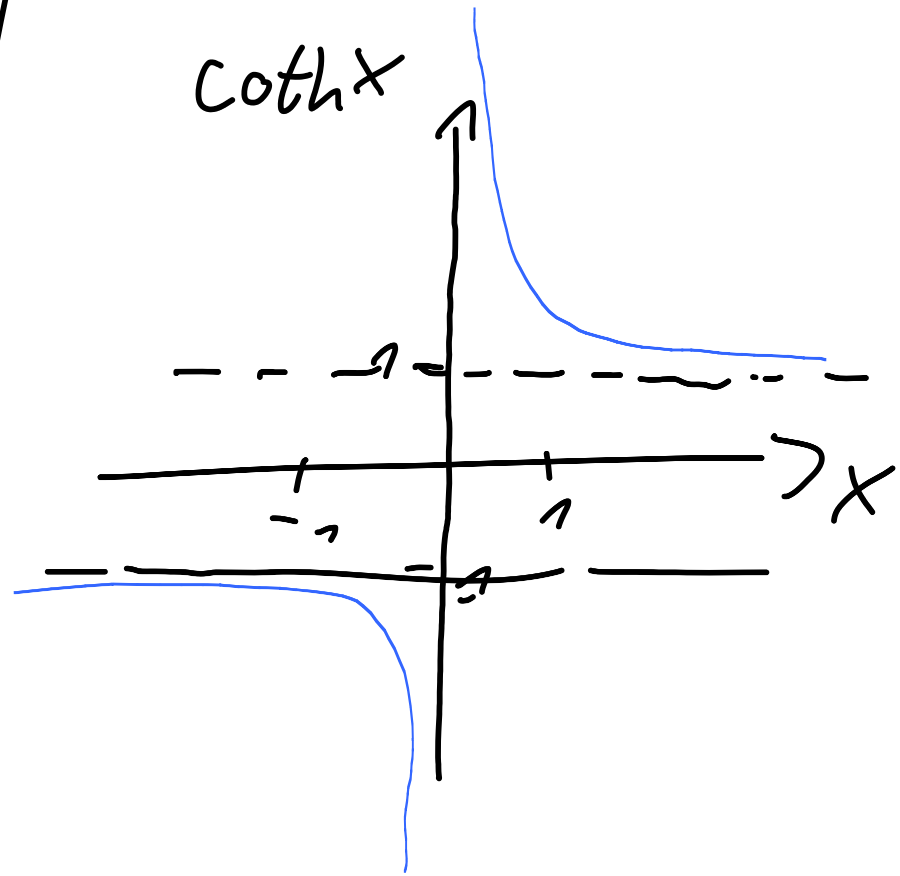
$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

tanh x



coth x



Umkehrfunktionen"

arsinh x

arcosh x

artanh x

arCoth x

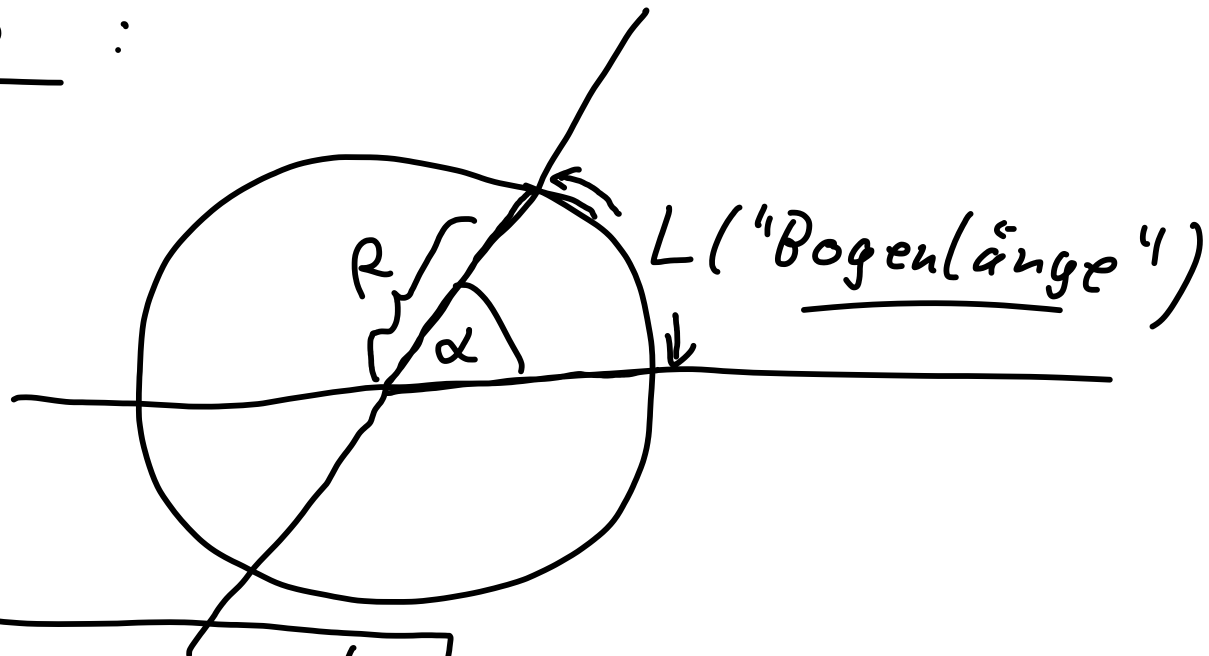
Vorlesung 6

18. 3. 2019

Trigonometrische Funktionen

Vorbemerkung:

Sofern nicht anders vereinbart, messen wir Winkel nicht in Grad, sondern im Bogenmaß:



$$\boxed{\alpha\,(\text{im Bogenmaß}) := \frac{L}{R}}$$

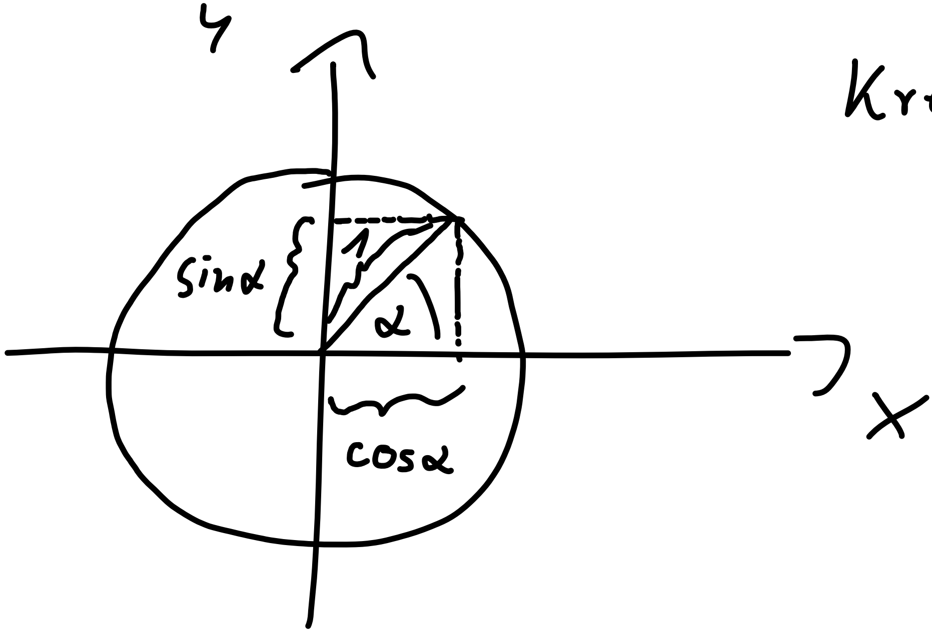
Umrechnungsformel

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha\,(\text{im Bogenmaß}) &= \frac{2\pi}{360^\circ}\cdot\alpha\,(\text{in Grad})\\[2em] &= \frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha\,(\text{in Grad})\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$

Bogenmaß	Grad
2π	360°
$3/2\,\pi$	270°
π	180°
$\pi/2$	90°
$\pi/4$	45°
$\frac{\pi}{6}$	30°

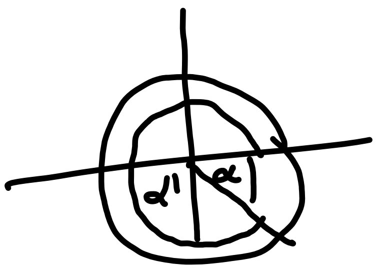
Sinus und Cosinus



Kreis vom Radius 1

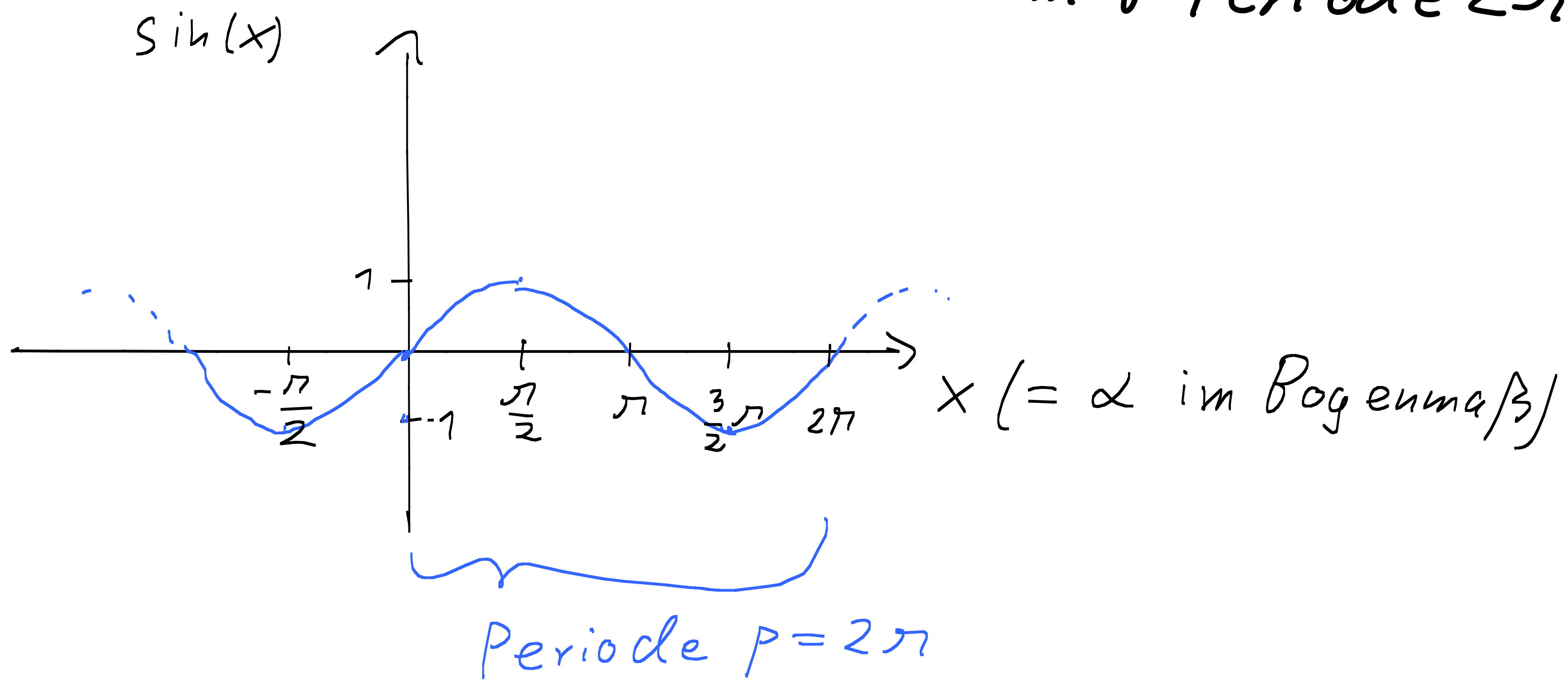
Bemerkungen:

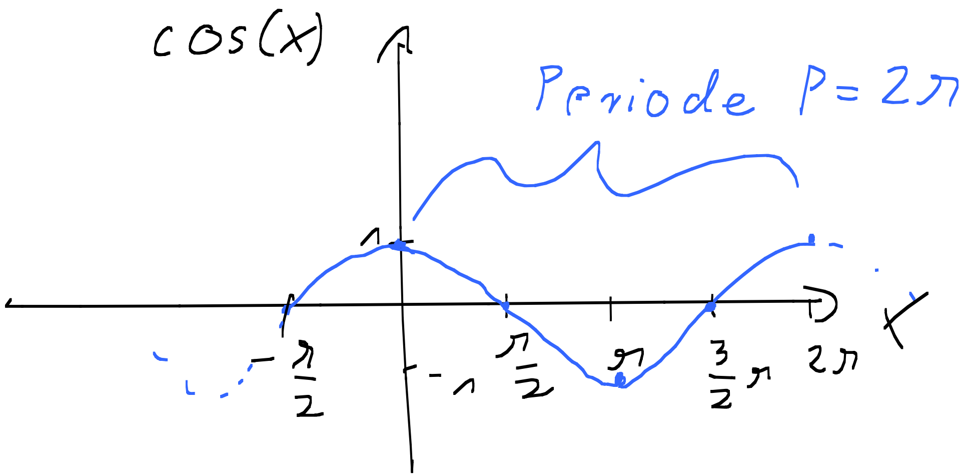
- $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ ($\Leftarrow$ Satz des Pythagoras)
- α kann auch negativ sein, z.B.



$\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\alpha' = +\frac{7}{4}\pi$

- $$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ sin und cos sind periodisch mit Periode 2π





Eigenschaften

sin :

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{D}) = [-1, 1]$
- Ungerade
- Nullstellen $x_n = n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$
- "Kleinwinkelnäherung"

$$\sin(x) \approx x \quad (\text{Für } |x| \ll 1)$$

(mehr später) →

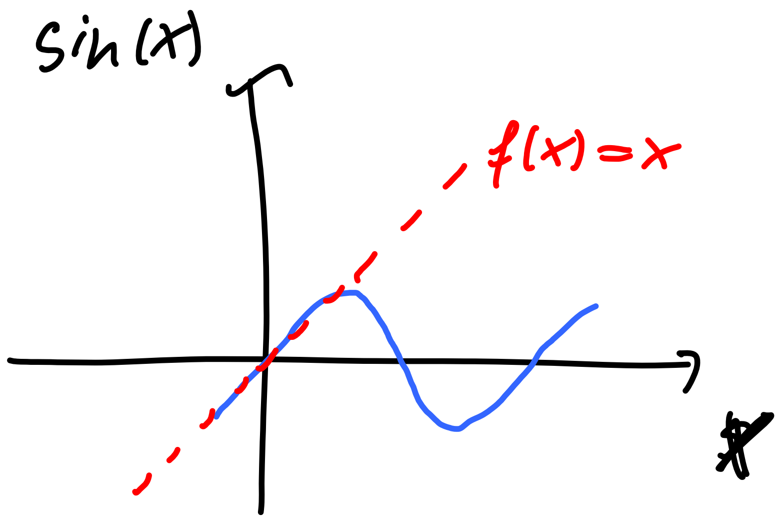
Bogenmaß! (In Grad stimmt dies so nicht)

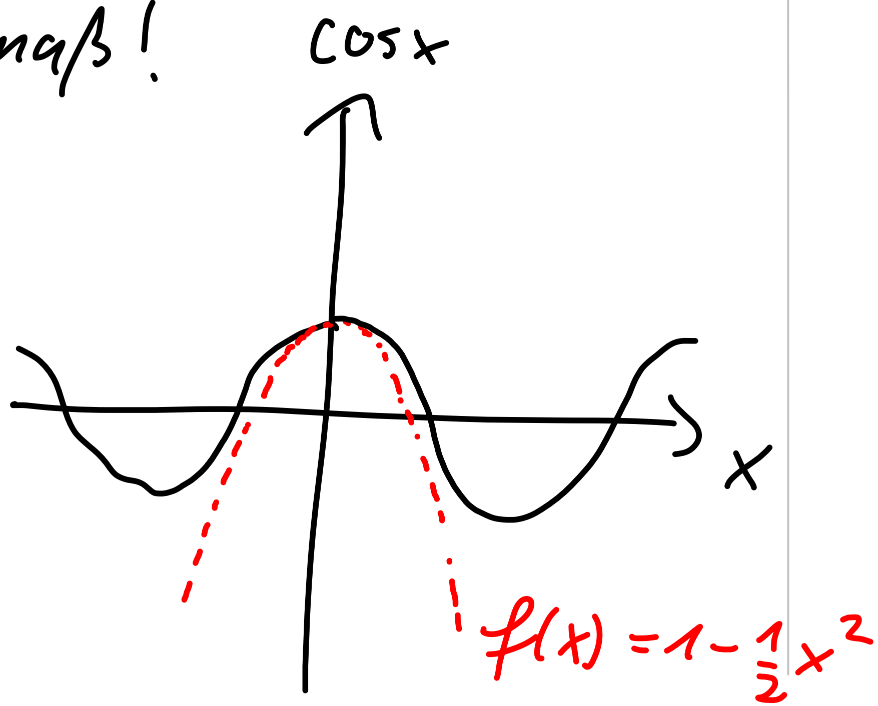
cos

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{D}) = [-1, 1]$
- Gerade
- Nullstellen $x_n = (n + \frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
- "Kleinwinkelnäherung"

$$\cos(x) \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{Für } |x| << 1)$$

Bogenmaß!





Tangens und Cotangens

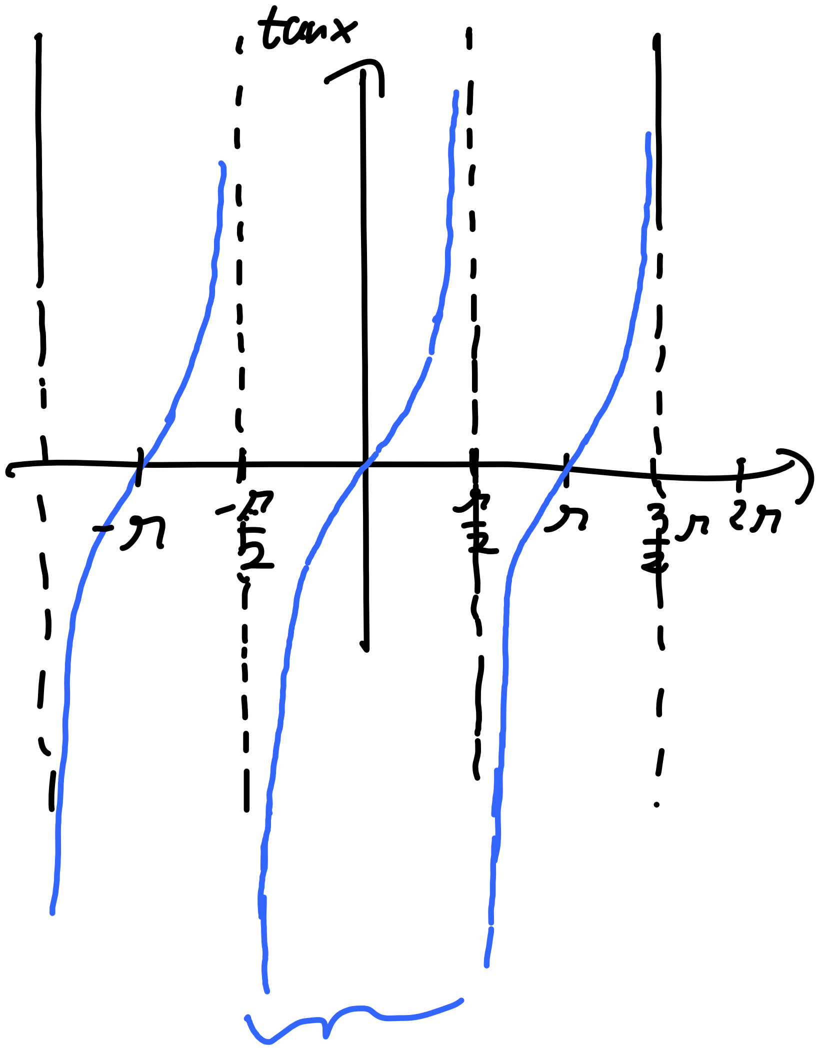
- $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \left(\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ (n+\tfrac{1}{2})\pi \} \right)$

  $n \in \mathbb{Z}$

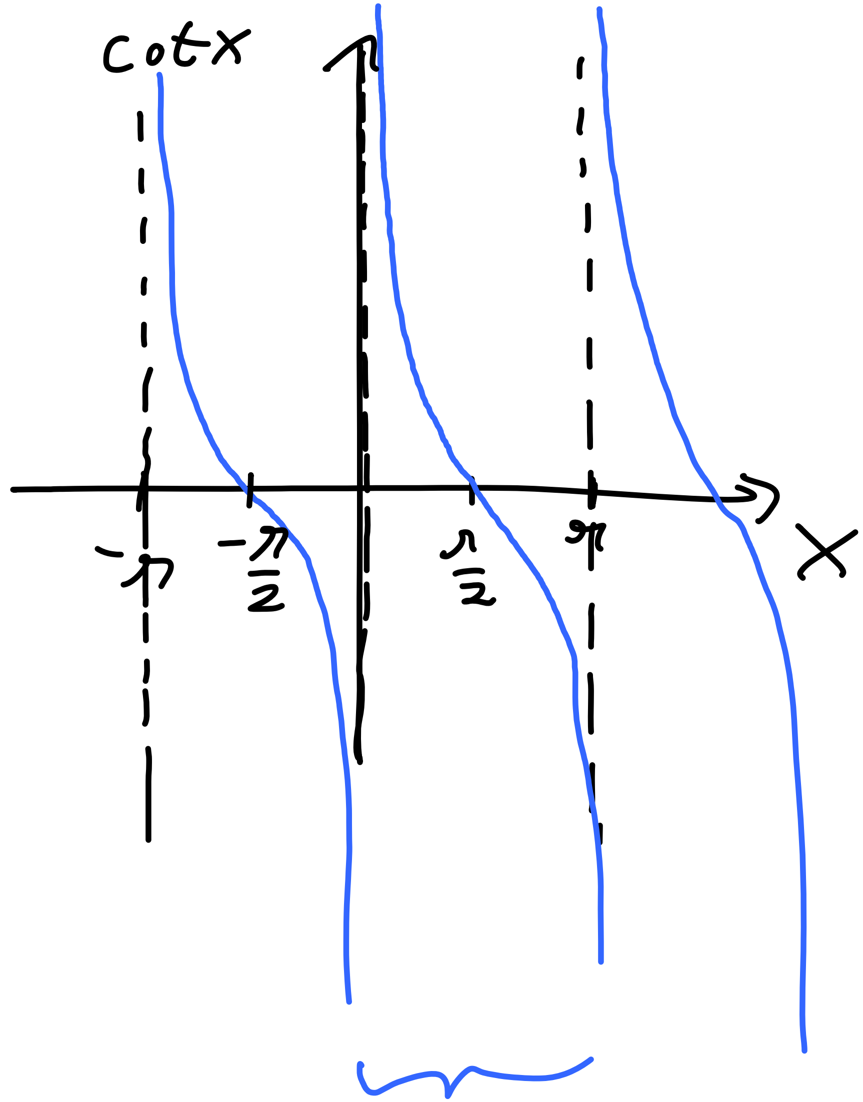
  Nullstellen von $\cos(x)$ müssen aus $\mathbb{D}$ herausgenommen werden

- $\cot(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ $\quad \left(\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ n\pi \} \right)$

  Nullstellen von $\sin(x)$

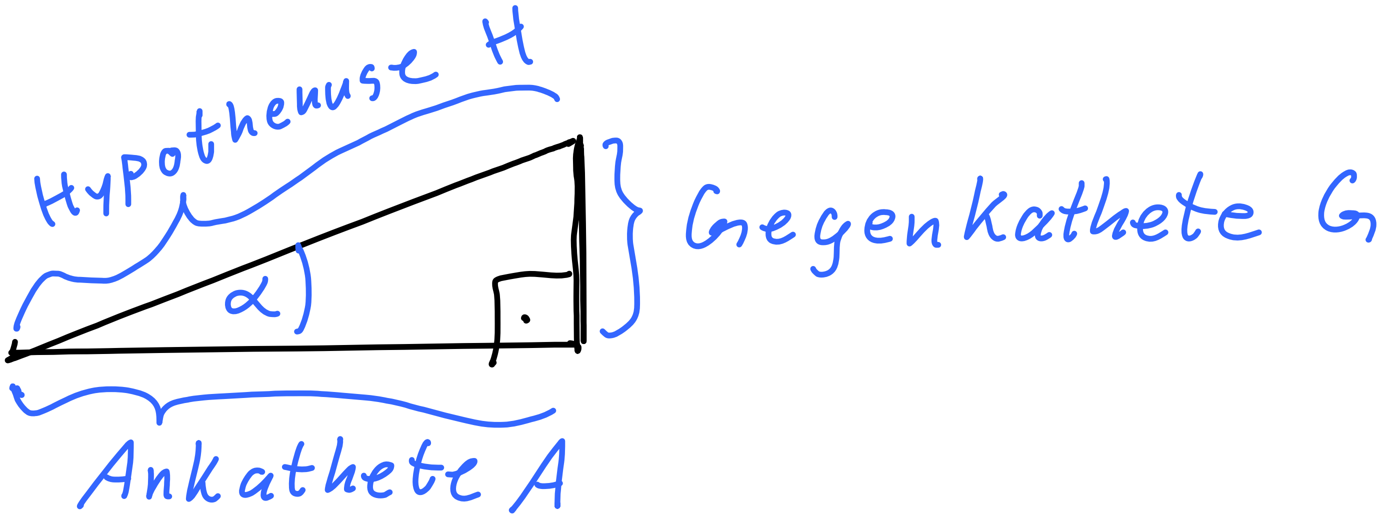


Periode $p = \pi$



Periode $p = \pi$

Rechtwinklige Dreiecke:

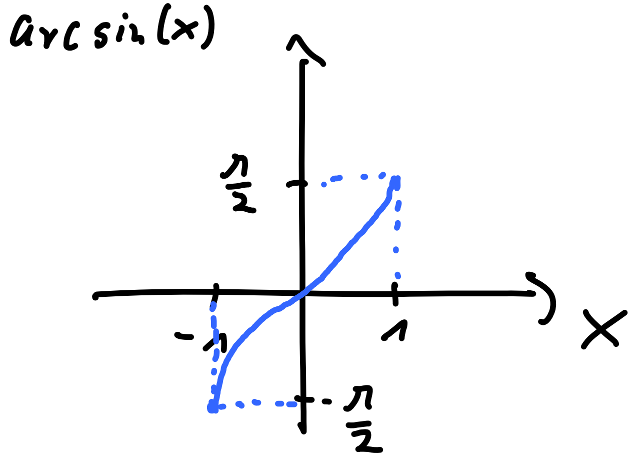


$$\boxed{\begin{aligned} \frac{G}{H} &= \sin\alpha \\ \frac{A}{H} &= \cos\alpha \\ \frac{G}{A} &= \tan\alpha \end{aligned}}$$

Umkehrfunktionen:

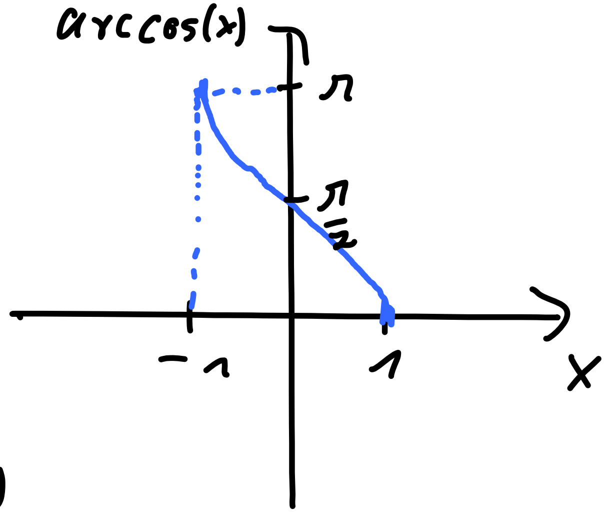
- $\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$

  $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



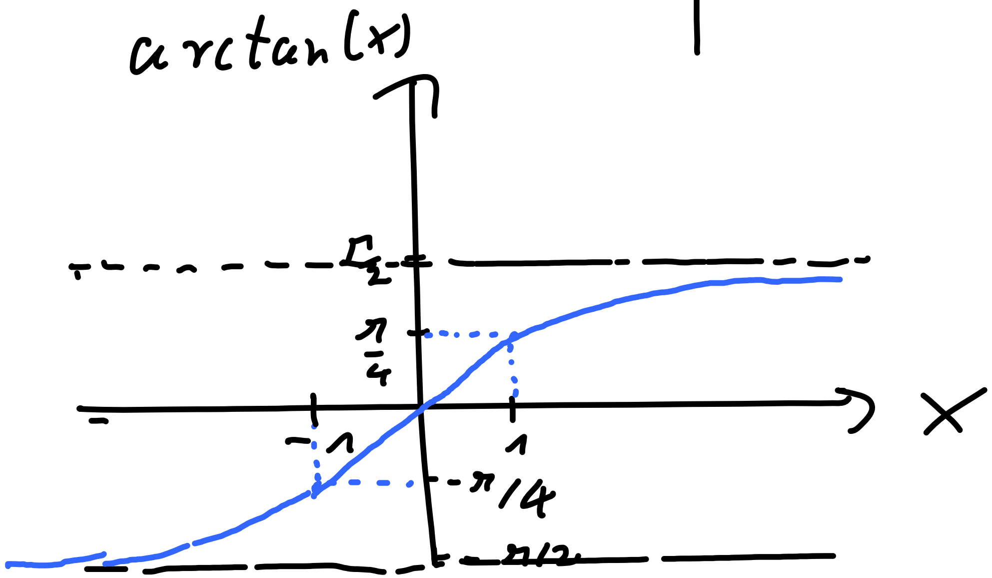
- $\arccos(x) := \cos^{-1}(x)$

  $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$



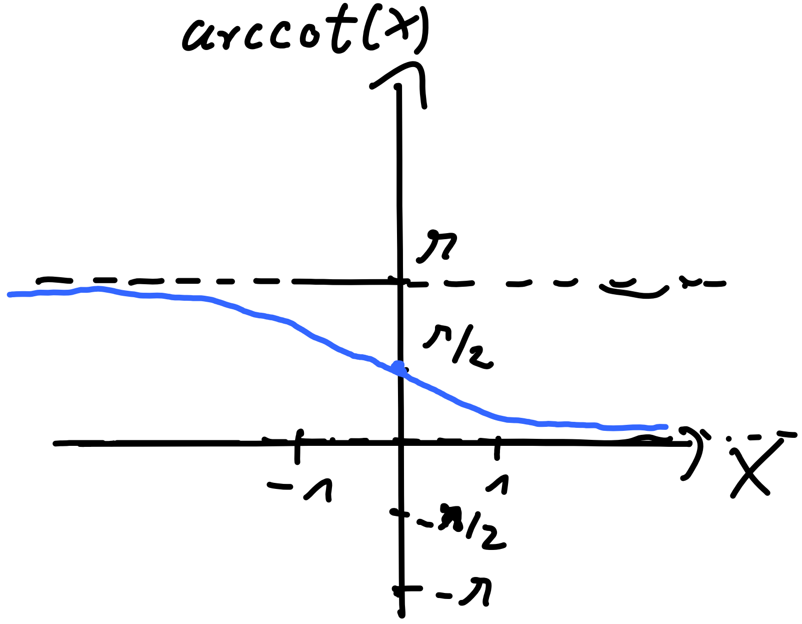
- $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$

  $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



- $\operatorname{arccot}(x) := \cot^{-1}(x)$

  $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$



1.5 Grenzwerte von Folgen und Funktionen

(Reelle) Folgen:

Eine <u>(reelle) Folge</u> (a_n) ist eine "Liste" reeller Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$, die mit den natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ durchnummeriert sind:

Beispiele

(i)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 3$$
$$\vdots$$
$$(a_n = n)$$

(ii)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$$

(iii)
$$a_1 = -1$$
$$a_2 = +1$$
$$a_3 = -1$$
$$a_4 = +1$$
$$\vdots$$
$$(a_n = (-1)^n)$$

Eine Folge (a_n) kann formal als eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) := a_n$ aufgefasst werden (und wird in der Mathematik auch so definiert)

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ heißen die <u>Glieder</u> der Folge.

<u>Eine Folge heißt:</u>

- $\left\{\begin{array}{l}\text{nach oben beschränkt}\\ \text{nach unten beschränkt}\\ \quad\text{beschränkt}\end{array}\right\}$, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left\{\begin{array}{l} a_n \leq s \\ a_n \geq s \\ |a_n| \leq s \end{array}\right\}$.

- <u>(streng) monoton wachsend</u>, wenn

$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} > a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

"streng"

- <u>(streng) monoton fallend</u>, wenn

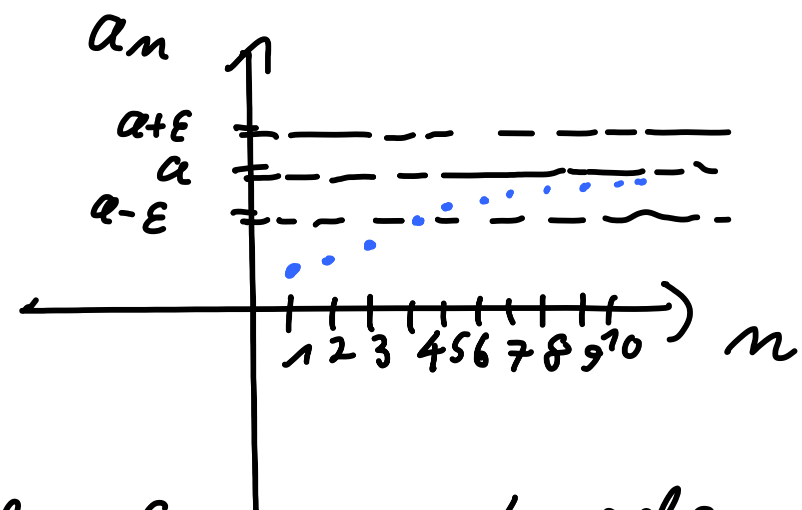
$a_{n+1} \leq a_n \quad (a_{n+1} < a_n)$

Konvergenz einer Folge

Eine Folge (a_n) heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N}$$

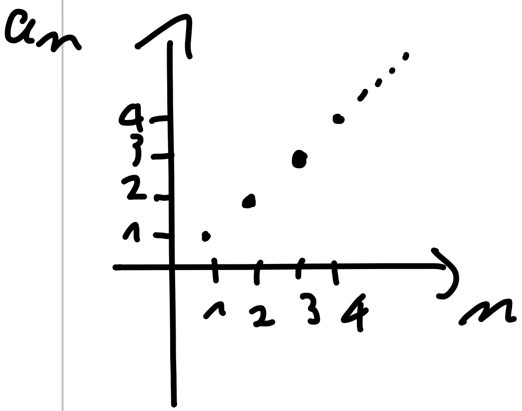


a heißt der Grenzwert oder Limes der Folge, und man schreibt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \left(\text{oder } a_n \to a \text{ Für } n \to \infty \text{ oder } a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \right)}$$

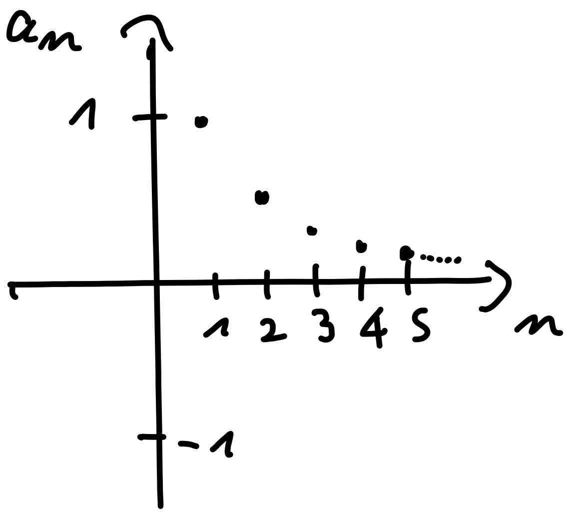
Beispiele:

(i) $a_n = n$ $\left(a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3, \ldots \right)$



$\Longrightarrow$
- nach unten beschränkt $(a_n \geq 1)$
- nach oben unbeschränkt
- streng monoton wachsend $(a_{n+1} = n+1 > n = a_n)$
- Nicht Konvergent

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$



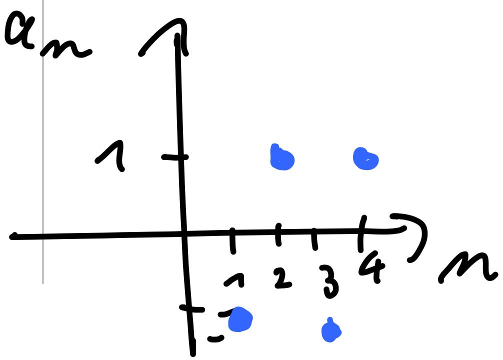
- Beschränkt $(1 \geq a_n \geq 0)$
- Streng monoton Fallend $\left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right)$
- Konvergent: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

(Für $\varepsilon > 0$ und $n > N := \frac{1}{\varepsilon}$ gilt:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$$)

$n > N$

(iii) $a_n = (-1)^n$



- Beschränkt $(-1 \leq a_n \leq 1)$
- Weder monoton wachsend noch Fallend
- nicht Konvergent

Grenzwerte von Funktionen

Seien:

- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion
- $x_0 \in \mathbb{R}$ so dass es eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{D}$ gibt, die gegen x_0 konvergiert:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \left(x_n \in \mathbb{D} \quad \forall n \in \mathbb{N}\right)}$$

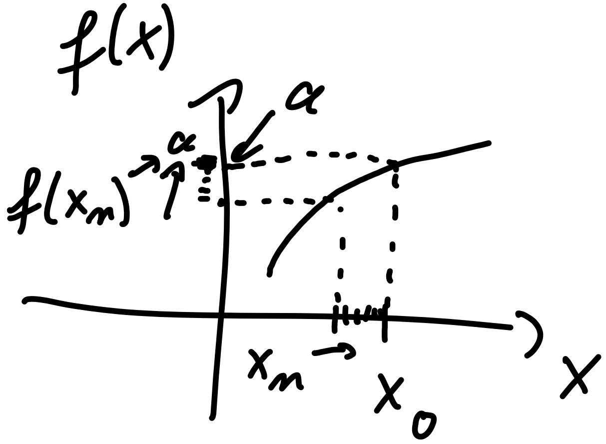
$\Rightarrow$ x_0 kann in $\mathbb{D}$ liegen, aber z.B. auch Randpunkt eines (halb) offenen Intervalls sein, der nicht mehr zu $\mathbb{D}$ gehört.

z.B. $\mathbb{D} = (0,2) \Rightarrow x_0 \in [0,2]$

(Folgen z.B.: Für $x_0 = 0$: $x_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{D} = (0,2)$)

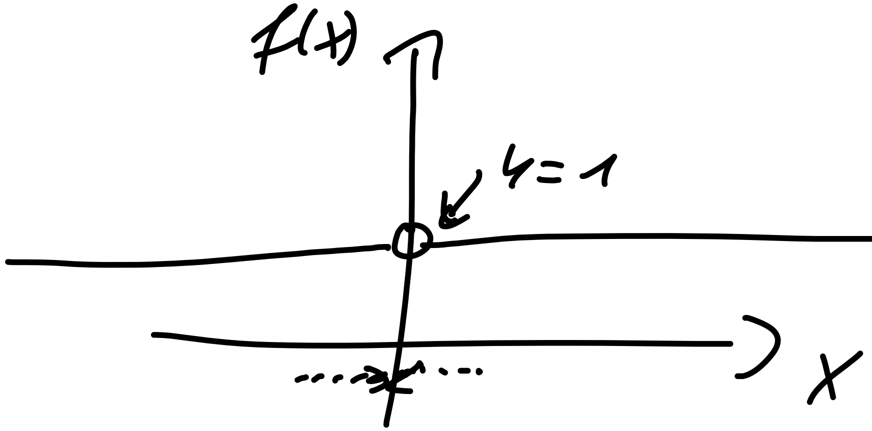
$x_0 = 2$: $x_n = 2 - 1/n \in \mathbb{D} = (0,2)$

Dann hat f an der Stelle x_0 den Grenzwert a, wenn für <u>jede</u> Folge (x_n) mit $\underline{\underline{x_n \in D}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt



$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a}$$

<u>Beispiele:</u>



(i) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

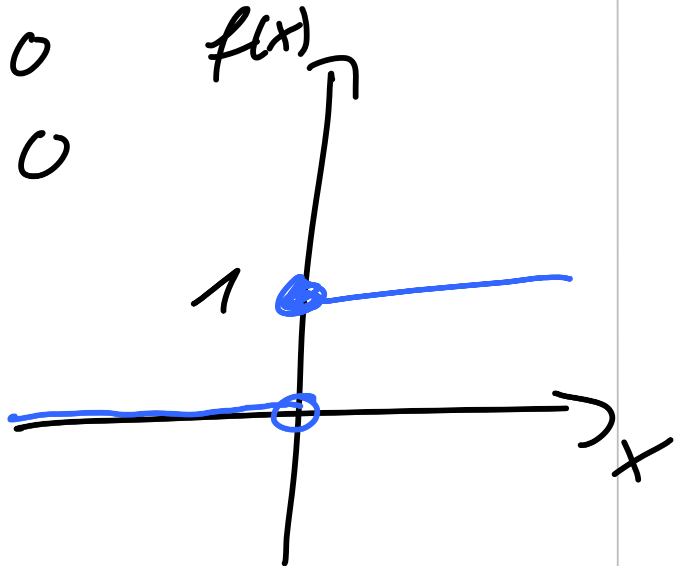
Sei x_n eine Folge in $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (also $x_n \neq 0$)

mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\Rightarrow f(x_n) = \frac{x_n}{x_n} \underset{x_n \neq 0}{=} 1 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$\Rightarrow f$ hat bei $x_0 = 0$ den Grenzwert $a = 1$

(ii) $f(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



f hat keinen Grenzwert bei $x_0 = 0$, denn die Folgen

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} \\ \hat{x}_n &= -\frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \text{ konvergieren beide gegen } x_0 = 0 \text{, aber:}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = 0 \neq 1$$

Vorlesung 7

19. 3. 2019

Letztes Mal:

Grenzwert einer Funktion

seien: • $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

• $x_0 \in \mathbb{R}$ ein möglicher Grenzwert einer Folge (x_n) mit $\underline{\underline{x_n \in D}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(Schreibfehler beim letzten Mal:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (statt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$))

richtig — Falsch

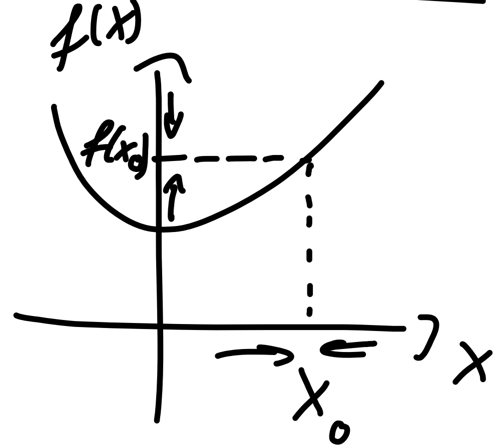
Dann hat f an der Stelle x_0 den Grenzwert a, wenn für jede Folge von Punkten $\underline{\underline{x_n \in D}}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a}$ $\left(f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} a\right)$. Man schreibt dann: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a}$

Bemerkungen:

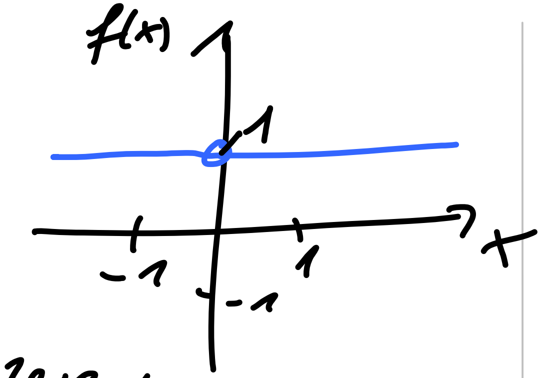
(i) Gehört $x_0 \in \mathbb{D}$ zu $\mathbb{D}$ und ist f stetig in x_0, so gilt:

$$\boxed{a = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$



(ii) Der Begriff des Grenzwertes von Funktionen lässt sich auch ohne Rückgriff auf Folgen definieren (mit einem "ε-δ-Kriterium" ähnlich wie bei der Stetigkeit)

<u>Beispiele:</u>



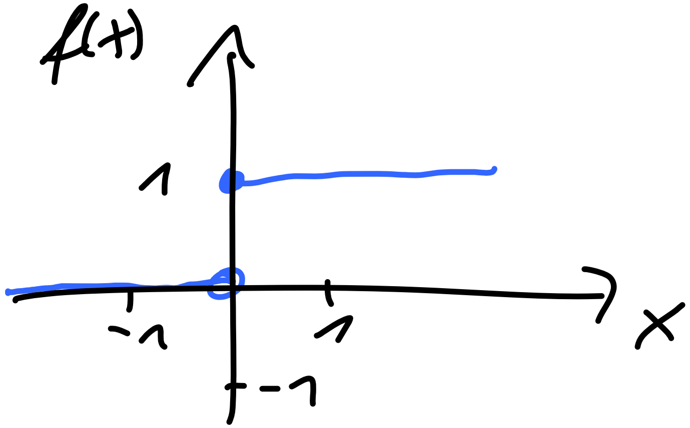
(i) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x}$

$\to$ f hat für $x_0 = 0$ den Grenzwert 1

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}$$

($\Rightarrow$ f kann daher zur Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = 1$ "stetig fortgesetzt" werden (siehe die Diskussion zu "hebbaren Singularitäten" in Vorlesung 5))

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



$\to f$ hat $x_0 = 0$ Keinen Grenzwert

$$\left(\begin{array}{l} f(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \to \infty} 1 \\ f(-\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \end{array} \right)$$

Aber: θ hat bei $x_0 = 0$ jeweils einen rechtsseitigen Grenzwert und einen linksseitigen Grenzwert.

Genauer:

Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte von Funktionen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Folgen $x_n \in D$, die gegen x_0 konvergieren.

Dann hat f bei x_0 den $\left\{\begin{matrix}\text{linksseitigen} \\ \text{rechtsseitigen}\end{matrix}\right\}$ Grenzwert a, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und

$$\left\{\begin{matrix} x_n < x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n > x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \text{ gilt:}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a}$$

Man schreibt:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a\end{array}\right\}}$$

$\lim\limits_{x \to x_0 +}$

$\lim\limits_{x \to x_0 -}$

Beispiel:

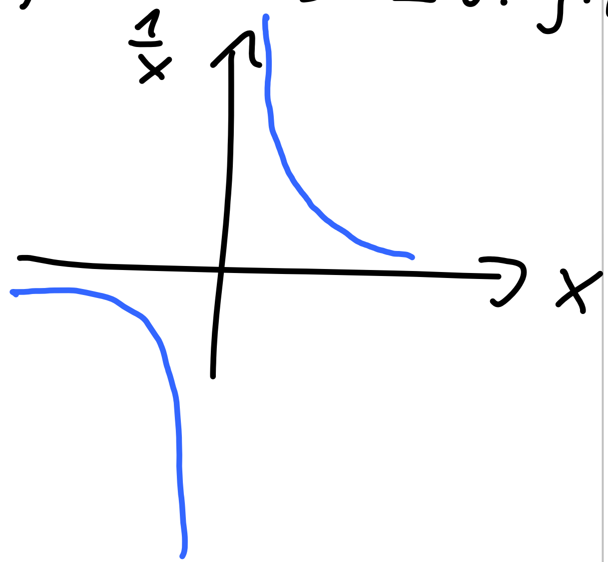
$$\lim_{x \nearrow 0} \Theta(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} \Theta(x) = 1$$

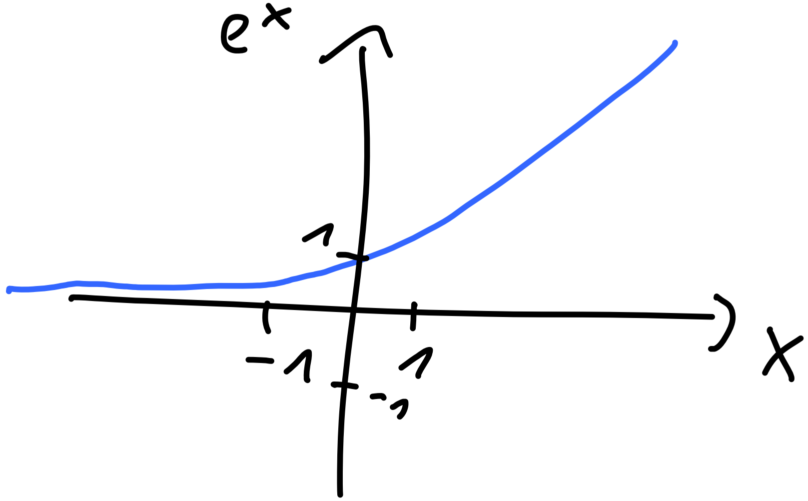
Bemerkung:

Der Grenzwertbegriff lässt sich auch auf Situationen verallgemeinern, in denen Argumente $x \in \mathbb{D}$ oder/und Funktionswerte $f(x) \in \mathbb{D}$ gegen $\pm\infty$ streben, sodass z.B. gilt

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ &\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ &\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^x &= \infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^x &= 0\end{aligned}}$$



$\longrightarrow$ Übungen

(2) Differentialrechnung

Motivation

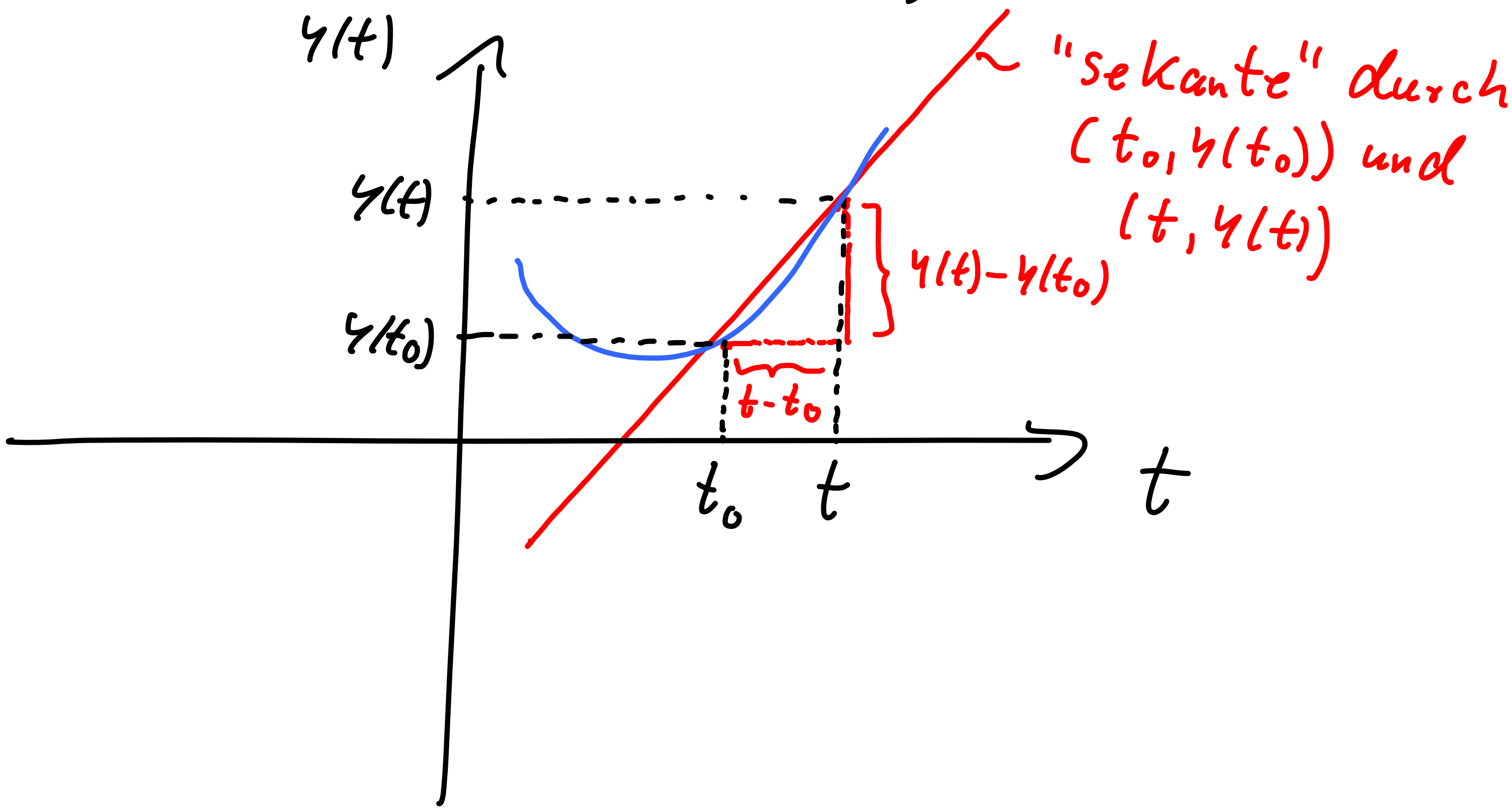
Sei $y(t)$ die Position eines Körpers auf der y-Achse zur Zeit t und t_0 und t $(t_0 \neq t)$ zwei beliebig gewählte Zeitpunkte.

Dann beschreibt die "akkumulierte Änderungsrate"

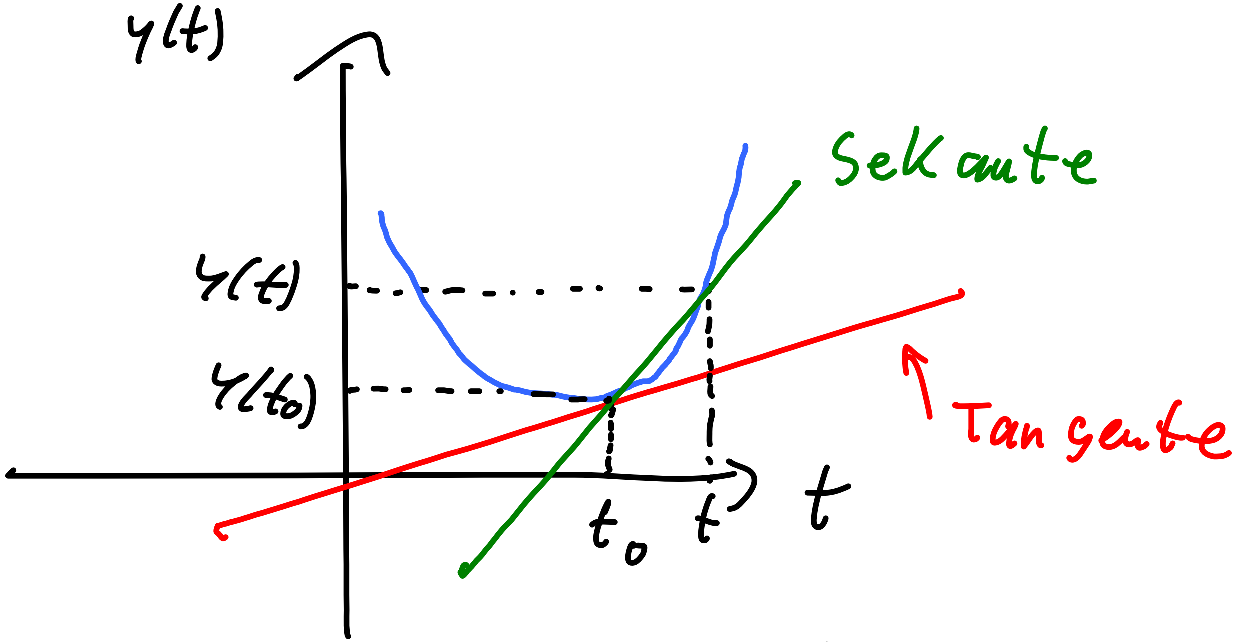
$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} := \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}$$

die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers zwischen t_0 und t.

Diese entspricht graphisch der <u>Steigung</u> der Geraden (<u>"Sekanten"</u>) durch die Punkte $(t_0, y(t_0))$ und $(t, y(t))$:



Die <u>momentane Geschwindigkeit</u> zur Zeit t_0 (also die "infinitesimale Änderungsrate" des Ortes pro Zeiteinheit) entspricht dagegen der <u>Steigung der Tangenten</u> bei $(t_0, y(t_0))$:



Diese ergibt sich aus der Sekantensteigung im Grenzfall $t \to t_0$:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} := \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}$$

Wie in diesem Beispiel interessiert man sich in der Physik häufig für solche infinitesimalen Änderungsraten von Funktionen, also für die Tangentensteigungen der jeweiligen Funktionsgraphen, sofern diese wohldefiniert sind.

Dies motiviert die folgende Definition:

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ <u>differenzierbar</u>, wenn der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existiert.

Falls er existiert, wird er mit

$$\boxed{f'(x_0) \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0)}$$

bezeichnet und die "Ableitung" von f an der Stelle x_0 genannt.

Terminologie:

- $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = "Differenzenquotient"

- $\dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = "Differentialquotient"

- Gelegentlich schreibt man auch:

$$\boxed{x = x_0 + h \quad \text{oder} \quad x = x_0 + \Delta x}$$

und damit:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\underline{\underline{h \to 0}}} \frac{f(\overbrace{x_0+h}^{x}) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}}$$

- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt <u>differenzierbar</u>, wenn sie an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} f' &: \mathbb{D} \to \mathbb{R} \\ f' &: x \mapsto f'(x) \end{aligned}}$$

heißt dann die (erste) Ableitung von f.

- Häufig schreibt man: "diff'bar" statt "differenzierbar"

Gegenbeispiele zur Differenzierbarkeit:

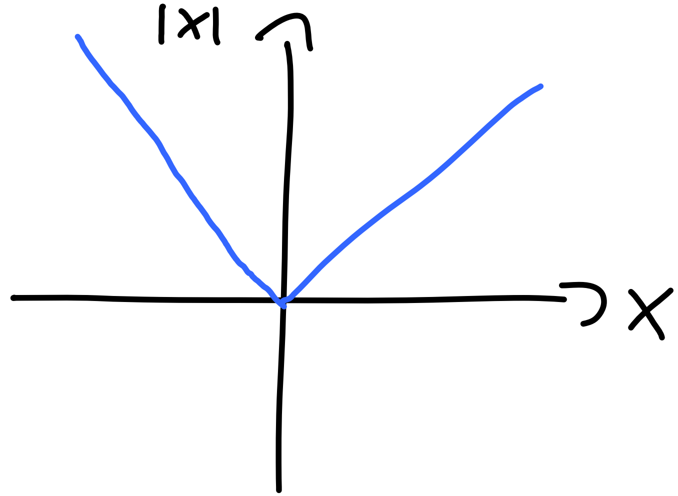
Für die Diff'barkeit von f bei $x_0 \in D$ muss insbesondere gelten:

$$\boxed{-\infty < \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{!}{=} \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \infty}$$

Nur bei Gleichheit existiert auch $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Gegenbeispiel 1:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$



$\Rightarrow$ Ist bei $x_0 = 0$ nicht diff'bar, denn:

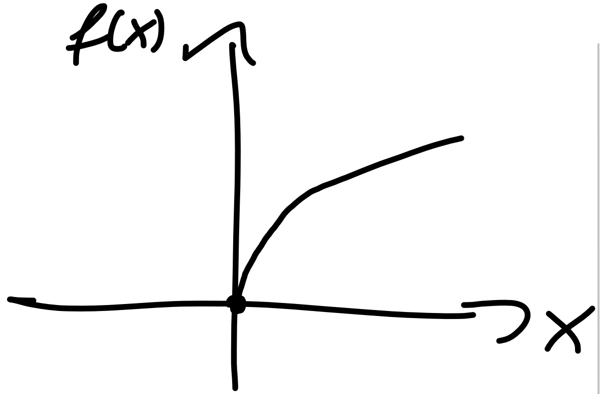
- $\displaystyle \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{(-x)}{x} = -1$

wegen $x<0$ ist $|x| = -x$

$x>0 \Rightarrow |x| = x$

- $\displaystyle \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = +1$

(ii) $f: \mathbb{R}_{+,0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$



$\Rightarrow$ Ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn die Tangentensteigung wäre dort unendlich:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \ \lightning$$

Ableitungen der elementaren Funktionen:

Potenzen:

- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  (sowie $x \neq 0$ bei $\alpha < 1$
  $x > 0$ für $\alpha \notin \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx}(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}}$$

- $f(x) = a x^0 = a = \text{const.}$

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x) = 0}$$

Exponentialfunktion:

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx} = \exp(x) = e^x}$$

e^x ist seine eigene Ableitung!

ae^x erfüllt das auch: $\frac{d}{dx}(ae^x) = ae^x$

a^x hingegen erfüllt dagegen nicht $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x$,

denn: $a^x = e^{(\ln a)\cdot x}$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot e^{(\ln a)\cdot x}$

$$= \ln a \; a^x \neq a^x$$

Kettenregel, siehe später

Trigonometrische Funktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \end{aligned}}$$

Ableitungsregeln

„Linearität“ der Ableitung:

- $\frac{d}{dx}\left(a f(x)\right) = a \frac{df}{dx}(x)$ $\qquad a = \text{const}$ $(a \in \mathbb{R})$

- $\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$

Man sagt: Die Ableitung ist eine „lineare“ Operation.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + \dots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N\right)$$

$$= a_0 \underbrace{\frac{d}{dx}(1)}_{0} + a_1 \underbrace{\frac{d}{dx}(x)}_{1} + \dots + a_{N-1} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^{N-1})}_{(N-1)x^{N-2}}$$

$$+ a_N \frac{d}{dx}(x^N)$$

$$= 0 + a_1 + \dots + a_{N-1}(N-1)x^{N-2} + a_N N x^{N-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1}$$

Vorlesung 8

20. 3. 2019

Ableitungsregeln

Linearität:

- $\frac{d}{dx}(a f(x)) = a \frac{d}{dx} f(x)$
- $\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

Produktregel:

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Beispiel: $h(x) = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}$

$$\Rightarrow h'(x) = \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} + \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}$$

Quotientenregel:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Beispiel:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot(\cos x) - (\sin x)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Kettenregel:

$$\boxed{\left(g \circ f\,(x)\right)' = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

"Äußere Ableitung" "Innere Ableitung"

Beweis:

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f\,(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

Erweitern

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right] \cdot \underbrace{\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]}_{f'(x_0)}$$

$f(x) =: y$

$f(x_0) =: y_0$

$$= \underbrace{\left[\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\right]}_{g'(y_0)} \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0)$$

<u>In suggestiver Kurzschreibweise:</u>

$$g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{y = f(x)})}_{z = g(y)}\Big) = \frac{dz}{dx} \underset{\uparrow}{=} \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g'(y) \cdot f'(x)$$

"Erweitern mit dy"

($\Leftrightarrow$ Erweiterung mit $f(x) - f(x_0)$ im Beweis)

<u>Beispiele:</u>

(i) $\frac{d}{dx}\underbrace{\left[\sin\left(\underbrace{3x}_{y=f(x)}\right)\right]}_{z=g(y)}$ $\Rightarrow$ $y=f(x)=3x \Rightarrow f'(x)=3$

$z=g(y)=\sin(y) \Rightarrow g'(y)=\cos y$

$\Rightarrow g'(f(x))=\cos(f(x))$

$=\cos(3x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\sin(3x)\right]=\underbrace{\cos(3x)}_{g'(f(x))}\cdot\underbrace{3}_{f'(x)} = 3\cos(3x)$$

(ii) $\frac{d}{dx}\underbrace{\left[e^{\overbrace{\sin x}^{y=f(x)}}\right]}_{z=g(y)=e^y}$ $\Rightarrow$ $y=f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$z=g(y)=e^y \Rightarrow g'(y)=e^y$

$\Rightarrow g'(f(x))=e^{\sin x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{\sin x}\right]=\underbrace{e^{\sin x}}_{g'(f(x))}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^3$

Version 1:

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1}\Big]^3 = \underbrace{3y^2}_{g'(y)} \cdot f'(x) = 3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^2 \cdot f'(x)$$

$$y=f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1$$

$$z = g(y) = y^3 \Rightarrow g'(y) = 3y^2$$

Nun ist:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\Big[\big(\underbrace{x+\frac{1}{x}}\big)^4-1\Big] = \tilde{g}'(\tilde{y})\cdot\tilde{f}'(x) = 4\tilde{y}^3\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x) = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \tilde{f}'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$$

$$\tilde{z} = \tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{y}^4-1 \Rightarrow \tilde{g}'(\tilde{y}) = 4\tilde{y}^3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^3 = 3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^2\cdot 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

<u>Version 2:</u>

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left[\underbrace{\left(\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{y=f(x)}\right)^4-1}_{z=g(y)}\right]^3}_{w=h(z)}$$

$$y = f(x) = x+\frac{1}{x} \Rightarrow y'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$$

$$z = g(y) = y^4-1 \Rightarrow z'(y) = 4y^3$$

$$w = h(z) = z^3 \Rightarrow w'(z) = 3z^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\,w(z(y(x))) = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= w'(z)\cdot z'(y)\cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\,w(z(y(x))) = \underbrace{3z^2}_{w'(z)}\cdot\underbrace{4y^3}_{z'(y)}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}_{y'(x)} =$$

$$\overset{z=y^4-1}{\Rightarrow} = 3(y^4-1)^2 \cdot 4y^3 \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\overset{y=x+\frac{1}{x}}{\Rightarrow} = 3\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right)^2 \cdot 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

Die Ableitung einer Umkehrfunktion

Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f.
Dann gilt ja:

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

Die Ableitung beider Seiten dieser Gleichung ergibt mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(f \circ f^{-1}(x)\right) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(f(f^{-1}(x))\right) = 1$$

Kettenregel

$$\Leftrightarrow \underbrace{f'(f^{-1}(x))}_{\text{Äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(f^{-1}(x))'}_{\text{Innere Ableitung}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Beispiele:

(i) $f = \exp \implies \begin{cases} f'(x) = \exp(x) = f(x) \\ f^{-1}(x) = \ln(x) = \exp^{-1}(x) \end{cases}$

Umkehr-Funktion.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\ln(x)}_{f^{-1}(x)}\Big) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\underbrace{\exp(\ln(x))}_{x,\ \text{denn } \ln = \exp^{-1}}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

(ii) $f(x) = \sin x \implies \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ f^{-1}(x) = \arcsin x \end{cases}$

$$\implies \frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Idee zur weiteren Vereinfachung:

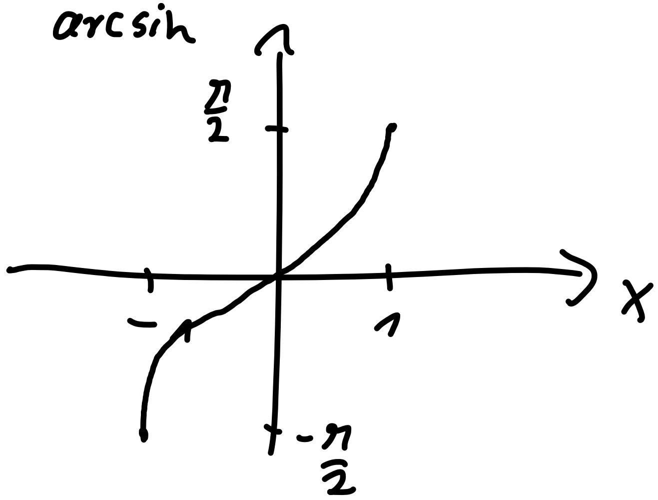
Drücke cos durch sin aus (mit Hilfe von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), um $\sin(\arcsin(x)) = x$ ausnutzen zu können.

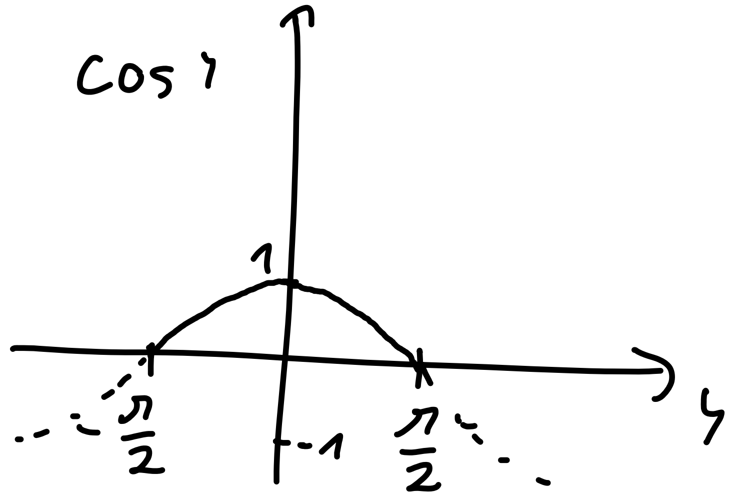
$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \iff \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$\iff \cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

Frage: Welches Vorzeichen gilt hier?

Antwort:





also: $\arcsin[-1,1] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [0,1]$

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) \in [0,1] \Rightarrow$ größer oder gleich Null

$\Rightarrow$ Das Pluszeichen ist hier richtig!

$\Rightarrow \cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$, $y = \arcsin x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{\cos\left[\arcsin(x)\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \qquad (y = \arcsin(x))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left[\underbrace{\sin(\arcsin(x))}_{x}\right]^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Höhere Ableitungen

Falls die Ableitungsfunktion $f'(x)$ selbst auch wieder diff'bar ist, kann man die sog. 2. Ableitung $f''(x)$ von $f(x)$ bilden:

$$\boxed{f''(x) := (f'(x))'}$$

Analog: 3. und höhere Ableitungen:

$$\boxed{f'''(x) := (f''(x))' = (f'(x))''}$$

Bemerkungen: (i) Manchmal nennt man $f(x)$ auch die "nullte Ableitung" (0. Ableitung) von $f(x)$

(ii) Manchmal schreibt man $f^{(n)}(x) =$ n-te Ableitung von $f(x)$.

z.B. $f^{(1)}(x) = f'(x)$

$$f^{(3)} = f'''(x)$$

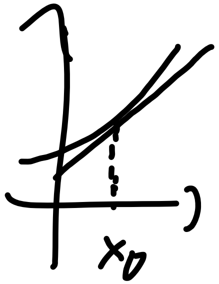
$$f^{(0)} = f(x)$$

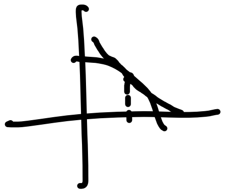
$$\vdots$$

Einige Anwendungen der Differentialrechnung

(I) Kurvendiskussion

(i) Monotonie





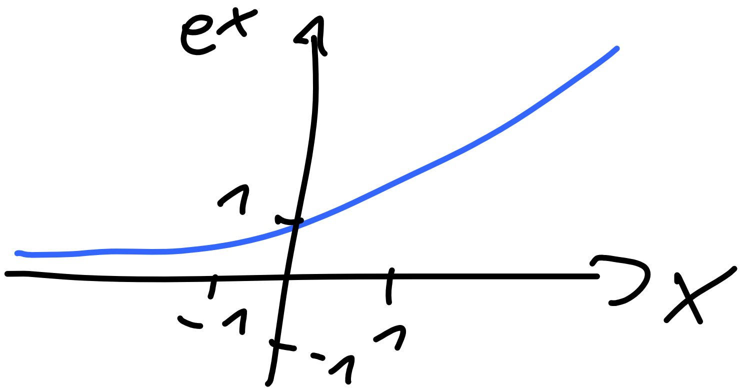
$f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 streng monoton wachsend

$f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 streng monoton fallend

Beispiel:

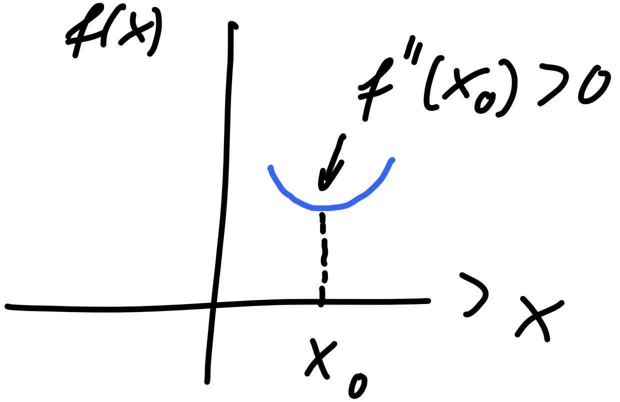
$$(e^x)' = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ e^x ist überall streng monoton wachsend

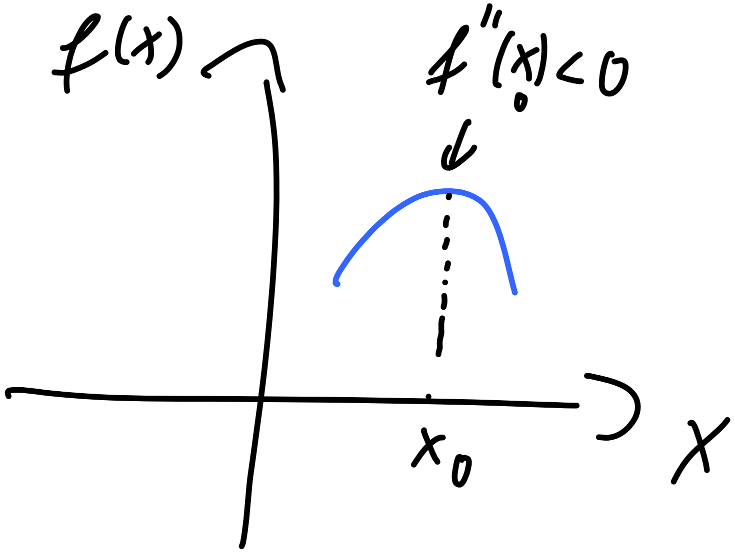


(ii) **Krümmung**

- $f''(x_0) > 0 \implies f$ ist in einer Umgebung von x_0 "konvex" (d.h. Γ_f ist linksgekrümmt)

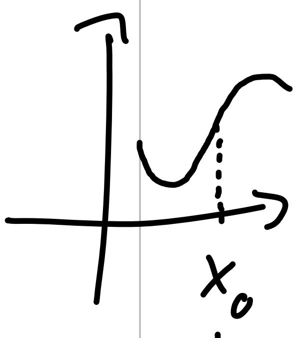


- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 konkav (d.h. Γ_f ist rechtsgekrümmt)



- Punkte, an denen die Krümmung die Richtung wechselt, heißen "Wendepunkte"

Hinreichendes Kriterium:



$$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist ein Wendepunkt}}$$

$\shortparallel$ Wendepunkt

Beispiel: $x_0 = 0$ bei $f(x) = \sin x$

Vorlesung 9 21.3.2019

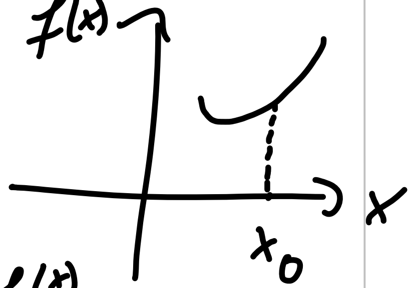
Letztes Mal:

(I) Kurvendiskussion

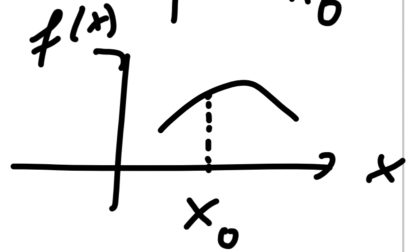
(i) Monotonie

(ii) Krümmung

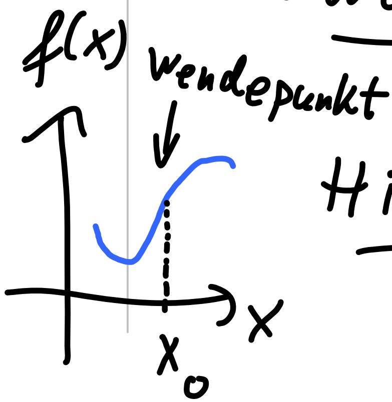
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ist "konvex" nahe x_0:



- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist "konkav" nahe x_0:



- Wendepunkte: Punkte, an denen die Krümmung die Richtung wechselt.



Hinreichende Bedingung:

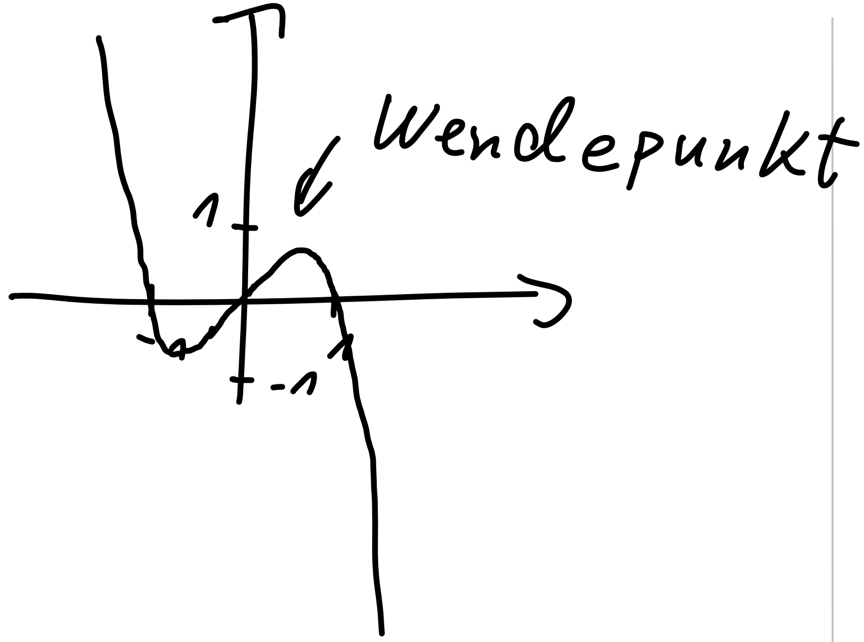
$$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist Wendepunkt}}$$

$$f(x) = x - x^5$$

$$f'(x) = 1 - 5x^4$$

$$f''(x) = -5 \cdot 4x^3$$

$$f'''(x) = -5 \cdot 4 \cdot 3x^2$$



$$\Rightarrow f'''(x_0=0) = 0$$

$$f''(x_0=0) = 0$$

$\Rightarrow$ Bedingung ist nur <u>hinreichend</u>, aber <u>nicht notwendig</u>.

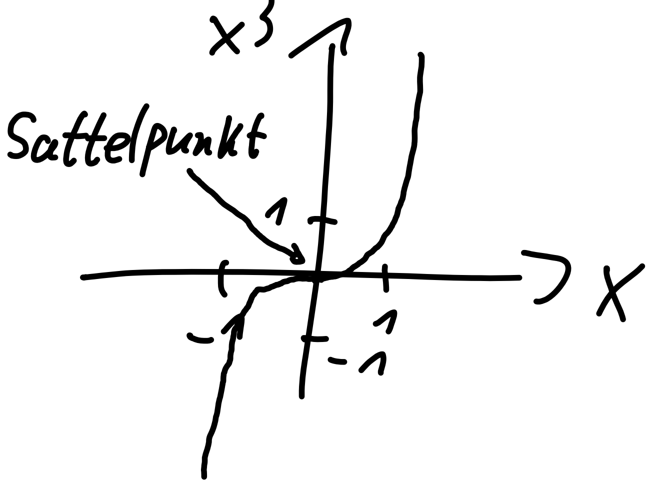
- Wendepunkte mit <u>Steigung Null</u> heißen auch <u>"Sattelpunkte"</u>

<u>Hinreichende Bedingung:</u>

$$\boxed{f''(x_0)=0 \text{ und } f'''(x_0)\neq 0 \text{ und } f'(x_0)=0 \Rightarrow x_0 \text{ ist Sattelpunkt}}$$

<u>Beispiel:</u>

$f(x) = x^3$ hat bei $x_0 = 0$ einen Sattelpunkt



Gegenbeispiele:

(i) Falls $f'''(x_0) \neq 0$ verletzt ist (also falls $f'''(x_0) = 0$), muss das tatsächlich kein Sattelpunkt mehr sein:

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$

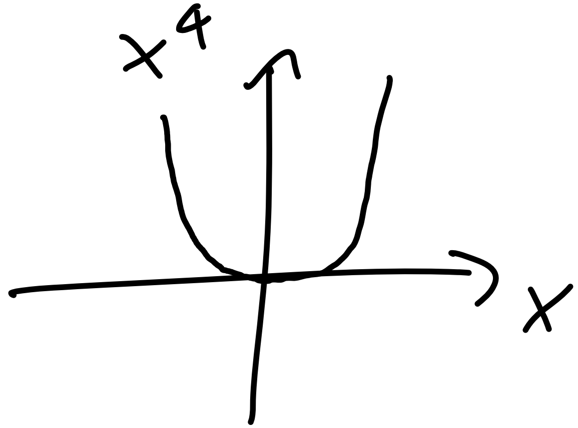
$$f''(x) = 4 \cdot 3\, x^2$$

$$f'''(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = 0 \checkmark$$

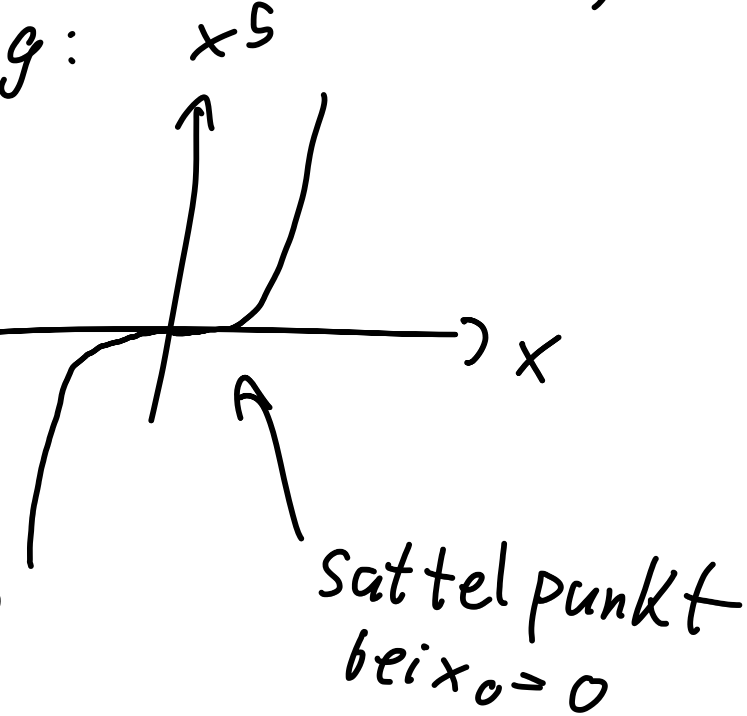
$$f'(x_0) = 0 \checkmark$$

$$f'''(x_0) = 0 \;↯$$



$\Rightarrow x_0 = 0$ ist kein Sattelpunkt.

(ii) Obige Bedingung ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig:



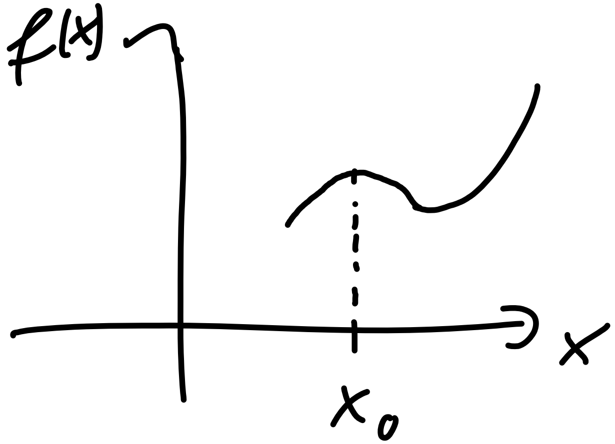
$f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(0) = 0$

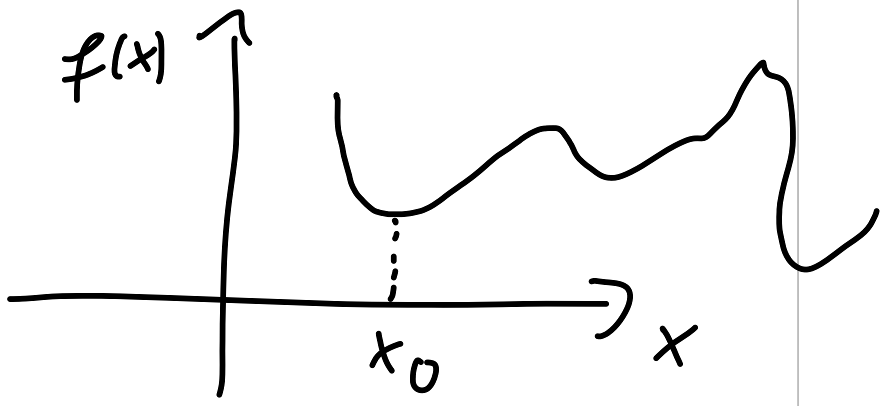
$f''(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^3 \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 \Rightarrow f'''(0) = 0$

(iii) Lokale Maxima und Minima



(lokales Maximum bei x_0)



(lokales Minimum bei x_0)

Hinreichendes Kriterium:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

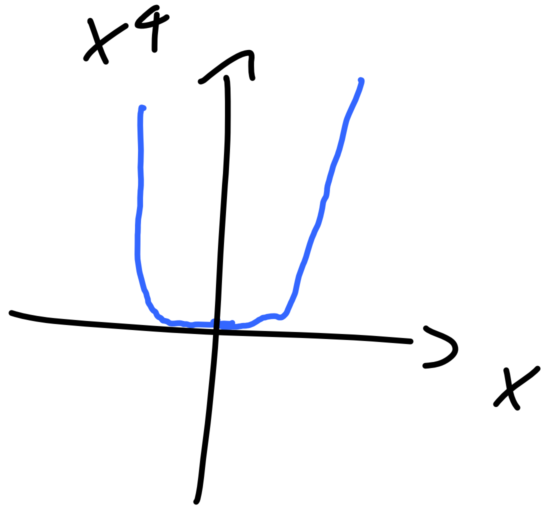
Dies ist keine notwendige Bedingung,
denn z.B.

$$f(x) = x^4$$

$f'(0)=0 \quad \Longleftarrow \quad f'(x) = 4x^3$

$$f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2$$

$f''(0)=0$



Voraussetzungen des obigen Kriteriums sind nicht alle erfüllt, aber trotzdem ist bei $x_0=0$ ein Minimum.

(II) Taylor-Entwicklung

Viele gängige Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ lassen sich in der Nähe eines Punktes x_0 ("Entwicklungspunkt") durch eine sog. Potenzreihe darstellen, bzw. approximieren

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \end{aligned}}$$

Terminologie:

(i) Funktionen, die sich wie oben durch eine Potenzreihe darstellen lassen, nennt man analytisch.

(ii) Eine "Reihe" bezeichnet allgemein eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} (\dots)$,

$\to$ "Potenzreihe"

Bedeutung für Physik

Existiert eine Darstellung durch eine Potenzreihe, so ergeben die ersten Glieder i. A. bereits eine sehr gute Näherung der eigentlichen Funktion $f(x)$, wenn man sehr nahe bei x_0 bleibt (also für $|x-x_0| \ll 1$)

Grund: Höhere Potenzen $(x-x_0)^n$ ergeben für $|x-x_0| \ll 1$ nur vernachlässigbar kleine Beiträge

Illustration:

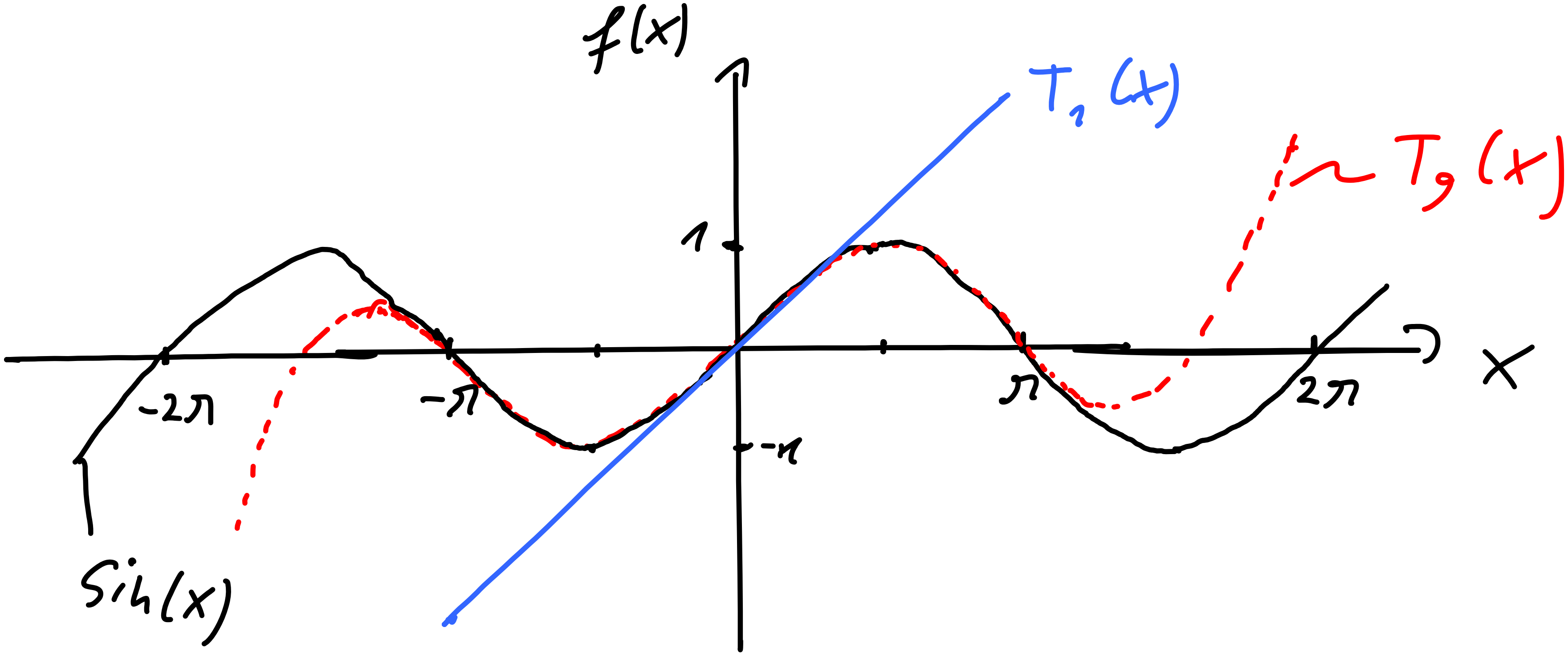
Die Potenzreihe von $\sin x$ um $x_0 = 0$ ist

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

($n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ ("n Fakultät"))

Seien

$$\boxed{\begin{aligned} T_1(x) &:= x \\ T_9(x) &:= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \end{aligned}}$$



$\Rightarrow$ $T_1(x)$ ist eine recht gute Näherung für $|x| \lesssim \frac{\pi}{6}$

$T_9(x)$ ist eine recht gute Näherung sogar bis etwa $|x| \approx \frac{5}{4}\pi$

Bemerkungen:

(i) Es gibt Potenzreihen, die nur für eine <u>begrenzten x-Bereich</u> gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren

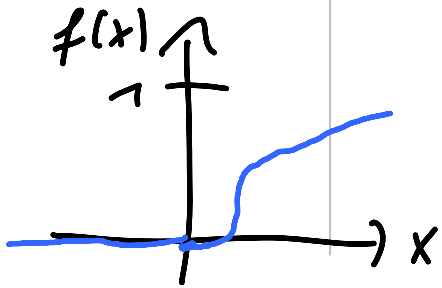
z.B.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \left(\begin{array}{l}\text{gilt nur} \\ \text{für } |x| < 1\end{array}\right)$$

→ „Die Potenzreihe hat hier den <u>Konvergenzradius 1</u>"

(ii) Es gibt auch nicht-analytische Funktionen:

z.B. $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$



→ ist bei $x_0 = 0$ <u>nicht</u> analytisch.

<u>Frage</u>:

Angenommen

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 \\ &\quad + a_4 (x-x_0)^4 + a_5 (x-x_0)^5 + \dots \end{aligned}}$$

ist analytisch. Wie bestimmt man die Koeffizienten a_n?

<u>Antwort</u>:

Leite beide Seiten n-mal nach x ab und setze dann $x = x_0$ ein:

$$\frac{d}{dx}\overbrace{(\underbrace{x-x_0}_{y=f(x)})^n}^{g(y)=y^n} = n\,(x-x_0)^{n-1}\cdot 1$$

<u>0. Ableitung</u> : $f(x_0) = a_0$

<u>1. Ableitung</u> : $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + 5a_5(x-x_0)^4 + \dots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f'(x_0) = a_1}}$$

<u>2. Ableitung</u>: $f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + 4\cdot 3a_4(x-x_0)^2 + 5\cdot 4a_5(x-x_0)^3 + \dots$

$$\Rightarrow f''\underline{\underline{(x_0) = 2a_2}}$$

<u>3. Ableitung</u>: $f'''(x) = 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0) + 5\cdot 4\cdot 3\cdot a_5(x-x_0)^2 + \dots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f'''(x_0) = 3\cdot 2a_3}}$$

4. Ableitung: $f''''(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\, a_5 (x-x_0) + \ldots$

$$\Rightarrow f''''(x_0) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4$$

Also:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{1} = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \qquad (0! := 1)$$

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1} = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \qquad (1! = 1)$$

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2} = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \qquad (2! = 2\cdot 1)$$

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{a_n} (x-x_0)^n}$$

heißt die Taylor-Reihe oder Taylor-Entwicklung von f um die Stelle x_0

(Analytische Funktionen sind bereits durch die Ableitungen an einem einzigen Punkt x_0 bestimmt)

Beispiele:

- $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$

$\underline{\underline{x_0 = 0}} \qquad \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} \underbrace{f^{(n)}(0)}_{1} = \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$

("Die Exponentialreihe")

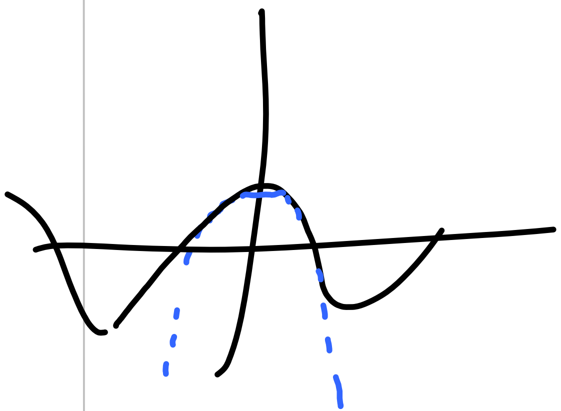
- $f(x) = \sin x \, , \; x_0 = 0$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}$$

$\left(\Rightarrow \text{"Kleinwinkelnäherung"} \quad \sin x \approx x \quad \text{Für } |x| \ll 1 \right)$

- $f(x) = \cos x \;,\; x_0 = 0$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}}$$



$\left(\Rightarrow \text{"Kleinwinkelnäherung"}: \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad (|x| \ll 1) \right)$

- $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \neq 0), \quad |x| < 1$

$$x_0 = 0$$

$$f(x_0) = f(0) = (1+0)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \underbrace{1 + \alpha x}_{\text{sehr häufig benutzt für kleine } |x|} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots$$

z.B. $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \simeq 1 - x$

$(\alpha = -1)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \alpha(-x) = 1 - \frac{1}{2}(-x)$$

$(\alpha = -\frac{1}{2})$

$$= 1 + \frac{1}{2}x$$

3 Integralrechnung

3.1 Stammfunktionen

- **Ableitung** ist die Antwort auf die Frage:

$$\boxed{\text{Funktion ist bekannt}} \longrightarrow \boxed{\text{Was ist die Änderungsrate der Funktion an jedem Punkt?}}$$

Beispiel: Positition $x(t)$ sei bekannt

→ Was ist momentane Geschwindigkeit?

→ $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

- Die Stammfunktion beantwortet die umgekehrte Frage:

Die Änderungsrate einer Funktion ist an jedem Punkt bekannt. $\longrightarrow$ Was ist die Funktion?

Beispiel:

Momentane Geschwindigkeit $V(t)$ $\forall t$ bekannt

$\rightarrow$ Was ist meine Position $x(t)$?

$\rightarrow$ $x(t)$ ist die Stammfunktion von $V(t)$.

Vorlesung 10 22.3.2019

https://unith.desy.de/teaching/lectures/vorkurs2019

Letztes Mal: 3 Integralrechnung

3.1 Stammfunktionen

(1) Funktion
(z.B. $x(t)$)

(1) ist Stammfunktion von (2)

(2) ist Ableitung von (1)

(2) Änderungsrate der Funktion an jedem Punkt
z.B. $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

Etwas genauer definieren wir:

Eine Funktion $F: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad (\forall x \in \mathbb{D})$$

($f(x)$ ist Änderungsrate von $F(x)$)

Für $F(x)$ schreibt man auch:

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\, dx}$$

und bezeichnet $F(x)$ als das **(unbestimmte) Integral** von $f(x)$

Bemerkungen:

(i) Stammfunktionen sind nicht eindeutig, sondern können sich durch "Integrationskonstanten" unterscheiden, denn

$F_1(x)$

und $F_2(x) := F_1(x) + c \quad , \quad c = \text{const.}, c \in \mathbb{R}$

haben dieselbe Ableitung:

$$\frac{dF_1(x)}{dx} =: f(x)$$

$$\frac{dF_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(F_1(x) + c\right) = \frac{dF_1(x)}{dx} + \cancelto{0}{\frac{dc}{dx}} = f(x)$$

(ii) Viele Stammfunktionen erhält man, indem man die Listen bekannter Ableitungsfunktionen "rückwärts liest":

z.B.

- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$$\Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

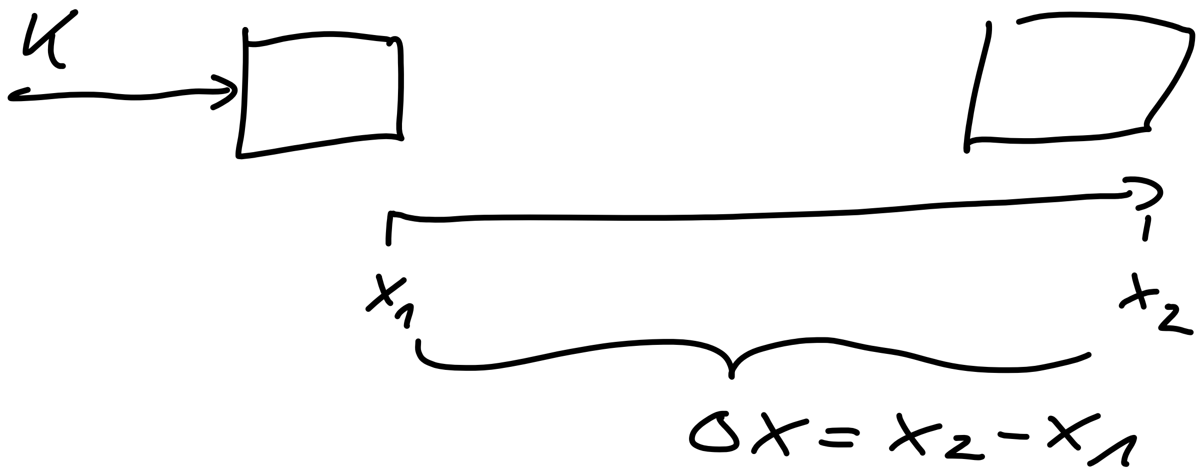
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$$\Rightarrow \int e^x \, dx = e^x + c$$

3.2 Flächeninhalte und bestimmte Integrale

Motivation:

Verschiebt eine konstante Kraft K in x-Richtung einen Körper um die Wegstrecke $\Delta x = (x_2 - x_1)$



So wird die Arbeit

$$\boxed{W = K \cdot \Delta x = K\,(x_2 - x_1)}$$

verrichtet.

Fasst man die auf einen Körper wirkende Kraft am Ort x als Funktion

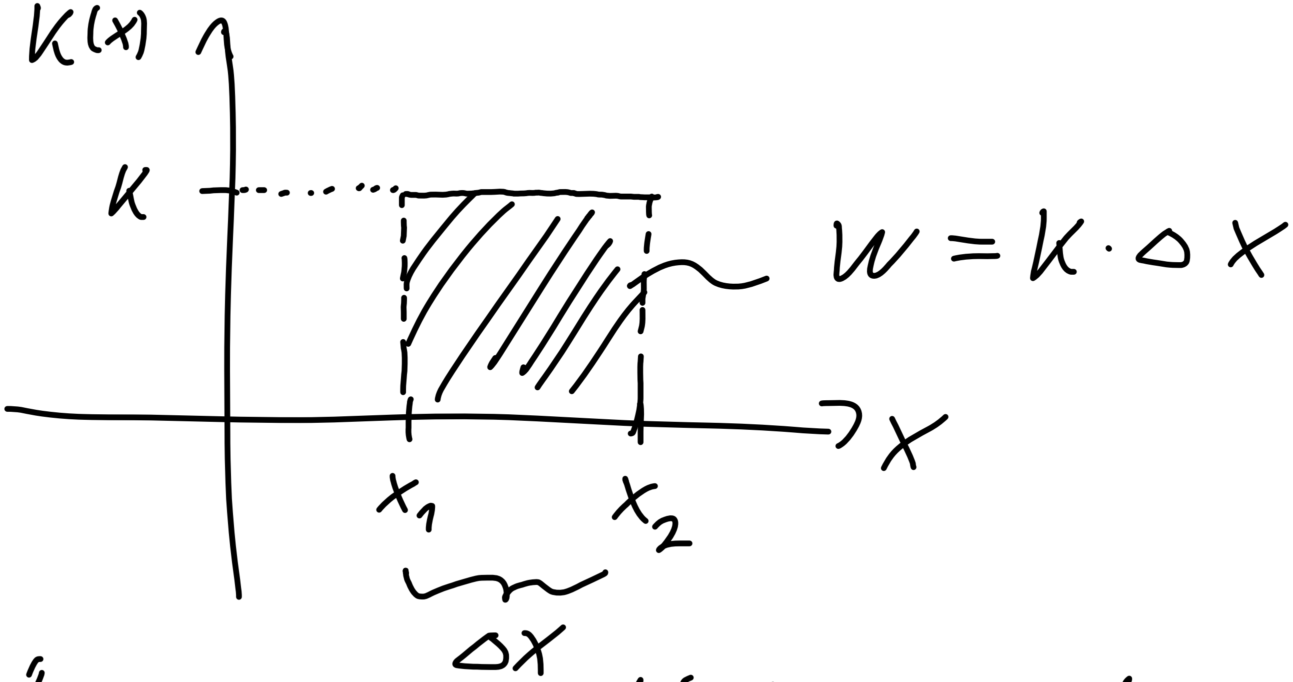
$$\boxed{x \mapsto K(x)}$$

auf, so entspricht die obige Situation mit <u>konstanter Kraft</u> der <u>konstanten Funktion</u>

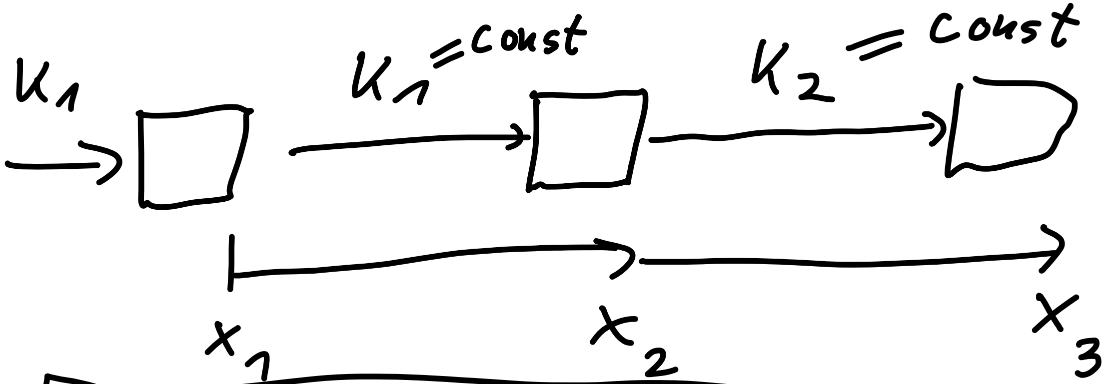
$$\boxed{x \mapsto K(x) = K = \text{const.}}$$

und

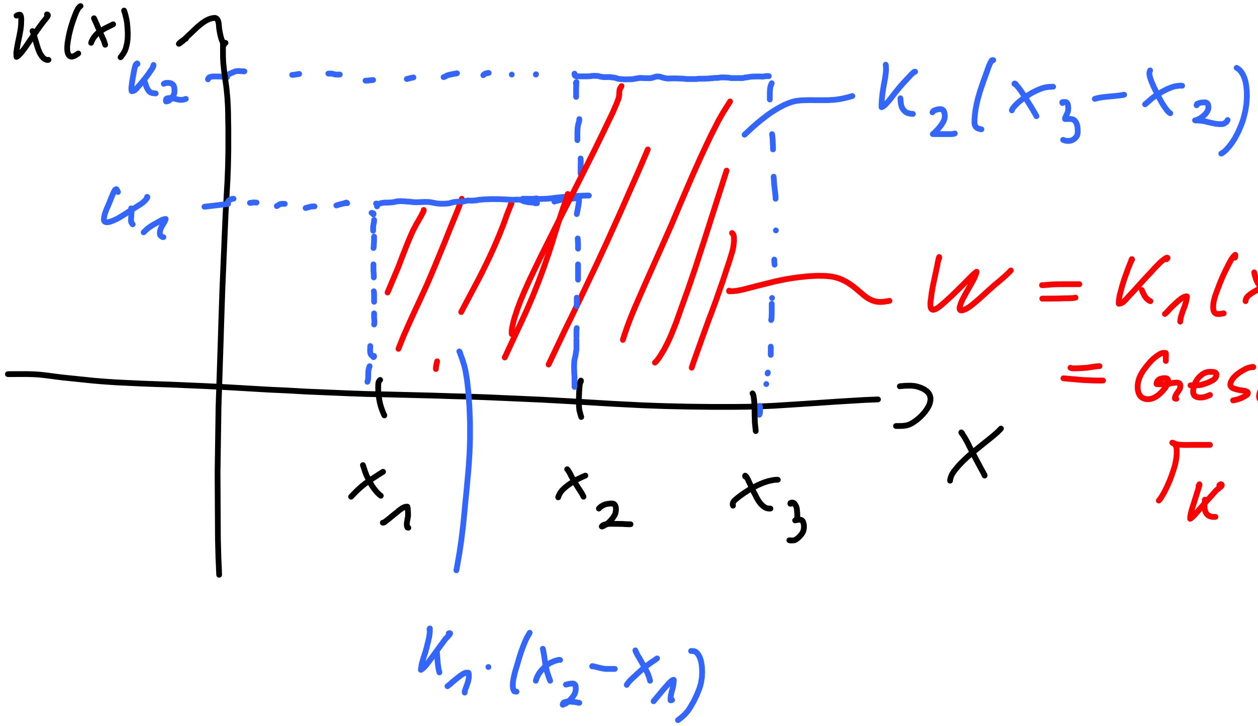
$W =$ Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph Γ_K und der x-Achse (zwischen den Stellen x_1, x_2)



Ähnlich für stückweise konstante Kräfte:



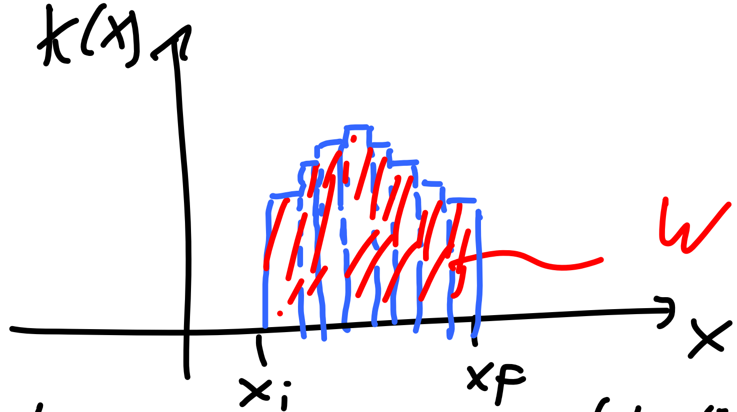
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} W &= K_1(x_2 - x_1) + K_2(x_3 - x_2) \\ &= \text{Fläche unterhalb von } \Gamma_K \text{ zw. } x_3 \text{ und } x_1 \end{aligned}}$$



$$W = K_1(x_2-x_1) + K_2(x_3-x_2)$$

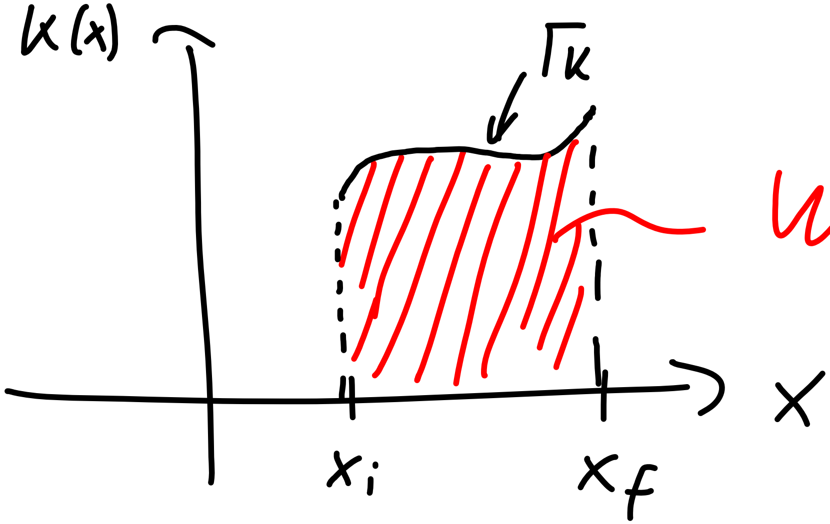
= Gesamte Fläche unter Γ_K zw. x_3 und x_1

Analog:



$W =$ Fläche unter Γ_K

Für beliebig von x abhängige Kräfte $K(x)$ versteht man unter der verrichteten Arbeit W daher ebenfalls die Fläche unter Γ_K zwischen x_i und x_f:



$W =$ Fläche zwischen Γ_K und der x-Achse zwischen x_i und x_f.

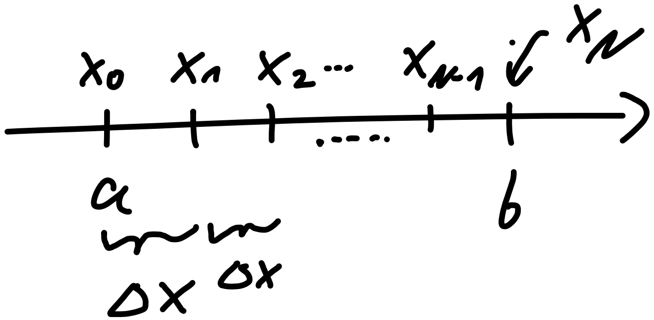
Solche Flächen zwischen Funktionsgraphen und x-Achse treten in Physik und Mathematik häufig auf. Ihre Berechnung ist Gegenstand der "<u>Integralrechnung</u>".

<u>Berechnungsidee</u>:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Zerlege $[a,b]$ in N gleich große Teilintervalle der Größe

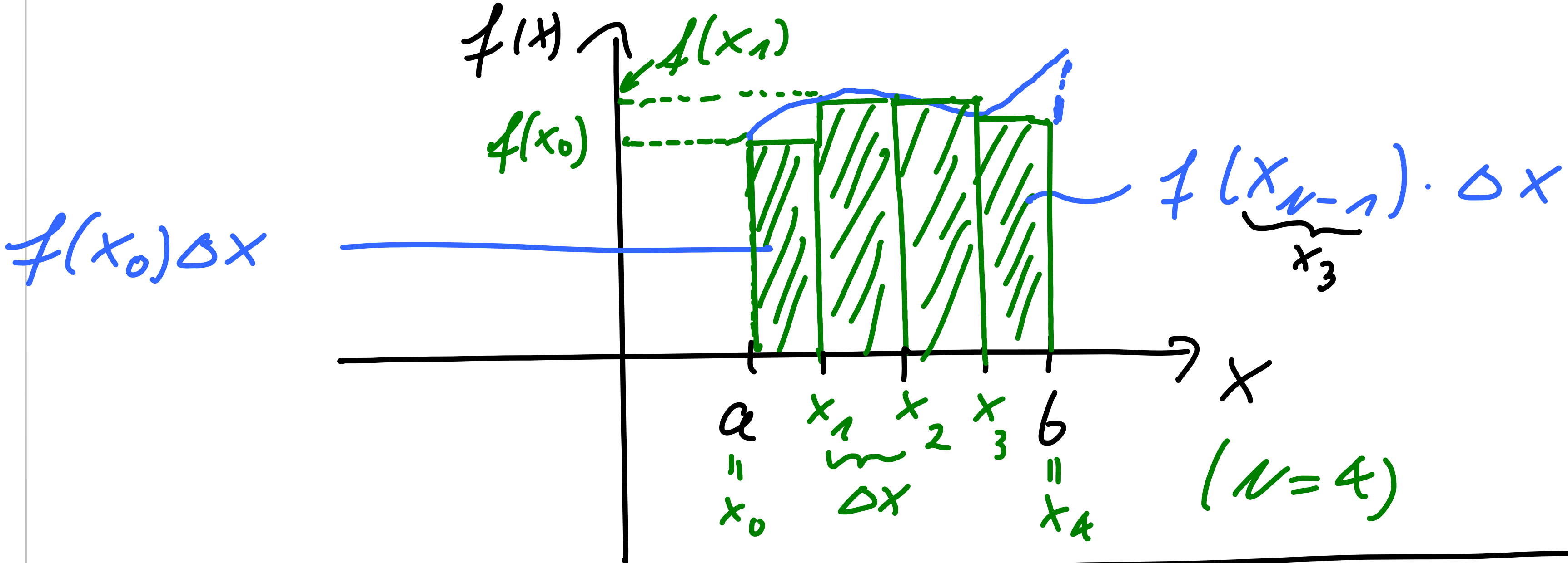
$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{N}}$$



$x_n = a + n\Delta x$ ("Stützstellen")

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= a + \Delta x \\
x_2 &= a + 2\Delta x \\
&\vdots \\
x_{N-1} &= a + (N-1)\Delta x \\
x_N &= a + N\Delta x = \cancel{a} + \cancel{N}\left(\frac{b-\cancel{a}}{\cancel{N}}\right) = b
\end{aligned}
\right.
$$

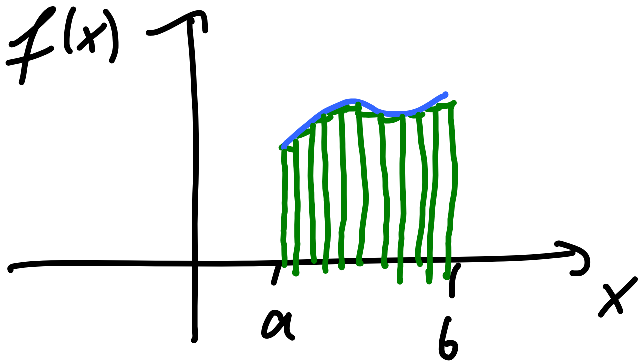
(ii) Nähere den gesuchten Flächeninhalt durch schmale Rechtecke der Höhe $f(x_n)$ $(n = 0, \dots, N-1)$ und Breite Δx an:



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Gesuchte Fläche unter } \Gamma_f \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x}$

(iii) Immer bessere Annäherung an die tatsächlich gesuchte Fläche mit dem Grenzwert:

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Gesuchte Fläche unter } \Gamma_f &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\,\Delta x \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \underbrace{\frac{(b-a)}{N}}_{\Delta x}\end{aligned}}$$



Existiert der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x}$$

so heißt $f(x)$ auf $[a,b]$ <u>integrierbar</u> und den Grenzwert nennt man das <u>bestimmte Integral</u> von $f(x)$ auf $[a,b]$.

<u>Man schreibt:</u>

$$\boxed{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \, dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x}$$

Integralzeichen (Stilisiertes S für S(umme))

b ← Obere Integrationsgrenze

a: Untere Integrationsgrenze

Integrand

dx: "Infinitesimale Änderung der Integrationsvariablen" in Anlehnung an $\Delta x \to 0$

Frage: Warum ein ähnliches Symbol wie für Stammfunktionen
$$\left(F(x) = \int f(x)\,dx\right)$$

Antwort:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\boxed{\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\left(\begin{array}{l}\text{Fläche zw.}\\ a \text{ und } b \text{ unterhalb}\\ \text{von } \Gamma_f\end{array}\right)} = F(b) - F(a) =: \left[F(x)\right]_a^b =: F(x)\Big|_a^b}$$

Wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Bemerkungen:

(i) In der Differenz $F(b) - F(a)$ hebt sich die unbestimmte Integrationskonstante der Stammfunktion weg.

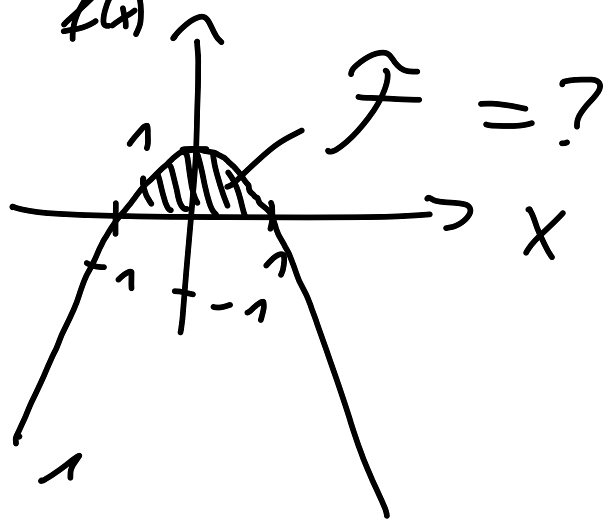
(ii)
$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(\int_a^y f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dy}\left[F(y) - F(a)\right] = \frac{dF(y)}{dy} - \cancel{\frac{dF(a)}{dy}}^{\,0} = f(y)}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)}$$

Integration ist "invers" zur Differentiation.

Beispiel:

$f(x) = 1 - x^2$



$$\Rightarrow \mathcal{F} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = F(1) - F(-1)$$

$\Rightarrow$ wir brauchen $F(x)$

$$\Rightarrow F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 \quad (+c)$$

$$\left(\text{denn } \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) = 1 - \frac{3}{3}x^2 = 1 - x^2 = f(x) \checkmark \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \left(1 - \frac{1}{3}1^3\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)^3\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

3.3 Rechenregeln für Integrale

(i) Linearität:

$$\boxed{\int_a^b \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int_0^\pi \left(2\cos(x) + 3\sin(x)\right) dx$$

$\cos \pi = -1$
$\cos 0 = +1$

$$= 2 \cdot \int_0^\pi \cos(x)\,dx + 3 \cdot \int_0^\pi \sin(x)\,dx$$

$$= 2\left[\sin(x)\right]_0^\pi + 3 \cdot \left[-\cos(x)\right]_0^\pi = 2(0-0) - 3\,(\underbrace{-1-1}_{-2})$$

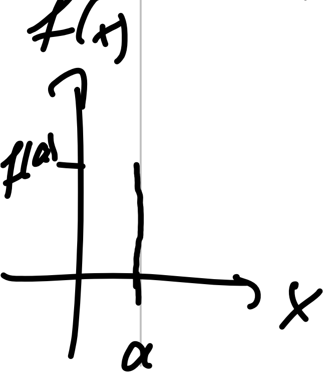
$$= \underline{\underline{6}}$$

(ii) Vertauschung der Integralgrenzen

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

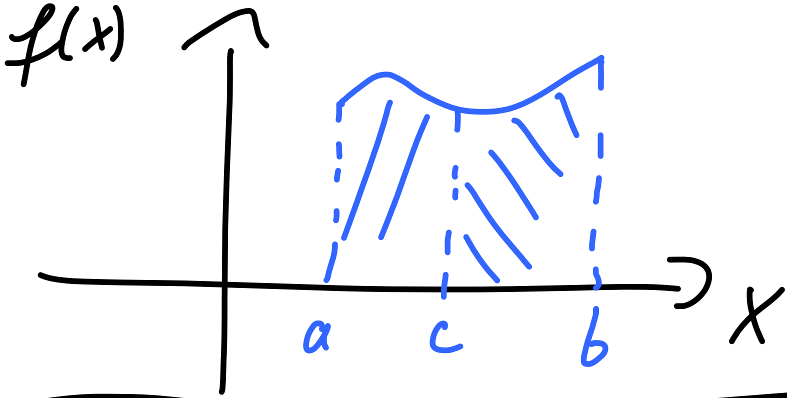
$$\left(\text{denn } \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,dx\right)$$

(iii) Gleiche Integralgrenzen:



$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \big(= F(a) - F(a)\big)}$$

(iv) Aufteilung des Integrationsintervalls



$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}}$$

Vorlesung 11

25. 3. 2019

3.4 Integrationstechniken

(i) Partielle Integration

= Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung:

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

- Die linke Seite hat die Stammfunktion $u(x)\cdot v(x)$.
- Die Stammfunktion der rechten Seite ist:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Also:

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

(Partielle Integration)

Analog für bestimmte Integrale:

$$\boxed{\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

Anwendungsbeispiele:

(i) Gesucht: $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx$

→ Wähle: $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = x e^x - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx$$

$$= x e^x - \underbrace{\int e^x dx}_{e^x\,(+c)} = x e^x - e^x \,(+c)$$

Probe: $\frac{d}{dx}\left(x e^x - e^x + c\right) = 1 \cdot \cancel{e^x} + x e^x - \cancel{e^x}$

$= x e^x$ ✓

(ii) Gesucht: $\int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx$

$\rightarrow$ Wähle: $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin(x)$

$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \cdot \sin x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \underbrace{\int 1 \, dx}_{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\cos x \cdot \sin x) + \frac{1}{2} x \quad (+c)$$

(iii) <u>Gesucht</u>: $\int \ln x \, dx$

<u>Trick</u>: $\int \ln x \, dx = \int \underbrace{(\ln x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx$

$\rightarrow$ <u>Wähle</u>: $u(x) = \ln x \implies u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \implies v(x) = x$

$$\implies \int \underbrace{(\ln x)}_{u} \underbrace{1}_{v'} dx = x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot x \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x \quad (+c)$$

(ii) Substitutionsregel

Die Substitutionsregel basiert auf einer Umkehrung der Kettenregel der Differentialrechnung und erlaubt die Vereinfachung von Integralen der Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

Für Funktionen f, g gemäß der Regel:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy}$$

Im Endergebnis y durch $g(x)$ ersetzen.

(Für unbestimmte Integrale: $\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy + C}$

Beweis:

Sei F die Stammfunktion von f:

$$\boxed{F'(y) = f(y)}$$

Dann ist:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{F'(g(x))\cdot g'(x)}_{(F(g(x)))' \text{ (Kettenregel)}}\,dx$$

$$= \int_a^b (F(g(x)))'\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$\int h'(x)\,dx = h(x)$$

$$= \Big[F(y)\Big]_{g(a)}^{g(b)} \overset{F'=f}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

Beispiele:

(i) $$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_a^b f(\underbrace{x+c})\cdot \overbrace{1}^{g'(x)}\,dx$$

$g(x) = x+c \Rightarrow g'(x) = 1$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy$$

$$\left(\text{z.B. } \int_0^{\pi/4} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\right)$$

f $\quad -\frac{\pi}{4} = c$

$$\int_0^{\pi/4} \underbrace{\sin}_{f}\left(\underbrace{x-\frac{\pi}{4}}\right)\cdot 1\,dx = \int_{0-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}} \sin y\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin y\,dy$$

$g(x) \Rightarrow g'(x) = 1$

$g(x) = x - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}$

$$= \left[-\cos y\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = -1 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \underbrace{2x}_{g'} \cdot \underbrace{\cos}_{f} \underbrace{(x^2)}_{g} dx$

<u>Also:</u> $y = g(x) = x^2 \Longrightarrow \begin{cases} g'(x) = 2x \\ g(a) = g(0) = 0^2 = 0 \\ g(b) = g\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$f(y) = \cos(y)$

$$\Longrightarrow \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos(x^2) dx = \int_0^{\pi/2} \cos(y)\, dy$$

$$= \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

In der Praxis rechnet man das auch manchmal so:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cdot \cos \underbrace{(x^2)}_{y} dx$$

$\Rightarrow$ Substituiere $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

$$\Rightarrow \bullet \frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

$$\bullet\ y(0) = 0^2 = 0$$

$$\bullet\ y\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) = \left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \underbrace{2x}_{\cancel{2\sqrt{y}}} \cdot \underbrace{\cos x^2}_{\cos y} \underbrace{dx}_{\frac{dy}{\cancel{2\sqrt{y}}}} = \int_{y(0)}^{y(\sqrt{\pi/2})} \cos y \, dy = \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy$$

$$= [\sin y]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\pi} \underbrace{\omega}_{g'(t)}\,\underbrace{\sin}_{f}\,(\underbrace{\omega t}_{g(t)})\,dt$

$$\Rightarrow\; y = g(t) = \omega\cdot t \;\Rightarrow\; \begin{cases} g'(t) = \omega \\ g(0) = \omega\cdot 0 = 0 \\ g(\pi) = \omega\cdot\pi \end{cases}$$

$$f(y) = \sin y$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega\pi} \sin y\,dy$$

$$= \frac{1}{\omega}\Big[-\cos y\Big]_0^{\pi\cdot\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega}\Big[-\cos(\omega\pi) - \big(-\cos(0)\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\omega}\Big[-\cos(\omega\pi) + 1\Big]$$

Alternativ:

$$\int_0^{\pi} \sin(\underbrace{\omega t}_{=:y})\,dt$$

$\Rightarrow$ Substituiere $\quad y = \omega t \iff t = \frac{y}{\omega}$

$$\Rightarrow \bullet \ \frac{dy}{dt} = \omega \iff dt = \frac{dy}{\omega}$$

$$\bullet \ y(0) = \omega \cdot 0 = 0$$

$$\bullet \ y(\pi) = \omega \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \underbrace{\sin \underbrace{\omega t}_{y}}_{\sin y} \ \underbrace{dt}_{\frac{dy}{\omega}} = \int_0^{\omega \cdot \pi} \frac{1}{\omega} \sin y \, dy$$

$$= \left[-\frac{1}{\omega} \cos y \right]_0^{\omega \pi} = -\frac{1}{\omega} \cos \omega \pi + \frac{1}{\omega} \cdot 1$$

Bemerkung:

Die jeweils zweite Methode in Beispiel (ii) und (iii) ist besonders dann nützlich, wenn sich nicht sofort eine Zerlegung des Integranden in die Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ aufdrängt, und man erstmal etwas "herumprobieren" muss, bis sich eine solche Zerlegung oder zumindest eine Vereinfachung des Integrals ergibt.

Beispiel: $(a, b \geq 0)$

$$\int_a^b x^3 \exp(-\alpha x^2)\, dx \qquad (\alpha = \text{const}, \alpha \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ Obwohl sich eine Zerlegung der Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ nicht aufdrängt, raten wir, dass sich das Integral zumindest vereinfachen könnte, wenn man substituiert:

$$y := -\alpha x^2 \iff x = \sqrt{\frac{y}{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\alpha x \iff -2\alpha \sqrt{\frac{y}{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{-2\alpha\sqrt{\frac{y}{-\alpha}}}$$

- $x^3 = \left(\sqrt{\frac{y}{-\alpha}}\right)^3 = \left(\frac{y}{-\alpha}\right)^{3/2}$

- $y(a) = -\alpha a^2$
- $y(b) = -\alpha b^2$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{x^3}_{\left(\frac{y}{-\alpha}\right)^{3/2}} \underbrace{\exp[-\alpha x^2]}_{e^y} \underbrace{dx}_{\frac{dy}{-2\alpha\sqrt{\frac{y}{-\alpha}}}} = \int_{-\alpha a^2}^{-\alpha b^2} \left(\frac{y}{-\alpha}\right) \cdot e^y \cdot \frac{1}{-2\alpha}\, dy$$

$$= \int_{-\alpha a^2}^{-\alpha b^2} \frac{1}{2\alpha^2}\, y e^y\, dy = \frac{1}{2\alpha^2} \int_{-\alpha a^2}^{-\alpha b^2} y e^y\, dy$$

Das letzte Integral ist nun wesentlich einfacher als das Ausgangsintegral und kann z.B. mit partieller Integration weiter ausgerechnet werden (siehe oben)

Das Folgende Beispiel zeigt, dass manchmal die naheliegendste Substitution nicht unbedingt die zielführendste ist, sondern dass manchmal eine etwas "unorthodoxere" Substitution zum Erfolg führt.

<u>Beispiel:</u> $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ mit $a,b \in (-1,1)$

Am naheliegendsten wäre wohl:

<u>1. Versuch:</u>

$$y := 1-x^2 \iff x = \pm\sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x = \mp 2\sqrt{1-y} \iff dx = \frac{dy}{\mp 2\sqrt{1-y}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{\mp 2\cdot\sqrt{1-y}} \rightarrow \text{Führt hier } \underline{\text{nicht}} \text{ weiter}$$

Anders dagegen der etwas weniger naheliegende

2. Versuch:

Idee: $\sqrt{1-x^2}$ erinnert an:

$$\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{\cos^2 y} = |\cos y|$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ $\qquad$ $\sqrt{x^2} = |x|$

→ Versuch doch mal:

$$x = \sin y \iff y = \arcsin x$$

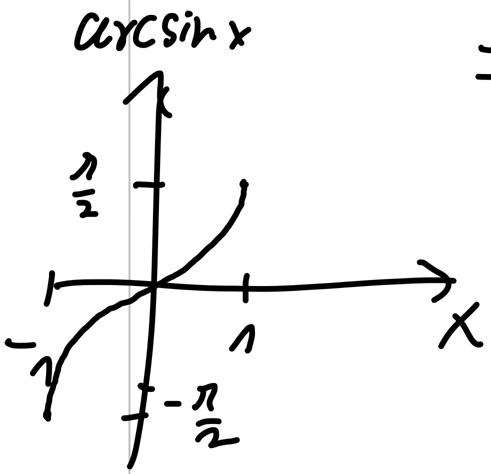
$\Rightarrow$ • $\dfrac{dx}{dy} = \cos y \iff dx = \cos y \, dy$

• $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{|\cos y|}$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\frac{1}{|\cos y|}} \underbrace{dx}_{\cos y\, dy} = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{\cos y}{|\cos y|}\, dy$$

$\rightarrow$ Nur noch der Betrag von $\cos y$ stört.

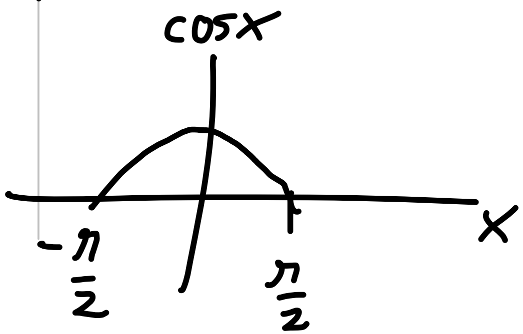
<u>Aber:</u> Bei uns ist $x \in (-1, 1)$



$\Rightarrow y = \arcsin x$ ist hier eindeutig und nimmt Werte in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ an

Aber für $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist dann $\cos y \in (0, 1]$, $\Rightarrow \cos y > 0$

$\Rightarrow |\cos y| = \cos y$



$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \frac{\cos y}{\cos y}\,dy = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} 1 \cdot dy$$

$$= \Big[y \Big]_{\arcsin a}^{\arcsin b}$$

$$= \underline{\underline{\arcsin b - \arcsin a}}$$

Vorlesung 12

26.3.2012

Letztes Mal:

$$I := \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (a, b \in (-1,1))$$

1. Versuch (naheliegend):

$$y := 1 - x^2$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{\mp 2\sqrt{y}\sqrt{1-y}}\,dy$$

$\longrightarrow$ Bringt nichts!

2. Versuch (weniger naheliegend):

$$x = \sin y \iff y = \arcsin x$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow I = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} 1 \cdot dy = \left[y \right]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)}$$

$$= \arcsin(b) - \arcsin(a)$$

$\longrightarrow$ Die bringt's!

ist auch konsistent mit unserem Ergebnis aus Vorlesung 8:

$$\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\iff \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

Bemerkungen:

(i) Die obige Substitution $x = \sin y$ ist ein Beispiel für eine "trigonometrische Substitution"

→ können z.B. nützlich sein, wenn der Integrand eine Funktion von $(1-x^2)$ ist, aber z.B. auch für $\int \tan x \, dx$, was mit $y = \cos x$ vereinfacht und berechnet werden kann.

(ii) Für Integranden, die Funktionen von $(1+x^2)$ sind, sind manchmal Substitutionen mit hyperbolischen Funktionen nützlich.

z.B. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \Rightarrow x = \sinh(y) \Leftrightarrow y = \operatorname{arsinh} x$

$\Rightarrow \cdot \dfrac{dx}{dy} = \cosh y \Leftrightarrow dx = \cosh(y)\,dy$

$\cdot \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2(y)} = \sqrt{\cosh^2 y}$

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$= |\cosh y|$

$\cosh y > 0$

$= \cosh y$

$$\Rightarrow \int \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh y}\, \underbrace{dx}_{\cosh y\, dy} = \int \underbrace{\cosh y}_{u} \cdot \underbrace{\cosh y}_{v'}\, dy$$

$u = \cosh y \Rightarrow u' = \sinh y$
$v' = \cosh y \Rightarrow v = \sinh y$ (Partielle Integration)

$$\Rightarrow \int \cosh^2 y\, dy = \underbrace{\cosh y}_{u} \cdot \underbrace{\sinh y}_{v} - \int \underbrace{\sinh y}_{u'} \cdot \underbrace{\sinh y}_{v}\, dy$$

$$= \cosh y \cdot \sinh y - \left[\int \cosh^2 y\, dy - \underbrace{\int 1 \cdot dy}_{y+c} \right]$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

$$\Leftrightarrow \sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \cosh^2 y\, dy = \cosh y \cdot \sinh y + y \; (+ \tilde{c})$$

$$\Leftrightarrow \int \cosh^2 y\, dy = \frac{1}{2} \cosh y \cdot \sinh y + \frac{1}{2} y \; (+c)$$

"Resubstitution": Drücke y wieder durch x aus:

- $\cosh y = \sqrt{1+x^2}$
- $\sinh y = x$
- $y = \operatorname{arsinh} x$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} \cdot x + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} x \; (+c)$$

(4) Komplexe Zahlen

Motivation:

Viele quadratische Gleichungen haben in $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ (= Menge der rationalen Zahlen) kein Lösung, z.B.

$$\boxed{x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$$

→ Erweitere den Zahlbereich von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ (= Menge der reellen Zahlen)

→ $\boxed{x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}}$ Kann gelöst werden.

Aber:

Viele quadratische Gleichungen haben auch in $\mathbb{R}$ keine Lösung!

Standardbeispiel:

$$\boxed{x^2 = -1}$$

(wäre $x \in \mathbb{R}$, so wäre stets $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$)

Allgemeiner:

$$x^2 = -b^2 \quad (b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$$

bzw. $(x-a)^2 = -b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$

$\hookrightarrow$ haben auch keine Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

Für viele Zwecke ist es jedoch nützlich, auch diese Gleichungen zumindest formal lösen und mit den Lösungen rechnen zu können.

Dies wird durch die Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu den sog. Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ möglich.

Hierzu:

<u>Def 1:</u> Wir bezeichnen mit i eine formale Lösung der Gleichung

$$\boxed{i^2 = -1} \qquad (\text{bzw. } x^2 = -1)$$

Häufig schreibt man:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

i heißt <u>"imaginäre Einheit"</u>.

Damit auch Gleichungen der Form

$$x^2 = -b^2 \iff x = \pm\sqrt{-b^2} = \pm|b|\sqrt{-1} = \pm|b|\cdot i$$

$\forall b \in \mathbb{R}$

gelöst werden können, müssen wir $i = \sqrt{-1}$ mit beliebigen reellen Zahlen $b \in \mathbb{R}$ multiplizieren können, so dass

$$x = \pm |b| \cdot i \quad (\text{bzw. } x = b \cdot i)$$

im neuen Zahlbereich enthalten sein muss.

Damit schließlich auch Gleichungen der Form

$$(x-a)^2 = -b^2 \iff x - a = \pm\sqrt{-b^2} = \pm |b| \sqrt{-1}$$
$$\iff x = a \pm |b| i$$

gelöst werden können, müssen wir zu bi $(b \in \mathbb{R})$ auch beliebige reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ addieren können. M.a.W.: $a + bi$ soll auch $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ im neuen Zahlbereich enthalten sein.

Dies motiviert (von jetzt an mit x, y statt a, b):

Def. 2: Eine **Komplexe Zahl z** ist eine formale Summe

$$\boxed{z = x + i \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})}$$

die die folgenden **Rechenregeln** erfüllt: (Für $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$)

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 \\ &\qquad + i y_1 x_2 - y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}}$$

Die Menge der Komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Beispiele:

(i) $(5+3i)-\left(\frac{6}{5}+i\right) = \left(5-\frac{6}{5}\right)+i(3-1) = \frac{19}{5}+2i$

(ii) $(2-i)(5+6i) = 10+12i-5i+6 = 16+7i$

(iii) $i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$

$\vdots$

Def. 3 : Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißen

a) $\mathrm{Re}(z) := x$ "der Realteil von z"

b) $\mathrm{Im}(z) := y$ "der Imaginärteil von z"

c) $\bar{z} \equiv z^* := x - iy$ "die zu z komplex konjugierte Zahl"

$$\left(\Rightarrow \mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)\ ,\ \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)\right)$$

d) $\frac{1}{z} := \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ "das Inverse von z" $(z \neq 0)$ (im Sinne eines Kehrwertes)

[Es soll gelten: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$: $\underbrace{(x+iy)}_{z} \cdot \underbrace{\frac{(x-iy)}{(x^2+y^2)}}_{\frac{1}{z}} = \frac{x^2 \cancel{-ixy} \cancel{+ixy} + y^2}{x^2+y^2} = 1$ ✓]

Beispiel:

$$z = 5 - 2i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 5$$

$$\mathrm{Im}(z) = -2 \quad (\text{Nicht: } -2i \text{ !!!})$$

$$\bar{z} = 5 + 2i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{5+2i}{5^2 + (-2)^2} = \frac{5+2i}{25+4} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5}{29}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{29}$$

Bemerkung:

Die Menge der Realteile $Re(z)$ kann mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen identifiziert werden, sodass

$$\boxed{\mathbb{R} = \{(x+iy) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = 0\} \subset \mathbb{C}}$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (z, w \in \mathbb{C})$

(Denn: $z = x+iy$, $w = u+iv$

$\Rightarrow z+w = (x+u) + i(y+v)$

$\Rightarrow \overline{z+w} = (x+u) - i(y+v) = \overbrace{x-iy}^{\bar{z}} + \overbrace{u-iv}^{\bar{w}}$

$= \bar{z} + \bar{w}$)

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad (z, w \in \mathbb{C})$

(Denn: ($z = x+iy$, $w = u+iv$)

$\Rightarrow z \cdot w = (x+iy) \cdot (u+iv) = (xu-yv) + i(xv+yu)$

$\Rightarrow \overline{z \cdot w} = (xu-yv) - i(xv+yu) = (x-iy) \cdot (u-iv) = \bar{z} \cdot \bar{w}$)

c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

(Denn: $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{(x+iy)}_{z} + \underbrace{(x-iy)}_{\bar{z}}\big) = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}(z)$)

d) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

(Denn: $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}\big(\underbrace{(x+iy)}_{z} - \underbrace{(x-iy)}_{\bar{z}}\big) = \frac{2iy}{2i} = y$)

e) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ (also $z = x + i\cdot 0 = x \in \mathbb{R}$)

(Denn: $z = (x+iy) \overset{!}{=} (x-iy) = \bar{z}$

$\iff 2iy = 0 \implies y = 0 \implies z = x + i\cdot 0 = x \in \mathbb{R}$)

f) $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$

$$= \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$$

g) $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2}$

Spezialfall:

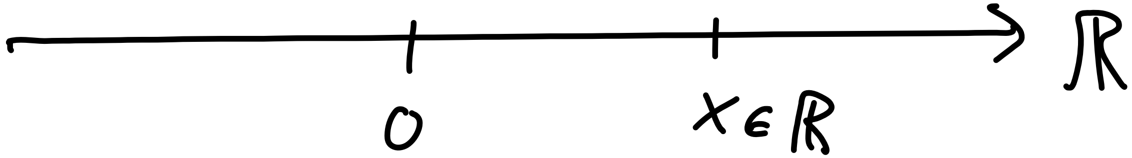
$\frac{1}{i} = -i$ denn $i \cdot (-i) = -(-1) = +1$

$\bar{i} = -i$

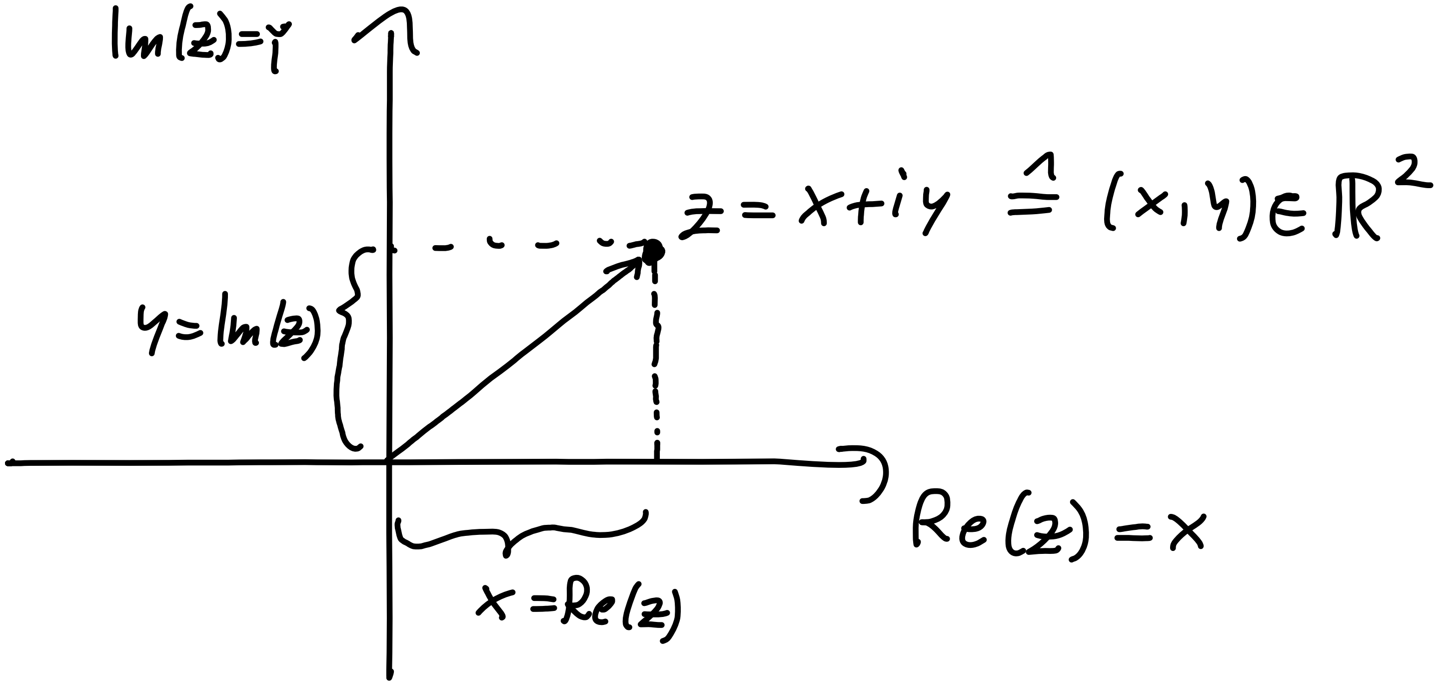
$i \cdot \bar{i} = i(-i) = -(-1) = 1$

Die komplexe Zahlenebene

- Reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ lassen sich als Punkte auf einer Zahlengeraden geometrisch darstellen:



- Komplexe Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ lassen sich durch Punkte mit den Koordinaten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in der zweidimensionalen Ebene $\mathbb{R}^2$ darstellen:



Diese Ebene heißt dann die <u>komplexe Zahlenebene</u> .

Die <u>reelle Zahlengerade</u> zur Darstellung von $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ entspricht dann gerade der <u>x-Achse</u>.

Vorlesung 13

27.3.2012

Letztes Mal: (4) Komplexe Zahlen

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$
$$x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$$
$$y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$$
$$i^2 = -1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$\bar{z} \equiv z^* = x - iy$$

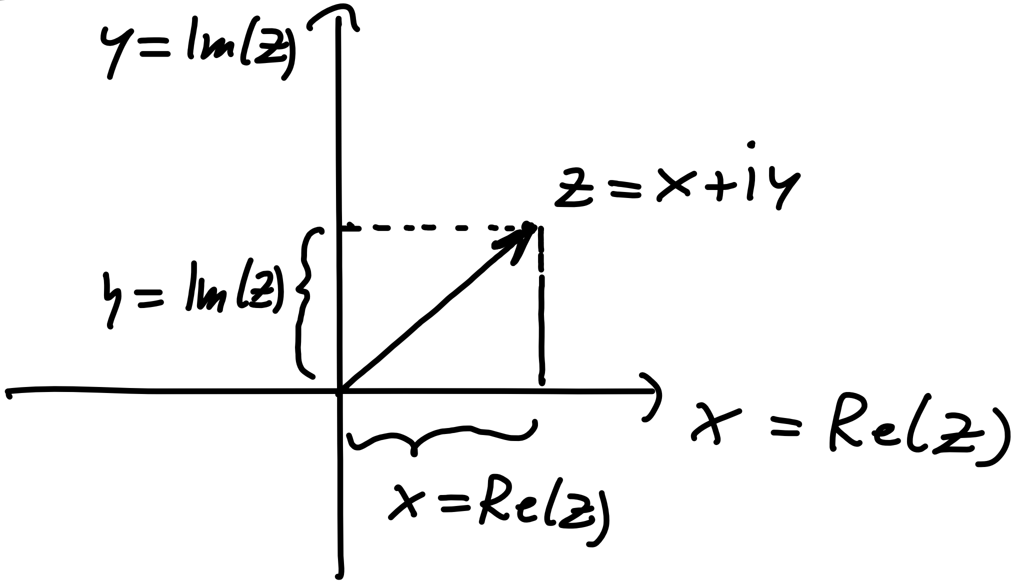
$\Rightarrow$ • $z\bar{z} = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

• $z = \bar{z} \Rightarrow z = x + i0 = x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{i} = -i}$$

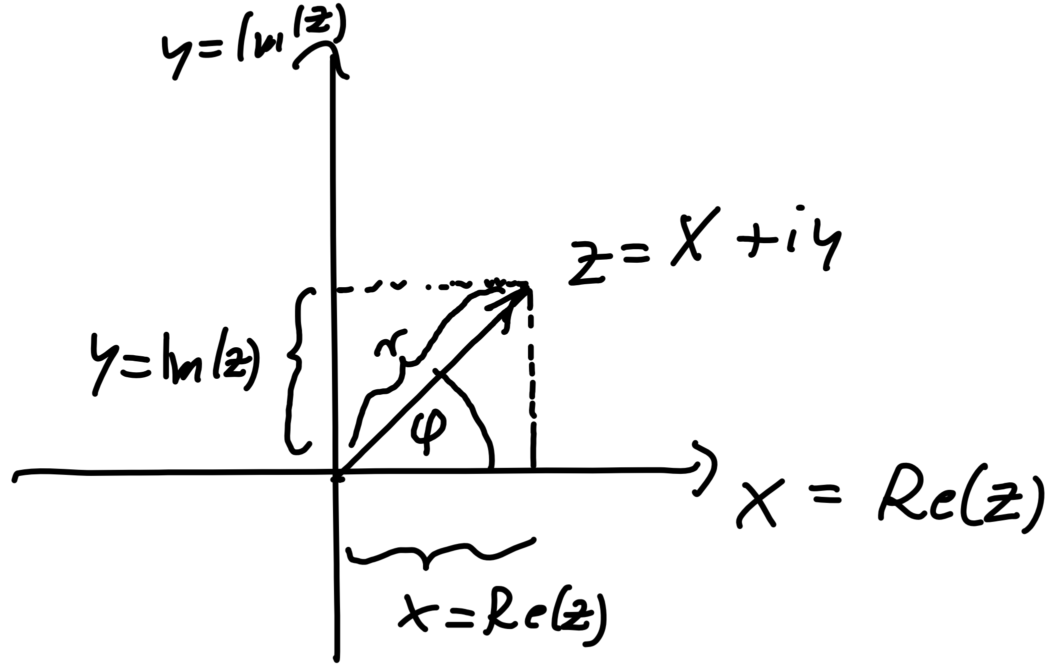
Die Komplexe Zahlenebene



Polardarstellung einer Komplexen Zahl

Statt mit Kartesischen Koordinaten

$(x, y) = (Re(z), Im(z))$ lässt sich eine Komplexe Zahl $z = x + iy$ auch durch Polar Koordinaten in der zweidimensionalen Ebene parametrisieren:



Hierbei nennt man:

- $|z| := r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ = "Betrag" von z
  (= "Pfeillänge")

- $\arg(z) := \varphi$ = "Argument" von z
  (= Winkel zwischen "Pfeil" und der x-Achse)

Offenbar gilt:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} z &= x+iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \bar{z} &= x-iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{aligned}\right.}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \left\{\begin{aligned} &\arccos\left(\frac{x}{r}\right) && \text{für } y = \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ &2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) && \text{für } y = \operatorname{Im}(z) < 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\left(x, y \Longleftrightarrow r, \varphi\right)$$

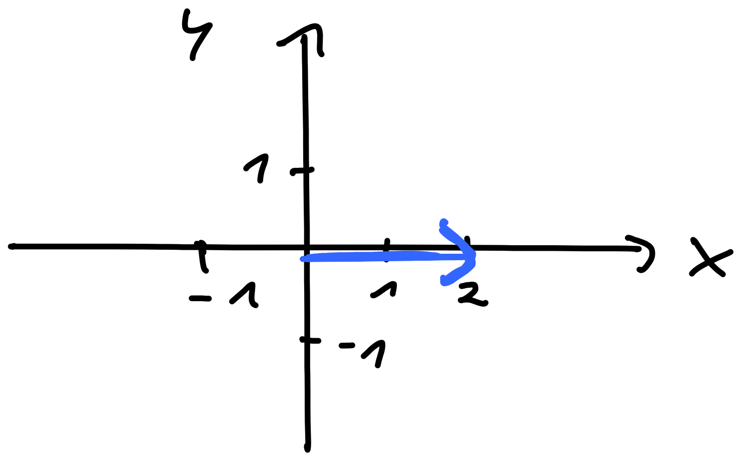
Beispiele:

(i) $z = 2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = x = 2$

$\mathrm{Im}(z) = y = 0$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$$

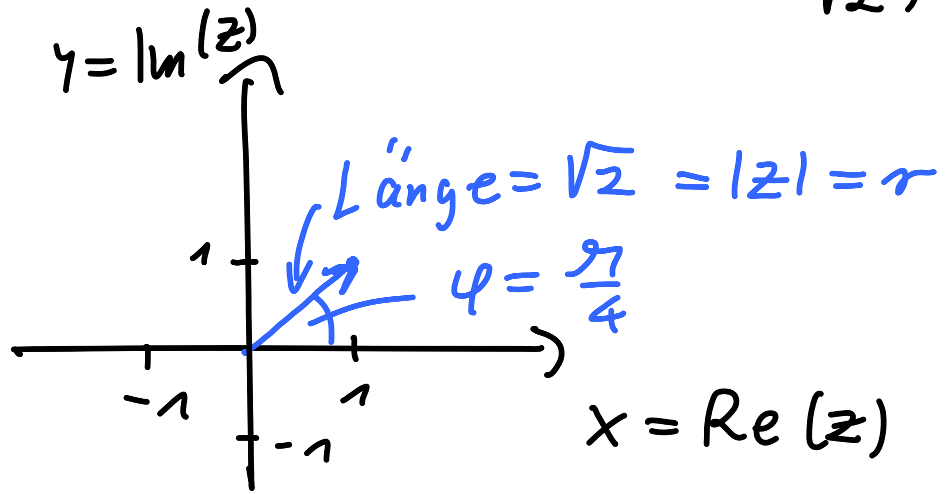
$$\varphi = \arccos(1) = 0$$



(ii) $z = 1 + i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\mathrm{Re}(z) = 1$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(z) = +1$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

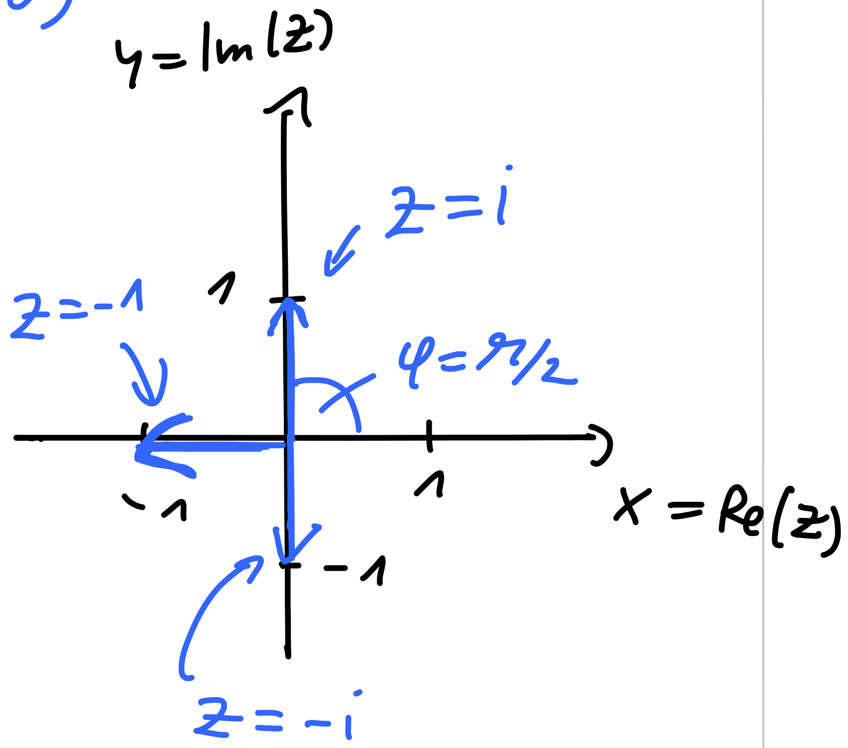


$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Longleftrightarrow x = y \quad \text{und} \quad x > 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Longleftrightarrow x = y \quad \text{und} \quad x < 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{5}{4}\pi \end{array}\right)$$

Falls $\varphi \in [0, 2\pi)$

(iii) $z = i \Rightarrow |z| = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\Leftrightarrow 90°)$



(iv) $z = -1 \Rightarrow |z| = 1$

$\varphi = \pi$ $(\Leftrightarrow 180°)$

(v) $z = -i \Rightarrow |z| = 1$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ $(\Leftrightarrow 270°)$

Falls man $\varphi \in [0, 2\pi)$ aufgibt,
wäre auch $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{7}{2}\pi$ oder....

Exponentialform einer komplexen Zahl

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Reihenentwicklungen:

(siehe Vorlesung 9)

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}}$$

Definiert man nun analog:

$$\boxed{e^{i\varphi} := 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \ldots}$$

so ergibt sich:

$$e^{i\varphi} = 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots$$

$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

$$\left(i\frac{\varphi^5}{5!} = i \cdot \left(\frac{\varphi^5}{5!}\right) = \frac{(i \cdot \varphi^5)}{5!} \right) \quad (\text{es gilt: } i(a \cdot b) = (i \cdot a) \cdot b$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right)}_{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

(Euler'sche Formel)

$$\Rightarrow \boxed{z = x + iy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Geometrisch}\\ \text{(siehe oben)}}}{=} \overset{|z|}{\tilde{r}}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Euler'sche Formel}}}{=} r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}}$$

(Polardarstellung einer Komplexenzahl)

Analog: $\bar{z} = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$$= r\big(\underbrace{\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)}_{e^{-i\varphi}}\big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{z} = r e^{-i\varphi} = |z| e^{-i\varphi}}$$

Beispiele:

(i) $$\underbrace{1 \cdot e^{i \cdot 0}}_{}\ \text{Polardarstellung von 1 für } \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = e^{i \cdot 0} = e^{0}$$

$r = 1$
$\varphi = 0$

(ii) $$i = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}} = e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$r = 1$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$

(iii) $$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$$

$r = 1$
$\varphi = \pi$

(iv) $$-i = 1 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

(v) $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

Eine wichtige Anwendung der Euler'schen Formel

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left((\cos\varphi + i\cancel{\sin\varphi}) + (\cos\varphi - i\cancel{\sin\varphi})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)}$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2i}\left(\cancel{\cos\varphi} + i\sin\varphi - (\cancel{\cos\varphi} - i\sin\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot 2i\sin\varphi = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) \underset{\nearrow}{=} \frac{-i}{2}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) \qquad \frac{1}{i}=-i}$$

(Exponentialdarstellungen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$)

Anwendung:

Multiplikationstheoreme von sin und cos:

z.B. $$\cos\varphi\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)$$

$(e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)})$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{2i\varphi}-\cancel{1}+\cancel{1}-e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi)}$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen in der Exponentialdarstellung

$(z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1| \, e^{i\varphi_1}}{|z_2| \, e^{i\varphi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\varphi} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Beispiel: $z_1 = i \quad = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \cdot\; z_1 \cdot z_2 = \underbrace{1 \cdot \sqrt{2}}_{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

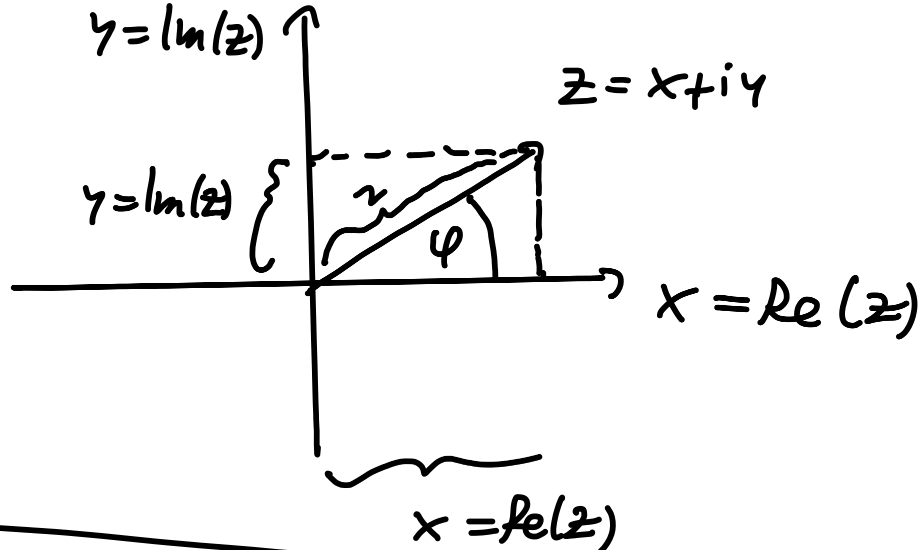
$\cdot\; \frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\cdot\; (z_2)^3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3\, e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 3}$

Vorlesung 14 28.3.2019

Letztes Mal:

Polardarstellung (auch PolarForm) einer Komplexen Zahl



$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\sin\varphi & \Longleftrightarrow & \varphi \overset{?}{=} \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (y \geq 0) \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (y < 0) \end{cases} \end{array}} \quad (*)$$

Für $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

("Trigonometrische Darstellung der Polar Form")

$$\Big\Downarrow \quad \leftarrow \quad \boxed{e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

("Exponentialdarstellung (der Polar Form)")

Die Mehrdeutigkeit des Arguments einer Komplexen Zahl

Der Polarwinkel φ (also das "Argument" $\arg(z)$ von z) einer Komplexen Zahl $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ist eindeutig, wenn man φ z.B. auf den Wertebereich $[0, 2\pi)$ beschränkt

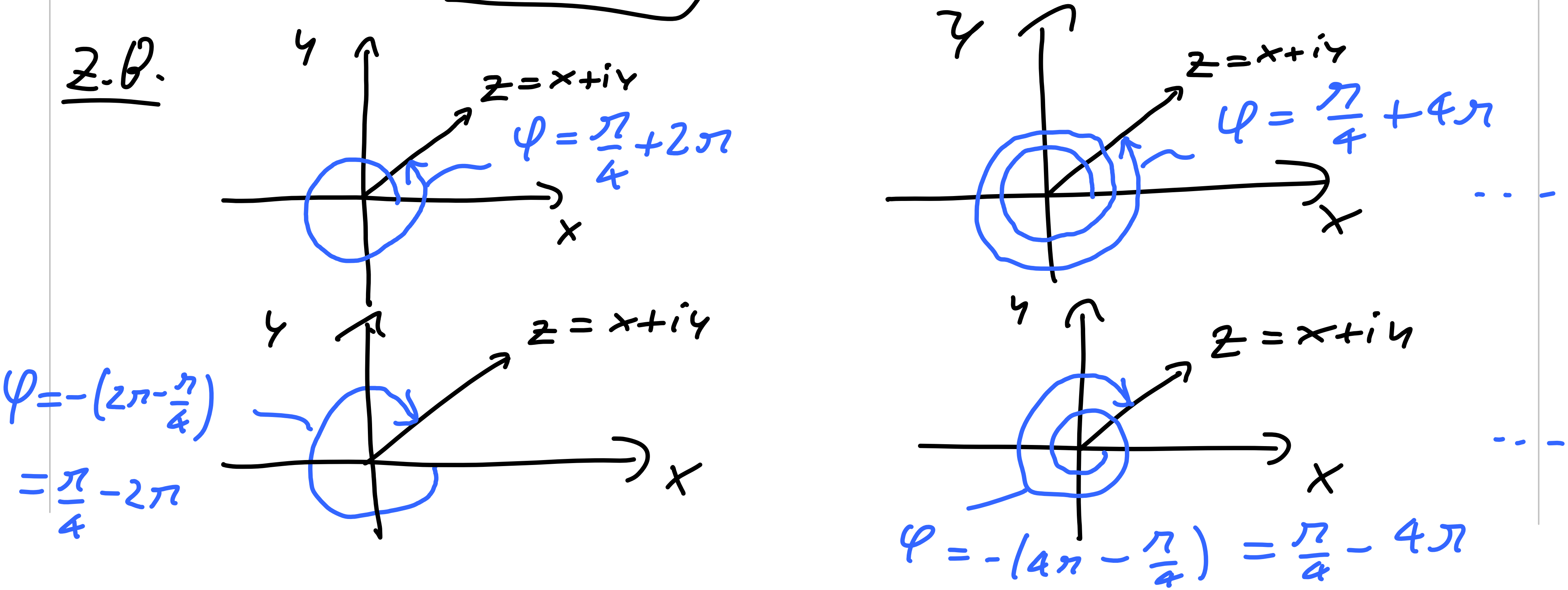
$$\boxed{\varphi \in [0, 2\pi) \Rightarrow \varphi \text{ ist eindeutig}}$$

denn es gilt: (*)

Lässt man dagegen (ähnlich wie bei Sinus und Cosinus) auch "Mehrfachumläufe" und eine "Umkehrung des Drehsinns" zu, so ist der erlaubte Wertebereich

$$\boxed{\varphi \in \mathbb{R}}$$

z.B.



Kann man machen; aber:

Ein gegebenes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ hat dann nicht mehr genau einen Polarwinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, sondern unendlich viele Polarwinkel φ_n der Form

$$\boxed{\varphi_n = \varphi + 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{Z})}$$

denn es gilt $|z| e^{i\varphi_n} = |z| e^{i\varphi}$,

$$\left(|z| e^{i\varphi_n} = |z| e^{i(\varphi + 2\pi n)} = |z| e^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{i2\pi n}}_{1} = |z| e^{i\varphi} \cdot \left(\underbrace{\cos(2\pi n)}_{1} + i \underbrace{\sin(2\pi n)}_{0} \right) = |z| e^{i\varphi} \right)$$

$\Rightarrow$ $\arg(z)$ ist dann nur eindeutig bis auf additive ganzzahlige Vielfache von 2π

Beispiele:

- $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi i} = e^{i\frac{\pi}{2}+4\pi i} = \ldots$
  $= e^{i\frac{\pi}{2}-2\pi i} = e^{i\frac{\pi}{2}-4\pi i} = \ldots$

  $\Rightarrow \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

- $1 = e^{i0} = e^{i2\pi} = e^{i4\pi} = \ldots$
  $= e^{-i2\pi} = e^{-i4\pi} = \ldots$

  $\Rightarrow \arg(1) = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

- $$\left.\begin{aligned} -1 = e^{i\pi} &= e^{i\pi+2\pi i} = e^{\pi i+4\pi i} = \ldots \\ &= e^{i\pi-2\pi i} = e^{i\pi-4\pi i} = \ldots \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\arg(-1) \\ &= \pi + 2\pi n \\ &(n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

<u>Aber:</u> Warum sollte man diese Mehrdeutigkeit bei $\varphi \in \mathbb{R}$ überhaupt zulassen, wenn doch $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig und ausreichend wäre?

<u>Eine Antwort:</u>

$\varphi \in [0, 2\pi)$ verleitet zu Fehlschlüssen beim <u>Wurzelziehen</u>.

Illustration:

Die reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ von

$$\boxed{x^2 = 1}$$

sind

$$\boxed{x = \pm 1}$$

Frage: Was sind die komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

$$\boxed{z^2 = 1} \quad ?$$

Fehlgeleitete Antwort basierend $\arg(\ldots) \in [0, 2\pi)$:

- $z = |z| e^{i\varphi} \quad (\varphi \in [0, 2\pi))$
- $1 = 1 \cdot e^{i0}$

$$\Rightarrow \quad z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} \overset{!}{=} 1 = 1 \cdot e^{i0}$$

$\Rightarrow$
- $|z|^2 = 1 \iff |z| = 1$
- $2i\varphi = i \cdot 0 \iff \varphi = 0$

$$\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i0} = e^0 = 1$$

$\rightarrow$ Nanu? Wo ist denn die bereits aus $\mathbb{R}$ bekannte Lösung $\underline{\underline{z = -1}}$ geblieben?

Richtige Antwort basierend auf $\arg(\ldots) \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\; z = e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}) \\ \bullet\; 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{statt lediglich } 1 = 1 \cdot e^{i0}) \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} \stackrel{!}{=} 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n}$$

$$\Rightarrow \quad \bullet\; |z| = 1$$

$$\bullet\; 2i\varphi = 2\pi i n \iff \varphi = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} z &= 1 \cdot e^{i\pi n} = e^{i\pi n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ &= (e^{i\pi})^n = (-1)^n \\ &= \begin{cases} (+1) & \text{für } n \text{ gerade} \\ (-1) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Beide aus $\mathbb{R}$ bekannten Lösungen existieren natürlich auch in $\mathbb{C}$. Man sollte aber $\underline{\arg(\dots) \in \mathbb{R}}$ bei der Benutzung der Polardarstellung zulassen, um auch auf beide Lösungen geführt zu werden.

<u>Ein weiteres Beispiel:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} x^3 = 1 \;, \quad x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x = +1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z^3 = 1 \;, \quad z \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow z = ? \end{array}}$$

Wir nehmen jetzt von vornherein $\arg(\dots) \in \mathbb{R}$ an.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ z = |z| e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}) \\ \bullet\ 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

$$\Rightarrow z^3 = |z|^3 e^{3i\varphi} \overset{!}{=} 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n}$$

$$\Rightarrow \bullet\ |z| = 1$$

$$\bullet\ 3i\varphi = 2\pi i n \iff \boxed{\varphi = \frac{2\pi n}{3} \quad (n \in \mathbb{Z})}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = e^{\frac{2\pi}{3} i n} \quad (n \in \mathbb{Z})}$$

→ Wie viele verschiedene $z \in \mathbb{C}$ sind das?

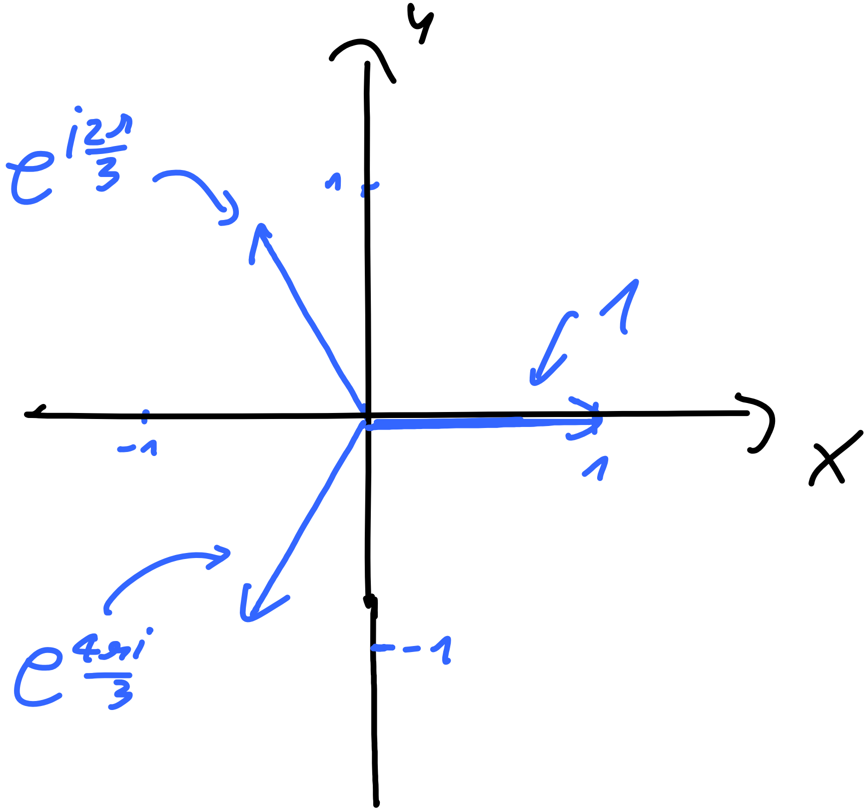
→ Teile hierzu die möglichen $n \in \mathbb{Z}$ in drei Klassen auf:

$$n = \left\{ \begin{matrix} \ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots \\ \ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots \\ \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 + 3m \\ 1 + 3m \\ 2 + 3m \end{matrix} \right\} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{2\pi i n}{3}} = \left\{ \begin{matrix} e^{\frac{2\pi i}{3}(0+3m)} = e^{0+2\pi i m} = e^{2\pi i m} = 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}(1+3m)} = e^{\frac{2\pi i}{3}+2\pi i m} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i m}}_{1} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}(2+3m)} = e^{\frac{4\pi i}{3}+2\pi i m} = e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i m}}_{1} = e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow z^3 = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau drei Lösungen:

$$z = 1 \text{ oder } z = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ oder } z = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$



$\Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ gibt es drei "dritte Einheitswurzeln"

Analog:

$$\boxed{z^k = 1 \quad (k \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C})}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = e^{\frac{2\pi i}{k} n} \quad (n = 0, 1, \dots, k-1)}$$

(In $\mathbb{C}$ gibt es k "k-te Einheitswurzeln")

Beispiel: $k = 4$: $z^4 = 1$

$1^4 = 1$

$i^4 = 1$

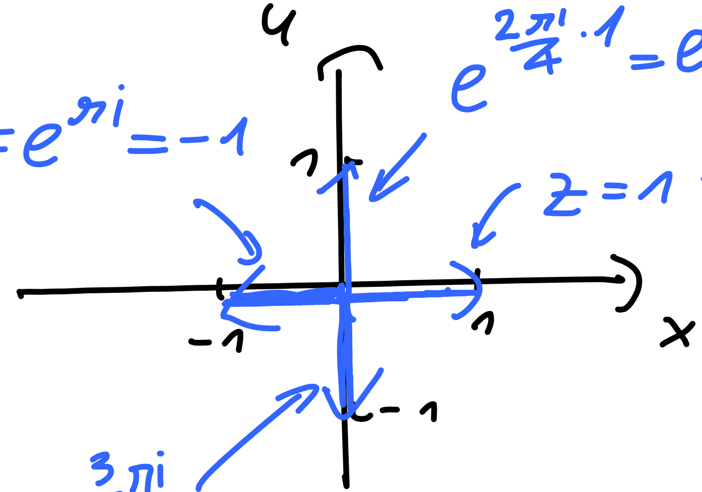
$(-1)^4 = 1$

$(-i)^4 = 1$ ✓

$e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

$e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 2} = e^{\pi i} = -1$

$z = 1 = e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 0}$



$e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 3} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$

<u>Allgemein:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &z^k = w = |w| e^{i\varphi} \quad (k \in \mathbb{N},\ w \in \mathbb{C}^*) \\ &\Rightarrow z = \sqrt[k]{|w|}\, e^{i\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi i}{k} n} \quad (n = 0, 1, \dots, k-1) \end{aligned}}$$

(In $\mathbb{C}$ hat jedes $w \in \mathbb{C}^*$ k k-te Wurzeln)

<u>Also:</u> Vorsicht beim Wurzelziehen in $\mathbb{C}$!

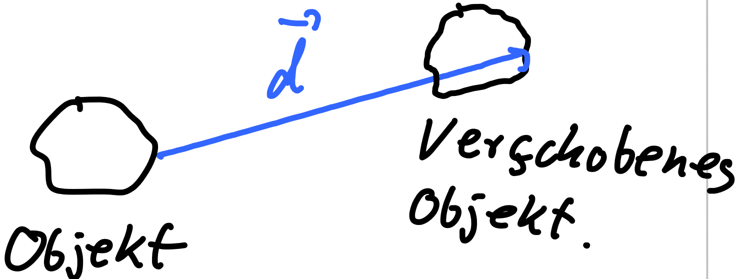
5 Vektorrechnung

5.1 Motivation:

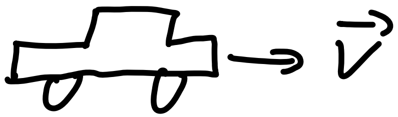
Viele physikalische Größen haben nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung.

Beispiele:

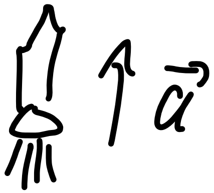
- Verschiebung eines Objektes:



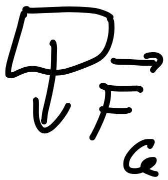
- Geschwindigkeit:



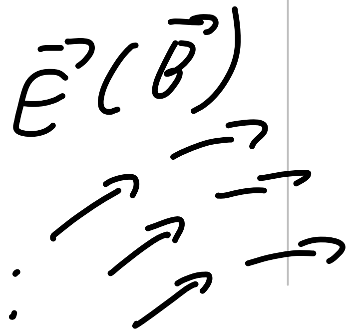
- Beschleunigung:



- Kraft:



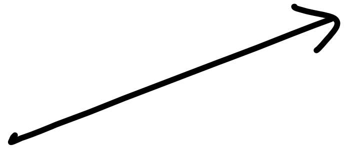
- Elektrische und magnetische Feldstärke:



→ Beschreibung durch "Vektoren"

Das Beispiel der Verschiebung eines Objektes liefert ein besonders anschauliches geometrisches Modell eines Vektors als "Pfeil" (= eine gerichtete Strecke) im Raum, mit dem sich alle gewünschten Eigenschaften von Vektoren motivieren und illustrieren lassen:

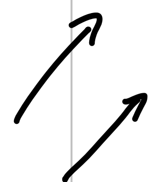
Das "Pfeilmodell" eines Vektors



- Pfeillänge = Betrag des Vektors
  ("Wie weit wird das Objekt verschoben?")

- Pfeilrichtung = Richtung des Vektors
  ("In welche Richtung soll das Objekt verschoben werden?")

(Zueinander Parallele, gerichtete Pfeile gleicher Länge repräsentieren dieselbe Richtung und denselben Betrag und damit denselben Vektor)



Schreibweise für Vektoren

- $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ (Vektoren)
- $a = |\vec{a}|$ = Betrag des Vektors $\vec{a}$

$$\underbrace{\xrightarrow{\quad\vec{a}\quad}}_{a=|\vec{a}|}$$

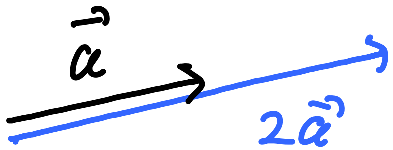
Rechenoperationen mit Vektoren ("Vektoralgebra") im Pfeilmodell

(i) Multiplikation eines Vektors mit einer (reellen) Zahl

Fall 1: $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \alpha\vec{a} :=$ Vektor mit Richtung wie $\vec{a}$
aber Betrag $|\alpha\vec{a}| := \alpha\,|\vec{a}|$

z.B.

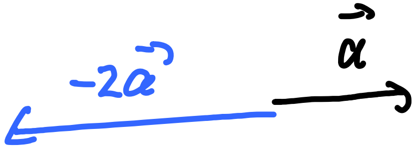


(Streckung von $\vec{a}$ um Faktor α)

Fall 2: $\alpha \in \mathbb{R}_-$

$\alpha\vec{a} :=$ Vektor mit zu $\vec{a}$ entgegengesetzter Richtung und Betrag
$|\alpha\vec{a}| := |\alpha| \cdot |\vec{a}|$

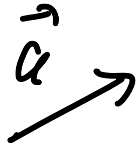
z.B.



(Streckung um Faktor $|\alpha|$ + Umklappen)

Fall 3: $\alpha = 0$

$$\alpha \vec{a} := \vec{0}$$



$= $ "Nullvektor"

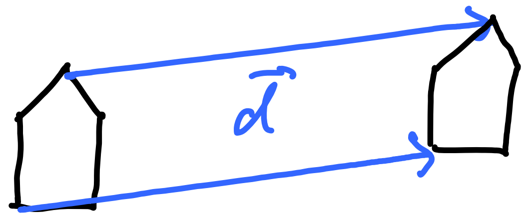
$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$= $ "Vektor ohne Länge".

Vorlesung 15 — 29.3.2019

Letztes Mal: Beschreibung von Größen mit Betrag und Richtung durch Vektoren

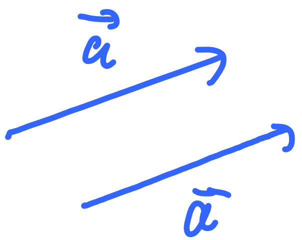
Prototyp: (Parallel-)Verschiebung eines Objektes



Objekt

verschobenes Objekt
(nicht gedreht oder verformt
$\Leftrightarrow$ "parallel verschoben")

→ **"Pfeilmodell" eines Vektors:**



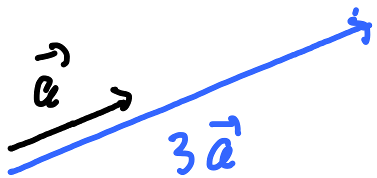
- Richtung von $\vec{a}$ = Pfeilrichtung
- Betrag von $\vec{a}$ = Pfeillänge
- Irrelevant: Position des Anfangspunktes des Pfeils

5.2 Rechenregeln mit Vektoren ("Vektoralgebra") im Pfeilbild

(i) Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer (reellen) Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$

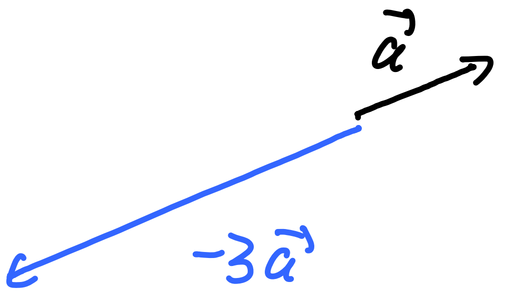
$\alpha > 0$

z.B. $\alpha = 3$

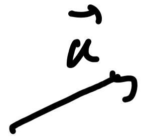


$\alpha < 0$

z.B. $\alpha = -3$



$\alpha = 0$



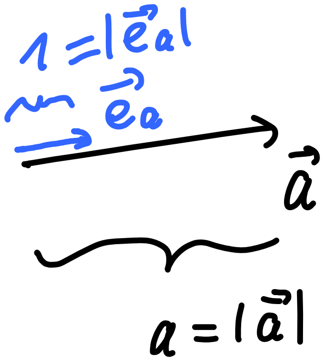
$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

("Nullvektor")

Anwendungen:

a) <u>Einheitsvektor</u> $\vec{e}_a$ in $\vec{a}$-Richtung

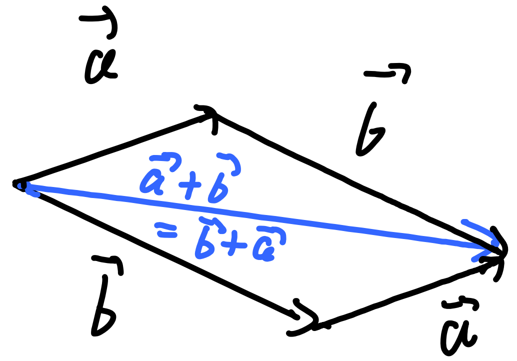
:= Vektor in $\vec{a}$-Richtung, aber mit Betrag 1



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a \iff \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (\vec{a} \neq \vec{0})}$$

b) <u>Physik</u>: z.B. $\vec{F}_G = m\vec{g}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ etc...

(ii) Addition zweier Vektoren

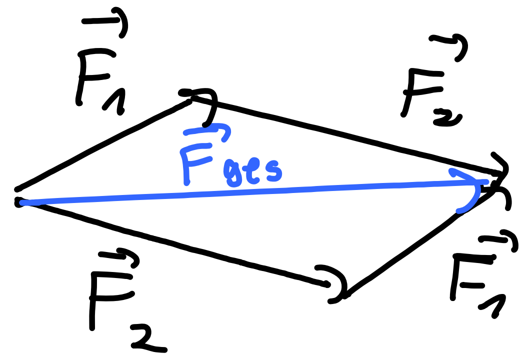


Geometrische Interpretation bei Verschiebungsvektoren

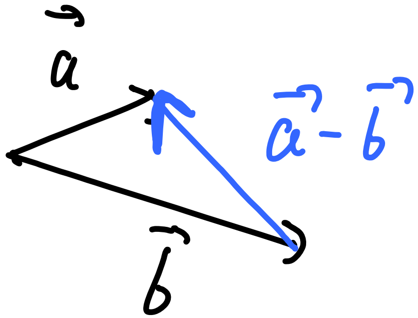
$\vec{a}+\vec{b}$ beschreibt die Gesamtverschiebung, die sich nach Hintereinanderausführung der Verschiebungen um $\vec{a}$ und um $\vec{b}$ ergibt.

Beispiel für phys. Anwendung:

Vektorielle Kräfteaddition

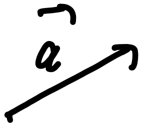


(iii) Subtraktion von Vektoren



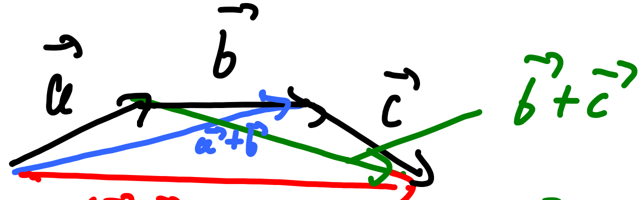
(Denn dann ist $\vec b + (\vec a - \vec b) = \vec a$)

Offenbar gilt: $\boxed{\vec a - \vec a = \vec 0}$



(Außerdem: $\vec a - \vec b = \vec a + ((-1)\,\vec b)$)

Rechenregeln:

(Geometrisch erschließbar, z.B. 

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$)

- $(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{b}+\vec{a})$ (Addition ist Kommutativ)
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (Addition ist assoziativ)
- $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ ($\vec{0}$ ist neutrales Element der Addition)
- Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein "Gegenvektor" $-\vec{a} := (-1)\cdot\vec{a}$, sodass $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{a}-\vec{a} = \vec{0}$ (*)
- $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
- $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$

$\Big\}$ Distributivität

- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (Multiplikation ist assoziativ) $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$
- $1\vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ ($1\in\mathbb{R}$ ist neutrales Element der Multiplikation)

Bemerkung:

Obige Rechenregeln (*) bilden den Ausgangspunkt für die abstrakte Definition eines "Vektorraumes" in der Mathematik:

Ein (reeller) Vektorraum V ist eine Menge mit Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$, die bzgl. der reellen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{R}$ Rechenregeln der Form (*) erfüllen. Die Elemente $\vec{a}, \vec{b}, \ldots \in V$ heißen "Vektoren"

Man kann zeigen:

Jeder so definierte abstrakte (reelle) Vektorraum V lässt sich umgekehrt durch ein "Pfeilmodell" in einen geeigneten $\mathbb{R}^n$ "realisieren" (n heißt die "Dimension" des Vektorraums) (Ausnahme: $n = \infty$).

In dieser Vorlesung:

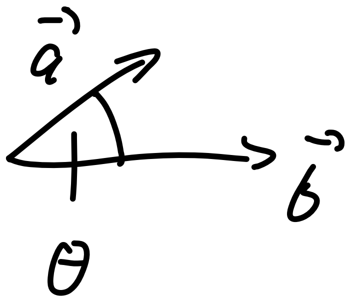
$n = 3$ (oder $n = 2$) und weiterhin das Pfeilmodell im $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^2$) statt der obigen abstrakten Definition.

Weitere Rechenoperationen:

Produkte von Vektoren

(iv) Skalarprodukt zweier Vektoren

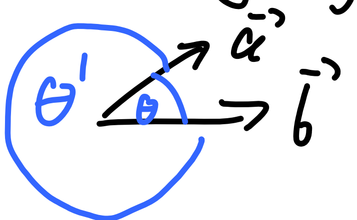
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta = \text{reelle Zahl}}$$



(θ = Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

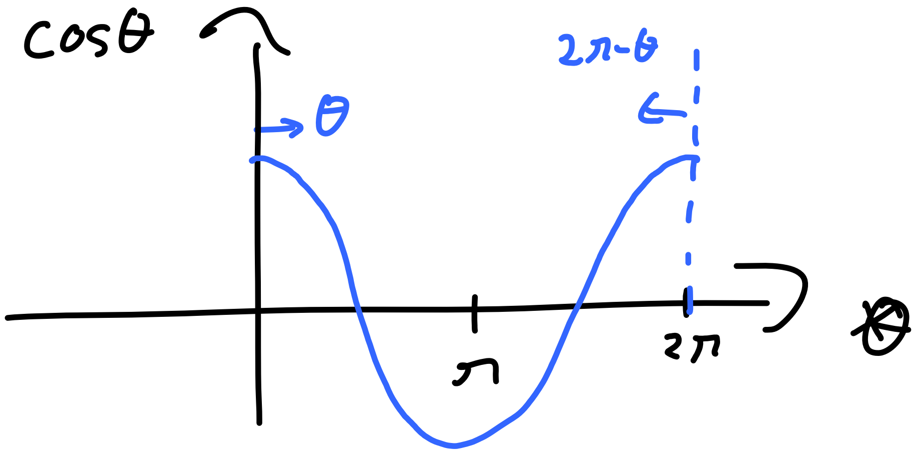
Bemerkung:

Es ist egal, welchen Winkel man nimmt:



Denn: $\theta' = 2\pi - \theta$

$$\Rightarrow \cos\theta' = \cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$$



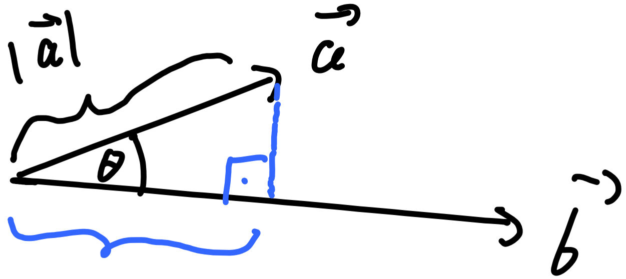
Offenbar gilt:

$$\boxed{\cos\theta = \cos\theta' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

$\Rightarrow$ Kennt man $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ so kann man θ (bzw. θ') ausrechnen. (siehe später)

Geometrische Bedeutung von $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot(\text{Projektion von } \vec{b} \text{ auf } \vec{a})\\ &= |\vec{b}|\cdot(\text{Projektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{b})\end{aligned}}$$



$|\vec{a}|\cdot\cos\theta$ = Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot(|\vec{a}|\cos\theta)$

Wichtige Spezialfälle:

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} = |\vec{a}|^2$

$$\Longrightarrow \boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}$$

- Ein Einheitsvektor $\vec{e}$ erfüllt:

$$\vec{e}\cdot\vec{e} = |\vec{e}|^2 = 1$$

$|\vec{e}|=1$

- Für $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ gilt:

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$$

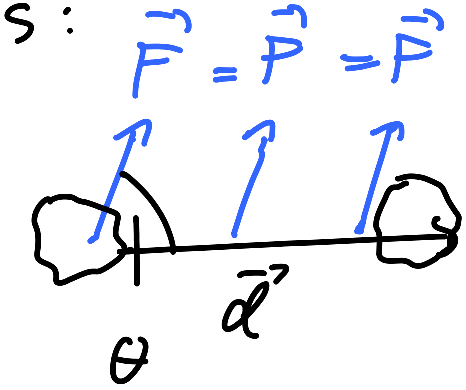
(Denn: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3}{2}\pi$
$\Leftrightarrow \cos\theta = 0$)

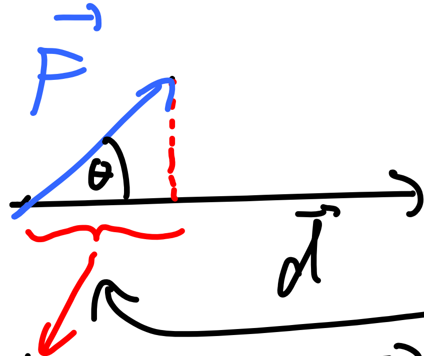
Weitere Rechenregeln

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität)
- $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (Schwarz'sche Ungleichung)

Phys. Anwendungsbeispiel:

Verrichtete Arbeit W einer konstanten Kraft $\vec{F}$ während einer Verschiebung $\vec{d}$ eines Körpers:





Relevant ist nur die Projektion von $\vec{F}$ in Wegrichtung (also entlang $\vec{d}$):

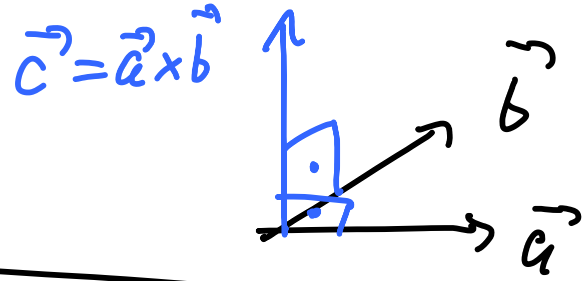
$$\Rightarrow W = |\vec{d}|\left(|\vec{F}|\cos\theta\right)$$

$$= \vec{d}\cdot\vec{F}$$

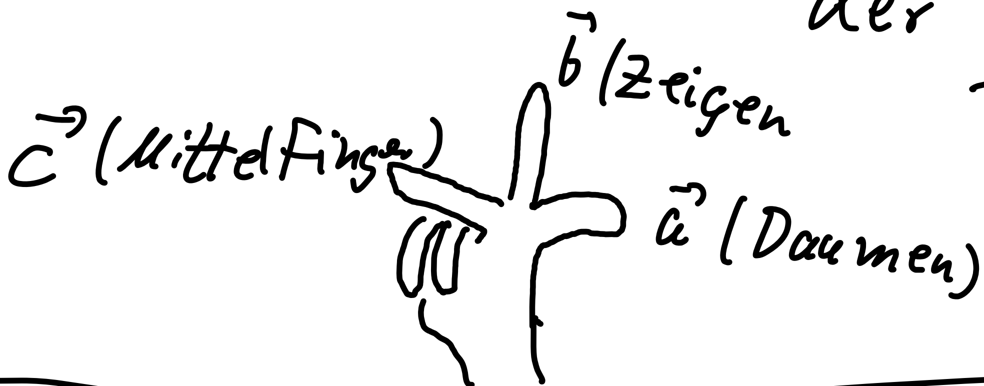
$\Rightarrow$ Falls $\vec{F} \perp \vec{d}$ (z.B. beim Tragen einer Tasche auf horizontaler Ebene) $\Rightarrow W = \vec{F}\cdot\vec{d} = 0$

(v) <u>Das Kreuzprodukt (alias Vektorprodukt alias äußeres Produkt) zwischen zwei Vektoren</u>

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad = \text{ ein } \underline{\text{Vektor}}\ !$$

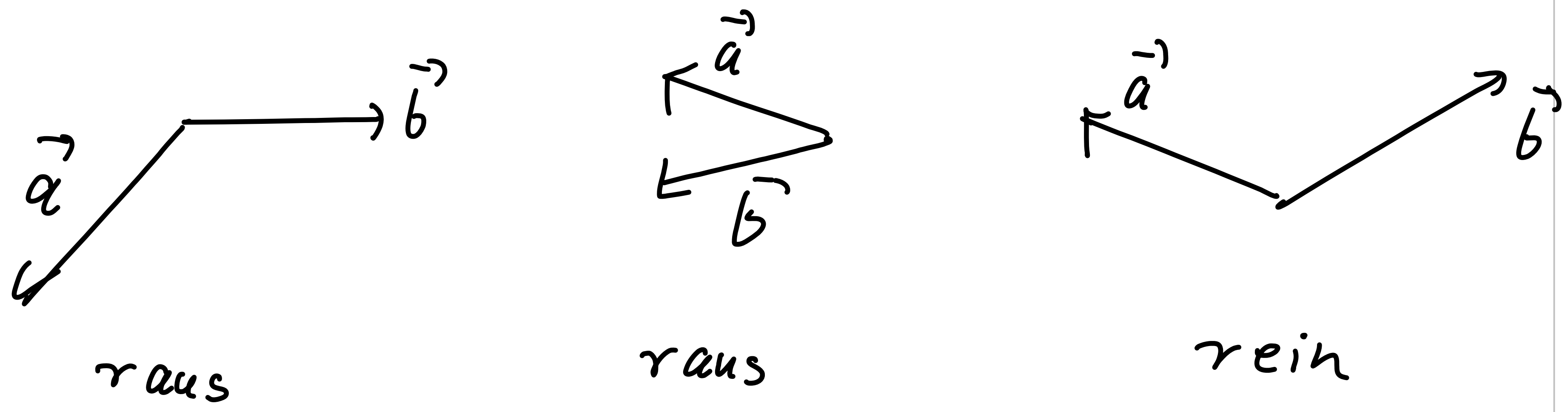


Richtung von $\vec{c}$: senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$ gemäß der "<u>Recht-Hand-Regel</u>"



<u>Achtung:</u> Daumen und Zeigefinger spannen den <u>kleineren</u> der beiden Winkel auf ($\theta \leq 180°$)

<u>Beispiele</u> ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien in der Zeichenebene)



Es gilt stets:

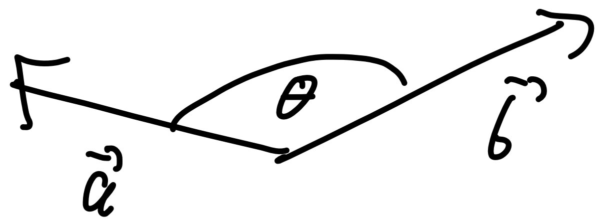
$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = -\,\vec{b}\times\vec{a}}$$

!

Betrag von $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$:

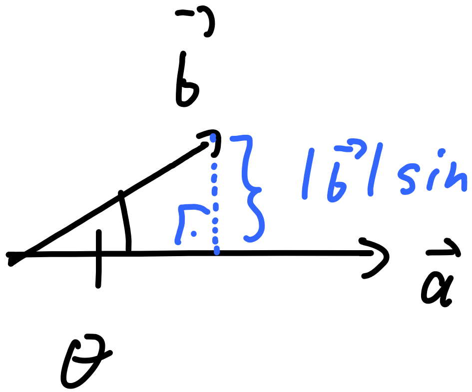
$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta \quad (\theta \leq 180^\circ)}$$



Geometrische Bedeutung

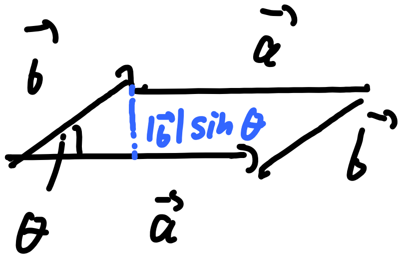
$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot (\text{Projektion von } \vec{b} \perp \text{ zu } \vec{a})$$

$$= |\vec{b}| \cdot (\text{Projektion von } \vec{a} \perp \text{ zu } \vec{b})$$



$|\vec{b}| \sin\theta = \text{Projektion von } \vec{b} \perp \text{ zu } \vec{a}$

$\Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| =$ Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:



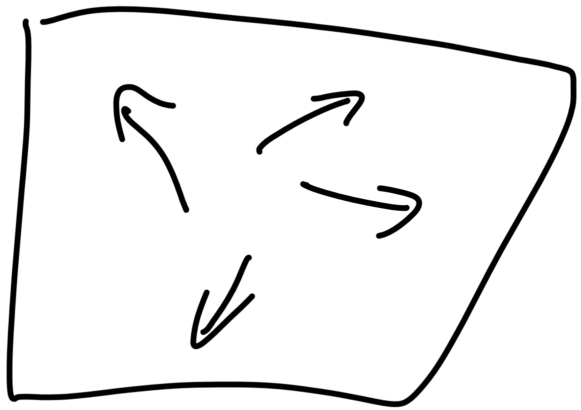
$$F = |\vec{a}| \cdot (\text{Höhe} \perp \text{ zu } \vec{a})$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Phys. Anwendungsbeispiel:

Lorentzkraft: $\vec{F}_L = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

5.3 Vektorrechnung in Komponentendarstellung

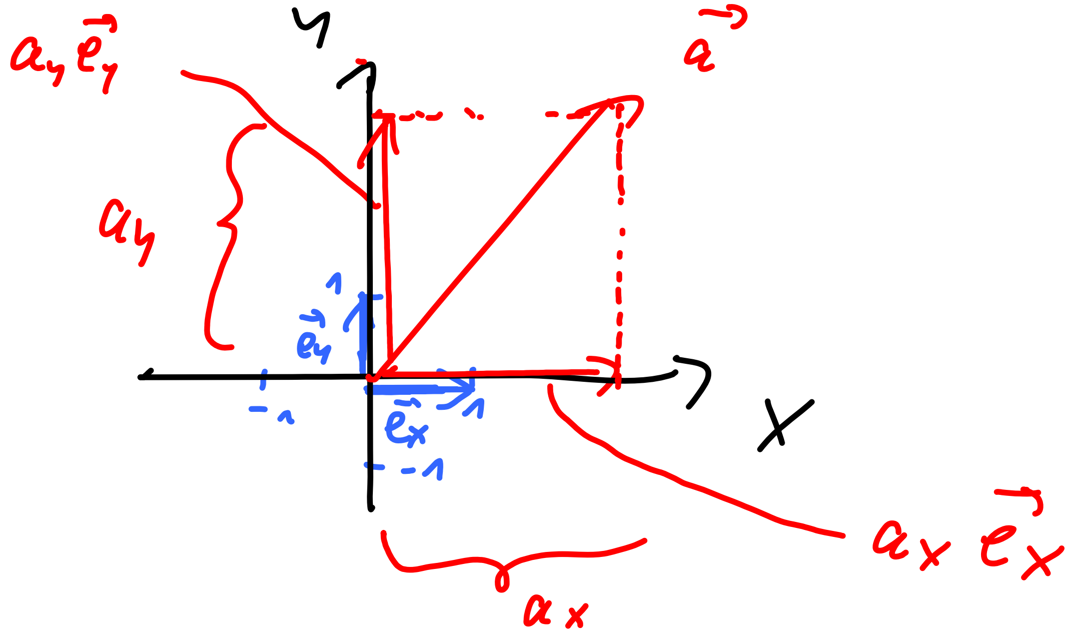


Zur Beschreibung und Kommunikation von Vektorrichtungen benutzt man häufig zueinander orthogonale Referenzrichtungen, auf die man sich beziehen kann.

Zunächst in 2D

- Wähle Kartesisches Koordinatensystem für die Ebene mit Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ entlang der Achsen
- Zeichne $\vec{a}$ so, dass er vom Ursprung ausgeht.
- $a_x :=$ x-Koordinate der Pfeilspitze von $\vec{a}$

  $a_y :=$ y-Koordinate der Pfeilspitze von $\vec{a}$



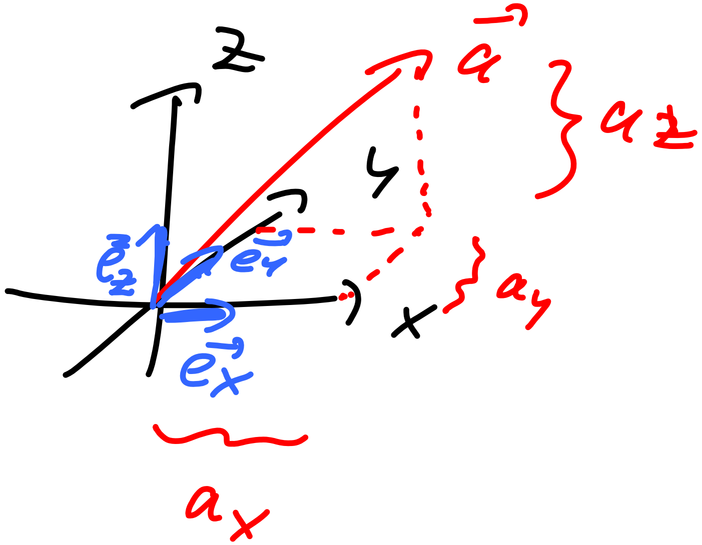
$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y}$$

$$\left(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y , \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 \right)$$

Man sagt:
$\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ bilden eine "Orthonormalbasis (ONB)" von $\mathbb{R}^2$ und a_x, a_y sind die Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. dieser Basis

Analog in 3D:

$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z}$$



Gebräuchliche Schreibweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{"Spaltenvektor"})$$

(oder $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ("Zeilenvektor"))

Man findet:

$$\alpha \vec{a} = \alpha \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \right)$$
$$= (\alpha a_x)\vec{e}_x + (\alpha a_y)\vec{e}_y + (\alpha a_z)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}}$$

Analog findet man:

$$\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

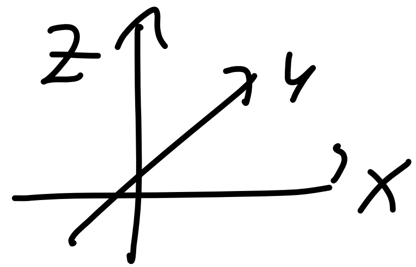
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}}$$

z.B. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 6$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ $\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{5 \cdot 18}}$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}}$$

$\Leftarrow$ Gilt für Rechtssysteme



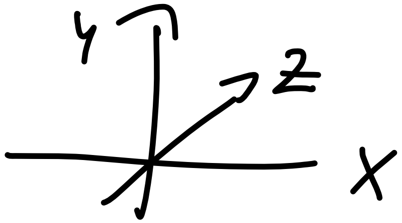
$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{54}$

= Fläche des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(Linkssystem, z.B.:



)